ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. Назаров, М. Носова

Томский государственный университет
Томск, Россия
nazarov@fpmk.tsu.ru

В работе методами теории массового обслуживания определяется сценарий развития половозрастной структуры населения на долгосрочную перспективу.

Ключевые слова: система массового обслуживания (СМО), полузамкнутая бесконечнолинейная СМО, демографические процессы, рождаемость, функция дожития, репродуктивный возраст.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что демографические процессы определяются тремя факторами: рождаемостью, смертностью и миграцией населения. В работе рассмотрено влияние основных двух факторов на демографические процессы, исключая влияние на них миграционных процессов.

Смертность определяется возрастной структурой населения и функцией дожития

$$s(x) = 1 - B(x),$$

где $B(x)$ – функция распределения продолжительности жизни человека из заданной группы населения.

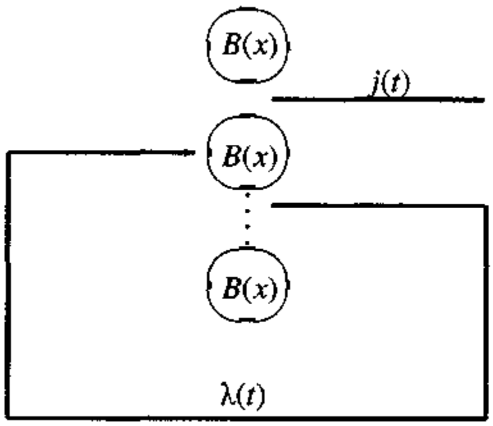
Будем рассматривать достаточно многочисленную группу всех женщин Российской Федерации.

Рождаемость аналогично определяется возрастной структурой женского населения $n(x,t)$ – числом женщин возраста (x) в году t и сложившимися на текущий момент времени t возрастными коэффициентами рождаемости $K(x,t)$ – средним количеством детей, рожденных в течение года группой в 1000 женщин возраста (x). Основными демографическими характеристиками назовем величины $n(x,t)$, определяющие возрастную структуру, и $N(t)$ – общую численность рассматриваемой группы людей.

В работе методами теории массового обслуживания определяются эти характеристики на долгосрочную перспективу.

2. МОДЕЛЬ ДЕМОГРАФИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В ВИДЕ ПОЛУЗАМКНУТОЙ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Будем полагать, что функция $B(x)$ задана, тогда процесс изменения численности женского населения определяется следующей полузамкнутой бесконечнолинейной СМО [2]:



На выходе этой СМО определяются два потока: $j(t)$ – поток заявок, покидающих систему, и $\lambda(t)$ – поток заявок, генерируемых обслуживаемыми требованиями, поступающих на обслуживание. Здесь $\lambda(t)$ – число новых заявок, поступающих на обслуживание в течение единицы времени (одного года). Демографический смысл этих потоков достаточно очевиден. Второй поток образует последовательность моментов рождения девочек. Заявки этого потока поступают на вход рассматриваемой бесконечнолинейной СМО и принимаются к обслуживанию для каждой заявки одним прибором. Будем полагать, что продолжительности обслуживания различных заявок является стохастически независимыми случайными величинами, имеющими одну и ту же функцию распределения $B(x)$, совпадающую с распределением вероятностей значений продолжительности жизни. Завершив обслуживание, заявка покидает систему в выходящем потоке $j(t)$.

Во время обслуживания (точнее, в течение репродуктивного возраста) каждое обслуживаемое требование может генерировать новые заявки (т. е. женщины рожают девочек), которые формируют поток $\lambda(t)$. В рассматриваемой модели рождение мальчиков игнорируется.

Особенностью рассматриваемой СМО является то, что $N(t) = 0$ является поглощающим состоянием, выйти из которого система уже не может. Для детального исследования предлагаемой системы необходимо более конструктивно определить процесс генерирования новых заявок. При этом возникают значительные математические проблемы как определения этого механизма, так и детального исследования построенной СМО.

В то же время для исследования средних значений $N(t)$ и $n(x, t)$ достаточно знать усредненные значения возрастных коэффициентов $K(x, t)$, полагая эти величины детерминированными функциями. Исследование их средних значений оправдано двумя факторами: во-первых, такое исследование выполняется достаточно просто и будет рассмотрено ниже, во-вторых, средние значения численности возрастных групп $n(x, t)$ имеют порядок 10^6 для рассматриваемой ситуации относительно численности населения Российской Федерации, а величины их среднеквадратических отклонений имеют порядок 10^3, следовательно, коэффициенты вариаций порядка 10^{-3}, поэтому случайные процессы $n(x, t)$ можно рассматривать как детерминированные функции.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА И ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕПРОДУКТИВНОГО ВОЗРАСТА

Интенсивность $\lambda(t)$ – среднее число заявок в единицу времени, начинающих обслуживание, определим следующим образом:

$$\lambda(t) = \int_0^\infty K(x, t)\frac{n(x, t)}{1000}dx,$$

здесь сумма по x аппроксимирована интегралом.

Рассмотрим отношение:

$$\gamma(x, t) = \frac{K(x, t)}{\int_0^\infty K(y, t)dy}. \tag{1}$$

Функция $\gamma(x, t)$ аргумента x имеет смысл плотности распределения вероятностей значений репродуктивного возраста женщины, т. е. того возраста, в котором женщина рожает ребенка.

В отличие от возрастных коэффициентов рождаемости $K(x, t)$, которые существенно меняются с течением времени, функция $\gamma(x, t)$ остается практически неизменной в Российской Федерации в течение последних сорока лет, т. е. можно полагать

$$\gamma(x, t) \equiv \gamma(x).$$

Обозначим

$$r(t) = \frac{\int_0^\infty K(x, t)dx}{1000}, \tag{2}$$

тогда интенсивность $\lambda(t)$ можно записать в виде

$$\lambda(t) = r(t)\int_0^\infty \gamma(x)n(x, t)dx. \tag{3}$$

Здесь $r(t)$ имеет смысл общего коэффициента рождаемости девочек. Именно этот параметр существенно меняется с течением времени и определяется экономическими, политическими, социальными и другими факторами. Будем полагать, что распределение $\gamma(x)$ и коэффициент $r(t)$ известны. Они заданы равенствами (1) и (2) и определяются лишь возрастными коэффициентами рождаемости $K(x,t)$, значения которых приведены в литературе по демографии.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Основными демографическими характеристиками, как было указано выше, являются численность $n(x,t)$ возрастных групп и общая численность $N(t)$ всей исследуемой группы людей.

Очевидно,

$$N(t) = \int_0^\infty n(x,t)dx. \tag{4}$$

Используя метод просеянного потока, его аналог рассмотрен в [3], можно показать, что для рассматриваемой полузамкнутой бесконечнолинейной СМО выполняются следующие равенства:

$$n(x,t) = \lambda(t-x)S(x), \tag{5}$$

тогда из (4) получим

$$N(t) = \int_0^\infty \lambda(t-x)S(x)dx, \tag{6}$$

где $\lambda(t)$, как следует из (3), определяется интегральным уравнением вида

$$\lambda(t) = r(t)\int_0^\infty \gamma(x)S(x)\lambda(t-x)dx. \tag{7}$$

Равенства (5)–(7) решают поставленную задачу определения средних значений основных демографических характеристик, т. е. определяют возрастную структуру женского населения.

При исследовании модели (5)–(7) основные проблемы возникают в связи с необходимостью решения интегрального уравнения (7). Здесь можно поступить следующим образом. Так как при $x \le 15$ функция $\gamma(t) \equiv 0$, то (7) запишем следующим образом:

$$\lambda(t) = r(t)\int_{15}^\infty \gamma(x)S(x)\lambda(t-x)dx = r(t)\int_{-\infty}^{t-15} \gamma(t-y)S(t-y)\lambda(y)dy. \tag{8}$$

Тогда значение $\lambda(t)$ в момент времени t определяется значениями $\lambda(y)$ при $y \le t-15$, следовательно (8) можно рассматривать как рекуррентное равенство для вычисления значений интенсивности $\lambda(t)$ в момент времени t по известным ее значениям $\lambda(y)$ при $y \le t-15$.

5. СЦЕНАРИЙ РАЗВИТИЯ ПОЛОВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ

Известно, что вероятность рождения мальчика – величина достаточно постоянная как во времени, так и для различных групп населения и составляет 0.512, соответственно для девочек – 0.488. Зная функцию дожития для мужчин, можно определить демографические характеристики для мужского населения, используя соответствующие характеристики женского населения, а следовательно, и характеристики всего населения, включая мужчин и женщин. Это позволяет построить общую математическую модель процесса изменения во времени демографической ситуации, если заданы функции $B(x)$, $\gamma(x)$ и определены прогнозные значения общего коэффициента рождаемости $r(t)$.

В качестве функции распределения $B(x)$ – продолжительности жизни выбирают функцию Мэйкхама

$$B(x) = 1 - \exp(-Ax - B(e^{cx} - 1)).$$

Плотность распределения $\gamma(x)$ значений репродуктивного возраста женщины можно выбирать в виде смещенного двухпараметрического γ-распределения

$$\gamma(x) = \frac{\beta^{\alpha}(x-15)^{\alpha-1}e^{-\beta(x-15)}}{\Gamma(\alpha)} \text{ при } x \ge 15.$$

Значения параметров A, B, C и α, β этих распределений оцениваются по эмпирическим данным. Значения функции $\lambda(t)$ при $t \le t_1$, где t_1 – текущее значение времени, например 2000 год, определяются по данным статистических ежегодников [4].

Определяя значения $\lambda(t)$ при $t \ge t_1$ рекуррентным соотношением (8) при назначенном пессимистическом или оптимистическом значении коэффициента рождаемости $r(t)$ для $t \ge t_1$, можно построить сценарий развития демографической ситуации на долгосрочный период.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полагая $r(t) = 0.12$ – коэффициент рождаемости девочек, сложившийся на 2000 год в Российской Федерации, неизменным в течение планируемого периода прогнозирования, получим следующий сценарий развития демографической ситуации.

Таблица

Год	2000	2020	2040	2060	2080	2100
$N_1(t)$	75.886	67.903	53.368	36.901	23.224	14.933
$N_2(t)$	69.007	59.451	44.387	29.609	18.855	12.099
$N(t)$	144.917	127.414	97.744	66.524	42.082	27.069

Здесь $N_1(t)$ – прогнозные значения численности женского населения, $N_2(t)$ – численности мужского населения, а $N(t)$ – общей численности населения Российской Федерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисов В. А.* Демография. М.: Nota Bene, 1999.
2. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Сов. радио, 1971.
3. *Андронов А. Н.* Анализ нестационарной бесконечнолинейной СМО как модели сети случайного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 1994. С. 28–33.
4. Российский статистический ежегодник, 2001.