ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭНГСЕТА ДЛЯ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ОБЪЕМОМ ПАМЯТИ

О. Тихоненко

Академия им. Яна Длугоша
Ченстохова, Польша
o.tikhonenko@ajd.czest.pl

Рассматривается замкнутая система обслуживания, которая отличается от известной классической модели Энгсета тем, что каждое требование данной системы характеризуется случайным объемом, от которого зависит время его обслуживания, причем суммарный объем требований, обслуживаемых в системе в произвольный момент времени, ограничен. Для описанной системы находится стационарное распределение числа требований.

Ключевые слова: система обслуживания с ограниченным суммарным объемом, политика разделения ресурса, модель Энгсета, модель Эрланга, стилтьесовская свертка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является исследование моделей с блокировкой требований, описывающих обслуживание случайного потока запросов ограниченным количеством однотипного ресурса и применяемых, в частности, в теории сетей связи [1, 2] и теории сетей интегрального обслуживания [3]. Такие модели представляют собой систему Энгсета [4], если число генерирующих запросы источников конечно, или систему Эрланга [4, 5], если в систему поступает поток запросов извне.

Многочисленные варианты указанных систем в самых общих предположениях о параметрах источников, типе распределения времени обслуживания (времени использования одной или нескольких единиц ресурса), а также дисциплины обслуживания (политики разделения ресурса), хорошо изучены [6–9]. При этом, как правило, общее количество разделяемого ресурса (чаще всего моделирующего величину занимаемого объема памяти или число занятых приборов) измеряется в числе дискретных единиц, что упрощает исследование.

В более общей постановке задачи количество используемого запросом ресурса может, очевидно, выражаться любым положительным вещественным числом или вектором, компоненты которого являются положительными вещественными числами. Например, в моделях Энгсета и Эрланга можно считать, что требование характеризуется случайным объемом, принимающим положительные вещественные значения, а общий (суммарный) объем требований ограничен некоторой постоянной величиной (объемом памяти) $V > 0$.

Некоторые простейшие модели систем обслуживания с ограниченным суммарным объемом, обобщающие классическую систему Эрланга, рассмотрены в работах [10–14].

В настоящей работе изучается обобщенная модель Энгсета в предположении, что каждый источник характеризуется своей собственной функцией распределения объема требования и времени обслуживания. При этом суммарный объем требований, находящихся в системе, ограничен заданной величиной V. Для данной модели найдем распределение состояний источников, обобщая результаты работы [6].

2. СИСТЕМА ЭНГСЕТА С ОГРАНИЧЕННОЙ ПАМЯТЬЮ

Рассмотрим замкнутую СМО с ограниченным величиной $V > 0$ суммарным объемом (объемом памяти), содержащую n источников. Функционирование источника с номером j, $j = 1, \dots, n$, осуществляется следующим образом. Случайное время с функцией распределения $A_j(t)$ источник этот генерирует требование, объем которого представляет собой неотрицательную случайную величину, характеризуемую функцией распределения $L_j(x)$. Требование, генерация которого завершена, принимается на обслуживание, если в данный момент сумма объемов обслуживаемых в системе требований плюс объем сгенерированного требования не превышает величины V. В противном случае это требование теряется (покидает СМО без обслуживания). Принятое на обслуживание требование обслуживается в течение случайного времени, которое в общем случае зависит от номера источника и объема данного требования. Задана совместная функция распределения объема ζ_j требования j-го источника и его времени обслуживания ξ_j: $F_j(x, t) = \mathbf{P}\{\zeta_j < x, \xi_j < t\}$, $j = 1, \dots, n$. Очевидно, что $L_j(x) = F_j(x, \infty)$. В дальнейшем функцию распределения времени обслуживания требования j-го источника (j-требования) будем обозначать через $B_j(t) = \mathbf{P}\{\xi_j < t\} = F_j(\infty, t)$.

Предположим, что для всех $j = 1, \dots, n$ существуют конечные математические ожидания $\alpha_{j1} = \mathbf{E}\,\zeta_j = \int_0^\infty [1 - A_j(t)]\,dt$, $\beta_{j1} = \mathbf{E}\,\xi_j = \int_0^\infty [1 - B_j(t)]\,dt$.

Если требованию отказано в обслуживании (т. е. оно потерялось), источник сразу же начинает генерировать новое требование. Его объем и время генерации не зависят от того, было ли предыдущее требование обслужено или потеряно.

Через $\sigma(t)$ обозначим суммарный объем обслуживаемых в момент времени t требований, а через $\nu_j(t)$ – состояние j-го источника в этот момент. Предположим, что процесс $\nu_j(t)$ принимает значение 0, если этот источник в момент t генерирует требование, и значение 1, если требование j-го источника в данный момент обслуживается.

Состояние описанной СМО в заданный момент времени t будем характеризовать состоянием ее источников и величиной суммарного объема обслуживаемых в этот момент требований. Состояние всех источников характеризуется случайным вектором $N(t) = (\nu_1(t), \dots, \nu_n(t))$. Тогда, очевидно, состояние системы в целом характеризуется случайным процессом $X(t) = (N(t), \sigma(t))$ размерности $n + 1$.

Траектория процесса $X(t)$ в произвольный момент времени t описывается вектором состояний $Q = (r_1, \dots, r_n, x)$, где r_j – реализация процесса $\nu_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, x – реализация процесса $\sigma(t)$. В дальнейшем нас будет интересовать распределение n-мерного вектора $N(t)$ в стационарном режиме. Очевидно, множество Ω его состояний $R = (r_1, \dots, r_n)$ конечно (число таких состояний равно 2^n).

Заметим, что в работах, посвященных исследованиям системы Энгсета (см., например, [6, 7]) обычно предполагается, что "дискретный" ресурс, используемый для обслуживания требований в системе, ограничен, т. е. множество G возможных состояний R не совпадает с Ω. Структура множества $G \subset \Omega$ и его мощность определяются, с одной стороны, количеством имеющегося в системе дискретного ресурса и, с другой стороны, политикой его разделения [7, 9] (дисциплиной обслуживания). Например, требования обслуживаются однотипными приборами, общее число которых конечно, причем для обслуживания требования j-го источника необходимы n_j приборов. Возможны также ситуации разбиения всего множества приборов на группы, доступные только требованиям определенных источников, и т. д. В дальнейшем при выводе основных соотношений для простоты изложения мы будем считать, что никаких ограничений дискретного ресурса в данной системе нет, а затем оговорим соответствующие почти очевидные поправки.

Для произвольного вектора состояний источника R введем следующие обозначения [6]: $R_{j0} = (r_1, \dots, r_{j-1}, 0, r_{j+1}, \dots, r_n)$, $R_{j1} = (r_1, \dots, r_{j-1}, 1, r_{j+1}, \dots, r_n)$.

Для проведения исследований описанной СМО нам понадобится частичная марковизация процесса $X(t)$. С этой целью введем обозначение $\xi_j^*(t)$ для длительности промежутка времени от момента t до следующего момента изменения состояния j-го источника, $j = 1, \dots, n$. Тогда процесс

$$(X(t), \xi_j^*(t), j = 1, \dots, n) = (N(t), \sigma(t), \xi_j^*(t), j = 1, \dots, n)$$

характеризуется функциями, имеющими следующий вероятностный смысл:

$$Z(R, Y, x, t) = \mathbf{P}\{N(t) = R, \sigma(t) < x, \xi_j^*(t) < y_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Поскольку нас в конечном итоге интересует стационарное распределение состояния источников, в дальнейшем с целью некоторого сокращения записи будем использовать обозначение $P(R, Y, t) = Z(R, Y, V, t)$.

В случае $t \to \infty$, т. е. в стационарном режиме, будем использовать те же обозначения, но опуская при этом переменную t. Например, вместо $N(t)$ в стационарном режиме будем применять обозначение N, вместо $P(R, Y, t)$ будем писать $P(R, Y)$ и т. д.

Выведем уравнения для функций $P(R, Y)$, пользуясь методом дополнительных переменных, подобно тому, как это было сделано в работе [6]. Действительно, определив два n-мерных вектора $E = (1, \dots, 1)$ и $Y_j = (y_1, \dots, y_{j-1}, \Delta t, y_{j+1}, \dots, y_n)$, приходим к следующим разностным уравнениям, число которых равно 2^n:

$$P(R, Y - \Delta t\, E, t + \Delta t) = P(R, Y, t) - \sum_{j=1}^{n} P(R, Y_j, t) + \sum_{j=1}^{n}(1 - r_j)A_j(y_j)\times$$
$$\times\left[P(R_{j1}, Y_j, t) + P(R_{j0}, Y_j, t) - \int_0^V Z(R_{j0}, Y_j, V - x, t)\, dL_j(x)\right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} r_j \int_0^V Z(R_{j0}, Y_j, V - x, t)\, d_xF_j(x, y_j) + o(\Delta t).$$

Из выписанных разностных уравнений получаем следующие стационарные уравнения в частных производных:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial P(R, Y)}{\partial y_j} - \left.\frac{\partial P(R, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} + r_j \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V - x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} d_xF_j(x, y_j)+\right.$$
$$+(1 - r_j)A_j(y_j)\left[\left.\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} + \left.\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} -\right.$$
$$\left.\left. - \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V - x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} dL_j(x)\right]\right\} = 0,$$

каждое из которых для произвольного состояния R можно заменить системой n уравнений вида

$$\frac{\partial P(R, Y)}{\partial y_j} = \left.\frac{\partial P(R, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} - r_j \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V - x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} d_xF_j(x, y_j)-$$
$$-(1 - r_j)A_j(y_j)\left[\left.\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} + \left.\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} -\right.$$
$$\left. - \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V - x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} dL_j(x)\right],\ j = 1, \ldots, n.$$

Те из выписанных уравнений, для которых $r_j = 1$, можно, в свою очередь, представить следующим образом:

$$\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j} = \left.\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} - \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V - x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} d_xF_j(x, y_j), \tag{1}$$

а уравнения, для которых $r_j = 0$, принимают вид

$$\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j} = \left.\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} - A_j(y_j)\left[\left.\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} + \left.\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} -\right.$$
$$\left. - \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V - x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} dL_j(x)\right]. \tag{2}$$

В стационарном режиме среднее число j-требований, начавших обслуживание в течение фиксированного промежутка времени, равно, очевидно, среднему числу требований данного источника, завершивших обслуживание в течение этого же промежутка. Таким образом, справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} = \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V-x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} dL_j(x). \tag{3}$$

С учетом равенства (3) соотношение (1) принимает вид

$$\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j} = \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V-x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} dL_j(x) -$$

$$- \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V-x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} d_x F_j(x, y_j). \tag{4}$$

Введем функции $H_j(x, y) = \mathbf{P}\{\zeta_j < x, \xi_j \geq y\} = L_j(x) - F_j(x, y)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда уравнение (4) приобретает вид

$$\frac{\partial P(R_{j1}, Y)}{\partial y_j} = \int_0^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V-x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} d_x H_j(x, y_j),$$

откуда следует, что

$$P(R_{j1}, Y) = \int_{u=0}^{y_j} \int_{x=0}^V \left.\frac{\partial Z(R_{j0}, Y, V-x)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} d_x H_j(x, u)\, du. \tag{5}$$

Если преобразовать соотношение (2) с помощью равенства (3), получим

$$\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j} = \left.\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} [1 - A_j(y_j)],$$

откуда следует

$$P(R_{j0}, Y) = \left.\frac{\partial P(R_{j0}, Y)}{\partial y_j}\right|_{y_j=0} \int_0^{y_j} [1 - A_j(u)]\, du. \tag{6}$$

Введем обозначение $\Phi_j^y(x) = \int_0^y H_j(x, u)\, du$. Примем также следующее обозначение для стилтьесовской свертки функций $F_1(x), \ldots, F_n(x)$:

$$F_1 * \cdots * F_n(x) = \mathop{*}_{j=1}^{n} F_j(x).$$

Непосредственной подстановкой легко показать, что соотношениям (5), (6) удовлетворяют функции

$$Z(R, Y, x) = C \prod_{j=1}^n \left\{ \int_0^{y_j} [1 - A_j(u)]\, du \right\}^{1-r_j} \mathop{*}_{j=1}^{n} r_j \Phi_j^{y_j}(x),$$

где, как следует из (3), постоянная C не зависит от компонент вектора (R, x). Получаем, таким образом,

$$P(R, Y) = Z(R, Y, V) = C \prod_{j=1}^{n} \left\{ \int_0^{y_j} [1 - A_j(u)]\, du \right\}^{1-r_j} \mathop{*}_{j=1}^{n} r_j \Phi_j^{y_j}(V). \tag{7}$$

Если все компоненты вектора R равны нулю ($R = 0$), то, как следует из (7),

$$P(0, Y) = C \prod_{j=1}^{n} \int_0^{y_j} [1 - A_j(u)]\, du,$$

откуда получаем

$$C = P(0, Y) \left\{ \prod_{j=1}^{n} \int_0^{y_j} [1 - A_j(u)]\, du \right\}^{-1}.$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (7), имеем

$$P(R, Y) = P(0, Y) \mathop{*}_{j=1}^{n} r_j \Phi_j^{y_j}(V) \prod_{j=1}^{n} r_j \left\{ \int_0^{y_j} [1 - A_j(u)]\, du \right\}^{-1}. \tag{8}$$

Тогда искомое распределение $P(R)$ вектора состояний $R = (r_1, \ldots, r_n)$ в стационарном режиме равно, очевидно, $P(R, \infty)$, что означает, что в соотношении (8) необходимо перейти к пределу при $y_j \to \infty$, $j = 1, \ldots, n$.

Введем еще одно обозначение:

$$D_j(x) = \int_{u=0}^{x} \int_{y=0}^{\infty} y\, dF_j(u, y) = \mathbf{E}(\xi_j; \zeta_j < x) = \mathbf{E}(\xi_j \,|\, \zeta_j < x) L_j(x).$$

Функция $D_j(x)$ представляет собой “частичное” математическое ожидание [15] случайной величины ξ_j относительно события $\{\zeta_j < x\}$ (обозначенное как $\mathbf{E}(\xi_j; \zeta_j < x)$). Здесь $\mathbf{E}(\xi_j \,|\, \zeta_j < x)$ – условное математическое ожидание случайной величины ξ_j при условии $\zeta_j < x$.

Нетрудно показать, что $\lim_{y \to \infty} \Phi_j^y(x) = D_j(x)$. Поэтому из (8), переходя к пределу при $y_j \to \infty$, $j = 1, \ldots, n$, получаем

$$P(r) = P(0) \mathop{*}_{j=1}^{n} D_j(V) \prod_{j=1}^{n} \frac{r_j}{\alpha_{j1}}, \tag{9}$$

откуда, в частности, следует, что $P(r)$ не зависит от вида функций $A_j(t)$, а зависит только от математических ожиданий случайных величин, описываемых этими функциями распределения. Множитель $P(0)$ определяется из условия нормировки (легко показать, что в общем случае суммирование по всем $R \in \Omega$ следует заменить суммированием по множеству возможных состояний G):

$$P(0) = \left[\sum_{R \in G} \mathop{*}_{j=1}^{n} D_j(V) \prod_{j=1}^{n} \frac{r_j}{\alpha_{j1}} \right]^{-1}. \tag{10}$$

Таким образом, распределение стационарного случайного вектора N определяется 1) величиной объема памяти V; 2) числом источников n; 3) математическими ожиданиями α_{j1}, $j = 1, \ldots, n$, времени генерации требований; 4) функциями $D_j(x) = \int_{u=0}^{x} \int_{y=0}^{\infty} y\, dF_j(u, y) = \mathbf{E}(\xi_j; \zeta_j < x)$, $j = 1, \ldots, n$; 5) политикой разделения дискретного ресурса и числом его единиц, т. е. структурой множества G возможных состояний системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А.* Массовое обслуживание в телефонии. М.: Наука, 1968.
2. *Шварц М.* Сети связи: протоколы, моделирование и анализ. Т. 1, 2. М.: Наука, 1992.
3. *Советов Б. Я., Яковлев С. А.* Построение сетей интегрального обслуживания. Л: Машиностроение, 1990.
4. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. М: Изд. РУДН, 1995.
5. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
6. *Назаров А. А.* Формулы Энгсета для неоднородных немарковских систем массового обслуживания и их применение в сетях связи // Проблемы передачи информации. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 109–116.
7. *Kaufman J. S.* Blocking in a shared resource environment // IEEE Trans. on Communications. 1981. V. 29. № 10. P. 1474–1481.
8. *Kelly F. P.* Loss networks // Annals Appl. Prob. 1991. V. 1. № 3. P. 318–378.
9. *Ross K. W.* Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks. London: Springer-Verlag, 1995.
10. *Ромм Э. Л., Скитович В. В.* Об одном обобщении задачи Эрланга // Автоматика и телемеханика. 1971. № 6. С. 164–167.
11. *Тихоненко О. М.* Модели массового обслуживания в информационных системах. Мн.: Технопринт, 2003.
12. *Тихоненко О. М.* Модели массового обслуживания в системах обработки информации. Мн.: Университетское, 1990.
13. *Тихоненко О. М.* Определение характеристик систем обслуживания с ограниченной памятью // Автоматика и телемеханика. 1997. № 6. С. 105–110.
14. *Тихоненко О. М., Климович К. Г.* Анализ систем обслуживания требований случайной длины при ограниченном суммарном объеме // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37. Вып. 1. С. 78–88.
15. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.