АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИНХРОННОГО ДВАЖДЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ

И. Бушланов

Томский государственный университет
Томск, Россия
vanb@ngs.ru

Рассматривается задача об оценке параметров синхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний, являющегося математической моделью информационных потоков заявок, циркулирующих в системах и сетях массового обслуживания. Находится явный вид апостериорной плотности распределения вероятностей параметров потока. Оценка параметров выполнена методом наименьших квадратов. Приводится приближенный алгоритм оценки.

Ключевые слова: синхронный дважды стохастический поток событий, алгоритм оценки параметров, апостериорная плотность распределения вероятностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

Системы и сети массового обслуживания (СМО, СеМО) являются широко применяемой математической моделью реальных физических, технических, экономических и других объектов и систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, в свою очередь, широко применяются в качестве математической модели реальных процессов. В частности, информационные потоки заявок, циркулирующие в системах и сетях связи, в цифровых сетях интегрального обслуживания, в измерительных системах, потоки элементарных частиц (фотонов, электронов и т. д.), поступающие на регистрирующие приборы в физических экспериментах, достаточно хорошо описываются случайными потоками событий.

Условия функционирования реальных объектов и систем таковы, что если в отношении параметров обслуживающих устройств можно сказать, что они известны и с течением времени не меняются, то в отношении интенсивностей входящих потоков этого сказать во многих случаях нельзя. Более того, интенсивности входящих потоков заявок обычно меняются со временем, часто эти изменения носят случайный характер, что приводит к рассмотрению математических моделей дважды стохастических потоков событий.

В настоящей работе решается задача об оценке параметров синхронного дважды стохастического потока событий с произвольным (конечным) числом состояний, находятся точные формулы для оценки параметров методом наименьших квадратов, а также приближенные формулы для проведения практических расчетов. Подчеркнем, что рассматриваемый синхронный поток событий достаточно адекватен при описании цифровых сетей интегрального обслуживания и относится к классу MAP-потоков [1, 2].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается синхронный дважды стохастический поток событий (далее – синхронный поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с n состояниями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$). Будем говорить, что имеет место i-е состояние процесса (потока), если $\lambda(t) = \lambda_i, i = \overline{1,n}$. Если имеет место i-е состояние процесса $\lambda(t)$, то в течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, поток событий ведет себя как пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda_i, i = \overline{1,n}$. Переход из i-го состояния процесса $\lambda(t)$ в j-е ($i, j = \overline{1,n}, j \neq i$) возможен только в момент наступления события, при этом этот переход осуществляется с вероятностью p_{ij} ($0 < p_{ij} \leq 1$); с вероятностью $p_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} p_{ij}$ процесс $\lambda(t)$ остается в i-м состоянии. Таким образом, при описании синхронного потока задается матрица вероятностей переходов из состояния в состояние $\|p_{ij}\|_1^n$; $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$. Так как переходы из состояния в состояние привязаны к моментам наступления событий, то поток называется синхронным потоком событий. Очевидно, что в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – марковский процесс.

На практике параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, а также матрица переходных вероятностей $\|p_{ij}\|_1^n$ неизвестны. Поэтому возникает задача оценки этих параметров на основе наблюдений за потоком. Обозначим множество параметров $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n; p_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}$ как θ, а апостериорную плотность распределения вероятностей параметров θ как $p(\theta|\vec{r}(t))$, где $\vec{r}(t)$ отражает историю потока до момента t [3]. Как известно [4], данная плотность несет наиболее полную информацию о наблюденном потоке в теоретико-вероятностном смысле.

Для оценки параметров воспользуемся методом наименьших квадратов. Известно, что такая оценка обеспечивает минимум среднеквадратической ошибки оценки и выглядит следующим образом:

$$\hat{\theta}_k = \int\limits_{\Theta} \theta_k p(\theta|\vec{r}(t))\, d\theta, \tag{1}$$

где $d\theta = d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_N$, $N = n^2$ – число параметров. Отсюда задача сводится к нахождению апостериорной плотности распределения параметров и вычислению интеграла в выражении (1).

3. ВЫВОД АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для получения выражения апостериорной плотности распределения вероятностей параметров используем известную методику [4]. Сначала рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки времени Δt, а затем совершим предельный переход при $\Delta t \to 0$. Рассмотрим апостериорную плотность вероятности $p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t))$ и аналогичную $p(\theta|\vec{r}(t))$:

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t+\Delta t)|\theta)p(\theta)}{p(\vec{r}(t+\Delta t))}, p(\theta|\vec{r}(t)) = \frac{p(\vec{r}(t)|\theta)p(\theta)}{p(\vec{r}(t))}.$$

Отсюда следует:

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} \cdot \frac{p(\vec{r}(t+\Delta t)|\theta)}{p(\vec{r}(t)|\theta)} \cdot p(\theta|\vec{r}(t)). \quad (2)$$

Теперь рассмотрим плотность $p(\vec{r}(t+\Delta t)|\theta)$:

$$p(\vec{r}(t+\Delta t)|\theta) = \sum_{k=1}^{n} p(\vec{r}(t), \lambda(t) = \lambda_k, r(t+\Delta t)|\theta) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p(\lambda(t) = \lambda_k, r(t+\Delta t)|\vec{r}(t), \theta)p(\vec{r}(t)|\theta) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p(r(t+\Delta t)|\lambda(t) = \lambda_k)p(\lambda(t) = \lambda_k|\vec{r}(t))p(\vec{r}(t)|\theta).$$

Подставляя это выражение в (2), получаем следующую формулу:

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t))p(\theta|\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} \sum_{k=1}^{n} p(r(t+\Delta t)|\lambda(t) = \lambda_k)p(\lambda(t) = \lambda_k|\vec{r}(t)). \quad (3)$$

Далее имеем случаи, когда $r(t+\Delta t) = 0$ или 1. Случай, когда $r(t+\Delta t) > 1$, не представляет интереса, так как имеет порядок $o(\Delta t)$.

Итак, пусть $r(t+\Delta t) = 0$, тогда $p(r(t+\Delta t)|\lambda(t) = \lambda_k) = 1 - \Delta t\lambda_k + o(\Delta t)$ и выражение (3) примет вид:

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} \cdot p(\theta|\vec{r}(t))(1 - \Delta t \sum_{k=1}^{n} \lambda_k w(\lambda_k|t)),$$

где $w(\lambda_k|t)$ есть апостериорная вероятность того, что процесс $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что за время t произошло $\vec{r}(t)$ событий [3]. Обозначим $a(t,\theta) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k w(\lambda_k|t)$, тогда

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} \cdot p(\theta|\vec{r}(t))(1 - \Delta t\, a(t,\theta)). \quad (4)$$

Проинтегрируем левую и правую часть уравнения (4), с учетом условия нормировки $\int\limits_{\Theta} p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t))d\theta = 1$ получим

$$\frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))} = \left(1 - \Delta t \int\limits_{\Theta} a(t,\theta)p(\theta|\vec{r}(t))d\theta\right)^{-1}.$$

Далее из (4) следует:

$$\frac{p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) - p(\theta|\vec{r}(t))}{\Delta t} = p(\theta|\vec{r}(t))\left(\int\limits_{\Theta} a(t,\theta)p(\theta|\vec{r}(t))d\theta - a(t,\theta)\right). \quad (5)$$

Переходя к пределу в (5) при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp(\theta|\vec{r}(t))}{dt} = p(\theta|\vec{r}(t))\left(\int\limits_{\Theta} a(t,\theta)p(\theta|\vec{r}(t))d\theta - a(t,\theta)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\theta|\vec{r}(t)) = \frac{p(\theta|\vec{r}(t_0))exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(t,\theta)dt\right)}{exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\Theta} a(t,\theta)p(\theta|\vec{r}(t))d\theta dt\right)},$$

здесь t_0 – момент времени начала наблюдений за потоком. При условии, что $\int\limits_{\Theta} p(\theta|\vec{r}(t))d\theta = 1$

$$p(\theta|\vec{r}(t)) = \frac{p(\theta|\vec{r}(t_0))exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(t,\theta)dt\right)}{\int\limits_{\Theta} exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(t,\theta)dt\right)p(\theta|\vec{r}(t_0))d\theta}. \qquad (6)$$

Рассмотрим случай, когда $p(\vec{r}(t+\Delta t)|\theta) = 1$. Тогда уравнение (3), с точностью до членов порядка $o(\Delta t)$, можно записать так:

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{p(\vec{r}(t))}{p(\vec{r}(t+\Delta t))}\cdot p(\theta|\vec{r}(t))\Delta t\, a(t,\theta). \qquad (7)$$

Используя аналогичные рассуждения, как и в первом случае, получаем:

$$p(\theta|\vec{r}(t+\Delta t)) = \frac{a(t,\theta)p(\theta|\vec{r}(t))}{\int\limits_{\Theta} p(\theta|\vec{r}(t))a(t,\theta)d\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\theta|\vec{r}(t_i+0)) = \frac{a(t_i-0,\theta)p(t_i-0,\theta)}{\int\limits_{\Theta} p(\theta|\vec{r}(t_i-0))a(t_i-0,\theta)d\theta},$$

где t_i – это момент времени, когда наступило событие потока, i – номер этого события. Формулы (7) и (8) позволяют сформулировать алгоритм оценки параметров в любой момент времени t:

1) задается начальное распределение $p(\theta|\vec{r}(t_0))$;
2) на интервале времени $(t_0; t_1)$ (интервал времени, когда нет событий) вычисляются распределения $p(\theta|\vec{r}(t))$ по формуле (7);
3) в момент t_1 наступает событие и распределение $p(\theta|\vec{r}(t_1))$ пересчитывается по формуле (8), далее на интервале $(t_1; t_2)$ идет расчет по формуле (7) и т. д.

4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ

Естественно, что для практических вычислений формулы (7), (8) не пригодны, поэтому автором предлагается приближенный алгоритм. Предполагается, что начальное приближение параметров выбрано достаточно хорошо и подинтегральные функции в (7), (8) можно разложить в ряд в точке начального приближения параметров. Это позволит вычислить интегралы от известных функций и значительно упростить вычислительный процесс.

Сделаем следующие обозначения. Пусть

$$f(t,t_0,\theta) = exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(t,\theta)dt\right), \quad f_k(t,t_0,\theta) = \theta_k f(t,t_0,\theta).$$

Обозначим $m_s(t)$ оценку s-й компоненты вектора параметров θ ($s = \overline{1,N}$) в момент времени t, тогда

$$m_s(t) = \frac{\int\limits_{\Theta} f_k(t,t_0,\theta)p(\theta|\vec{r}(t_0))d\theta}{\int\limits_{\Theta} f(t,t_0,\theta)p(\theta|\vec{r}(t_0))d\theta}.$$

Пусть θ_i истинное значение параметра в момент времени t_i и $\hat{\theta}_i$ соответствующая этому времени оценка параметра. Разложим функцию $f(t,t_i,\theta)$ в ряд:

$$f(t,t_i,\theta) = f(t,t_i,\hat{\theta}_i) + \sum\nolimits_{k=1}^{N} \frac{\partial f(t,t_i,\hat{\theta}_i)}{\partial\theta_k}(\theta_k - \hat{\theta}_{ik}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum\nolimits_{k,m=1}^{N} \frac{\partial^2 f(t,t_i,\hat{\theta}_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_m}(\theta_k - \hat{\theta}_{ik})(\theta_m - \hat{\theta}_{im}).$$

Аналогичную формулу можно получить для функции $f_s(t,t_i,\theta)$, $s = \overline{1,N}$. Введем еще одну функцию:

$$c_{km}(t) = \int\limits_{\Theta} (\theta_k - \hat{\theta}_k(t))(\theta_m - \hat{\theta}_m(t))p(\theta|t)d\theta, \tag{8}$$

тогда оценка $m_s(t)$ запишется так:

$$m_s(t) = \frac{f_s(t,t_i,\hat{\theta}_i) + \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N} \frac{\partial^2 f_s(t,t_i,\hat{\theta}_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_m} c_{km}(t_i+0)}{f(t,t_i,\hat{\theta}_i) + \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N} \frac{\partial^2 f(t,t_i,\hat{\theta}_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_m} c_{km}(t_i+0)}, \tag{9}$$

$$m_s(t_i+0) = \frac{a_s(t_i-0,\hat{\theta}_i) + \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N} \frac{\partial^2 a_s(t_i-0,\hat{\theta}_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_m} c_{km}(t_i-0)}{a(t_i-0,\hat{\theta}_i) + \frac{1}{2}\sum_{k,m=1}^{N} \frac{\partial^2 a(t_i-0,\hat{\theta}_i)}{\partial\theta_k\partial\theta_m} c_{km}(t_i-0)}. \tag{10}$$

Используя разложение в ряд подинтегральных функций, получим приближенные формулы для $c_{km}(t)$ и $c_{km}(t_i+0)$:

$$c_{km}(t) = \frac{F_{km}(t,t_i,\hat\theta_i) + \frac{1}{2}\sum_{u,v=1}^{N} \frac{\partial^2 F_{km}(t,t_i,\hat\theta_i)}{\partial\theta_u\partial\theta_v} c_{uv}(t_i+0)}{f(t,t_i,\hat\theta_i) + \frac{1}{2}\sum_{u,v=1}^{N} \frac{\partial^2 f(t,t_i,\hat\theta_i)}{\partial\theta_u\partial\theta_v} c_{uv}(t_i+0)}, \tag{11}$$

$$c_{km}(t_i+0) = \frac{A_{km}(t_i,\hat\theta_i) + \frac{1}{2}\sum_{u,v=1}^{N} \frac{\partial^2 A_{km}(t_i,\hat\theta_i)}{\partial\theta_u\partial\theta_v} c_{uv}(t_i-0)}{a(t_i,\hat\theta_i) + \frac{1}{2}\sum_{u,v=1}^{N} \frac{\partial^2 a(t_i,\hat\theta_i)}{\partial\theta_u\partial\theta_v} c_{uv}(t_i-0)}, \tag{12}$$

где $A_{km}(t,\theta) = (\theta_k - \hat\theta_k(t))(\theta_m - \hat\theta_m(t))a(t,\theta)$,

$F_{km}(t,t_i,\theta) = (\theta_k - \hat\theta_k(t))(\theta_m - \hat\theta_m(t))f(t,t_i,\theta)$.

На основе приближенных выражений для оценок сформулируем следующий алгоритм:

1) задается апостериорная плотность в начальный момент времени t_0;
2) подсчитываются величины $c_{km}(t_0)$ по формуле (9), $k,m=\overline{1,N}$;
3) по формуле (10) рассчитываются оценки $m_s(t)$ на интервале времени $(t_0;t_1)$;
4) в момент возникновения события происходит пересчет величин $c_{km}(t_1+0)$ по формуле (13);
5) производится пересчет оценок $m_s(t_1+0)$ по формуле (11);
6) далее переходим на шаг 3, только расчет ведем для интервала времени $(t_1;t_2)$ и т. д.

В дальнейшем предполагается реализация алгоритма на компьютере для случая, когда поток имеет только два состояния. Отметим, что реализация общего алгоритма (когда поток имеет любое конечное число состояний) также возможна, но намного более трудоемка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lucantoti D. M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
2. *Lucantoni D. M., Neuts M. F.* Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. P. 575–598.
3. *Бушланов И. В., Горцев А. М.* Оптимальная оценка состояний синхронного дважды стохастического потока событий // Автоматика и телемеханика, 2004. № 9. С. 40–52.
4. *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968.