ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ СТАБИЛЬНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТИ СВЯЗИ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА

А. Назаров[1], А. Туенбаева[2]

[1] *Томский государственный университет*

[2] *Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева*

[1]*Томск, Россия*

[2] *Астана, Казахстан*

nazarov@fpmk.tsu.ru

В работе рассмотрена марковская модель сети случайного доступа в виде системы массового обслуживания с источником повторных вызовов и MAP-входящим потоком требований. Такие модели наиболее адекватно описывают процессы, протекающие в реальных телекоммуникационных системах.

Ключевые слова: MAP-поток, точки покоя, вырожденное уравнение Фоккера – Планка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сделать вывод об эффективности сети связи уже на этапе ее проектирования, оценить ее возможные характеристики и их зависимость от различных параметров позволяет проведение аналитического исследования математической модели сети. Исследуем сеть связи, управляемую статическим протоколом случайного множественного доступа [1].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В качестве математической модели сети случайного доступа рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с источником повторных вызовов (ИПВ) [2]. На вход системы поступает MAP-поток (MAP – Markovian Arrival Process) [3], управляемый марковским процессом с дискретным множеством состояний, интенсивность которого $\lambda(t)$ является реализацией стационарного марковского процесса, принимающего значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания которого распределено экспоненциально с параметром σ. Каждая заявка, поступившая в систему, начинает немедленно обслуживаться, если прибор свободен. Если прибор занят, то возникает конфликт, и обе заявки уходят в источник повторных вызовов, время пребывания в котором имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. От момента возникновения конфликта на приборе реализуется этап оповещения о конфликте, длительность которого имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_1.

Обозначим: $i(t)$ – число заявок в ИПВ, а $k(t)$ – состояние прибора: $k(t) = 0$, если прибор свободен, $k(t) = 1$, если прибор занят, $k(t) = 2$, если прибор находится в состоянии конфликта.

Обозначим через $q_{ij} = P\{\lambda(t + \Delta t) = \lambda_j | \lambda(t) = \lambda_i\}$ коэффициенты интенсивности переходов системы из одного состояния в другое. Состояние сети определяется трехмерным вектором (i, k, v). Процесс $(i(t), k(t), v(t))$ изменения во времени состояния сети является марковским.

Введем $P_{vk}(i, t) = P\{i(t) = i, k(t) = k, v(t) = v\}$ – вероятность того, что прибор в момент t находится в состоянии k, в ИПВ – i требований и на вход поступает поток с параметром $v(v = 1, ..., N, k = 0, 1, 2)$.

Рассмотрев возможные изменения состояний сети связи в интервале $(t, t + \Delta t)$, $\Delta t > 0$, получаем систему уравнений распределений вероятностей:

$$\begin{cases} P_{v0}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda_v + i\sigma + \sum\limits_{v \neq j} q_{vj})\Delta t)P_{v0}(i, t) + \mu \Delta t P_{v1}(i, t) + \\ +\mu_1 \Delta t P_{v2}(i, t) + \sum\limits_{v \neq j} q_{jv} \Delta t P_{j0}(i, t), \\ P_{v1}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda_v + \mu + i\sigma + \sum\limits_{v \neq j} q_{vj})\Delta t)P_{v1}(i, t) + \lambda_v \Delta t P_{v0}(i, t) + \\ +(i + 1)\sigma \Delta t P_{v0}(i + 1, t) + \sum\limits_{v \neq j} q_{jv} \Delta t P_{j1}(i, t), \\ P_{v2}(i, t + \Delta t) = (1 - (\lambda_v + \mu_1 + \sum\limits_{v \neq j} q_{vj})\Delta t)P_{v2}(i, t) + \lambda_v \Delta t P_{v2}(i - 1, t) + \\ +(i - 1)\sigma \Delta t P_{v1}(i - 1, t) + \sum\limits_{v \neq j} q_{jv} \Delta t P_{j2}(i, t). \end{cases} \tag{1}$$

Проведя несложные преобразования и введя обозначения

$$\rho_v = \frac{\lambda_v}{\mu},\ \gamma = \frac{\sigma}{\mu},\ \frac{1}{a} = \frac{\mu_1}{\mu},$$

учитывая, что $\mu = 1$, можно получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{v0}(i,t)}{\partial t} = -(\rho_v + i\gamma + \sum\limits_{v \neq j} q_{vj})P_{v0}(i, t) + P_{v1}(i, t) + \frac{1}{a}P_{v2}(i, t) + \sum\limits_{v \neq j} q_{jv}P_{j0}(i, t), \\ \frac{\partial P_{v1}(i,t)}{\partial t} = -(\rho_v + i\gamma + 1 + \sum\limits_{v \neq j} q_{vj})P_{v1}(i, t) + \rho_v P_{v0}(i, t) + \\ +(i + 1)\gamma P_{v0}(i + 1, t) + \sum\limits_{v \neq j} q_{jv}P_{vj}(i, t), \\ \frac{\partial P_{v2}(i,t)}{\partial t} = -(\rho_v + \frac{1}{a} + \sum\limits_{v \neq j} q_{vj})P_{v2}(i, t) + \rho_v P_{v2}(i - 1, t) + \rho_v P_{v1}(i - 2, t) + \\ +(i - 1)\gamma P_{v1}(i - 1, t) + \sum\limits_{v \neq j} q_{jv}P_{j2}(i, t). \end{cases} \tag{2}$$

Аналитических методов решения системы (2) дифференциальных конечно-разностных уравнений с переменными коэффициентами нет. Поэтому проведем исследование этой системы модифицированным методом асимптотического анализа марковизируемых систем [4] в условиях большой задержки, т. е. при $\gamma \to 0$.

Обозначим $\gamma = \varepsilon$, $t\varepsilon = \tau$, $i\varepsilon = x$, $\frac{1}{\varepsilon}P_{\nu k}(i,t) = \pi_{\nu k}(x,\tau,\varepsilon)$ и перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial\pi_{\nu 0}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = -(\rho_\nu + x + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{\nu j})\pi_{\nu 0}(x,\tau,\varepsilon) + \pi_{\nu 1}(x,\tau,\varepsilon) + \frac{1}{a}\pi_{\nu 2}(x,\tau,\varepsilon) + \\ + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{j\nu}\pi_{j0}(x,\tau,\varepsilon), \\ \varepsilon\frac{\partial\pi_{\nu 1}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = -(\rho_\nu + x + 1 + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{\nu j})\pi_{\nu 1}(x,\tau,\epsilon) + \rho_\nu\pi_{\nu 0}(x,\tau,\varepsilon) + \\ +(x+\varepsilon)\gamma\pi_{\nu 0}(x+\varepsilon,\tau,\varepsilon) + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{j\nu}\pi_{\nu j}(x,\tau,\varepsilon), \\ \varepsilon\frac{\partial\pi_{\nu 2}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = -(\rho_\nu + \frac{1}{a} + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{\nu j})\pi_{\nu 2}(x,\tau,\varepsilon) + \rho_\nu\pi_{\nu 2}(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon) + \\ +\rho_\nu\pi_{\nu 1}(x-2\varepsilon,\tau,\varepsilon) + (x-\varepsilon)\pi_{\nu 2}(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon) + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{j\nu}\pi_{j2}(x,\tau,\varepsilon). \end{cases} \tag{3}$$

В системе (3) положим $\varepsilon \to 0$ и обозначим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\pi_{\nu k}(x,\tau,\varepsilon) = \pi_{\nu k}(x,\tau)$, тогда система (3) будет иметь вид

$$\begin{cases} (\rho_\nu + x + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{\nu j})\pi_{\nu 0}(x,\tau) = \pi_{\nu 1}(x,\tau) + \dfrac{1}{a}\pi_{\nu 2}(x,\tau) + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{j\nu}\pi_{j0}(x,\tau), \\ (\rho_\nu + x + 1 + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{\nu j})\pi_{\nu 1}(x,\tau) = (\rho_\nu + x)\pi_{\nu 0}(x,\tau) + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{j\nu}\pi_{\nu j}(x,\tau), \\ \left(\dfrac{1}{a} + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{\nu j}\right)\pi_{\nu 2}(x,\tau) = (\rho_\nu + x)\pi_{\nu 2}(x,\tau) + \sum\limits_{\nu\neq j} q_{j\nu}\pi_{j2}(x,\tau). \end{cases}$$

Эту систему мы решим численно, при заданных параметрах системы ρ_ν, a, q_{ij}, учитывая условие нормировки $\sum\limits_{\nu=1}^{N}\sum\limits_{k=0}^{2}\pi_{\nu k}(x,\tau) = 1$.

Например, при заданных параметрах сети

$$\rho_1 = 0,0019,\ \rho_2 = 0,002,\ a = 5,\ q_{11} = 0,08,\ q_{12} = 0,02,\ q_{21} = 0,0197,\ q_{22} = 0,9803$$

при $\nu = 2$ были получены следующие результаты:

$$\pi_{10}(x,\tau) = 0,5,\ \pi_{11}(x,\tau) = 0,009,\ \pi_{12}(x,\tau) = 7,2E-06,\ \pi_{20}(x,\tau) = 0,5,$$

$$\pi_{21}(x,\tau) = 0,003,\ \pi_{22}(x,\tau) = -1E-05.$$

При уменьшении параметра a, имеющего смысл отношения среднего времени оповещения о конфликте к среднему времени обслуживания требования, наблюдается увеличение вероятностей нахождения системы в интервале недоступности, но не столь заметное. Существенные изменения происходят при увеличении загрузки системы:

$$\rho_1 = 1,\ \rho_2 = 1,\ a = 1,\ q_{11} = 0,\ q_{12} = 1,\ q_{21} = 0,9997,\ q_{22} = 0,0003,$$

тогда

$$\pi_{10}(x,\tau) = 0,4,\ \pi_{11}(x,\tau) = 0,09,\ \pi_{12}(x,\tau) = 0,03,\ \pi_{20}(x,\tau) = 0,6,$$

$$\pi_{21}(x,\tau) = 0,09,\ \pi_{22}(x,\tau) = 0,031,$$

т. е. заметно увеличиваются вероятности попадания нашей системы в конфликт.

При уменьшении загрузки ρ_1, ρ_2, как видно, система будет большее время простаивать. Таким образом, при любой загрузке сети нельзя говорить об устойчивости функционирования рассматриваемой сети связи. Действительно, исследование математических моделей сетей связи со статическим протоколом случайного множественного доступа показывает, что в таких сетях связи отсутствует стационарный режим функционирования при любых, даже достаточно малых, загрузках сети. Тем не менее такие сети могут функционировать стабильно достаточно продолжительное время при определенных значениях загрузки сети [2].

Определим область стабильного функционирования исследуемой сети связи.

Рассмотрим случай предельно редких изменений состояний сети, когда $q_{ij} \ll 1$.

$$\begin{cases}(\rho_\nu + x)\pi_{\nu 0}(x,\tau) = \pi_{\nu 1}(x,\tau) + \frac{1}{a}\pi_{\nu 2}(x,\tau),\\ (\rho_\nu + x + 1)\pi_{\nu 1}(x,\tau) = (\rho_\nu + x)\pi_{\nu 0}(x,\tau),\\ (\rho_\nu + \frac{1}{a})\pi_{\nu 2}(x,\tau) = \rho_\nu\pi_{\nu 2}(x,\tau) + (\rho_\nu + x)\pi_{\nu 1}(x,\tau).\end{cases} \tag{4}$$

Обозначим: $G_\nu = \rho_\nu + x$. Решение $\pi_{\nu k}(x,\tau)$ будем искать в виде:

$$\pi_{\nu k} = R_{\nu k}\pi_\nu(x,\tau). \tag{5}$$

Тогда система примет следующий вид

$$\begin{cases}G_\nu R_{\nu 0} = R_{\nu 1} + \frac{1}{a}R_{\nu 2},\\ (G_\nu + 1)R_{\nu 1} = G_\nu R_{\nu 0},\\ \frac{1}{a}R_{\nu 2} = G_\nu R_{\nu 1}.\end{cases} \tag{6}$$

Учитывая, что $R_\nu = R_{\nu 0} + R_{\nu 1} + R_{\nu 2}$, решим эту систему и запишем $R_{\nu k}$ в следующем виде

$$R_{\nu 0} = \frac{G_\nu + 1}{aG_\nu^2 + 2G_\nu + 1}R_\nu,\ R_{\nu 1} = \frac{G_\nu}{aG_\nu^2 + 2G_\nu + 1}R_\nu,\ R_{\nu 2} = \frac{aG_\nu^2}{aG_\nu^2 + 2G_\nu + 1}R_\nu. \tag{7}$$

Функция $\pi(x,\tau)$ имеет смысл асимптотической плотности распределения величины нормированного числа $i\varepsilon$ заявок в ИПВ, а $R_{\nu k}$ – распределение вероятностей состояний системы.

Разложив функции $\pi(x \pm \varepsilon, \tau, \varepsilon)$ системы (3) в ряд Тейлора по приращению аргумента x с точностью до ε, получим

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial\pi_{v0}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + (\rho_v + x)\pi_{v0}(x,\tau,\varepsilon) = \pi_{v1}(x,\tau,\varepsilon) + \dfrac{1}{a}\pi_{v2}(x,\tau,\varepsilon) + o(\varepsilon),\\ \varepsilon\dfrac{\partial\pi_{v1}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + (\rho_v + x + 1)\pi_{v1}(x,\tau,\varepsilon) = (\rho_v + x)\pi_{v0}(x,\tau,\varepsilon) + \varepsilon\dfrac{\{x\partial\pi_{v0}(x,\tau,\varepsilon)\}}{\partial x} + o(\varepsilon),\\ \varepsilon\dfrac{\partial\pi_{v2}(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + \dfrac{1}{a}\pi_{v2}(x,\tau,\varepsilon) = (\rho_v + x)\pi_{v1}(x,\tau,\varepsilon) - \varepsilon\rho_v\dfrac{\partial\pi_{v2}(x,\tau,\varepsilon)\}}{\partial x} -\\ -2\varepsilon\rho_v\dfrac{\partial\pi_{v1}(x,\tau,\varepsilon)\}}{\partial x} - \varepsilon\dfrac{\{x\partial\pi_{v1}(x,\tau,\varepsilon)\}}{\partial x} + o(\varepsilon). \end{cases} \tag{8}$$

Сложив уравнения этой системы и поделив полученное равенство на ε, учитывая, что $\rho_v + x = G_v$ и $\pi_{v0}(x,\tau) + \pi_{v1}(x,\tau) + \pi_{v2}(x,\tau) = \pi_v(x,\tau)$, при $\varepsilon \to 0$ $\pi_{v0}(x,\tau,\varepsilon) = \pi_{v0}(x,\tau)$, где $\pi_{vk}(x,\tau)$ удовлетворяют соотношению (5), получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно $\pi_v(x,\tau)$

$$\frac{\partial\pi_v(x,\tau)}{\partial\tau}R_v = -\frac{\partial}{\partial x}\{(xR_{v0} - \rho_v R_{v2} - (2\rho_v + x)R_{v1})\pi_v(x,\tau)\}. \tag{9}$$

Учитывая, что $x = G_v - \rho_v$, и подставляя значения R_{vk}, определяемые соотношениями (7), в выражение, стоящее в круглых скобках в правой части уравнения, получим:

$$\frac{\partial\pi_v(x,\tau)}{\partial\tau}R_v = -\frac{\partial}{\partial x}\{(\rho_v R_v - R_{v1})\pi_v(x,\tau)\}$$

или

$$\frac{\partial\pi_v(x,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial x}\{(\rho_v - \frac{G_v}{aG_v^2 + 2G_v + 1})\pi_v(x,\tau)\}. \tag{10}$$

Таким образом, получили уравнение Фоккера – Планка для диффузионного процесса $x(\tau)$ с коэффициентом переноса $\rho_v = \frac{G_v}{aG_v^2+2G_v+1}$ и нулевым коэффициентом диффузии. При детерминированных начальных условиях такой процесс является детерминированным и имеет смысл асимптотического среднего. Эта функция определяется характеристиками дифференциального уравнения с частными производными. Уравнением характеристических линий является обыкновенное дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dx}{\rho_v - \dfrac{G_v}{aG_v^2 + 2G_v + 1}} = \frac{d\tau}{1},$$

где $G_v = \rho_v + x(\tau)$.

Следовательно, асимптотическое среднее значение определяется решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \rho_v - \dfrac{G_v}{aG_v^2 + 2G_v + 1},\\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{11}$$

Найдем решение $x = x(\tau)$ этой задачи.

Так как $x = G_v - \rho_v$, то получим следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $G_v = G_v(\tau)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dG_\nu}{d\tau} = \rho_\nu - \dfrac{G_\nu}{aG_\nu^2 + 2G_\nu + 1}, \\ G_\nu(0) = G_{\nu 0}, \end{cases} \tag{12}$$

где $G_{\nu 0} = x_0 + \rho_\nu$.

Интерес для нас представляет случай двух вещественных корней, когда решение задачи (12) имеет вид:

$$\tau = \frac{1}{\rho_\nu}(G_\nu - G_{\nu 0}) - \frac{1}{a\rho_\nu^2(G_{\nu 3} - G_{\nu 2})} \ln\left[\left(\left|\frac{G_\nu - G_{\nu 2}}{G_{\nu 0} - GG_{\nu 2}}\right|\right)^{-G_{\nu 2}}\left(\left|\frac{G_\nu - G_{\nu 3}}{G_{\nu 0} - GG_{\nu 3}}\right|\right)^{G_{\nu 3}}\right],$$

где $G_{\nu 2}$ и $G_{\nu 3}$ определены выражением

$$G_{\nu 2,3} = \frac{\dfrac{1}{\rho_\nu} - 2 \pm \sqrt{(2 - \dfrac{1}{\rho_\nu})^2 - 4a}}{2a}. \tag{13}$$

Дифференциальное уравнение относительно $x(\tau)$ в зависимости от параметров может иметь несколько точек покоя. В частности, когда $\nu = 2$, наблюдаем 4 точки покоя, две из которых являются устойчивыми [5]. Устойчивые точки покоя будем называть точками стабилизации сети связи, а сеть связи – бистабильной.

В окрестности точек стабилизации сеть функционирует стабильно, ее характеристики (число запросов в ИПВ, распределение состояний системы, время доставки сообщения и т. д.) флуктуируют в окрестности некоторых постоянных значений, определяемых значением точки стабилизации G^*. Среднее значение $I = \dfrac{x}{\varepsilon}$ числа запросов в ИПВ составляет

$$I = \frac{G^* - \rho_\nu}{\varepsilon}.$$

Распределение вероятностей $R_{\nu k}$ состояний системы определяется формулами (7). Среднее время W доставки сообщения по формуле Литтла имеет вид

$$W = \frac{I}{\rho_\nu}.$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе построена математическая модель сети случайного доступа с оповещением о конфликте в виде марковской СМО с источником повторных вызовов и с MAP-входящим потоком. Проведено ее исследование модифицированным асимптотическим методом анализа марковизируемых систем. В результате проведенных исследований найдены вероятностно-временные характеристики сети связи, такие как среднее число запросов в ИПВ, время доставки сообщения; определено вероятностное распределение состояний системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бертсекас Д., Галлагер Р.* Сети передачи данных. М.: Мир, 1989.
2. *Грибанова П. И., Назаров А. А.* Исследование асимптотических средних характеристик неустойчивых сетей связи // Вестн. Томского гос. ун-та. 2002. № 1(I). С. 29–34.
3. *Царенков Г. В.* Расчет стационарных вероятностей системы массового обслуживания BMAP/SM/1 с общим управляющим процессом потоков первичных и повторных требований // Вестн. Томского гос. ун-та. 2002. № 1(I). С. 100–105.
4. *Назаров А. А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1991.
5. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.