УДК 519.6

СТРЕЛЬЦОВ А.В., ДУБРОВИНА О.В.

ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДАМИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

Предлагается прикладная программа для проведения анализа и синтеза дискретных сигналов при помощи вейвлет-функций.

В настоящее время вейвлет-преобразование широко используется для анализа дискретных сигналов различного типа. Большинство пакетов символьной и численной математики содержат инструменты для проведения вейвлет-анализа, однако для неподготовленного пользователя такие пакеты оказываются достаточно сложными. Предлагаемая прикладная программа позволяет получить разложение любого дискретного сигнала достаточно просто и наглядно.

Вейвлет-преобразование позволяет получить частотную характеристику сигнала и, в отличие от преобразования Фурье обеспечивает частотно-временное представление сигнала. Частотная информация, полученная в результате, может использоваться для выявления особенностей сигнала, незаметных во временном представлении, получения аппроксимации сигнала и изменения частотной характеристики сигнала.

Основной идеей вейвлет-преобразования является принцип субполосного кодирования. Исходный дискретный сигнал, имеющий длину 1024 точки (отсчета) и максимальную частоту w, подается на низкочастотный (H) и высокочастотный (L) фильтры. Низкочастотный фильтр удаляет все частоты, большие половины максимальной, высокочастотный аналогичным образом обрезает низкочастотную составляющую сигнала. Затем сигнал на выходах фильтров подвергается децимации, т.е. удалению из него каждого второго отсчета. В результате описанного преобразования (декомпозиции) исходный сигнал делится на две части: аппроксимацию в частотном диапазоне w– ½ w и детализацию в диапазоне ½ w–w. Затем полученная аппроксимация снова подвергается декомпозиции, в результате чего получается аппроксимация в диапазоне 0– ¼ w и детализация в диапазоне ¼ w – ½ w. Декомпозиция продолжается до тех пор, пока не останется два отсчета в аппроксимации и детализации.

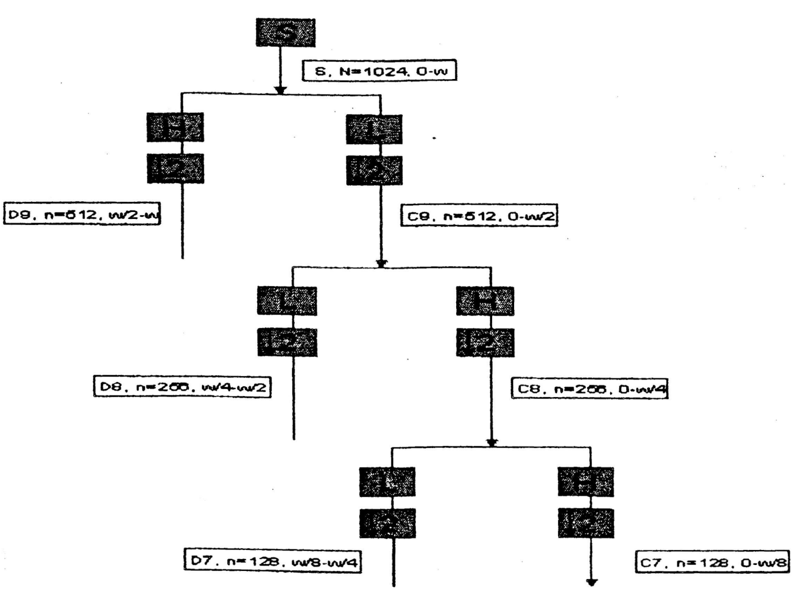

Рис. 1

Простейшей вейвлет-функцией является функция Хаара, задаваемая детализирующей функцией $\psi(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1/2,\\ -1, & 1/2\le t<1,\\ 0, & t<0, t\ge 1,\end{cases}$ и масштабирующей $\varphi(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1,\\ 0, & t<0, t>1\end{cases}$. Дискретный сигнал длиной 2^n отсчетов может быть подвергнут декомпозиции на n уровнях, причем каждому уровню преобразования соответствуют функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определенной частоты и длительности. В отличие от субполосного кодирования, дискретное вейвлет-преобразование обычно проводится начиная от низких частот до максимально высоких для данной степени дискретизации. Поэтому с возрастанием уровня j преобразования на единицу, частота функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ возрастает вдвое, а длительность в два раза уменьшается. Например, на нулевом уровне длительность вейвлета равна длительности сигнала, на первом – половине длительности, и т.д. Таким образом, для декомпозиции сигнала на j-м уровне, вейвлет 2^j раз сдвигается на величину своей длительности (.

При каждом сдвиге вейвлет скалярно умножается на исходный сигнал s(t).

$$c_{jk}=2^{j/2}\left\langle s(t),\varphi_{jk}(t)\right\rangle,\quad d_{jk}=2^{j/2}\left\langle s(t),\psi_{jk}(t)\right\rangle \tag{1}$$

где $2^{j/2}$ – нормирующий множитель.

В результате по формуле (2) получаются коэффициенты масштаба c_{jk}, где индекс j указывает уровень декомпозиции, а k – номер сдвига и коэффициенты детализации d_{jk} (формула (3)). На нулевом уровне $j=0$ и k изменяется от 1 до 2^j. Таким образом, на нулевом уровне имеем один коэффициент масштаба c_{00} и один коэффициент детализации d_{00}. На первом уровне $j=1$ и $k=1,2$. Следовательно, в результате преобразования получаем по два коэффициента масштаба и детализации: c_{10}, c_{11}, d_{10}, d_{11}. Продолжая преобразование аналогичным образом, на n-м уровне получим 2^{n-1} коэффициентов c и d.

Коэффициенты d_{jk} отражают частотную информацию о сигнале. По величине этого коэффициента можно судить о наличии в исходном сигнале частоты, соответствующей частоте вейвлета на уровне j, в момент времени, соответствующий k-му сдвигу вейвлета. Таким образом, зависимость d(t) для уровня j является амплитудно-временной характеристикой исходного сигнала на частоте вейвлета j-го уровня.

Восстановление исходной функции по коэффициентам вейвлет-разложения производится в соответствии с формулой

$$s(t)\cong c_{00}\cdot\varphi_{00}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{2^{j}-1}d_{jk}\cdot\psi_{jk}(t) \tag{3}$$

Каждая сумма $\sum_{k=0}^{2^{j}-1}d_{jk}\cdot\psi_{jk}(t)$ в формуле (3) является одной из n частотных составляющих исходного сигнала и называется детализацией $D_j(t)$ функции на частоте, соответствующей j-му уровню декомпозиции. Аппроксимация сигнала на уровне J задается выражением: $A_J(t) = \sum_{k=0}^{2^{J-1}} c_{Jk}\varphi_{Jk}(t) + \sum_{j=J}^{n-1}\sum_{k=0}^{2^{j-1}} d_{jk}\psi_{jk}(t)$.

Описанный выше алгоритм был реализован в прикладной программе, которая позволяет производить анализ и синтез произвольного дискретного сигнала. Исходный сигнал загружается из файла в виде двумерного массива координат, который должен иметь длину 2^n, n – целое число. Декомпозиция производится с использованием вейвлета Хаара. Результаты преобразования могут быть выведены на экран в виде аппроксимации, детализации и коэффициентов детализации на всех уровнях преобразования.

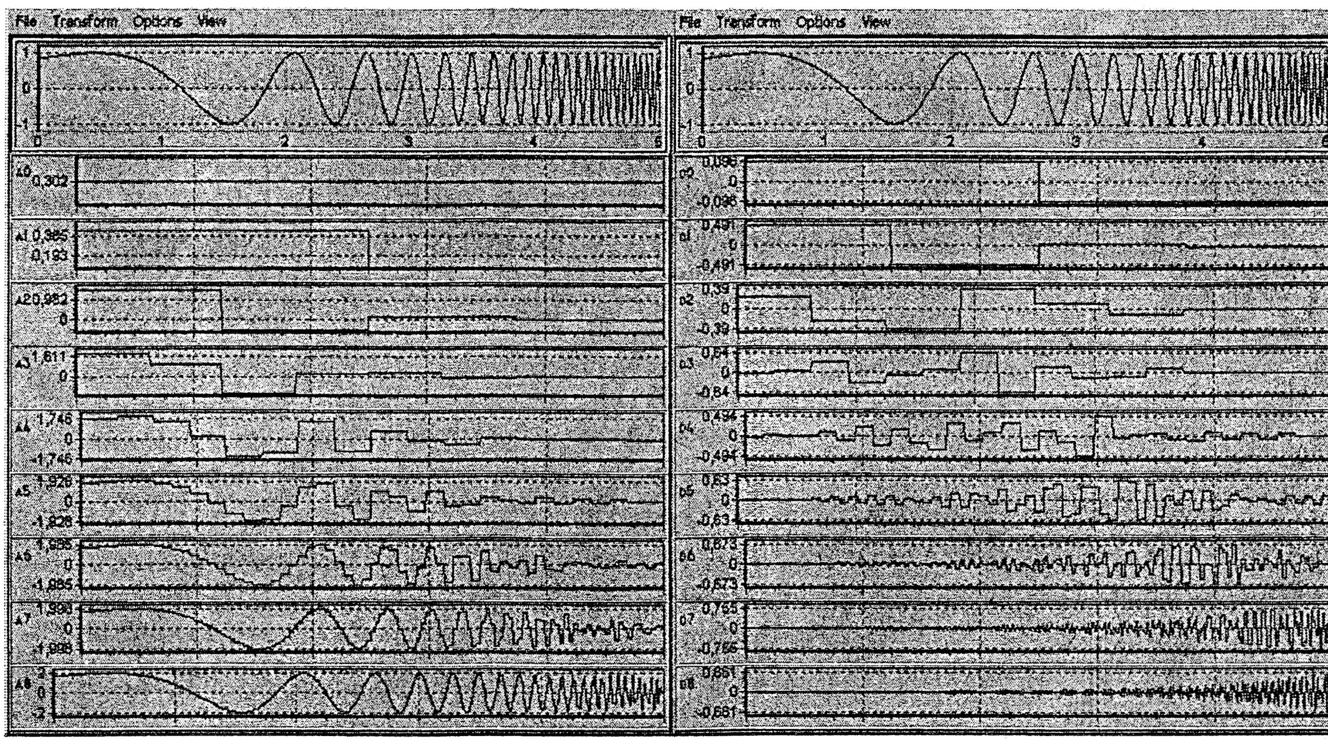

Рис. 2 Аппроксимация сигнала

На рис. 2 слева показан пример разложения по уровням аппроксимации сигнала с непрерывно изменяющейся частотой. Вверху окна программы отображается исходный сигнал, ниже находятся графики уровней аппроксимации в порядке возрастания частотного диапазона. Исходный сигнал имеет длину 512 точек и позволяет получить 8 уровней аппроксимации. Последний, восьмой уровень представляет собой исходный сигнал в диапазоне частот от нуля до половины частоты дискретизации wсигнала, седьмой уровень – от нуля до ¼ w, и так далее (рис. 1). Таким образом, аппроксимация показывает низкочастотную составляющую сигнала с максимальной частотой не больше ½ w на наивысшем уровне.

Еще одной функцией программы является отображение детализации сигнала, которая отвечает за представление высокочастотной составляющей. На рис. 2 справа показано разложение того же сигнала по уровням детализации. В приложении также предусмотрены возможности отображения статистики разложения сигнала и вывода на экран вейвлет-спектрограммы сигнала. По полученным коэффициентам разложения производится восстановление сигнала.