ДЕКОМПОЗИЦИЯ
ВПОЛНЕ РАЗРЕШИМЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ

А. М. Брилевский, В. В. Горячкин
Беларусь, г. Минск

Обозначим $\mathbf{F}$ семейство всех конечномерных векторных пространств над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Фиксируем некоторый элемент $F \in \mathbf{F}$ и для произвольного $F \in \mathbf{F}$ зададим линейные отображения $C: F \to Z$, $A_i: F \to F$, $i = 1,2, \ldots, m$ (если в пространствах F и $Z \in \mathbf{F}$ определить какие-либо базисы, то C, A_i, - стационарные матрицы соответствующих размерностей). Системой в полных дифференциалах называется соотношение

$$dy = A_1 y dx_1 + A_2 y dx_2 + \ldots + A_m y dx_m \qquad (1)$$

Очевидно, это уравнение можно представить в виде следующего набора уравнений с частными производными

$$\frac{dy}{dx_j} = A_j y, \quad j = 1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

Уравнениям (1,2) сопоставляется выходная функция $z = z(x)$, связанную с вектором $y = y(x)$ условием

$$z(x) = Cy(x), \qquad (3)$$

где $y(x)$ - вектор состояния, $z(x)$ - вектор выходных переменных.

Будем говорить, что совокупность соотношений (1,3) или (2,3) образует систему наблюдения.

Для того, чтобы уравнение (1) или система (2) обладали достаточно широким набором решений, необходимо подчинить их условиям полной интегрируемости (разрешимости), условиям Фробениуса, которые в данном случае сводятся к попарной коммутативности операторов $A_i, i = \overline{1,m}$ [1].

Тогда для любого $y_0 \in F$ существует единственное решение $y(x) = y(x, y_0)$, удовлетворяющее начальному значению $y(0) = y_0$.

В работе [2] построена минимальная реализация системы (2,3), то есть такая вполне разрешимая система Пфаффа, что, во-первых, совокупность ее выходов совпадает с множеством выходов исходной системы, во-вторых, фазовое пространство имеет наименьшую размерность.

Согласно результатам работы [2] всякая минимальная система удовлетворяет важному требованию: различным начальным значениям отвечают различные выходные функции, то есть соответствие $y_0 \to z(x, y_0)$

взаимооднозначно и значит система наблюдаема. Поэтому система (1,3) наблюдаема тогда и только тогда, когда $rank(K) = n$ [2], где матрица наблюдаемости K определяется следующими соотношениями: если положить, что $n = dim(F)$, затем рассмотреть совокупность $p(j, m)$ всевозможных разбиений величины $j \geq 0$ на m неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, ..., k_m : k_i \geq 0, \quad k_1 + k_2 + ... + k_m = j$ и обозначить через $\pi(j,m)$ количество всех таких разбиений, то есть мощность множества $p(j,m)$, то

$$K = K(C, A_i) = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ \dots \\ K_{n-1} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, ..., m) \;, \tag{4}$$

$$K_j = \begin{pmatrix} CY_{j+1,1} \\ CY_{j+1,2} \\ \dots \\ CY_{j+1,\pi(j,m)} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0, n-1} \;, \tag{5}$$

$$Y_{j+1,i} = \frac{j!}{k_{1_i}! k_{2_i}! ... k_{m_i}!} A_1^{k_{1_i}} ... A_m^{k_{m_i}}, \; j > 0, Y_{1,1} = I_F, i = 1, 2, ..., \pi(j,m) \tag{6}$$

(I_F тождественное отображение в F).

Важной проблемой является задача разделения динамической системы на наблюдаемую и ненаблюдаемые части. Для объектов, математические модели которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, классические результаты по этой проблеме можно найти в ряде работ [3,4].

Рассмотрим задачу о декомпозиции представления (2,3) относительно свойства наблюдаемости, воспользовавшись подходом изложенным в [5] для дискретных вполне разрешимых стационарных систем наблюдения.

Подпространством ненаблюдаемости F_d системы (2,3) назовём множество таких значений $y \in F_d$, которые ортогональны строкам матрицы наблюдаемости K. То есть F_d это линейное подпространство и оно является ортогональным дополнением подпространства натянутого на линейно независимые строки матрицы K.

Ясно, что F_d инвариантно относительно преобразования $A_i (i = 1, ..., m)$. Действительно, если для некоторого y_0 справедливо $Ky_0 = 0$, то легко показать, воспользовавшись свойством разрешимости и представлением (4-6), что для $y_i = A_i y_0$ также имеют место равенства

$$KA_i y_0 = 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Выберем базис в F_d следующим образом. В качестве первых векторов $p_1,...,p_r$ $(r = rank(K),\ r < n)$ возьмём первые линейно-независимые строки матрицы наблюдаемости K, и дополним их до базиса ортогональными векторами $p_{r+1},...,p_n$. Сделаем замену переменных $y = P\xi$, с матрицей преобразования P, столбцы которой составлены из векторов $p_1, p_2,..., p_n$. Приходим к системе

$$\frac{d\xi(x)}{dx_i} = \overline{A_i}\xi(x),\ i = 1,2,...,m$$

$$z(x) = \overline{C}\xi(x),$$

где $\overline{A_i} = P^{-1}A_iP$, $\overline{C} = CP$. (Или, что тоже самое к системе вида (1,3) с матрицами $\overline{A_i}$ и $\overline{C}$). Очевидно, что подпространство ненаблюдаемости F_d в новых переменных описывается соотношениями

$$\xi_{r+1} = 0,...,\xi_n = 0.$$

Покажем, что в новом базисе параметры преобразованной системы имеют следующее блочное представление

$$\overline{A_i} = \begin{pmatrix} \overline{A_{1i}} & 0 \\ \hline A_{2i} & A_{3i} \end{pmatrix},\quad \overline{C} = (\overline{C_1} \quad 0), \tag{7}$$

где $\overline{A_{1i}} - (r \times r)$ - матрица и $\overline{C_1} - (l \times r)$ - матрица.

Представление оператора $\overline{C}$ следует из того факта, что матрица C является первым блоком матрицы наблюдаемости K.

Для доказательства представления матриц $\overline{A_i}$ предположим противное, то есть существует отличный от нуля элемент $\overline{a_{qji}}$ матрицы $\overline{A_i}$, где $1 \le q \le r, r+1 \le j \le n$.

Возьмём вектор $\xi_0 \in F_d$ вида $\xi_0 = (0,...,0,\xi_{0j},0,..,0)$, где $\xi_{0j} \ne 0$. Тогда имеем $\xi_i = \overline{A_i}\xi_0 = (0,...,0,\xi_{qi},0,...,0)$. Компонента ξ_{qi} отлична от нуля, $q \le r$, то есть вектор ξ_i не принадлежит F_d; это как легко видеть противоречит инвариантности F_d относительно $\overline{A_i}$, что завершает доказательство блочного представления (7).

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varsigma(x)}{dx_i} &= \overline{A_{1i}}\varsigma(x), \\ z(x) &= \overline{C_1}\varsigma(x) \end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) вполне разрешима и наблюдаема.

Действительно условия Фробениуса выполняются. $\varsigma(x)$ - r - вектор, кроме того, учитывая соотношения вида (4-6) и соответствующие матрицы наблюдаемости вида K для пар $\overline{C}, \overline{A_t}$ и $\overline{C_1}, \overline{A_{1t}}$, легко видеть, что $r = rank(K(C, A_t)) = rank(K(\overline{C}, \overline{A_t})) = rank(K(\overline{C_1}, \overline{A_{1t}}))$.

Литература

1. Гайшун И.В. Линейные уравнения в полных производных. Минск: Наука и техника, 1989.

2. Гайшун И. В., Горячкин В.В. Минимальная реализация вполне разрешимых линейных дифференциальных систем наблюдения // Автоматика и телемеханика. 2003. № 3 . С. 52-60.

3. Калман Р., Фалб П., Ариб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

4. Мороз Л. И. Курс теории систем. М.: Высш. шк., 1987.

5. Гайшун Л. Н., Горячкин В. В., Крахотко В. В. Декомпозиция вполне разрешимых дискретных стационарных систем наблюдения // Вестник БГУ. Серия 1. 2004. № 2. С. 100-102.