ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОГО ВИДА, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДЕ ВСТРЕЧНЫХ ПРОГОНОК

Д.Л. Головашкин
Российская Федерация, г. Самара

Введение

Моделирование физических процессов посредством численного решения дифференциальных уравнений находит все более широкое применение в различных отраслях науки. Этому способствует развитие вычислительной техники и численных методов, ориентированных на решение таких уравнений. Наиболее распространенные методы (разностные и проекционные) сводят дифференциальную задачу к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида $Ax=b$, где матрица A - ленточная.

С появлением многопроцессорных вычислительных комплексов связано создание параллельных алгоритмов решения таких систем, основанных как на ранее известных последовательных алгоритмах (методы прогонки [1], циклической редукции [2]), так и алгоритмов, изначально создававшихся как параллельные (декомпозиции области [2,3] и мелкозернистый локально-параллельный [4]). Кроме того, известны векторно-конвейерные алгоритмы решения данной задачи [2], которые остаются за рамками настоящей работы, ориентированной на многопроцессорные системы с распределенной памятью, как на наиболее распространенные. По мнению автора, в данном случае уместна классификация, разделяющая параллельные алгоритмы на алгоритмы с функциональной декомпозицией и с декомпозицией данных.

В [2,3] опубликованы традиционно используемые в вычислительной практике алгоритмы, основанные на декомпозиции данных, при которой производится распределение матрицы системы между процессорами вычислительного комплекса, позволяющее каждому процессору решать свою подсистему. К недостаткам такого подхода следует отнести низкую эффективность (33% для алгоритма декомпозиции области [3]) или высокие коммуникационные затраты (пропорциональные логарифму от количества уравнений системы для алгоритма циклической редукции [2]) параллельных алгоритмов.

Функциональная декомпозиция основывается на особенностях разностной или проекционной задачи, приводящей к изучаемой СЛАУ. В работе [4] предложен подход, при котором процессоры вычислительного комплекса одновременно решают разные СЛАУ, относительно значений искомой сеточной функции на разных слоях сеточной области по времени. Однако, по замечанию авторов [4], при этом алгоритм характеризуется длительными простоями большинства процессоров.

Другой подход в рамках функциональной декомпозиции впервые был представлен в [1]. Автор алгоритма, рассматривая разностное решение двумерного эллиптического уравнения на прямоугольной области, отказался от идеи одновременного решения одной СЛАУ несколькими процессорами. Все процессоры реализуют прямой или обратный проходы скалярной прогонки [5] для своих участков различных СЛАУ. Недостатками функциональной декомпозиции для алгоритма скалярной прогонки являются простои процессоров при линейном разбиении области данных и большая длительность коммуникаций при циклическом разбиении.

Существует подход [6-8], основывающийся на применении метода встречных прогонок для решения исследуемой задачи. Однако, использование двумерного разбиения сеточной области в таком подходе ведет к появлению простоев.

Представляемая работа является развитием работы [1] с использованием метода встречных прогонок. При этом вдвое сокращается длительность простоев параллельного алгоритма в случае линейного разбиения и вдвое уменьшаются коммуникационные затраты для циклического разбиения по сравнению с алгоритмами из [1].

1. Алгоритм для двумерной сеточной области, линейное разбиение.

Применительно к двумерной области ω_2 будем говорить о прогонках по строкам (продольных прогонках) и столбцам (поперечных прогонках) сеточной области, как это принято в методах расщепления и переменных направлений [9].

Для алгоритма из четырех задач производится следующее линейное разбиение сеточной области (рис. 1). На рис. 1 представлены начальные шаги вычислений по алгоритму (его первый этап). Задачи 1, 4 (рис. 1а) начинают прямой ход прогонок для строки 1 и передают прогоночные коэффициенты задачам 2, 3, которые на первом шаге простаивают.

Далее не будем специально говорить об обмене данными между задачами, подразумевая, что перед прямым ходом они принимают прогоночные коэффициенты, после прямого хода передают их. Перед обратным ходом принимают значение сеточной функции, после - передают его. Первая и последняя задачи начинают прямой ход без принятия прогоночных коэффициентов, а задачи под номерами $p/2$ и $p/2+1$ (p - общее число задач, в данном алгоритме p=4) начинают обратный ход принятием прогоночных коэффициентов (друг от друга).

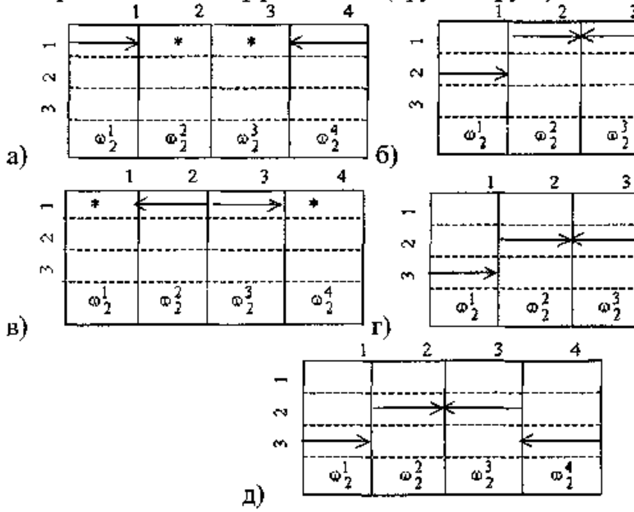

Рис. 1. Этапы вычислений по четырехзадачному параллельному алгоритму из пункта 1: а,б,г - прямые ходы прогонок; в,д - обратные ходы. Задачи, помеченная символом "*", простаивают. Нумерация над областями соответствует задачам, слева – строкам сеточной области.

На втором шаге (рис. 1б) задачи 2, 3 продолжают прямой ход для строки 1, задачи 1, 4 начинают прямой ход для строки 2. Третий шаг (рис. 1в) характеризуется простоем задач 1, 4 и началом обратного хода прогонок для строки 1 задачами 2, 3. Четвертый шаг (рис. 1г) - прямой ход, задачи 1, 4 осуществляют его для строки 3, задачи 2, 3 для строки 2. Пятый (рис. 1д) - обратный ход, задачи 1, 4 производят его для строки 1, задачи 2, 3 - для строки 2. Далее прямой и обратный ходы чередуются (второй этап алгоритма), пока задачи 2, 3 не произведут прямой ход прогонок для последней строки. На следующем этапе (заключительном) в течение первого шага задачи 1, 4 будут простаивать, задачи 2, 3 начнут обратный ход. Второй шаг характеризуется простоем задач 2, 3 в то время, как задачи 1, 4 завершат обратный ход прогонок для последней строки сеточной области.

Ускорение данного алгоритма оценивается величиной

$$S_4^L = \frac{2C_1MN\tau_a}{S\,C_1MN\tau_a + 4N\tau_k + C_1\frac{M}{4}\tau_a},$$

Где последнее слагаемое знаменателя есть время ожидания в разработанном алгоритме, связанное с простоями задач на начальной и заключительной стадиях вычислений.

Ускорение p-задачного варианта алгоритма составит:

$$S_p^L = \frac{2C_1MN\tau_a}{\dfrac{2C_1MN\tau_a}{p} + 4N\tau_k + \dfrac{p-2}{2p}C_1M\tau_a + (p-4)\tau_k}.$$

2. Алгоритм для двумерной сеточной области, циклическое разбиение.

Циклическое разбиение области и действия по алгоритму из восьми задач иллюстрируются на рис. 2 и аналогичны разбиению и действиям по алгоритму из [1] с той лишь разницей, что далее речь идет о встречных прогонках. Особенность распределения ω_2 между задачами состоит в принадлежности одной задаче двух прямоугольных подобластей (циклическое разбиение). Их взаимное расположение в шахматном порядке позволяет распараллеливать вычисления прогонок как по строкам, так и по столбцам области, избегая простоев.

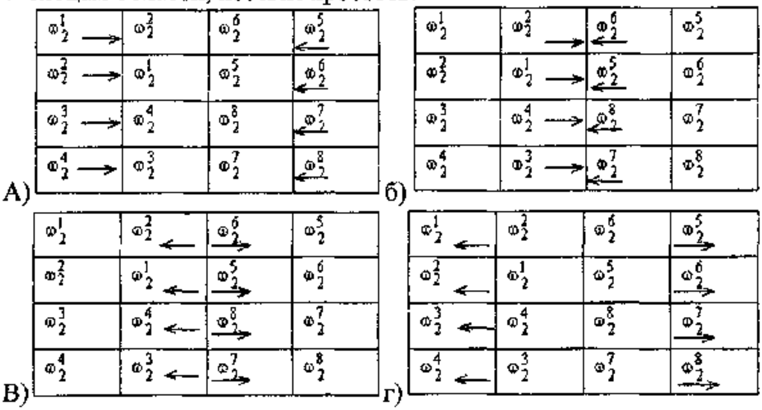

Рис. 2 Этапы вычислений по восьмизадачному параллельному алгоритму из пункта 2: а,б - прямой ход прогонок по строкам, в,г - обратный ход прогонок по строкам.

На первом этапе алгоритма (рис.2а) производится прямой ход прогонок по строкам в левой и правой четвертях ω_2. Так, задачи 1, 5 работают со строками 1,..,$N/4$; задачи 2, 6 - со строками $N/4+1$,..,$N/2$; задачи 3, 7 - со строками $N/2+1$,..,$3N/4$ и задачи 4, 8 - со строками $3N/4+1$,..,N. Причем первые четыре задачи оперируют частями своих строк с 1 по $M/4$ столбец, последние четыре задачи - с $3M/4+1$ по M столбец. В конце этапа пары задач 1, 2; 3, 4; 5, 6 и 7, 8 обмениваются прогоночными коэффициентами

На втором этапе (рис.2б) прямой ход прогонок по строкам заканчивается, вычисления из левой четверти переносятся на одну подобласть вправо, из правой четверти - на одну подобласть влево. Задачи 1, 5 работают со строками $N/4+1,..,N/2$; задачи 2, 6 со строками $1,..,N/4$; задачи 3, 7 - со строками $3N/4+1,..,N$, и задачи 4, 8 со строками $N/2+1,..,3N/4$. Причем первые четыре задачи оперируют частями своих строк с $M/4+1$ по $M/2$ столбец, последние четыре задачи - с $M/2+1$ по $3M/4$ столбец. В конце этапа пары задачи 1, 5; 2, 6; 3, 7 и 4, 8 обмениваются прогоночными коэффициентами.

Третий и четвертый этапы алгоритма (рис. 2г,д) - обратный ход прогонок по строкам. Аналогично производятся прогонки по столбцам. Ускорение такого алгоритма $S_8^C = \dfrac{2C_1MN\tau_a}{\dfrac{C_1MN\tau_a}{4}+\dfrac{3}{2}(N+M)\tau_k}$.

Распространим данный подход на произвольное число задач p. На начальном этапе такого алгоритма в течении первых $p/2$ шагов производится только прямой ход прогонок. Задача l (пусть $l \le p/2$) простаивает l-1 шаг, затем производит прямой ход прогонки для строк 1, 2, …, $p/2$-1. После этого происходит чередование прямого и обратного хода, причем задача l простаивает шаги, связанные с обратным ходом в течение $p/2-l$ шагов обратного хода. Далее продолжается чередование без простоев. Если в течение прямого хода задача 1 производит ход прогонки для строки i, то задача l производит прямой ход для строки $i-l+1$. Когда первая задача начинает обратный ход для строки i, задача l начинает обратный ход для $i+l-1$. Последние шаги алгоритма опять связаны с простоями, когда во время прямого хода простаивают задачи (для $l \le p/2$) с меньшими номерами, во время обратного – с большими номерами. Аналогично проводятся рассуждения для $l>p/2$.

Ускорение такого алгоритма составит:

$$S_p^C = \frac{2C_1MN\tau_a}{\dfrac{2C_1MN\tau_a}{p}+2\left(1-\dfrac{2}{p}\right)(N+M)\tau_k}.$$

Выводы.

Применение функциональной декомпозиции к синтезу параллельных алгоритмов, основанных на методе встречных прогонок для решения сеточных уравнений трехдиагонального вида, оправдано и приводит при указанных условиях к алгоритмам, обладающим большим ускорением и эффективностью по сравнению с известными алгоритмами для двумерных сеточных областей.

Литература

1. Миренков Н.Н. Параллельные алгоритмы для решения задач на однородных вычислительных системах. -Вычислительные системы/ ИМ СО АН СССР.- Новосибирск, 1973, вып. 57, с. 3-32

2. Ортега Джеймс М. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем/ перевод с англ. Х.Д. Икрамова, И.Е. Капорина; под ред. Х.Д. Икрамова - М.: Мир, 1991.-364.

3. Кудряшова Т.А., Поляков С.В. О некоторых методах решения краевых задач на многопроцессорных вычислительных системах/ Сб. трудов 4-ой международной научной конференции "Математические модели нелинейных возбуждений, переноса, динамики, управления в конденсированных системах и других средах", Москва, 27 июня-1 июля 2000 г. (под редакцией Л.А. Уварова, А.Э. Аринштейна) М."Станкин". 2001. с.134-145.

4. Заручевская (Лозинская) Г.В., Севостьянова О.В., Юфрякова О.А., Кожин И.Н. Мелкозернистый локально-параллельный алгоритм для четырехточечной неявной разностной схемы уравнения теплопроводности/ Материалы третьего Международного научно-практического семинара (под ред. проф. Р.Г. Стронгина) Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2003. с.59-64.

5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.- М.:Наука.- 1978.- 561 с.

6. Бирюкова Л.Ю., Четверушкин Б.Н. О возможности реализации квазигидродинамической модели полупроводниковой плазмы на многопроцессорных вычислительных системах/ Математическое моделирование, 1991, Т.3, N 6, с. 61-71.

7. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Применение многопроцессорных транспьютерных систем для решения задач математической физики/ Математическое моделирование, 1992, Т.4, N 11, с. 75-100.

8. Милюкова О.Ю. Параллельный вариант обобщенного попеременно-треугольного метода для решения эллиптических уравнений/ Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998, Т.4, N 12, с. 2002-2012.

9. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.:Наука, 1989.-614 с.