УДК 519.95

Г. П. Волчкова

К ГИПОТЕЗЕ О ПЛОТНЫХ OPEN-SHOP РАСПИСАНИЯХ

We study the scheduling problem $\mathbf{Om}\,||\,\mathbf{C}_{\max}$. It is proved that hypothesis $C_{\max}(s)/C_{\max}(s^*) \le 2 - 1/m$ is correct for a dense schedule s of a specific type.

Рассматривается следующая задача теории расписаний: множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ работ обслуживается в системе из $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ приборов. Для всех работ множества N маршрут обслуживания (порядок прохождения приборов) заранее не задан и может быть различным для различных работ. Заданы также длительности обслуживания каждой работы на каждом приборе. В любой момент времени каждая работа обслуживается не более, чем одним прибором и каждый прибор обслуживает не более одной работы одновременно. Требуется построить расписание выполнения работ в такой системе. Построить расписание означает тем или иным способом указать для каждой пары «работа-прибор» интервал времени, в котором этот прибор обслуживает данную работу. Будем рассматривать расписание, оптимальное относительно следующего критерия качества: минимизировать общее время завершения обслуживания всех работ. В теории расписаний такая задача обозначается как $\mathbf{Om}\,||\,\mathbf{C}_{\max}$. Расписание будем искать в среде плотных расписаний, когда прибор не может простаивать, если некоторая работа готова к выполнению на нем. Существует гипотеза [1], что для плотного расписания s и любого m

$$\frac{C_{\max}(s)}{C_{\max}(s^*)} \le 2 - \frac{1}{m},$$ где s^* – оптимальное расписание.

Под операцией (i, j) будем понимать выполнение работы i на определенном приборе j, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, где t_{ij} – длительность операции (i, j).

Рассмотрим сначала любое плотное расписание s, в котором выделена работа k, которая выполняется в этом расписании последней. Последовательность всех операций работы i назовем цепочкой и будем обозначать ее длину через l, $l = \sum_{j \in M} t_{ij}$.

Не нарушая общности, можно считать, что последняя операция работы

k выполняется на первом приборе и время ее выполнения равно t_{k1}. Определим B как сумму длин операций, выполняемых на первом приборе $B = \sum_{i=1}^{n} t_{i1}$.

Определим p_i как интервал пересечения i-ой выполняемой на первом приборе работы с цепочкой и пусть $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$. Временные интервалы, в которых не выполняется ни одна операция работы k, назовем разрывами. *Разрывом* цепочки будем называть интервал времени, когда ни одна операция цепочки не выполняется, при этом некоторые операции этой цепочки были выполнены ранее. В дальнейшем длину разрыва цепочки будем обозначать через R.

Основным результатом статьи будет доказательство того факта, что если цепочка работы k имеет один разрыв, то гипотеза справедлива. $i+1$

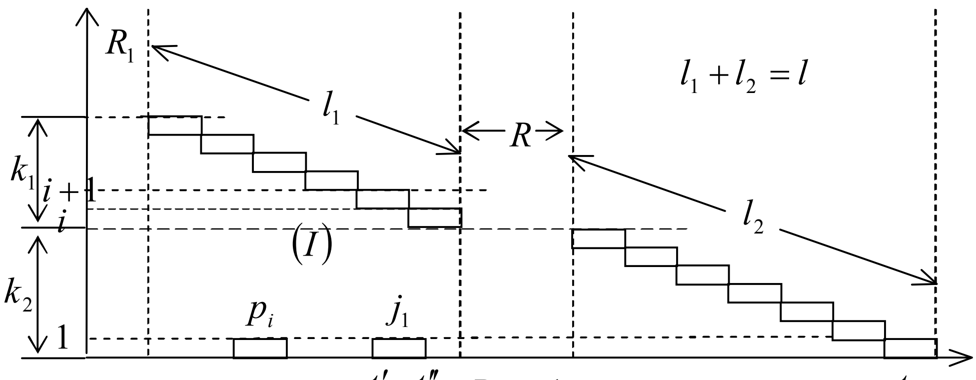

Рис. 1

Для оптимального решения справедливы следующие нижние оценки

$$C_{\max}(s^*) \geq l, \tag{1}$$

$$C_{\max}(s^*) \geq \mathrm{Level}(T), \tag{2}$$

$$C_{\max}(s^*) \geq B, \tag{3}$$

$$C_{\max}(s^*) \geq L_{\max}, \tag{4}$$

где $\mathrm{Level}(T)$ определяется как средняя загрузка по множеству приборов $\mathrm{T}, \mathrm{T} \subseteq \mathrm{M}$, а именно $\mathrm{Level}(T) = \sum_{i \in N} \sum_{j \in T} t_{ij} \Big/ |T|$, а $\max l$ определяется как максимальная длина из всех длин цепочек $\mathrm{L}_{\max} = \max_{i \in N} \{l_i\}$.

Рассмотрим функцию

$$f(s,T)=\frac{C_{\max}(s)}{\max(B,\,l,\,L_{\max},\,\mathrm{Level}(T))},\tag{5}$$

которая связана с плотным расписанием s. Достаточно найти максимальное значение этой функции, и если ее значение окажется не больше, чем $2-1/m$, то гипотеза будет доказана.

Для функции $f(s,T)$ определим преобразования, которые сохраняют свойство плотности, при этом значение функции не уменьшается.

Пусть (t',t'') – интервал времени, когда прибор 1 занят работой j_1, а операция работы *k* выполняется на другом приборе. Тогда модифицируем длительности операций, которые выполняются в интервале (t',t'') по следующему правилу:

$$t_{xy_x}=t_{xy_x}-z_x,\tag{6}$$

где x – номер работы, y_x – номер прибора, на котором выполняется операция (x,y_x) во временном интервале (t',t''), а z_x – длительность выполнения этой операции в этом интервале, длина

$$t_{k1}=t_{k1}+t''-t'\tag{7}$$

Значения *l* и *B* не изменились, а длины других цепочек, выполняемых в интервале (t',t'') уменьшились. Понятно, что параметры $L_{\max}$ и $\mathrm{Level}(T)$ не увеличатся для любого *T*. После выполнения таких преобразований будет получено плотное расписание s_1, в котором во время выполнения работ цепочки никакие работы не выполняются на первом приборе.

Разобьем множество всех приборов $M=\{1,2,\ldots,m\}$ на два непересекающихся подмножества $k_2=\{1,2,\ldots,k_2\}$ и $k_1=\{k_2+1,\ldots,m\}$, где k_1 – множество приборов, на которых выполняется цепочка до разрыва *R*, k_2 – после разрыва. Пусть R_1 – время начала выполнения цепочки работы *k*.

Аналогичным образом поступаем для всех приборов *i*, $i=\overline{2,k_2}$. Тогда будет получена конфигурация, в которой в интервале $[R_1,R_1+l_1]$ на приборах *i*, $i=\overline{1,k_2}$ ни одна работа не будет выполняться. То есть на рисунке 1 область (I) будет пуста. Область (I) – интервал времени от начала выполнения цепочки работы *k* до разрыва цепочки на приборах $1,2,\ldots,k_2$.

Для работ, выполняемых в разрыве *R*, средняя длина цепочек оценивается величиной $l_{cp} = l_1 + {R \cdot k_2}/{t_2}$, где k_2 – количество приборов, на которых выполняется цепочка k после разрыва, t_2 – количество цепочек, выполняемых в интервале $[R_1 + l_1, R_1 + R + l_1]$ на приборах $\overline{1, k_2}$. Покажем, что если выполняется ${C_{\max}(s_1)}/{l_{cp}} > 2 - {1}/{m}$, то выполняется ${C_{\max}(s_1)}/{\max(B, l, \mathrm{Level}(T))} \le 2 - {1}/{m}$, где T соответствует множеству приборов, на которых выполняется цепочка k после разрыва.

Пусть l_1 – длина цепочки k до разрыва, l_2 – длина после разрыва, тогда из (1) следует

$$\frac{C_{\max}(s_1)}{C_{\max}(s^*)} = \frac{R_1 + R + l_1 + l_2}{l_1 + l_2} > 2 - \frac{1}{m}, \tag{8}$$

где R_1 – момент времени, когда начинает выполняться цепочка k.

Определим $t_{cp} = {l_2}/{k_2}$, где k_2 – количество приборов, на которых выполняется цепочка k после разрыва.

После выполнения преобразований из (4) имеем $C_{\max}(s^*) \ge R_1 + R + t_{ki}$, где t_{ki} – время выполнения работы k на приборе $i, i = \overline{1, k_2}$. Заменим t_{ki} на $t_{cp} = {l_2}/{k_2}$. Получим

$$\frac{C_{\max}(s_1)}{C_{\max}(s^*)} = \frac{R_1 + R_2 + l_1 + l_2}{R_1 + R_2 + {l_2}/{k_2}} > 2 - \frac{1}{m}, \tag{9}$$

Обозначим через T_2 – множество работ, выполняемых в интервале $[R_1 + l_1, R_1 + R + l_1]$, а $t_2 = |T_2|$ – количество работ в этом множестве. Обозначим через $z(t_2)$ их суммарную длительность в этом интервале. Пусть $z(t_2) \ge Rk_2$. Тогда средняя длительность цепочек этих работ в интервале равна ${z(t_2)}/{t_2} \ge {Rk_2}/{t_2}$.

Пусть некоторая работа $\tau \in T_2$. Общая длина ее цепочки не меньше $l_1 + d_2$, где d_2 – суммарная длительность выполнения работы τ в интервале $[R_1 + l_1, R_1 + R + l_1]$.

Пусть y_i – номера приборов, на которых выполнялись работы в интервале $[R_1 + l_1, R_1 + R + l_1]$. Тогда

$C_{\max}(s^*) \geq z(t_2)/t_2 + l_1$, и с учетом $z(t_2) \geq Rk_2$ имеем $C_{\max}(s^*) \geq Rk_2/t_2 + l_1$.

Поэтому средняя длина цепочек работ из T_2 равна $l_{cp} = l_1 + Rk_2/t_2$.

Пусть $T_1 = \{1, 2, \ldots, k_1\}$. Средняя загрузка по k_1 приборам $Level(T_1) = (R_1 k_1 + l_1 + l_1 t_2)/k_1$. Для оптимального решения справедливы оценки $C_{\max}(s^*) \geq l_{cp}$, $C_{\max}(s^*) \geq Level(T_1)$.

Пусть $k_1 > k_2$. Определим $C = R_1 + R + l_2/k_2$. Тогда

$$C_{\max}(s_1) = R_1 + R_2 + l_1 + l_2 = C - l_2/k_2, \tag{10}$$

Пусть гипотеза не выполняется, то есть

$$\frac{C - l_2/k_2 + l}{l_{cp}} > 2 - \frac{1}{m}, \tag{11}$$

Докажем, что

$$\frac{C - l_2/k_2 + l}{Level(T_1)} \leq 2 - \frac{1}{m}. \tag{12}$$

Случай (I) $C \leq l$. Не умаляя общности будем считать, что *l*=1, $C = 1 - \Delta, \Delta \geq 0$. Из (8) имеем:

$$C - l_2/k_2 + 1 > 2 - 1/m, \quad 1 - \Delta - l_2/k_2 + 1 > 2 - 1/m, \frac{l_2}{k_2} < \frac{1}{m} - \Delta,$$

$$l_2/k_2 = 1/m - \Delta - \varepsilon, \text{или } l_2 = k_2/m - k_2\Delta - k_2\varepsilon.$$

Тогда числитель левой части (11) равен

$$R_1 + R + l_1 + l_2 = 1 + C - l_2/k_2 = 1 + 1 - \Delta - (1/m - \Delta - \varepsilon) = 2 - 1/m + \varepsilon.$$

Пусть $\dfrac{2 - 1/m + \varepsilon}{l_1 + Rk_2/t_2} > 2 - \dfrac{1}{m}$. Покажем, что

$$Rk_2/t_2 < l_2 + \varepsilon\,. \tag{13}$$

Предположим обратное, $Rk_2/t_2 \geq l_2 + \varepsilon$. Тогда

$l_1 + Rk_2/t_2 \geq l_1 + l_2 + \varepsilon = 1 + \varepsilon$, следовательно $\dfrac{2 - 1/m + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \leq 2 - \dfrac{1}{m}$. Получили противоречие. Оценим знаменатель в левой части дроби (12). Из соотношений

$$R_1 + R = 1 - 1/m + \varepsilon\,, \tag{14}$$

$$l_2/k_2 = 1/m - \Delta - \varepsilon\,, \tag{15}$$

$$t_2 \geq k_2,\, k_1 + k_2 = m \tag{16}$$

и (11) имеем

$$R < (l_2 + \varepsilon)t_2/k_2\,, \tag{17}$$

$$l_2 = k_2/m - \Delta k_2 - \varepsilon k_2\,, \tag{18}$$

$$l_1 = 1 - k_2/m + k_2(\Delta + \varepsilon), \tag{19}$$

Учитывая (12) и (15) получаем

$$R_1 > 1 - 1/m + \varepsilon - (l_2 + \varepsilon)t_2/k_2\,. \tag{20}$$

Откуда $R_1 + \dfrac{l_1(t_2+1)}{k_1} > 1 - \dfrac{1}{m} + \varepsilon - \dfrac{t_2}{k_2}(l_2 + \varepsilon) + \dfrac{t_2+1}{k_1}\left(1 - \dfrac{k_2}{m} + k_2(\Delta + \varepsilon)\right) =$

$1 - \dfrac{1}{m} + \varepsilon - \dfrac{t_2}{k_2}l_2 - \dfrac{t_2}{k_2}\varepsilon + \dfrac{t_2+1}{k_1}\left(1 - \dfrac{k_2}{m} + k_2(\Delta + \varepsilon)\right).$

Подставим вместо l_2 его значения из (10), получаем

$$R_1 + \frac{l_1(t_2+1)}{k_1} >$$

$$> 1 - 1/m + \varepsilon - t_2\left(1/m - \Delta - \varepsilon\right) - t_2/k_2\,\varepsilon + \frac{t_2+1}{k_1}\left(1 - k_2/m\right) + \frac{t_2+1}{k_1}k_2(\Delta + \varepsilon) =$$

$$= 1 - \frac{1}{m} - \frac{t_2}{m} + \frac{t_2+1}{k_1}\left(1 - \frac{k_2}{m}\right) + \Delta\left(t_2 + \frac{(t_2+1)k_2}{k_1}\right) + \varepsilon\left(1 + \frac{t_2(k_2-1)}{k_2} + \frac{(t_2+1)k_2}{k_1}\right).$$

Из $1-{}^{1}\!/_{m}-{}^{t_2}\!/_{m}+{}^{(t_2+1)}\!/_{k_1}\left(1-{}^{k_2}\!/_{m}\right)\geq 1$ получаем $R_1+\dfrac{l_1(t_2+1)}{k_1}\geq 1+\varepsilon$.

Поэтому $\dfrac{2-{}^{1}\!/_{m}+\varepsilon}{1+\varepsilon}\leq 2-\dfrac{1}{m}$.

В случае $l \leq C$ доказательство аналогично.

1. Bo Chen, Vitaly A. Strusevich. Approximation algorithms for three-machine open shop scheduling. ORSA Journal on Computing. Vol.5, No 3, Summer 1993.

Волчкова Галина Петровна – ассистент кафедры дискретной математики и алгоритмики, ФПМИ.