БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЗАДАЧ

В трех частях

Часть 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по физико-математическим специальностям

Под редакцией
доктора физико-математических наук
Н. Г. Абрашиной-Жадаевой,
доктора физико-математических наук
В. Н. Русака

МИНСК
БГУ
2013

УДК 514.12(075.8)+517.53(075.8)
ББК 22.151.5я73-1+22.161.5я73-1
В93

А в т о р ы:
**В. К. Ахраменко, Л. Л. Берёзкина, Н. И. Ильинкова,
В. В. Кашевский, Н. И. Крыленко, М. А. Прохорович,
Н. В. Пыжкова, И. В. Рыбаченко, Н. К. Филиппова, О. А. Чупригин**

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент *С. И. Василец*);
доктор физико-математических наук, доцент *А. П. Старовойтов*

На обложке использован рисунок М. А. Прохоровича

Высшая математика. Сборник задач : учеб. пособие. В 3 ч.
В93 Ч. 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной / В. К. Ахраменко [и др.] ; под ред. : Н. Г. Абрашиной-Жадаевой, В. Н. Русака. – Минск : БГУ, 2013. – 359 с.
ISBN 978-985-518-827-9.

В учебном пособии по всем рассматриваемым темам даны теоретические пояснения, приведены примеры, способствующие усвоению фундаментальных понятий, предложены задачи для самостоятельной работы.
Для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям.

УДК 514.12(075.8)+517.53(075.8)
ББК 22.151.5я73-1+22.161.5я73-1

ISBN 978-985-518-827-9 (ч. 1)
ISBN 978-985-518-826-2

Я занимался до сих пор
решением ряда задач,
ибо при изучении наук
примеры полезнее правил.
Ньютон

Работайте, работайте –
понимание придет потом.
Д'Аламбер

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано сотрудниками кафедры высшей математики и математической физики Белорусского государственного университета. Первая часть соответствует программе курса высшей математики для физических специальностей высших учебных заведений и охватывает материал первого семестра по аналитической геометрии и одномерному математическому анализу. Другие математические дисциплины (линейная алгебра, многомерный математический анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, основы векторного и тензорного анализа), изучаемые на физических факультетах, предполагается включить во вторую и третью части. Объединение всех математических дисциплин в один курс удобно для студентов, отвечает духу современной математики и, по сути, является возвратом к старым традициям (достаточно вспомнить классический курс математики В. И. Смирнова).

Основная цель пособия – помочь студенту активизировать самостоятельную работу, глубже усвоить материал, научиться думать над смыслом теорем и определений, схватывать новые идеи и уметь применять их в конкретных ситуациях.

В учебном пособии сохраняется единая структура изложения материала: приводятся элементы теории, даются образцы решения примеров, предлагаются вопросы и задачи для самостоятельной работы. Особо ценными для студентов являются комментарии и замечания к формулировкам теорем и определений, раскрывающие внутренний смысл утверждений, заставляющие задуматься над взаимосвязью различных понятий. Примеры, рассмотренные в пособии, демонстрируют не только формальное применение новых понятий на практике, но и облегчают их восприятие, позволяют глубже уяснить их суть.

Пособие состоит из 11 глав.

В первой главе вводится основная математическая символика, позволяющая формулировать определения и теоремы в компактной форме, рассматриваются некоторые свойства действительных чисел, использованные в данном пособии. Приводятся сведения из теории комплексных чисел, необходимые при изучении многочленов. Для иллюстрации свойств многочленов рассматривается задача о представлении рациональной функции в виде суммы простых дробей.

Во второй главе анализируются элементы векторной алгебры, дано понятие вектора и определены линейные операции над векторами. Рассматриваются скалярное, векторное, смешанное, двойное векторное произведения.

В третьей и четвертой главах изучаются прямая, плоскость, а также фигуры второго порядка на плоскости и в пространстве. При изложении материала уклон сделан в сторону векторной алгебры.

Пятая глава посвящена фундаментальному понятию математического анализа – понятию предела последовательности, а также свойствам сходящихся последовательностей, необходимым и достаточным условиям сходимости. Особое внимание уделяется ε–δ-рассуждениям, обычно трудно дающимся начинающим, но без овладения которыми невозможно усвоить предмет.

В шестой и седьмой главах изложены понятия предела и непрерывности функций. Даны основные определения, приведены локальные и глобальные свойства непрерывных функций. Перечислены основные методы вычисления пределов, в том числе с использованием асимптотических формул.

В восьмой главе излагается материал по дифференциальному исчислению функций одной переменной, приведены правила вычисления производных и дифференциалов, а также приложения дифференциального исчисления.

В девятой главе рассматривается важнейшая формула математического анализа – формула Тейлора, иллюстрируется широкое применение ее при вычислении пределов, приближенном вычислении значений функций, а также при исследовании и построении графиков функций.

В десятой и одиннадцатой главах анализируется теория интегрирования (неопределенный и определенный интегралы), описаны основные методы интегрирования. Приложения интегрального исчисления иллюстрируются на задачах геометрического, физического и биологического содержания.

Начало и конец решения примеров отмечены знаками Δ и ▲ соответственно.

Работа над учебным пособием распределялась между авторами следующим образом: глава 1 – В. К. Ахраменко, М. А. Прохорович; главы 2, 4 – Н. К. Филиппова; глава 3 – Л. Л. Берёзкина; глава 5 – О. А. Чупригин; главы 6, 7 – В. В. Кашевский; глава 8 – Н. В. Пыжкова; глава 9 – Н. И. Ильинкова; главы 10, 11 – Н. И. Крыленко, И. В. Рыбаченко. Все рисунки выполнены старшим преподавателем И. А. Тимощенко.

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ

1.1. МНОЖЕСТВА

Множество – одно из первоначальных понятий в математике, поэтому оно не подлежит строгому определению путем логического сведения к уже известным фактам. *Множество* – совокупность объектов произвольной природы, объединенных согласно некоторому правилу, позволяющему судить: принадлежит объект множеству или нет. Примерами множеств являются множества чисел, множества точек прямой, множества прямых на плоскости.

Множества обозначают большими буквами, например A, B, X, Y, Δ, Ω, а объекты множества, которые называют его *элементами*, – малыми буквами a, b, x, y, δ, ω соответственно. Общеприняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – целых, $\mathbb{Q}$ – рациональных, $\mathbb{R}$ – действительных чисел. Принадлежность элемента a множеству A обозначают $a \in A$ ($\in$ – знак принадлежности как элемента). Если b не является элементом множества A, то пишут $b \notin A$. Запись $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ означает, что $x_1, x_2, ..., x_n$ являются элементами множества X (и только они), а выражение $X = \{x:\ P(x)\}$ характеризует множество X как совокупность элементов x, удовлетворяющих условию $P(x)$. Если свойством $P(x)$ не обладает ни один элемент x, т. е. множество не содержит ни одного элемента, то такое множество называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Например, $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\right\} = \varnothing$.

Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то говорят, что A есть *подмножество* множества B (или *A содержится в B*), и записывают $A \subset B$ или $B \supset A$ ($\subset$ – знак включения как множества). Например, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Имеют место следующие *свойства включения*: 1) $A \subset A$ – всякое множество является своим подмножеством;

2) если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$ – транзитивность включения. Например, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, поэтому $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Если существует элемент $a \in A$ такой, что $a \notin B$, то говорят, что множество A *не содержится* в B, и записывают $A \not\subset B$ или $B \not\supset A$. Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то эти множества называют *равными* и записывают $A = B$. Очевидно, что при этом $A \subset B$ и $B \subset A$.

Операции над множествами определяются следующим образом:

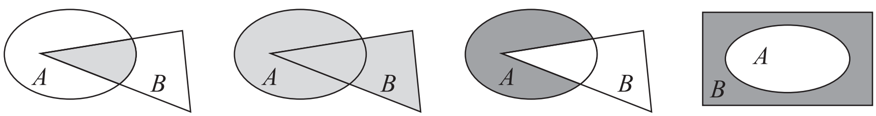
1) *пересечением*, или *произведением*, множеств A и B называется множество $A \bigcap B$, состоящее из всех элементов, содержащихся как в A, так и в B, т. е. $A \bigcap B = \{x : x \in A,\ x \in B\}$. Если $A \bigcap B = \varnothing$, то множества A и B называются *непересекающимися*;

2) *объединением*, или *суммой*, множеств A и B называется множество $A \bigcup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих двух множеств, т. е. $A \bigcup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$. Заметим, что в объединении двух множеств содержатся и те элементы, которые принадлежат обоим множествам;

3) *разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B$, элементами которого являются все элементы A, не содержащиеся в B, т. е. $A \setminus B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$;

4) если $A \subset B$, то разность $A \setminus B$ называют также *дополнением* множества A до множества B.

Операции над множествами хорошо иллюстрируются так называемыми диаграммами Эйлера – Венна (рис. 1.1), т. е. множествами, элементами которых являются точки плоскости.



$A \bigcap B$ $\qquad$ $A \bigcup B$ $\qquad$ $A \setminus B$ $\qquad$ $B \setminus A$

Рис. 1.1

Для произвольных множеств A, B, C операции объединения и пересечения имеют следующие свойства:

1) $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$, $A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$;

2) если $A \subset B$, то $A \bigcup B = B$, $A \bigcap B = A$;

3) $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$ (коммутативность);

4) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$, $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$ (ассоциативность);

5) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$, $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ (дистрибутивность).

Пример 1.1. Доказать свойство 2) для объединения.

Δ Пусть $A\subset B$. Нужно доказать, что $A\bigcup B=B$, т. е. (согласно определению равенства двух множеств) следует доказать, что $B\subset(A\bigcup B)$ и $(A\bigcup B)\subset B$. Во-первых, каждый элемент из B содержится в $A\bigcup B$, поэтому $B\subset(A\bigcup B)$. Докажем далее второе включение. Если $x\in A\bigcup B$, то возможны два случая: либо $x\in A$, либо $x\in B$. Если $x\in A$, то $x\in B$, поскольку по условию $A\subset B$. Таким образом, в обоих случаях $x\in B$, поэтому $(A\bigcup B)\subset B$. Из верности обоих включений следует верность равенства $A\bigcup B=B$. ▲

Пример 1.2. Доказать второй дистрибутивный закон

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C).$$

Δ По определению равенства двух множеств нужно доказать верность двух включений:

1) $\big(A\bigcap(B\bigcup C)\big)\subset\big((A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\big)$;

2) $\big((A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\big)\subset\big(A\bigcap(B\bigcup C)\big)$.

Докажем утверждение 1). Если $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$, то $x\in A$ и одновременно $x\in(B\bigcup C)$, т. е. либо $x\in B$, либо $x\in C$. Таким образом, либо $x\in A$ и $x\in B$, либо $x\in A$ и $x\in C$, т. е. либо $x\in(A\bigcap B)$, либо $x\in(A\bigcap C)$. Итак, $x\in\big((A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\big)$. Утверждение 1) доказано.

Далее докажем утверждение 2). Если $x\in\big((A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\big)$, то либо $x\in(A\bigcap B)$, либо $x\in(A\bigcap C)$. Это значит, что $x\in A$ и в то же время либо $x\in B$, либо $x\in C$. Таким образом, $x\in A$ и $x\in(B\bigcup C)$, т. е. $x\in\big(A\bigcap(B\bigcup C)\big)$. Утверждение 2) доказано. ▲

Два элемента $a\in A$ и $b\in B$, записанные в виде $(a;b)$, называют *упорядоченной парой* и при этом пары $(a_1;b_1)$ и $(a_2;b_2)$ считают *равными* тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары $(a;b)$, $a\in A$, $b\in B$, называется *декартовым* (или *прямым*) произведением множеств A и B и обозначается $A\times B$.

Пример 1.3. Для множеств $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ найти $A\times B$ и $B\times A$.

Δ Согласно определению

$A\times B=\{(1;2),(1;3),(2;2),(2;3)\}$, $B\times A=\{(2;1),(2;2),(3;1),(3;2)\}$. ▲

Декартово произведение не подчиняется коммутативному закону. Равенство $A\times B=B\times A$ верно только в том случае, когда $A=B$. Произведение

$A \times A$ называют *декартовым квадратом* и обозначают A^2. Например, если $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, то $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ есть множество всех декартовых координат точек плоскости.

1.2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Основные утверждения математики состоят в том, что из некоторого свойства $\mathfrak{A}$, называемого *условием*, выводится свойство $\mathfrak{B}$, которое называется *следствием* или *заключением*. Утверждение «из $\mathfrak{A}$ следует $\mathfrak{B}$» записывается формулой $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$. При этом говорят, что $\mathfrak{A}$ есть *достаточное условие* для $\mathfrak{B}$, или $\mathfrak{B}$ – *необходимое условие* для $\mathfrak{A}$. Например, для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы он был ромбом. В то же время для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы он был параллелограммом.

Если вместе с утверждением $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ справедливо утверждение $\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}$, то условия $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называют *равносильными* или *эквивалентными*, что записывают в виде $\mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{B}$. При этом также используют выражения: «$\mathfrak{A}$ необходимо и достаточно для $\mathfrak{B}$»; «$\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$»; «$\mathfrak{A}$, если и только если $\mathfrak{B}$»; «для того чтобы $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{B}$».

Например, треугольник, длины сторон которого $a < b < c$, является прямоугольным тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = c^2$.

Во многих математических формулировках встречаются выражения:

1) для всех элементов x из множества X справедливо $A(x)$;

2) существует элемент $x = x_0$ из множества X, для которого справедливо $A(x_0)$.

Для краткой записи этих утверждений используются символы $\forall$ и $\exists$, которые в математической логике называют *кванторами*. *Квантор общности* $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова *all* – «все») заменяет словосочетания «для всех», «для любого», «для каждого». *Квантор существования* $\exists$ используется вместо слов «существует», «найдется», «можно указать». Для удобства записей будем использовать также символ **:** (двоеточие) вместо слов «такой, что» и символ $\mapsto$ вместо слов «имеет место». С помощью этих символов выражения 1) и 2) можно записать следующим образом:

$$1)\ \forall x \in X \mapsto A(x);\quad 2)\ \exists x_0 \in X : A(x_0).$$

Утверждение $\overline{\mathfrak{A}}$, противоположное утверждению $\mathfrak{A}$, называется *отрицанием* $\mathfrak{A}$ и читается «не $\mathfrak{A}$». Считается, что: 1) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$; 2) всегда имеет место $\mathfrak{A}$ или $\overline{\mathfrak{A}}$.

С помощью кванторов просто формулируются отрицания утверждений. При этом используется *правило построения отрицаний де Моргана*:

$$\overline{\forall x \in X \mapsto A(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X : \overline{A(x)}; \quad \overline{\exists x \in X : A(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \mapsto \overline{A(x)}. \qquad (1.1)$$

Например, определение того, что множество A является *подмножеством* множества B, можно записать с помощью логических символов:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \mapsto a \in B.$$

Утверждение $\overline{A \subset B}$ означает, что A не является подмножеством множества B. Согласно правилу де Моргана $\overline{A \subset B} \Leftrightarrow \exists a \in A : a \notin B.$

При доказательствах теорем часто используются два метода – метод от противного и метод математической индукции.

Метод от противного основывается на следующей теореме.

Теорема 1.1. *Утверждение* $\forall x \in X \mapsto \big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$ *справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение* $\forall x \in X \mapsto \Big(\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}\Big).$

Суть метода заключается в следующем: если требуется доказать справедливость утверждения $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$, то можно предположить, что имеет место $\overline{\mathfrak{B}}$. Если после этого удается доказать, что $\overline{\mathfrak{B}} \Rightarrow \overline{\mathfrak{A}}$, то в силу теоремы, делается заключение о справедливости $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$.

Во многих задачах требуется доказать справедливость утверждения $A(n), \forall n \geq m,\ n, m \in \mathbb{N}.$ Для этого используют *метод математической индукции*: если утверждение $A(n)$ истинно при $n = m$ и из предположения его справедливости при $n = k\ \forall k \geq m,\ k \in \mathbb{N},$ следует, что оно истинно при $n = k + 1$, то утверждение $A(n)$ истинно $\forall n \geq m.$

Пример 1.4. Доказать, что для арифметической прогрессии с общим членом $a_n = a_1 + d(n-1)$ справедлива формула $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$ для вычисления суммы n ее первых членов при всех $n \geq 2.$

Δ При $n = 2$ равенство $S_2 = \dfrac{a_1 + a_2}{2} \cdot 2 = a_1 + a_2$ верно. Пусть равенство выполняется при $n = k$, т. е. $S_k = \dfrac{a_1 + a_k}{2} k.$ Докажем, что отсюда следует справедливость утверждения $S_{k+1} = \dfrac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1).$ Действительно,

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{2a_1 + d(k-1)}{2} k + a_1 + dk = \frac{2a_1 k + dk(k-1) + 2a_1 + 2dk}{2} =$$

$$= \frac{2a_1(k+1) + dk(k+1)}{2} = \frac{2a_1 + dk}{2}(k+1) = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2}(k+1).$$

Согласно методу математической индукции формула доказана. ▲

Пример 1.5. Доказать, что при любом натуральном n справедливо тождество $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

Δ При $n = 1$ соотношение принимает вид $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ и оно является истинным. Запишем доказываемое тождество при $n = k + 1$ и $n = k$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2},$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем равенство

$$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1},$$

истинность которого очевидна. Это означает, что если доказываемое тождество верно при $n = k$, то оно верно и при $n = k + 1$. ▲

Пример 1.6. Доказать, что при $x > -1$ и при всех натуральных n выполняется *неравенство Бернулли* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Δ При $n = 1$ имеем верное неравенство $1+x \geq 1+x$. Пусть при $n = k$ справедливо неравенство $(1+x)^k \geq 1+kx$. Поскольку $1+x>0$, то, умножив неравенство на $1 + x$, получим $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)=1+(1+k)x+kx^2$, так как $kx^2>0$, то $(1+x)^{k+1} \geq 1+(1+k)x$. В соответствии с методом математической индукции неравенство Бернулли верно. ▲

Пример 1.7. Найти все натуральные числа n, для которых справедливо неравенство $2^n > n^2$.

Δ Утверждение, которое можно доказать методом математической индукции, явно не сформулировано. По этой причине выясним закономерность взаимоотношений величин 2^n и n^2. Придавая числу n последовательно значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, получим $2^1 > 1$, $2^2 = 2^2$, $2^3 < 3^2$, $2^4 = 4^2$, $2^5 > 5^2$, $2^6 > 6^2$ соответственно. Таким образом, можно высказать гипотезу, что рассматриваемое неравенство справедливо при $n \geq 5$. Докажем это утверждение. Предположим, что неравенство $2^k > k^2$ выполняется $\forall k \geq 5$. После умножения верного неравенства $2^k > k^2$ на 2 получим верное неравенство $2^{k+1} > 2k^2$. Если докажем, что $2k^2 > (k+1)^2$ при $k \geq 5$, то это будет означать справедливость неравенства $2^{k+1} > (k+1)^2 \quad \forall k \geq 5$, а тем самым в соответствии с методом математической индукции справедливость доказываемого неравенства при $n \geq 5$. Действительно, поскольку $2k^2 > (k+1)^2 \Leftrightarrow 2k^2 > k^2 + 2k + 1 \Leftrightarrow (k-1)^2 > 2$, а последнее неравенство верно при $k \geq 5$, то неравенство $2k^2 > (k+1)^2$ справедливо при $k \geq 5$. ▲

1.3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ естественным образом возникает при знакомстве человека с окружающим миром, например, при перечислении различных предметов. В то время как при сложении двух натуральных чисел всегда получается натуральное число, операция вычитания во множестве $\mathbb{N}$ не всегда возможна. Например, разность 3 – 5 не является натуральным числом. Таким образом, приходим ко множеству целых чисел $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, причем $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. После введения множества рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ становятся возможными все четыре арифметических действия, кроме деления на 0.

Известно, что всякое рациональное число путем деления числителя на знаменатель «столбиком» можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $\frac{14}{55} = 0,2(54)$. В то же время любую бесконечную периодическую десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной дроби.

Пример 1.8. Получить представление в виде обыкновенной дроби числа: 1) 1,(23); 2) 1,2(345).

Δ 1) Обозначим $a = 1,(23)$ и умножим обе части этого равенства на 10^n, где n – число цифр в периоде десятичной дроби, т. е. умножим на $10^2 = 100$. Имеем $100a = 123,(23) = 123 + 0,(23)$. Если от обеих частей этого равенства вычесть число $a = 1 + 0,(23)$, то получим $99a = 122$, откуда $a = \frac{122}{99} = 1\frac{23}{99}$.

2) Поскольку в числе $a = 1,2(345)$ период начинается не сразу после запятой, то, умножив обе части этого равенства на 10^m, где m – число цифр после запятой до периода, т. е. на 10, получим $b = 10a = 12,(345)$. В числе b, как и в первом случае, период начинается после запятой. Поэтому,

умножив b на $10^3 = 1000$, получим $1000b = 12\ 345,(345)$. После вычитания имеем

$$999b = 12\ 333, \text{ т. е. } b = \frac{12\ 333}{999} = \frac{4111}{333},\ a = \frac{4111}{3330} = 1\frac{781}{3330}. \ ▲$$

Нетрудно убедиться, что число

$$1,1(9) = \frac{119-11}{900} = \frac{108}{900} = \frac{12}{100} = 1,2 = 1,2(0).$$

Для взаимной однозначности между обыкновенными и бесконечными периодическими десятичными дробями принято считать, что цифра 9 не может быть периодом бесконечной периодической десятичной дроби. Таким образом, множество $\mathbb{Q}$ можно рассматривать как множество бесконечных периодических десятичных дробей.

Еще в древности было замечено, что рациональных чисел не хватает даже в простейших случаях. Так, длину диагонали квадрата, сторона которого представляет собой единичный отрезок, нельзя выразить никаким рациональным числом.

Пример 1.9. Доказать, что не существует рационального числа q, удовлетворяющего уравнению $q^2 = 2$.

Δ Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что число $q = \frac{m}{n}$, где m и n – целые, взаимно простые числа, удовлетворяет уравнению $m^2 = 2n^2$. Из четности числа m^2 следует, что m – четное число (если бы m было нечетным, то и m^2 было бы нечетным), $m = 2k$. Тогда $n^2 = 2k^2$, т. е. n – четное. Таким образом, оба числа m и n – четные, вопреки нашему выбору чисел m и n. Полученное противоречие доказывает истинность утверждения примера. ▲

Итак, бесконечные непериодические десятичные дроби представляют собой числа, не являющиеся рациональными. Их называют *иррациональными*. Множество рациональных и иррациональных чисел называют множеством *действительных* чисел и обозначают $\mathbb{R}$. При этом $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Уравнение $x^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ всегда имеет единственное положительное решение, которое называется *арифметическим корнем* степени n из числа a и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Запись действительных чисел в виде бесконечной десятичной дроби позволяет сравнивать их между собой.

Модулем, или *абсолютной величиной*, числа a называется неотрицательное число $|a|$ такое, что

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Непосредственно из определения модуля действительных чисел получаются следующие утверждения:

1) $|-a| = |a|$;

2) $-|a| \leq a \leq |a|$;

3) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b \ (b > 0)$;

4) $|a - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < a < b + \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$;

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$;

6) $|a - b| \leq |a| + |b|$;

7) $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$;

8) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

9) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

Прямую, на которой выбрана точка отсчета, единичный отрезок и положительное направление, называют *числовой прямой* или *числовой осью*. Между множеством действительных точек и точками числовой прямой устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Число $|a|$ равно расстоянию между точками 0 и a на числовой прямой. Аналогично $|a - b|$ есть расстояние между точками a и b. Если $a < b$, a, $b \in \mathbb{R}$, то число $\dfrac{a+b}{2}$ лежит на числовой оси посередине между действительными числами a и b, ибо $a + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a+b}{2}$. Это позволяет утверждать, что между любыми двумя действительными числами $a < b$ существует число $c \in \mathbb{R} : a < c < b$.

Пример 1.10. Найти рациональное и иррациональное числа, расположенные между числами 1,4 и $\sqrt{2}$.

Δ Рассмотрим десятичное приближение с недостатком 1,41 числа $\sqrt{2}$, т. е. $1{,}4 < 1{,}41 < \sqrt{2}$. Рассмотрим число $\alpha = \dfrac{1{,}41 + \sqrt{2}}{2}$, удовлетворяющее условию $1{,}4 < \alpha < \sqrt{2}$. Это число иррациональное, ибо в противном случае из равенства $\dfrac{1,41+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ следует, что $\sqrt{2}=\dfrac{2m}{n}-1,41\in\mathbb{Q}$. Таким образом, числа 1,41 и α – искомые. ▲

Любое подмножество множества $\mathbb{R}$ будем называть *числовым множеством*. Для чисел $a<b$, a, $b\in\mathbb{R}$ вводятся следующие числовые множества:

$(a;b)=\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$ – *интервал*;

$[a;b]=\{x\in\mathbb{R}:a\le x\le b\}$ – *отрезок* или *сегмент*;

$(a;b]=\{x\in\mathbb{R}:a<x\le b\}$ – *полуинтервал* (открытый слева);

$[a;b)=\{x\in\mathbb{R}:a\le x<b\}$ – *полуинтервал* (открытый справа).

Каждое из таких множеств называют *промежутком*. Числа a и b называют *левым* и *правым концами* промежутка. Рассматриваются также *бесконечные промежутки*, или *полупрямые*:

$$\left[a;+\infty\right),\ \left(a;+\infty\right),\left(-\infty;b\right],\left(-\infty;b\right).$$

Например, $\left[a;+\infty\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:x\ge a\right\},\left(-\infty;b\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:x<b\right\}$. В частности, используются обозначения $\mathbb{R}_+=\left\{x\in\mathbb{R}:x>0\right\}$, $\mathbb{R}_-=\left\{x\in\mathbb{R}:x<0\right\}$.

Произвольный интервал $(a;b)$, содержащий точку c, т. е. $a<c<b$, будем называть *окрестностью точки c*. В частности, интервал $(c-\varepsilon;c+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, называют *ε-окрестностью точки c* и обозначают $U_\varepsilon(c)$. Если $c\notin U_\varepsilon(c)$, то такую окрестность называют *проколотой окрестностью точки c* и обозначают $\mathring{U}_\varepsilon(c)$.

Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если $\exists M\in\mathbb{R}:$ $\forall x\in X\Rightarrow x\le M$. Пользуясь правилом построения отрицаний де Моргана (1.1), получаем определение не ограниченного сверху множества. Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется *не ограниченным сверху*, если $\forall M\in\mathbb{R}:$ $\exists x\in X:\Rightarrow x>M$. Если число M является верхней границей множества, то любое число $M'>M$ также его верхняя граница. Следовательно, каждое ограниченное сверху множество имеет бесконечно много верхних границ. Наименьшая из верхних границ ограниченного сверху множества X называется его *точной верхней границей* или *верхней гранью* и обозначается $\sup X$ (читается: «*супремум*»).

Числовое множество $X\subset\mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если $\exists m\in\mathbb{R}:\forall x\in X\Rightarrow x\ge m$. Множество $X\subset\mathbb{R}$ называется *не ограниченным снизу*, если $\forall m\in\mathbb{R}:\exists x\in X:\Rightarrow x<m$. Наибольшая из нижних границ ограниченного снизу множества X называется его *точной нижней границей* или *нижней гранью* и обозначается $\inf X$ (читается: «инфимум»).

Если множество X не ограничено сверху, то говорят, что $\sup X = +\infty$. Если множество X не ограничено снизу, то говорят, что $\sup X = -\infty$.

Множество X, ограниченное как сверху, так и снизу, называется *ограниченным*, т. е. $\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \le x \le M$. Очевидно, множество ограничено тогда и только тогда, когда $\exists L \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in X \Rightarrow |x| \le L$.

Определения точных границ можно сформулировать с помощью неравенств:

$$\overline{x} = \sup X \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall x \in X \mapsto x \le \overline{x} \ (\overline{x} - \text{верхняя граница}), \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x > \overline{x} - \varepsilon \ (\overline{x} - \text{наименьшая из верхних границ}); \end{cases}$$

$$\underline{x} = \inf X \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall x \in X \mapsto x \ge \underline{x} (\underline{x} - \text{нижняя граница}), \\ 2) \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : x < \underline{x} + \varepsilon \ (\underline{x} - \text{наибольшая из нижних границ}). \end{cases}$$

Если существует $\max X$ – наибольшее число множества X, то $\sup X = \max X \in X$. Если существует $\min X$ – наименьшее число множества X, то $\inf X = \min X \in X$. Но множество X может не содержать наибольшего или наименьшего числа, даже если оно ограничено.

Например,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\} -$$

множество правильных положительных дробей не имеет ни наименьшей, ни наибольшей дроби. Но это не значит, что множество $\mathbb{Q}$ не имеет точных нижней и верхней границ. Ответ на вопрос о существовании точных границ дает следующая теорема.

Теорема 1.2 (о гранях). *Всякое непустое ограниченное сверху* (*снизу*) *множество действительных чисел имеет точную верхнюю* (*нижнюю*) *границу*.

Пример 1.11. Пусть элементами множества X являются числа $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Найти точные границы множества X.

Δ Поскольку $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1$, то числа x_n располагаются в порядке возрастания $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, поэтому наименьшим элементом множества X является число x_1, т. е. $\min X = \inf X = \dfrac{1}{2}$.

Естественно предположить, что в X нет наибольшего элемента. Докажем это методом от противного. Пусть $\max X = x_m$. Тогда для элемента x_{m+1} выполняется соотношение

$$x_{m+1} = \frac{m+1}{m+2} = \frac{(m+2)-1}{m+2} = 1 - \frac{1}{m+2} > 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1} = x_m,$$

т. е. в X существует элемент, больший чем $\max X$.

Поскольку $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \ \ \forall n,$ то число 1 является верхней границей и можно предположить, что $\sup X = 1$. Чтобы это доказать, следует убедиться в том, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} : x_\nu > 1 - \varepsilon.$ Если $\varepsilon \geq 1$, то неравенство выполняется при всех n, поскольку $x_n > 0 \ \forall n$. Если же $0 < \varepsilon < 1$, то $x_\nu > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\nu+1} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$ Существует бесконечно много чисел ν, удовлетворяющих последнему неравенству. Наименьшим из них является число $\left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1,$ где $[x]$ – целая часть числа x. ▲

Пример 1.12. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, а $X + Y = \{z : z = x + y, x \in X, y \in Y\}$. Доказать, что $\inf\{X + Y\} = \inf X + \inf Y$.

Δ Если $m_1 = \inf X,\ m_2 = \inf Y,$ то $\forall x \in X \mapsto x \geq m_1,\ \forall y \in Y \mapsto y \geq m_2.$ Поэтому $x + y \geq m_1 + m_2 \ \ \forall x \in X,\ \forall y \in Y,$ т. е. $m_1 + m_2$ – нижняя граница множества $X + Y$. По определению точной нижней границы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x' \in X, \exists y' \in Y : m_1 \leq x' < m_1 + \frac{\varepsilon}{2},\ \ m_2 \leq y' < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что $m_1 + m_2 \leq x' + y' < m_1 + m_2 + \varepsilon$, т. е. $m_1 + m_2 = \inf\{X + Y\}$. А поскольку $m_1 + m_2 = \inf X + \inf Y$, то $\inf\{X + Y\} = \inf X + \inf Y$. ▲

З а м е ч а н и е 1.1. Аналогично можно доказать, что

$$\sup\{X + Y\} = \sup X + \sup Y.$$

1.4. СУММИРОВАНИЕ. КОМБИНАТОРИКА. БИНОМ НЬЮТОНА

Сумма данных n чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ записывается в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Буква k называется *индексом суммирования*. Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i =$

$=\sum_{j=1}^{n} a_j$. Иногда возникает необходимость сдвинуть границы изменения индекса суммирования в ту или иную сторону. Например, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=3}^{n+2} a_{k-2} = \sum_{k=m+1}^{n+m} a_{k-m}$. Операция суммирования имеет свойство линейности $\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} a_k + \beta\sum_{k=1}^{n} b_k$. Сумму $m \cdot n$ слагаемых a_{ij}, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$, записывают в виде $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ и называют *двойной суммой*. При этом имеет место равенство $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

Пример 1.13. Вычислить сумму n первых членов геометрической прогрессии с общим членом $b_n = bq^{n-1}$.

Δ Если $q = 1$, то $b_n = b$, а $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} b = bn$. При $q \neq 1$ имеем

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} bq^{k-1} = b + \sum_{k=2}^{n} bq^{k-1} = b + \sum_{k=1}^{n-1} bq^k =$$

$$= b + q\sum_{k=1}^{n-1} bq^{k-1} = b + q\sum_{k=0}^{n-2} bq^k = b + q\left(\sum_{k=0}^{n-1} bq^k - bq^{n-1}\right) = b + q\sum_{k=1}^{n} bq^{k-1} - bq^n.$$

Имеем равенство $\sum_{k=1}^{n} bq^{k-1} = b + q\sum_{k=1}^{n} bq^{k-1} - bq^n$, откуда $(1-q)\sum_{k=1}^{n} bq^{k-1} = b - bq^n$. Окончательно получаем формулу суммы геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{n} bq^{k-1} = b\frac{1-q^n}{1-q}$. ▲

Пример 1.14. Доказать, что для любой последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ имеет место равенство $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

Δ Пользуясь правилами суммирования, имеем

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} + a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} a_k + a_{n+1} - a_1 - \sum_{k=2}^{n} a_k = a_{n+1} - a_1. \ ▲$$

Пример 1.15. Вычислить $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Δ Поскольку $(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, то

$$\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + (n+1).$$

Из примера 1.14 следует, что $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3$. По формуле суммы арифметической прогрессии (см. пример 1.4) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому

$$(n+1)^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ откуда } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \ \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 1.2. Применяя последовательно метод, изложенный в примере 1.14, можно вычислить $\sum_{k=1}^{n} k^m$ для всех натуральных m.

Аналогично сокращенной записи для сумм пользуются сокращенной записью произведений чисел $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$. Произведение $\prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ обозначают $n!$ и читают «эн факториал».

При этом для удобства использования считают $0! = 1$. В силу этой договоренности для всех натуральных n имеет место равенство $n! = (n-1)!\cdot n$. Для сокращенной записи произведения четных и нечетных чисел используют следующие обозначения:

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n = (2n)!!; \ \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1) = (2n-1)!!.$$

Знак !! читается как «два факториал».

Задачи, связанные с выбором тех или иных элементов из некоторого множества, называются *комбинаторными*. При решении таких задач используют *правило умножения*: если определенный выбор A можно сделать n различными способами, а для каждого из этих способов другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B (в указанном порядке) можно сделать $m \cdot n$ способами.

Каждое k-элементное подмножество, составленное из разных элементов n-элементного множества, называется *сочетанием* из n элементов по k

элементов. Количество всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}. \qquad (1.2)$$

Пример 1.16. На плоскости проведено n прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

Δ Каждая точка пересечения однозначно определяется парой проходящих через нее прямых. При этом порядок рассмотрения этих прямых не имеет значения. Поэтому искомое число точек пересечения равно числу сочетаний из n по 2, т. е. $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. ▲

Каждое упорядоченное k-элементное подмножество, составленное из разных элементов n-элементного множества, называется *размещением* из n элементов по k элементов. Количество всех размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)).$$

Пример 1.17. В группе 25 студентов. Необходимо выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколькими способами это можно сделать, если каждый студент имеет право занять только одну должность?

Δ Сначала для выбора старосты существует 25 вариантов. Если староста выбран, то для выбора его заместителя остается 24 возможности. В итоге для выбора профорга имеет место 23 варианта. Общее число возможных способов удовлетворяет правилу умножения, т. е. $25 \cdot 24 \cdot 23 = 1380$.

Рассуждая иначе, мы приходим к нахождению числа выбора трех элементов из 25. При этом важен порядок выбора этих трех элементов. Таким образом, ответ дадим формулой $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 1380$. ▲

Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками* из n элементов. Количество всех перастановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Пример 1.18. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Δ Поскольку число делится на 5, то его последней цифрой является 5. Остальные пять цифр могут стоять на свободных пяти местах. Поэтому искомое количество чисел равно $5! = 120$. ▲

Для действительных чисел a, b и каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место *формула бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (1.3)$$

где коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами* и вычисляются по формуле (1.2), а $C_n^0 = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$. Свойства $C_n^k = C_n^{n-k}$ (*симметрия биномиальных коэффициентов*) и $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ дают возможность выписать биномиальные коэффициенты в виде таблицы, которую называют *треугольником Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}$$

....

Отметим еще одно важное свойство биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

которое следует непосредственно из формулы (1.3), если взять $a = b = 1$.

Пример 1.19. Найти коэффициент разложения $\left(\sqrt[5]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{43}$ при x^7.

Δ Воспользуемся формулой бинома Ньютона (1.3)

$$\left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{43} = \sum_{k=0}^{43} C_{43}^k \left(x^{1/5}\right)^{43-k} \left(-x^{-1/3}\right)^k = \sum_{k=0}^{43} (-1)^k C_{43}^k x^{\frac{129-8k}{15}}.$$

Из равенства $\dfrac{129-8k}{15} = 7$ получаем $k = 3$, т. е. коэффициент при x^7 рассматриваемого разложения будет равен

$$(-1)^3 C_{43}^3 = -\frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -43 \cdot 7 \cdot 41 = -12\,341. \ \blacktriangle$$

Пример 1.20. Вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Δ Рассмотрим тождество $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$. Левая часть этого равенства в развернутом виде

$$\left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right).$$

Если вычислить в этом выражении коэффициент при x^n, то он равен

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \ldots + C_n^n C_n^0.$$

В силу симметрии биномиальных коэффициентов $C_n^k = C_n^{n-k}$ последнее выражение можно записать в виде $C_n^0 C_n^0 + C_n^1 C_n^1 + C_n^2 C_n^2 + \ldots + C_n^n C_n^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$. Учитывая, что коэффициент при x^n выражения $(1+x)^{2n}$ равен C_{2n}^n, приходим к равенству $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$. ▲

1.5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Упорядоченная пара двух действительных чисел x, y называется *комплексным числом* z, т. е. $z = (x; y)$. Если при этом $y = 0$, то комплексное число $(x;0)$ отождествляют с действительным числом x, т. е. $(x;0) = x$. В соответствии с этим множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является подмножеством множества комплексных чисел $\mathbb{C}$, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1; y_1)$ и $z_2 = (x_2; y_2)$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, т. е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$. Например, $(-1;0) = (\cos\pi; \sin\pi)$, однако $(-1;0) \neq (0;-1)$.

Арифметические действия над комплексными числами z_1 и z_2 выполняются по правилам:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$;
2) $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$;
3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$, $z_2 \neq (0;0) = 0$.

Комплексное число $(0;1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается i, т. е. $i = (0;1)$. В соответствии с правилом 2) умножения комплексных чисел $i^2 = ii = (0;1)(0;1) = (0-1; 0+0) = (-1;0)$. Учитывая, что $(-1;0) = -1$, получаем $i^2 = -1$. Вычислив произведение действительного числа y на i, получаем $yi = (y;0)(0;1) = (0;y)$ – комплексное число. Комплексное число yi называется *чисто мнимым*. Поскольку комплексное число $z = (x;y)$ можно представить в виде $z = (x;y) = (x;0) + (0;y) = x + yi$, то в дальнейшем будем использовать запись комплексного числа z в виде $z = x + yi$, которую называют *алгебраической формой* комплексного числа. При этом x называют *действительной частью* комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Re} z = x$, а y – *мнимой частью* комплексного числа z и обозначают $\operatorname{Im} z = y$. Таким образом, $z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z$.

При перемножении двух комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, нет необходимости запоминать правило 2) вычисления их произведения. *Для умножения двух комплексных чисел достаточно перемножить их как два алгебраических двучлена, заменив при этом* i^2 *на* -1.

Комплексные числа $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ называются *комплексно-сопряженными*. Их произведение всегда есть действительное число, т. е. $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$.

При делении комплексных чисел воспользуемся преобразованием

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Это значит, что *для деления комплексных чисел достаточно домножить числитель и знаменатель на число, комплексно-сопряженное знаменателю*.

Пример 1.21. Найти действительную и мнимую части числа

$$z = \frac{1 - i^{113}}{2 + i^{115}}.$$

Δ Учитывая равенства $i^{113} = i^{112}i = i$; $i^{115} = i^{112}i^2 i = -i$, получаем

$$z = \frac{1 - i^{113}}{2 + i^{115}} = \frac{1 - i}{2 - i} = \frac{(1 - i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i - 2i - i^2}{4 - i^2} = \frac{3 - i}{5}.$$

Таким образом, $\operatorname{Re} z = \frac{3}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{1}{5}$. ▲

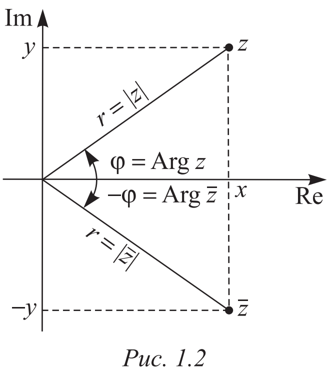


Рис. 1.2

Поскольку комплексное число определяется как упорядоченная пара чисел, то геометрически комплексное число $z = x + yi$ естественно представляется точкой плоскости с декартовыми координатами $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Такую плоскость называют *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*. Комплексное число $z = x + yi$ можно также изображать радиус-вектором с координатами $(x; y)$, проведенным в эту точку из начала координат (рис. 1.2).

Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа $z = x + yi$ и обозначается $|z|$. Очевидно $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол между положительным направлением оси Ox и вектором z называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\operatorname{Arg} z$, при этом направление против часовой стрелки считается *положительным*, по часовой стрелке – *отрицательным* (см. рис. 1.2). Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен. Для чисел $z \neq 0$ аргумент определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Если $\varphi = \operatorname{Arg} z$, $r = |z|$, то $\cos\varphi = x / r$, $\sin\varphi = y / r$, поэтому комплексное число z можно записать в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.4}$$

Выражение (1.4) называют *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Аргумент комплексного числа $z = x + yi$ можно вычислить из уравнения $\operatorname{tg}\varphi = y / x$, однако он находится неоднозначно, поскольку аргументы обоих чисел $z = x + yi$ и $-z = -x - yi$ являются решениями этого уравнения. При вычислении аргумента комплексного числа из уравнения $\operatorname{tg}\varphi = y / x$ руководствуются следующим правилом:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(y / x),\ x > 0;\quad \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}(y / x) + \pi,\ x < 0.$$

Пример 1.22. Найти аргументы комплексных чисел:

$$z_1 = 1 - i;\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Δ Поскольку число z_1 расположено в четвертом квадранте, то $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi / 4$. В то же время $\operatorname{Re} z_2 < 0$, поэтому

$$\operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = -\pi / 3 + \pi = 2\pi / 3. \ ▲$$

Пример 1.23. Найти модули и аргументы чисел:

$$z_1 = -\cos(\pi / 7) + i\sin(\pi / 7),\ z_2 = 3\sin(\pi / 5) - 3i\cos(\pi / 5).$$

Δ На основании тригонометрических формул приведения выполним следующие преобразования:

$$z_1 = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7};$$

$$z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)\right) = 3\left(\cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}\right).$$

Поскольку z_1 и z_2 представлены в тригонометрической форме, то

$$|z_1| = 1,\ \operatorname{Arg} z_1 = \frac{6\pi}{7};\ |z_2| = 3,\ \operatorname{Arg} z_2 = \frac{17\pi}{10}.\ \blacktriangle$$

Тригонометрическая форма является удобной для умножения и деления комплексных чисел.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Из правила умножения комплексных чисел (1.5) следует:

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.6}$$

В частности, при $r = 1$ получаем *формулу Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{1.7}$$

Пример 1.24. Вычислить $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^9$.

Δ Представим число $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ в тригонометрической форме. Поскольку $|z| = 1$, $\operatorname{Arg} z = \frac{2\pi}{3}$ (см. пример 1.22), то $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Воспользовавшись формулой Муавра (1.7), получаем

$$z^9 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^9 = \cos\frac{18\pi}{3} + i\sin\frac{18\pi}{3} = \cos 6\pi + i\sin 6\pi = 1.\ \blacktriangle$$

Пример 1.25. Выразить $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Δ Число $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ возведем в третью степень двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона (1.3), получим

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi(i\sin\varphi)^2 + (i\sin\varphi)^3 =$$

$$= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right).$$

Второй способ. Из формулы Муавра (1.7) следует

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, имеем

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.\ \blacktriangle$$

Корнем n-й степени $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z называется число w такое, что $w^n = z$. Если $z \neq 0$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то существует n различных значений корня n-й степени из числа z, которые находятся по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}. \qquad (1.8)$$

Здесь $\sqrt[n]{r}$ есть арифметическое значение корня из положительного числа.

Например, $\sqrt{1}$ как арифметический корень из действительного числа 1 имеет единственное значение 1, а $\sqrt{1}$ как из комплексного числа $\sqrt{1+0i}$ имеет два значения 1 и -1.

Комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа z, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке O.

Пример 1.26. Вычислить $\sqrt{5-12i}$.

Δ При вычислении корня квадратного иногда удобнее использовать вместо формулы (1.8) определение корня второй степени из комплексного числа. Пусть $\sqrt{5-12i} = a + bi$, тогда $5 - 12i = a^2 + 2abi - b^2$. Числа a и b находятся из системы уравнений $a^2 - b^2 = 5$, $ab = -6$, решения которой $(-3; 2)$ и $(3; -2)$. Таким образом, комплексные числа $-3 + 2i$ и $3 - 2i$ являются двумя значениями $\sqrt{5-12i}$. ▲

Пример 1.27. Найти все значения $\sqrt[3]{-i}$.

Δ Поскольку $i^3 = -i$, то число $w_1 = i$ является одним из трех искомых корней, так как $|w_1| = |i| = 1$, то остальные корни расположены в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиусом 1 (рис. 1.3). Из геометрических соображений получаем

$$w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ w_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}. \ ▲$$

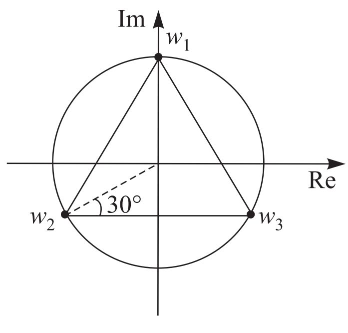


Рис. 1.3

Если модуль комплексного числа z равен единице, то в силу формулы (1.4) имеем $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Такое комплексное число обозначается символом $e^{i\varphi}$, т. е. имеет место *формула Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1.9)$$

Заменяя в выражении (1.9) φ на $-\varphi$, получаем равенство

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (1.10)$$

После сложения и вычитания равенств (1.9) и (1.10) получаются еще две *формулы Эйлера*:

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right),\ \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right).$$

Из формул (1.4) и (1.9) следует *показательная форма* комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi},\ r = |z|,\ \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из равенств (1.5), (1.6), (1.8) получаются формулы:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z^n = r^n e^{i\varphi n},\ \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}},\ k = \overline{0, n-1},$$

позволяющие производить действия умножения, деления, возведение в степень, извлечение корня с комплексными числами, записанными в показательной форме.

1.6. МНОГОЧЛЕНЫ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Многочленом, или *полиномом*, n-й степени называют выражение

$$P_n(x) = C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_1 x + C_0,\ C_n \neq 0,$$

где коэффициенты C_k, $k = \overline{0, n}$, и переменная x могут быть как комплексными, так и действительными числами. Два многочлена тождественно равны один другому тогда и только тогда, когда равны их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x.

Для каждых двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, $m < n$, существуют многочлены $S_{n-m}(x)$ и $R_l(x)$, $l < m$, такие, что многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = Q_m(x)\cdot S_{n-m}(x) + R_l(x)$. Многочлен $S_{n-m}(x)$ называют *частным*, а многочлен $R_l(x)$ – *остатком* от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$. Если многочлен $R_l(x) \equiv 0$, то говорят, что $P_n(x)$ *делится* на $Q_m(x)$, при этом многочлен $Q_m(x)$ называют *делителем* многочлена $P_n(x)$.

Число a называют *корнем* многочлена $P_n(x)$, если $P_n(a) = 0$.

Теорема 1.3 (Безу). *Число a является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на $x - a$, т. е. $P_n(x) = (x - a)P_{n-1}(x)$.*

Если существует число $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$, такое, что для многочлена $P_{n-k}(x)$ выполняются условия $P_n(x) = (x - a)^k P_{n-k}(x)$, $P_{n-k}(a) \neq 0$, то число a называется *корнем* многочлена $P_{n-k}(x)$ *кратности k*.

Теорема 1.4 (Гаусса, или основная теорема алгебры). *Всякий многочлен степени* $n \geq 1$ *имеет во множестве комплексных чисел по крайней мере один корень* (*комплексный или действительный*).

Если $a_1, a_2, ..., a_m$ – разные корни многочлена, а $k_1, k_2, ..., k_m$ – их кратности, то из теоремы 1.4 следует, что каждый многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = C_n\left(x - a_1\right)^{k_1}\left(x - a_2\right)^{k_2} \cdot ... \cdot \left(x - a_m\right)^{k_m}, \qquad (1.11)$$

причем $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.

Если комплексное число $z = \alpha + i\beta$ является корнем кратности k многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами, то комплексно-сопряженное число $\overline{z} = \alpha - i\beta$ также является корнем кратности k многочлена $P_n(x)$. Если в (1.11) перемножить множители, которые соответствуют сопряженным корням, то равенство (1.11) приобретает вид

$$P_n(x) = C_n\left(x - a_1\right)^{k_1} \cdot ... \cdot \left(x - a_r\right)^{k_r}\left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot ... \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}, \qquad (1.12)$$

где $a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, r},\ p_j, q_j \in \mathbb{R},\quad p_j^2 - 4q_j < 0,\ j = \overline{1, s},\ \sum\limits_{i=1}^{r} k_i + 2\sum\limits_{j=1}^{s} l_j = n.$

Пример 1.28. Решить уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Δ Поскольку $\sqrt{-1} = \pm i$, то, пользуясь формулой вычисления корней квадратного уравнения, находим $x = -1 \pm \sqrt{1 - 3} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i\sqrt{2}$. ▲

Пример 1.29. Представить многочлен $x^4 + 4$ в виде произведения двух многочленов второй степени с действительными коэффициентами.

Δ *Первый способ*. По формуле (1.8) вычислим $\sqrt[4]{-4}$. Имеем:

$$x_1 = 1 + i,\ x_2 = 1 - i,\quad x_3 = -1 + i,\ x_4 = -1 - i.$$

В таком случае многочлен $x^4 + 4$ в соствествии с формулой (1.11) можно представить в виде $x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$. Перемножая попарно линейные множители, соответствующие комплексно-сопряженным корням, получим $x^4 + 4 = \left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right)$.

Второй способ. Выделяем в сумме квадратов $\left(x^2\right)^2 + 2^2$ квадрат суммы. Имеем $x^4 + 4 = \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2 = \left(x^2 + 2 - 2x\right)\left(x^2 + 2 + 2x\right)$, что привело к тому же результату. ▲

Выражение $P(x) / Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены, называется *рациональной дробью.* Если степень многочлена $P(x)$ меньше, чем степень многочлена $Q(x)$, то рациональная дробь $P(x) / Q(x)$ называется *правильной*.

В ином случае дробь $P(x)$ / $Q(x)$ называется *неправильной* и ее можно представить в виде $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – частное, а $R(x)$ – остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$. При этом рациональная дробь $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная.

Пусть $P(x)$ / $Q(x)$ является правильной рациональной дробью, в которой многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют действительные коэффициенты, при этом многочлен $Q(x)$ разлагается на множители в соответствии с формулой (1.12). Тогда существуют действительные константы $A_i^{(k)}$ $(i = \overline{1,r},\ m = \overline{1,k_i})$, $M_j^{(r)},\ N_j^{(r)}$ $(j = \overline{1,s},\ r = \overline{1,l_j})$ такие, что имеет место равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{m=1}^{k_i}\frac{A_i^{(m)}}{(x-a_i)^m} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{r=1}^{l_j}\frac{M_j^{(r)}x + N_j^{(r)}}{\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^r}. \tag{1.13}$$

Слагаемые в правой части равенства (1.13) называются *простыми рациональными дробями*. На примерах рассмотрим основные способы нахождения коэффициентов разложения правильной рациональной дроби на сумму простых дробей.

Пример 1.30. Разложить на сумму простых рациональных дробей:

а) $\dfrac{x^3 + 7x + 32}{x\left(x^2+4\right)^2}$; в) $\dfrac{x^3 + x^2 - 2x + 7}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$;

б) $\dfrac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)}$; г) $\dfrac{x^3+3}{(x+3)^{100}}$.

Δ а) На основании формулы (1.13) имеем

$$\frac{x^3 + 7x + 32}{x\left(x^2+4\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Из равенства рациональных дробей следует равенство многочленов

$$x^3 + 7x + 32 = A\left(x^2+4\right)^2 + (Bx+C)x\left(x^2+4\right) + x(Dx+E).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему:

$$x^0 : 16A = 32, \quad x^2 : 8A + 4B + D = 0, \quad x^4 : A + B = 0,$$
$$x^1 : 4C + E = 7, \quad x^3 : C = 1,$$

решение которой есть $A = 2$, $B = -2$, $C = 1$, $D = -8$, $E = 3$. Таким образом,

$$\frac{x^3 + 7x + 32}{x\left(x^2 + 4\right)^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x - 1}{x^2 + 4} - \frac{8x - 3}{\left(x^2 + 4\right)^2}.$$

Этот способ называется *способом соответствующих коэффициентов*.

б) В случае когда корни знаменателя рациональной функции простые, особенно удобным является *способ домножения*. Сначала запишем разложение дроби на простые с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Умножая обе части этого равенства на $x - 1$, имеем

$$\frac{1}{2(x-2)(x-3)} = A + \frac{B}{x-2}(x-1) + \frac{C}{x-3}(x-1).$$

Подставляя в обе части полученного равенства значение $x = 1$ (корень двучлена $x - 1$), получим $A = 1/4$. Аналогично вычисляются $B = -1/2$, $C = 1/4$. Таким образом,

$$\frac{1}{2(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{4(x-3)}.$$

в) Корни знаменателя в этом случае также простые, хотя и комплексные. Запишем разложение дроби на сумму простых дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x + 7}{\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 4\right)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$x^3 + x^2 - 2x + 7 = (Ax + B)\left(x^2 + 4\right) + (Cx + D)\left(x^2 + 1\right).$$

Взяв значения $x = i$ и $x = 2i$, получим равенства:

$$6 - 3i = 3(Ai + B),$$

$$3 - 12i = -3(2Ci + D).$$

Приравняв действительные и мнимые части из обеих частей этих равенств, находим $A = -1$, $B = 2$, $C = 2$, $D = -1$. Таким образом,

$$\frac{x^3 + x^2 - 2x + 7}{\left(x^2 + 1\right)\left(x^2 + 4\right)} = \frac{2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x - 1}{x^2 + 4}.$$

г) Взяв $x + 3 = t$, получим

$$\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}} = \frac{(t-3)^3+3}{t^{100}} = \frac{t^3-9t^2+27t-24}{t^{100}} =$$

$$= \frac{1}{t^{97}} - \frac{9}{t^{98}} + \frac{27}{t^{99}} - \frac{24}{t^{100}} = \frac{1}{(x+3)^{97}} - \frac{9}{(x+3)^{98}} + \frac{27}{(x+3)^{99}} - \frac{24}{(x+3)^{100}}. \blacktriangle$$

Задачи для самостоятельной работы

1.1. Вычислить $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, если: а) $a_i = i$; б) $a_i = i+2$; в) $a_i = 1+2i$.

1.2. Вычислить $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, если: а) $a_{ij} = i$; б) $a_{ii} = i+1$; в) $a_{ij} = j+i$.

1.3. Вычислить $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$, где $\{a_k\}$ – арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля.

1.4. Доказать, что для любых действительных чисел a и b справедливо равенство $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1}$.

1.5. Доказать, что если A – наименьшее, B – наибольшее из положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, то $A \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \le B$.

1.6. Доказать, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$, удовлетворяющих условиям $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$, справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le 1$.

1.7. Доказать справедливость формул:

а) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

б) $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b\right) + 6abc$;

в) $(a+b+c)^n = \sum\limits_{i+j=0}^{n} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!} a^i b^j c^{n-i-j}$.

1.8. Применяя метод математической индукции, доказать, что для всех натуральных n справедливы равенства:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$;

в) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{n}$.

б) $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;

1.9. При каких натуральных значениях n верно неравенство $n! > 2^n$?

1.10. Доказать, что если p – простое число, то при всех натуральных n число $n^p - 1$ делится на p (теорема Ферма).

1.11. Сколько диагоналей имеет выпуклый n-угольник?

1.12. Найти члены разложения $\left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\right)^7$, являющиеся целыми числами.

1.13. Вычислить сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $\left(1 + 3x - 5x^2\right)^{123}\left(1 - 3x + 3x^2\right)^{124}$.

1.14. Найти наибольший коэффициент многочлена $\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x\right)^5$.

1.15. Найти точные грани множества рациональных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x^2 < 2$.

1.16. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, а $Y = \{y : y = -x,\ x \in X\}$. Доказать, что: а) $\inf Y = -\sup X$; б) $\sup Y = -\inf X$.

1.17. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, а $X - Y = \{z : z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}$. Докажите, что $\sup\{X - Y\} = \sup X - \inf Y$.

1.18. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найти четвертую вершину этого параллелограмма.

1.19. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся вершинами треугольника. Найти точку пересечения его медиан.

1.20. Найти комплексное число, соответствующее точке, лежащей на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2. Модуль числа равен 10.

1.21. Доказать, что модуль разности комплексных чисел z_1 и z_2 равен расстоянию между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости. Найти множество точек комплексной плоскости, заданных условием: а) $|z + i| = 1$; б) $|z - i| = |z + 1|$; в) $|z - 1| < |z + 3|$; г) $\log_2 |2z + i| < 0$.

1.22. Записать комплексное число $\dfrac{1}{(\sin 29° + i\cos 29°)^{10}}$ в алгебраической форме.

1.23. Записать комплексное число $\left(\dfrac{i\sqrt{3} + 1}{i - 1}\right)^6$ в тригонометрической форме.

1.24. При каких целых значениях n справедливо равенство $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$?

1.25. Решить уравнения: а) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$; б) $z^2 + 4z + 7 = 0$.

1.26. Представить многочлен $z^7 + z^6 + 64z + 64$ в виде произведения линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

1.27. При делении многочлена $P(z)$ на $z - i$ в остатке получается i, а при делении на $z + i$ получается $1 + i$. Найти остаток от деления $P(z)$ на $z^2 + 1$.

1.28. Решить уравнение $(z-i)z(z+i)(z+2i) = 24$.

1.29. Доказать, что если многочлен $P(z)$ с действительными коэффициентами имеет корень $z = a + bi$, то многочлен $z^2 - 2az + a^2 + b^2$ является делителем многочлена $P(z)$.

1.30. Убедиться, что число $1 + i$ является корнем уравнения $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2 = 0$, и найти остальные корни.

Ответы и указания

1.1. а) $\frac{n(n+1)}{2}$; б) $\frac{n(n+5)}{2}$; в) $n(n+2)$. **1.2.** а) $\frac{n^2(n+1)}{2}$; б) $\frac{n^2(n+3)}{2}$; в) $n^2(n+1)$. **1.3.** $\frac{n}{a_1 a_{n+1}}$. **1.4.** Воспользуйтесь формулой суммы геометрической прогрессии, взяв $q = \frac{b}{a}$. **1.6.** Воспользуйтесь неравенствами $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2 \geq 0$. **1.7.** в) Воспользуйтесь формулой бинома Ньютона. **1.8.** а) Воспользуйтесь формулой $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab}$. **1.11.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **1.12.** -420. **1.13.** -1. **1.14.** $\frac{54}{625}$. **1.15.** $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. **1.18.** $z_1 - z_2 + z_3$. **1.19.** $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$. *Подсказка*: точка $\frac{z_1 + z_2}{2}$ является серединой отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2, а точка $\frac{2z_1 + z_2}{3}$ – третья часть отрезка, считая от z_1 (Почему?). Напоминаем, что в точке пересечения медианы делятся в отношении 1 : 2. **1.20.** $7\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. *Совет*: на сторонах угла выберите две точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от начала координат. Тогда середина отрезка, соединяющего эти две точки, расположена на биссектрисе. **1.21.** а) Окружность единичного радиуса с центром в точке $-i$; б) биссектриса второго и третьего квадрантов; в) полуплоскость $\operatorname{Re} z > -1$; г) круг радиусом $1/2$ с центром в точке $-i/2$ за исключением центра круга и граничной окружности. **1.22.** $\cos 110° + i\sin 110°$. **1.23.** $8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$. **1.24.** $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. **1.25.** а) -1; 3; $1 - 2i$; $1 + 2i$; б) $-2 \pm i\sqrt{3}$. **1.26.** $(z+1)(z^2+4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)$. **1.27.** $\frac{i}{2}z + \frac{1}{2} + i$. **1.28.** $\sqrt{5} - i$; $-\sqrt{5} - i$; $\sqrt{3} - i$; $-\sqrt{3} - i$. **1.30.** $1 - i$; $\frac{\sqrt{13}-1}{6}$; $-\frac{\sqrt{13}+1}{6}$.

Глава 2
ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ

2.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Направленным отрезком называется отрезок прямой, для которого указано, какая из ограничивающих его точек является началом, а какая концом. Направленный отрезок, началом которого является точка A, а концом – точка B, обозначается символом AB. *Нулевым отрезком* называется пара совпадающих точек.

Два направленных отрезка AB и CD называются *равными*, если $A = C$ и $B = D$.

Возьмем два ненулевых направленных отрезка AB и CD, лежащих на двух различных параллельных прямых. Проведем через точки A и C плоскость П, не проходящую через точки B и D. Плоскость П делит множество всех точек пространства, не принадлежащих П, на два полупространства. Если точки B и D лежат в одном и том же полупространстве, то направленные отрезки AB и CD называют *одинаково направленными.* Если точки B и D лежат в разных полупространствах, то направленные отрезки AB и CD называют *противоположно направленными.* Пусть направленные отрезки AB и EF лежат на одной прямой. Будем говорить, что эти отрезки *одинаково направлены*, если существует такой направленный отрезок CD, который одинаково направлен с каждым из отрезков AB и EF. В противном случае отрезки AB и EF называются *противоположно направленными*. Нулевой отрезок считается одинаково направленным и противоположно направленным с любым отрезком.

Два направленных отрезка AB и CD называются *эквивалентными*, если они имеет одну и ту же длину и одинаково направлены.

Множество всех направленных отрезков разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу отрезков.

Определение 2.1. ***Свободным вектором*** называется класс эквивалентных направленных отрезков.

Замечание 2.1. В дальнейшем под словом «вектор» мы будем понимать «свободный вектор».

Для задания вектора, т. е. класса эквивалентных направленных отрезков, достаточно указать какой-либо один отрезок из этого класса. С другой стороны, любой направленный отрезок AB задает вполне определенный вектор, а именно класс направленных отрезков, эквивалентных направленному отрезку AB. Вектор, определяемый направленным отрезком AB, будем обозначать символом $\overrightarrow{AB}$. Тот же самый вектор определяется любым направленным отрезком $CD \sim AB$. Равенство векторов $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ по определению равносильно условию $CD \sim AB$, т. е. векторы $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$ называются равными, если они составлены из одних и тех же направленных отрезков. Нулевой вектор, т. е. класс всех нулевых отрезков, будем обозначать символом $\vec{0}$.

Каждый из направленных отрезков, составляющих свободный вектор, называется его *представителем*. На чертеже свободный вектор изображается своим представителем.

Определение 2.2. Два вектора называются ***равными***, если они совпадают как классы эквивалентных направленных отрезков.

Пусть даны вектор $\vec{a}$ и точка A. Существует единственная точка B такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Нахождение такой точки B называется *откладыванием вектора* $\vec{a}$ *от точки* A.

Определение 2.3. ***Длиной вектора*** $\vec{a}$ называется длина его представителя.

Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 2.4. ***Углом между векторами*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между представителями этих векторов, отложенными от одной точки, т. е. угол между отрезками OA и OB, если $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Определение 2.5. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются ***коллинеарными*** **(*компланарными*)**, если образующие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой (плоскости). В противном случае говорят, что векторы неколлинеарны (некомпланарны).

Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем какую-либо точку O и отложим от нее вектор $\vec{a}$, т. е. построим такой отрезок OA, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Далее, от точки A отложим вектор $\vec{b}$, т. е. построим такой отрезок AB, что $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается

$\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 2.1). Указанный способ построения вектора $\vec{a}+\vec{b}$ называется *правилом замыкающей.*

Для неколлинеарных векторов сумму можно получить по *правилу параллелограмма.* Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. Отложим от произвольной точки O эти векторы, т. е. построим такие отрезки OA и OB, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. В плоскости, определяемой точками O, A, B, построим параллелограмм $OACB$ на сторонах OA и OB. Тогда вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 2.2).

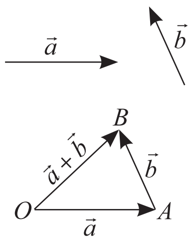


Рис. 2.1

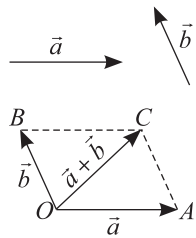


Рис. 2.2

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор. Отложим от некоторой точки A вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным вектору* $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Определение 2.6. ***Разностью векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Определение 2.7. ***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на действительное число*** α называется вектор, который обозначается $\alpha\vec{a}$ и удовлетворяет условиям:

1) $|\alpha\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|$;

2) векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ одинаково направлены, если $\alpha > 0$, и противоположно направлены, если $\alpha < 0$.

Для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и действительных чисел α, β имеют место следующие свойства:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативный, или переместительный, закон);

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (сочетательный, или ассоциативный, закон);

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (закон поглощения нулевого вектора);

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (существование противоположного вектора);

5) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (распределительный, или дистрибутивный, закон);

6) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (распределительный, или дистрибутивный, закон);

7) $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ (сочетательный, или ассоциативный, закон);

8) $1\vec{a}=\vec{a}$.

Замечание 2.2. Пусть $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ есть произвольная система векторов, α_1, …, α_n – произвольная система чисел. Вектор $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{a}_i$ называется линейной комбинацией векторов.

Пример 2.1. Точки E и F – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

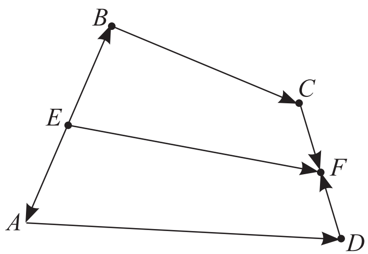


Рис. 2.3

Δ По правилу сложения векторов (правило замыкающей) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$ и $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$ (рис. 2.3). Складывая эти равенства, получим $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+$ $+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$. Поскольку E и F – середины сторон AB и CD, а также $\overrightarrow{EB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CF}\uparrow\downarrow\overrightarrow{DF}$, то $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{DF}$. Следовательно, $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$, что и требовалось доказать. ▲

Пример 2.2. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника к его вершинам, равна $\vec{0}$.

Δ Пусть $\vec{a}$ – сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника к его вершинам. При повороте данного многоугольника вокруг его центра на угол $\frac{2\pi}{n}$ вектор $\vec{a}$ должен повернуться на этот же угол. С другой стороны, при этом повороте многоугольник переходит в себя, поэтому вектор $\vec{a}$ должен остаться неизменным. Следовательно, $\vec{a}=\vec{0}$, что и требовалось доказать. ▲

Определение 2.8. Фиксируем некоторую точку O. ***Радиус-вектором*** $\vec{r}_M$ точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$, т. е. $\vec{r}_M=\overrightarrow{OM}$.

Пусть заданы две различные точки M_1 и M_2. Будем говорить, что точка M делит направленный отрезок M_1M_2 в отношении λ, если $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$.

Пример 2.3. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 5. На основании AD взята точка E так, что $|AE|:|ED|=2:3$. В каком отношении диагональ BD делится точкой K, которая является точкой пересечения ее с прямой EC? Вектор $\overrightarrow{EK}$ разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Δ Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_1, \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2$, тогда $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\vec{e}_1, \overrightarrow{ED} = \frac{3}{5}\vec{e}_1, \overrightarrow{BC} = \frac{1}{5}\vec{e}_1.$

По правилу сложения векторов (рис. 2.4) имеем

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{5}\vec{e}_1, +\vec{e}_2 + \frac{1}{5}\vec{e}_1 = -\frac{1}{5}\vec{e}_1, +\vec{e}_2.$$

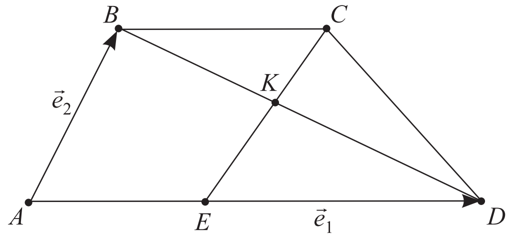


Рис. 2.4

Поскольку $\overrightarrow{EK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{DK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DB}$, то они отличаются на положительный множитель $\overrightarrow{EK} = \lambda\overrightarrow{EC}$, $\lambda > 0$, и $\overrightarrow{DK} = \mu\overrightarrow{DB}$, $\mu > 0$. Имеем

$$\overrightarrow{EK} = \lambda\left(-\frac{1}{5}\vec{e}_1, +\vec{e}_2\right). \tag{2.1}$$

Исходя из определения разности векторов, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$. Таким образом, получим $\overrightarrow{DK} = \mu\vec{e}_2 - \mu\vec{e}_1$.

По правилу сложения векторов для $\overrightarrow{EK}$ также имеем

$$\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DK} = \left(\frac{3}{5} - \mu\right)\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2. \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) сразу же следует, что

$$\lambda\left(-\frac{1}{5}\vec{e}_1, +\vec{e}_2\right) = \left(\frac{3}{5} - \mu\right)\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5}\lambda = \frac{3}{5} - \mu, \\ \lambda = \mu \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}, 4\overrightarrow{DK} = 3\left(\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{KB}.$

Следовательно, $|DK|:|KB| = 1:3$ и $\overrightarrow{EK} = -\frac{3}{20}\vec{e}_1 + \frac{3}{4}\vec{e}_2 = -\frac{3}{20}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. ▲

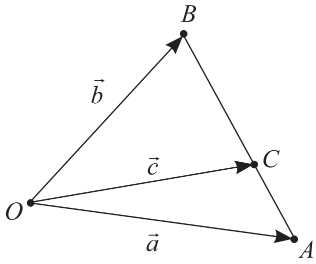


Рис. 2.5

Пример 2.4. Даны отрезок AB и точка O $(O \notin AB)$. На прямой AB дана такая точка C, отличная от точки B, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, $\lambda \in R$, $\lambda \neq 1$. Пусть также $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Выразить вектор $\vec{c}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и число λ.

Δ Из условия задачи, определив $\overrightarrow{AB}$, получим

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\lambda} = \frac{\lambda+1}{\lambda}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}.$$

Кроме того, $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ (рис. 2.5), следовательно,

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{\vec{a} + \lambda\vec{b}}{\lambda+1}. \ \blacktriangle$$

Теорема 2.1 (критерий коллинеарности). *Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить как произведение другого на число, т. е. чтобы существовало действительное число α такое, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, или число β такое, что $\vec{b} = \beta\vec{a}$.*

Теорема 2.2 (критерий компланарности). *Для того чтобы три вектора были компланарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других, причем если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные, то всякий третий компланарный им вектор $\vec{c}$ может быть единственным способом представлен в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*

Пример 2.5. Найти какой-либо вектор, определяющий направление биссектрисы угла между ненулевыми векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$.

Δ Диагонали ромба делят его углы пополам. Построим ромб $AC'A'B'$ с диагональю AA' (рис. 2.6), где $\left|\overrightarrow{AC'}\right| = \left|\overrightarrow{AB'}\right|$ и $\overrightarrow{AC'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$. Векторы $\vec{a}$, $\overrightarrow{AC'}$ и $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB'}$ коллинеарны и сонаправлены соответственно, тогда по теореме 2.1 имеем $\overrightarrow{AC'} = \alpha\vec{a}$, $\alpha > 0$, $\overrightarrow{AB'} = \beta\vec{b}$, $\beta > 0$.

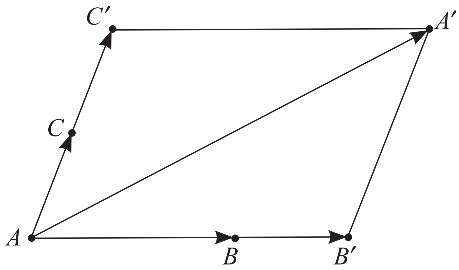


Рис. 2.6

Выберем множители α и β так, чтобы векторы $\overrightarrow{AC'}$ и $\overrightarrow{AB'}$ были одинаковой длины:

$$\left|\overrightarrow{AC'}\right| = \left|\overrightarrow{AB'}\right| \Rightarrow |\alpha\vec{a}| = \left|\beta\vec{b}\right| \Rightarrow |\alpha||\vec{a}| = |\beta|\left|\vec{b}\right| \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \left|\vec{b}\right|, \\ \beta = |\vec{a}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC'} = \left|\vec{b}\right|\vec{a}, \\ \overrightarrow{AB'} = |\vec{a}|\vec{b}. \end{cases}$$

По правилу сложения векторов (правило параллелограмма) получим

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB'} = \left|\vec{b}\right|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}.$$

Вектор $\overrightarrow{AA'}$ по построению определяет направление биссектрисы между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ▲

Пример 2.6. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Проверить, являются ли коллинеарными векторы $\vec{p} = \vec{a} - 2\sqrt{5}\vec{b}$ и $\vec{q} = -\sqrt{5}\vec{a} + 10\vec{b}$?

Δ Вектор $\vec{p}$ можно выразить через вектор $\vec{q}$:

$$\vec{p} = \lambda\vec{q} \Rightarrow -\sqrt{5}\,\vec{a} + 10\vec{b} = \lambda\left(\vec{a} - 2\sqrt{5}\,\vec{b}\right) \Rightarrow \lambda = -\sqrt{5}.$$

Поскольку $\vec{p} = -\sqrt{5}\vec{q}$, то по теореме 2.1 векторы коллинеарны. ▲

2.2. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИИ

Определение 2.9. ***Базисом на прямой*** называется любой ненулевой вектор на этой прямой, ***базисом на плоскости*** – упорядоченная пара $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ двух неколлинеарных векторов этой плоскости, ***базисом в пространстве*** – упорядоченная тройка $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ некомпланарных векторов.

Определение 2.10. ***Координатами вектора*** в данном базисе называются коэффициенты его разложения по этому базису, т. е.

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{a}(x;y;z).$$

Теорема 2.3. *Координаты вектора в данном базисе определяются однозначно.*

Теорема 2.4. *Координаты линейной комбинации векторов равны таким же линейным комбинациям соответствующих координат этих векторов.*

Пример 2.7. Разложить вектор $\vec{a} = 8\vec{i} + 10\vec{j}$ по базису $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$, где $\vec{e}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}, \vec{e}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{e}_3 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Δ Пусть x, y, z – коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по базису $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$, тогда $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Имеем

$$8\vec{i} + 10\vec{j} = x(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) + y(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + z(\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) =$$
$$= (2x + 3y + z)\vec{i} + (-x + 2y + 3z)\vec{j} + (-x - y + z)\vec{k}.$$

Отсюда $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8, \\ -x + 2y + 3z = 10, \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ z = 2. \end{cases}$ Таким образом, $\vec{a} = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. ▲

Теорема 2.5. *Для того чтобы векторы $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы их координаты в данном базисе были пропорциональны.*

Пример 2.8. Указать, при каких значениях l и m векторы $\vec{a}(l;-2;5)$ и $\vec{b}(1;m;-3)$ коллинеарны.

Δ Воспользуемся теоремой 2.5 и получим

$$\frac{l}{1} = \frac{-2}{m} = \frac{5}{-3} \Leftrightarrow l = -\frac{5}{3}, m = \frac{6}{5}. \ ▲$$

Пусть задана упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$. Отложим эти векторы от некоторой точки O, т. е. построим соответствующие направленные отрезки OA, OB, OC. Если кратчайший поворот вокруг точки O от отрезка OA к отрезку OB, наблюдаемый из точки C, совершается против часовой стрелки, то тройка векторов $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ называется *правой*. В противном случае – *левой*.

Определение 2.11. Пусть O – некоторая произвольная точка пространства, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют базис, тогда четверка $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ называется ***аффинным репером*** или ***аффинной системой координат***, а точка O – ***началом координат***. Пусть в пространстве заданы три взаимно перпендикулярных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, каждый из которых имеет длину 1. Система координат $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ называется ***декартовой прямоугольной системой координат***.

Если тройка векторов $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ является правой (левой), то соответствующая аффинная система координат $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ называется *правой* (*левой*). В дальнейшем мы будем пользоваться правыми системами координат.

Определение 2.12. ***Координатами точки*** M в репере $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ называются координаты её радиус-вектора $\vec{r}_M$ в базисе $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$, т. е. если $\vec{r}_M = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, то $M(x_1;\ x_2;\ x_3)$. В случае ортонормированной системы координат $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ координаты называются ***прямоугольными***.

Пусть даны две точки M_1, M_2. Если известны аффинные координаты точек $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то координаты вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2}\left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right).$$

Пример 2.9. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 4;\ 4)$. Найти координаты четвертой вершины D.

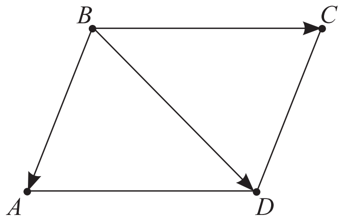


Рис. 2.7

Δ Определим вектор $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (рис. 2.7) и найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA}(-2;-4;2)$, $\overrightarrow{BC}(3;2;3)$ и $\overrightarrow{BD}(1;-2;5)$. Зная координаты точки $B(3;\ 2;\ 1)$ – начала вектора $\overrightarrow{BD}$, находим координаты $D(4;\ 0;\ 6)$. ▲

Теорема 2.6. *Если относительно аффинной системы координат в пространстве заданы две различные точки* $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *и* $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ *и точка* $C(x;\ y;\ z)$ *делит направленный отрезок* AB *в отношении* λ, *то* λ *равно тому из соотношений* $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x}, \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}, \dfrac{z - z_1}{z_2 - z}$, *в котором знаменатель не равен нулю, и любому из них:* $\lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z}$, *если все знаменатели не равны нулю. Координаты точки* C *через координаты точек* A, B *выражаются соотношениями*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (2.3)$$

Пример 2.10. Найти координаты центра тяжести треугольника ABC с вершинами $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$.

Δ Центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан. Обозначим через $O(x;\ y)$ – точку пересечения медиан, а через $M(x_M;\ y_M)$ – середину отрезка AC.

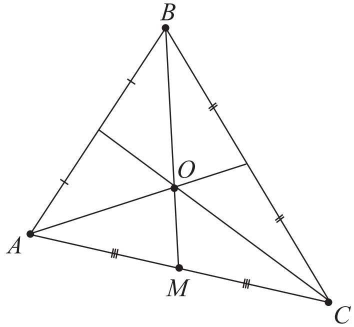


Рис. 2.8

Поскольку M середина отрезка (рис. 2.8), то

$$x_M = \frac{x_1 + x_3}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_3}{2}. \qquad (2.4)$$

Из (2.3) и рис. 2.8 для координат точки O получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_M}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_M}{1+\lambda}. \qquad (2.5)$$

Известно, что точка пересечения медиан делит медианы в отношении 2:1, следовательно, $\lambda = 2$, с учетом этого, подставив (2.4) в (2.5), получим координаты центра тяжести треугольника:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \ \blacktriangle$$

Определение 2.13. Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ – два ненулевых вектора. Отложим эти векторы от некоторой точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, пусть точка A_1 – ортогональная проекция точки A на прямую OB (рис. 2.9). ***Ортогональной проекцией*** $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется число $\mathrm{pr}_{\vec{b}}\, \vec{a}$, которое определяется следующим образом:

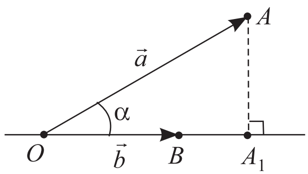


Рис. 2.9

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \begin{cases} \left|\overrightarrow{OA_1}\right|, \overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \vec{b}, \\ -\left|\overrightarrow{OA_1}\right|, \overrightarrow{OA_1} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Вектором проекции вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ называется вектор $\overrightarrow{\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}} = \overrightarrow{OA_1}$.

Свойства проекций

1. Проекция суммы двух векторов равна сумме их проекций:

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,(\vec{a} + \vec{c}) = \mathrm{pr}_{\vec{b}}\, \vec{a} + \mathrm{pr}_{\vec{b}}\, \vec{c}.$$

2. Проекция произведения числа на вектор равна произведению числа на проекцию вектора

$$\mathrm{pr}_{\vec{b}}\,(\lambda\vec{a}) = \lambda\, \mathrm{pr}_{\vec{b}}\, \vec{a}.$$

3. $\mathrm{pr}_{\vec{b}}\, \vec{a} = |\vec{a}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right).$

Пример 2.11. Найти $\mathrm{pr}_{\vec{a}}\overrightarrow{AC}$, если $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{2}$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{a}}\right)=60^\circ$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\vec{a}}\right)=45^\circ$.

Δ Из свойств проекций имеем

$$\mathrm{pr}_{\vec{a}}\overrightarrow{AC}=\mathrm{pr}_{\vec{a}}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=[1]=\mathrm{pr}_{\vec{a}}\overrightarrow{AB}+\mathrm{pr}_{\vec{a}}\overrightarrow{BC}=[3]=$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{a}}\right)+\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\vec{a}}\right)=6\cos 60^\circ+2\sqrt{2}\cos 45^\circ=5. \quad ▲$$

2.3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В табл. 2.1 дано определение и приведены свойства скалярного произведения.

Таблица 2.1

Определение	*Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$	(2.6)
Выражение через координаты в ортонормированном базисе	Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ координатами $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	(2.7)
Геометрические свойства	Критерий ортогональности: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	(2.8)
	Скалярный квадрат вектора: $\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$	(2.9)
	Косинус угла между векторами: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$	(2.10)
	Длина вектора в ортонормированном базисе: $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$	(2.11)
Алгебраические свойства	Коммутативность: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	
	Дистрибутивность: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	(2.12)
	Ассоциативность: $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\alpha\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$	
	Проекция: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\mathrm{pr}_{\vec{a}}\vec{b}=\lvert\vec{b}\rvert\mathrm{pr}_{\vec{b}}\vec{a}$	

Физическая интерпретация	Скалярное произведение – это работа, затраченная на перемещение материальной точки из точки C в точку B под воздействием силы $\vec{F}$: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{CB}$ (2.13)

Определение 2.14. Если ненулевой вектор $\vec{a}$ образует с базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ углы α, β, γ соответственно, то величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\vec{a}$.

Пример 2.12. Найти косинус угла между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ и $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right| = 1$.

Δ По формуле (2.10) имеем

$$\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}. \tag{2.14}$$

Из (2.12) и (2.9) получим

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 3 - 1 = 2.$$

Используя (2.9), найдем длины векторов:

$$|\vec{p}| = \sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}} = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) + \left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 1} = \sqrt{7},$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{\vec{q}\cdot\vec{q}} = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) + \left|\vec{b}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{3 - 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 1} = 1.$$

Подставим найденные величины в (2.14): $\cos\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$. ▲

Пример 2.13. Векторы $\vec{a}, \vec{b}(1;1;0), \vec{c}(0;1;1)$ компланарны. Найти координаты вектора $\vec{a}$, длина которого равна $\sqrt{8}$, если он перпендикулярен сумме векторов $\vec{b},\vec{c}$ $(\vec{a}\perp\vec{b}+\vec{c})$ и угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$ острый.

Δ Векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны (теорема 2.5). По критерию компланарности (теорема 2.2) $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} = x\overrightarrow{(1;1;0)} + y\overrightarrow{(0;1;1)} = \overrightarrow{(x;x+y;y)}$. Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}+\vec{c}$ перпендикулярны, то по (2.8)

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0 \Rightarrow x + 2(x+y) + y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y.$$

Длина вектора $\vec{a}$ равна $\sqrt{8}$, и угол между векторами $\vec{a},\vec{b}$ острый, поэтому $\sqrt{2x^2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow x = 2$ и $\vec{a}(2;0;-2)$. ▲

Пример 2.14. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ на ось, составляющую с базисными векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ равные острые углы.

Δ Найдем вектор $\vec{b}(x;y;z)$, указывающий направление оси. Поскольку он образует с базисными векторами равные углы, то будут равны $\cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{i}}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{j}}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{k}}\right)$ соответственно или согласно (2.10), (2.7)

$$\frac{\vec{i}\cdot\vec{b}}{|\vec{i}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{j}\cdot\vec{b}}{|\vec{j}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\vec{k}\cdot\vec{b}}{|\vec{k}|\cdot|\vec{b}|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow x = y = z.$$

Пусть $\vec{b}(1;1;1)$. Задача свелась к нахождению $\text{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a}$:

$$\text{pr}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1-1+3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \ ▲$$

Пример 2.15. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{b}(8;4;1)$ на прямую, параллельную вектору $\vec{a}(2;-2;1)$.

Δ Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Обозначим проекцию точки B на прямую OA через C. Поскольку

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{9}} > 0,$$

то угол между векторами острый и вектор $\overrightarrow{OC}$ сонаправлен с $\vec{a}$ (рис. 2.10). Очевидно, $\overrightarrow{OC} = \lambda\vec{a}$, $\lambda > 0$, λ подлежит определению.

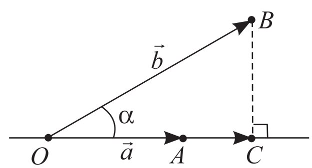


Рис. 2.10

По свойству проекций $\left|\overrightarrow{OC}\right| = \text{pr}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \sqrt{9}$, отсюда $\lambda = \dfrac{\left|\overrightarrow{OA}\right|}{|\vec{a}|} =$ $= \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}} = 1$, следовательно, $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$. ▲

Пример 2.16. Даны два вектора $\vec{b}(8;4;1), \vec{a}(2;-2;1)$. Найти вектор, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{b}$ на плоскость, перпендикулярную к вектору $\vec{a}$.

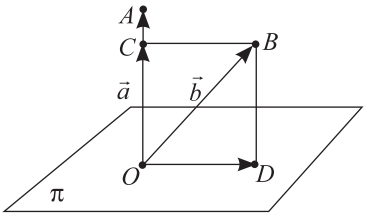


Рис. 2.11

Δ Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Обозначим через C проекцию точки B на прямую OA. Вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$ найден в примере 2.15. Пусть точка D – проекция точки B на плоскость π. Искомый вектор – проекция $\overrightarrow{OD}$ (рис. 2.11):

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{(8;\,4;\,1)} - \overrightarrow{(2;\,-2;\,1)} = \overrightarrow{(6;\,6;\,0)}. \ ▲$$

Пример 2.17. Даны две точки $A(1;\ 0)$ и $B(2;\ 3)$. Найти конец вектора $\overrightarrow{AC}$, полученного из вектора $\overrightarrow{AB}$ поворотом около точки A на угол $\arccos\dfrac{4}{5}$.

Δ Пусть x, y – координаты искомой точки C. Имеем $\overrightarrow{AB}(1;2)$ и $\overrightarrow{AC}(x-1;y)$. Поскольку $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$ и угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен $\arccos\dfrac{4}{5}$, используя (2.10), (2.11), получим систему

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{5}, \\ \dfrac{x-1+2y}{\sqrt{5}\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 5, \\ x-1+2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, & y_1 = 1, \\ x_2 = 0{,}6, & y_2 = 2{,}2. \end{cases}$$

Две точки (3; 1) и (0,6; 2,2) удовлетворяют условию. ▲

Пример 2.18. Вычислить работу, которую производит сила $\vec{F} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A(1;\ 1;\ 1)$ в точку $B(1;\ 3;\ 5)$.

Δ Для нахождения работы согласно (2.13) найдем скалярное произведение $A = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. Поскольку $\vec{F}(-1;5;1)$ и $\overrightarrow{AB}(0;2;4)$, то по (2.7) имеем $A = -1\cdot 0 + 5\cdot 2 + 1\cdot 4 = 14$. ▲

2.4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В табл. 2.2 дано определение и приведены свойства векторного произведения векторов.

Таблица 2.2

Определение	*Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, который обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ и удовлетворяет следующим условиям: 1) $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; (2.15) 2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; (2.16) 3) тройка векторов $(\vec{a};\vec{b};\vec{a}\times\vec{b})$ правая
Выражение через координаты в ортонормированном базисе	Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в ортонормированном базисе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ координатами $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, то $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$ $= \vec{i}\left(y_1z_2 - z_1y_2\right) - \vec{j}\left(x_1z_2 - x_2z_1\right) + \vec{k}\left(x_1y_2 - x_2y_1\right)$ (2.17)
Геометрические свойства	Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные, то длина векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на отрезках *OA* и *OB*, где $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, *O* – произвольная точка: $\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = S$ (2.18)
	Критерий коллинеарности: $\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ (2.19)
Алгебраические свойства	Антикоммутативность: $\vec{b}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}$ (2.20)
	Дистрибутивность: $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$; (2.21) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$ (2.22)
	$\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times\left(\alpha\vec{b}\right)$ (2.23)
Физическая интерпретация	Момент силы $\vec{F}$, приложенной к материальной точке *A* относительно точки *O*, равен $\vec{M} = \overrightarrow{OA}\times\vec{F}$ (2.24)

Пример 2.19. Дано $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3, |(2\vec{a}-3\vec{b})\times\sqrt{5}\vec{b}|=40$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Δ Используя формулы (2.15) и (2.21), (2.19), (2.23), получим

$$|(2\vec{a}-3\vec{b})\times\sqrt{5}\vec{b}|=2\sqrt{5}|\vec{a}\times\vec{b}|=2\sqrt{5}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=$$

$$=24\sqrt{5}\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=40\Rightarrow\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

По основному тригонометрическому тождеству

$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)}=\frac{2}{3}$ (со знаком плюс, так как угол острый).

По (2.6) получим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=4\cdot3\cdot\frac{2}{3}=8. \ \blacktriangle$$

Пример 2.20. Если для трех неколлинеарных векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$, то $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Доказать это утверждение и выяснить его геометрический смысл.

Δ Из $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$ и (2.20), (2.22) имеем: $\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}+$ $+\vec{c}\times\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b}=\vec{0}$. Последнее равенство из (2.19) означает, что $(\vec{a}+\vec{c})\parallel\vec{b}$, следовательно (по теореме 2.1):

$$\lambda(\vec{a}+\vec{c})=\vec{b}. \tag{2.25}$$

Из $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$, (2.20), (2.22) и (2.25) найдем λ:

$$\vec{c}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\vec{c}\times\vec{a}-\lambda(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{c}\times\vec{a}+\lambda\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow(1+\lambda)\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}\Rightarrow1+\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1.$$

Имеем $-(\vec{a}+\vec{c})=\vec{b}\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, что и требовалось доказать.

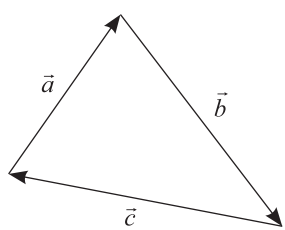


Рис. 2.12

Сложить три ненулевых вектора и получить нуль можно, только если они образуют треугольник (рис. 2.12). $\blacktriangle$

Пример 2.21. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(-3;-2;6)$ и $\overrightarrow{BC}(-2;4;4)$. Вычислить длину высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC.

Δ Высота h треугольника ABC равна высоте параллелограмма $ABCB'$ (рис. 2.13). Из школьной геометрии известно: $h = \dfrac{S}{l}$, где S – площадь параллелограмма; l – длина его основания. Тогда согласно (2.18) имеем

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

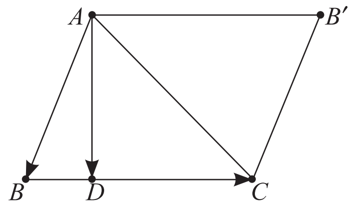


Рис. 2.13

Воспользуемся (2.17) и получим $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 6 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -32\vec{i} - 16\vec{k}.$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1024 + 256} = 16\sqrt{5}, \ \left|\overrightarrow{BC}\right| = 6.$$

Таким образом, $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{16\sqrt{5}}{6} = \dfrac{4\sqrt{5}}{3}$. ▲

Пример 2.22. Найти вектор $\vec{a}$ из системы уравнений $\vec{a} \cdot \vec{i} = 3$, $\vec{a} \times \vec{i} = -2\vec{k}$.

Δ Пусть x, y, z – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ соответственно. Заданная система уравнений из (2.7), (2.17) в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x = 3, \\ z\vec{j} - y\vec{k} = -2\vec{k}. \end{cases}$$

Решив ее, найдем $x = 3$, $y = 2$, $z = 0$. Таким образом, искомый вектор $\vec{a}(3; 2; 0)$. ▲

Пример 2.23. Сила $\vec{Q}(-3; 4; 2)$ приложена к точке $C(2; 1; -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента силы относительно начала координат.

Δ Пусть O – начало координат, тогда $\overrightarrow{OC}(2; -1; -2)$. По (2.24) найдем момент силы $\vec{Q}$:

$$\vec{M} = \overrightarrow{OC} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Величина момента силы равна $\left|\vec{M}\right| = \sqrt{100+4+121} = 15$. Из определения 2.14 находим направляющие косинусы момента силы:

$$\cos\alpha = \frac{10}{15} = \frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{15},\ \cos\gamma = \frac{11}{15}.\ \blacktriangle$$

2.5. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В табл. 2.3 дано определение и приведены свойства смешанного произведения векторов.

Таблица 2.3

Определение	*Смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, которое обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и определяется равенством $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ (2.26)	
Выражение через координаты в ортонормированном базисе	Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы в ортонормированном базисе $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ координатами $\vec{a}\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\vec{b}\left(x_2;y_2;z_2\right)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$ $= x_1y_2z_3 + z_1x_2y_3 + y_1z_2x_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3$ (2.27)	
Геометрические свойства	Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарные, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на отрезках OA, OB и OC, где $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, O – произвольная точка, взятому со знаком «+», если тройка $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ правая, и со знаком «–», если эта тройка левая: $V = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$	
	Критерий компланарности $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ (2.28)	
Алгебраические свойства	$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$	
	Круговое свойство $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$	
	$\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$; $\vec{a}\left(\vec{b}_1+\vec{b}_2\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}_1\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_2\vec{c}$; $\vec{a}\vec{b}\left(\vec{c}_1+\vec{c}_2\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}_1 + \vec{a}\vec{b}\vec{c}_2$;	
	$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\left(\lambda\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\left(\lambda\vec{c}\right) = \lambda\vec{a}\vec{b}\vec{c}$	

Пример 2.24. Вычислить объем треугольной пирамиды $ABCD$, если $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c},\ \overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ и объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ равен 6 куб. ед.

Δ Объем треугольной пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема соответствующего параллелепипеда. Из свойств смешанного (см. табл. 2.3) и векторного произведений (см. табл. 2.2) имеем

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|\left((\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\right)\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\right|=\frac{1}{6}\left|(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|\vec{c}\vec{a}\vec{a}-\vec{c}\vec{a}\vec{b}+\vec{c}\vec{a}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\left|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{a})-\vec{a}\vec{b}\vec{c}+(\vec{c}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\right|=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\frac{6}{6}=1.\ \blacktriangle$$

Пример 2.25. Проверить, лежат ли точки $A(2;3;-1)$, $B(1;-1;3)$, $C(1;7;-2)$, $D(2;3;4)$ в одной плоскости.

Δ Если четыре точки лежат в одной плоскости, то три любых вектора, соединяющих эти точки, компланарны, т. е. имеет место (2.28). Исследуем на компланарность векторы $\overrightarrow{AB}(-1;-4;4)$, $\overrightarrow{AC}(-1;4;-1)$, $\overrightarrow{AD}(0;0;5)$. Вычислим смешанное произведение векторов по формуле (2.27)

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & -4 & 4\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=40\neq 0.$$

Поскольку смешанное произведение не равно нулю, то векторы некомпланарны, следовательно, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. ▲

Пример 2.26. Даны три вектора $\vec{a}(8;4;1)$, $\vec{b}(2;-2;1)$, $\vec{c}(1;1;1)$. Найти единичный вектор $\vec{d}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{a},\vec{d},\vec{c}$ имели противоположную ориентацию.

Δ *Первый способ*. Пусть x, y, z – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ соответственно. Вектор $\vec{d}$ единичный, т. е. $|\vec{d}|=1$, или, в координатной форме, $x^2+y^2+z^2=1$. Он также компланарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в силу (2.28) $\vec{a}\vec{b}\vec{d}=0$ или по формуле (2.27)

$$\vec{d}\vec{a}\vec{b}=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=6x-6y-24z=0\Rightarrow x-y-4z=0.$$

Вектор $\vec{d}$ ортогонален $\vec{c}$, по (2.8) $\vec{d}\cdot\vec{c}=0$ или $x+y+z=0$.

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x-y-4z=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

Ее решениями являются:

$$\vec{d}_1\left(-\frac{3}{\sqrt{38}};\frac{5}{\sqrt{38}};-\frac{2}{\sqrt{38}}\right),\ \ \vec{d}_2\left(\frac{3}{\sqrt{38}};-\frac{5}{\sqrt{38}};\frac{2}{\sqrt{38}}\right).$$

Для определения ориентации тройки $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ вычислим смешанное произведение

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-24<0.$$

Следовательно, тройка $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$ левая. Найдем ориентацию тройки $\left(\vec{a};\vec{d}_1;\vec{c}\right)$:

$$\vec{a}\vec{d}_1\vec{c}=\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ -\frac{3}{\sqrt{38}} & \frac{5}{\sqrt{38}} & -\frac{2}{\sqrt{38}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{52}{\sqrt{38}}>0.$$

Тройка правая. Поскольку $\vec{d}_1=-\vec{d}_2$, ориентация тройки $\left(\vec{a};\vec{d}_2;\vec{c}\right)$ будет противоположной. Тройка $\left(\vec{a};\vec{d}_2;\vec{c}\right)$ левая. Таким образом, искомым вектором будет

$$\vec{d}_1\left(-\frac{3}{\sqrt{38}};\frac{5}{\sqrt{38}};-\frac{2}{\sqrt{38}}\right).$$

Второй способ. Поскольку вектор $\vec{d}$ компланарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, применим теорему 2.2:

$$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}. \tag{2.29}$$

Вектор $\vec{d}$ ортогонален $\vec{c}$, по (2.8) $\vec{d}\cdot\vec{c}=0$. Используя (2.29), получим $(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{c}=0\Rightarrow x(\vec{a}\cdot\vec{c})+y(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$. Поскольку $\vec{a}\cdot\vec{c}=13$ и $\vec{b}\cdot\vec{c}=1$, имеем $13x+y=0$.

Вектор $\vec{d}$ единичный, т. е. $\left|\vec{d}\right| = 1 \Rightarrow \vec{d}^2 = 1$. Используя (2.29), получим $(x\vec{a} + y\vec{b})^2 = 1 \Rightarrow x^2\vec{a}^2 + 2xy\vec{a}\cdot\vec{b} + y\vec{b}^2 = 1$. С учетом того, что $\vec{a}^2 = 81$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 9$, $\vec{b}^2 = 9$, имеем $81x^2 + 18xy + 9y^2 = 1$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} 13x + y = 0, \\ 81x^2 + 18xy + 9y^2 = 1. \end{cases}$ Она имеет два решения:

$$x = \frac{1}{6\sqrt{38}},\ y = \frac{-13}{6\sqrt{38}} \text{ и } x = \frac{-1}{6\sqrt{38}},\ y = \frac{13}{6\sqrt{38}}.$$

Подставив поочередно эти решения в (2.29), получим

$$\vec{d}_1\left(-\frac{3}{\sqrt{38}};\frac{5}{\sqrt{38}};-\frac{2}{\sqrt{38}}\right),\ \vec{d}_2\left(\frac{3}{\sqrt{38}};-\frac{5}{\sqrt{38}};\frac{2}{\sqrt{38}}\right).$$

Точно так же, как в первом способе, из двух векторов выбираем нужный. Это вектор $\vec{d}_1$. ▲

2.6. ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

В табл. 2.4 дано определение двойного векторного произведения векторов, указано правило подсчета и свойства.

Таблица 2.4

Определение	*Двойным векторным произведением* векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются векторы $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ и $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$
Правила	$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$; (2.30) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}$
Свойства	$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} \neq \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$
	Тождество Якоби: $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{0}$

Пример 2.27. Считая, что каждый из векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отличен от нуля, установить, при каком их взаимном расположении справедливо равенство

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Δ Выполним следующие эквивалентные преобразования:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \Leftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}.$$

Пусть $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ следовательно, $\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$ Получаем, что вектор $\vec{b}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}.$ Если $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0,$ то $\vec{c}=\dfrac{\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)}{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}\vec{a}.$ Тогда по критерию коллинеарности векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны друг другу.

Итак, вектор $\vec{b}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ или векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны друг другу. ▲

Пример 2.28. Доказать тождество

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right)=\left(\vec{a}\vec{c}\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right).$$

Δ Обозначим $\vec{c}\times\vec{d}=\vec{x}$ и, используя (2.30), получим

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{x}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{x}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{x}.$$

Тогда, учитывая обозначение и используя (2.26), имеем

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right)=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{x}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{x}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{x}=$$

$$=\left(\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\vec{c}\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{c}\times\vec{d}\right),$$

что и требовалось доказать. ▲

Пример 2.29. Найти вектор $\vec{x}$ из уравнения $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b},$ где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – известные векторы.

Δ Из определения векторного произведения (см. табл. 2.2) и условия векторы $\vec{a},\vec{x},\vec{a}\times\vec{b}$ ортогональны вектору $\vec{b}.$ Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{x},\vec{a}\times\vec{b}$ параллельны одной плоскости (рис. 2.14).

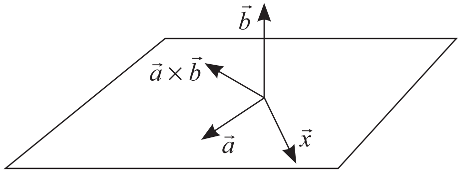


Рис. 2.14

По определению 2.5 векторы $\vec{a},\vec{x},\vec{a}\times\vec{b}$ компланарны. По теореме 2.2 имеем $\vec{x}=\alpha\vec{a}\times\vec{b}+\beta\vec{a}.$ Подставив полученное выражение в уравнение и учитывая, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$ получим

$$\vec{a}\times\left(\alpha\vec{a}\times\vec{b}+\beta\vec{a}\right)=\vec{b}\Rightarrow\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\alpha\vec{a}^2\vec{b}=\vec{b}\Rightarrow-\alpha\vec{a}^2\vec{b}=\vec{b}\Rightarrow\alpha=-\frac{1}{\vec{a}^2}.$$

Очевидно, что β – любое действительное число, $\vec{x}=-\frac{1}{\vec{a}^2}\vec{a}\times\vec{b}+\beta\vec{a}$. ▲

Задачи для самостоятельной работы

2.1. Упростить выражения:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}$;

б) $\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}$;

в) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}$;

г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}$.

2.2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a}+\vec{b}$ делил пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

2.3. На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{m}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{a}$ (векторы сонаправлены) и $|\vec{m}|=1$;

б) $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{a}$ (векторы противонаправлены) и $|\vec{m}|=2$?

2.4. Дано $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}+\vec{b}|=30$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

2.5. Даны две различные точки M_1 и M_2 и некоторое число λ. Найти такую точку M, чтобы векторы $\lambda\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_2M}$ были: а) равны между собой; б) противоположны.

2.6. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ дано $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{b}$. Разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$.

2.7. Три силы $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{P}$ приложены к одной точке и имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей силы $\vec{R}$, если $|\vec{M}|=2$, $|\vec{N}|=10$, $|\vec{P}|=11$.

2.8. Даны радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ точек M_1 и M_2. Найти радиус-вектор $\vec{r}$ точки M, делящей $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении λ, если $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$.

2.9. Найти координаты концов отрезка, который разделен точками $C(7;0;3)$ и $D(-5;0;0)$ на три равные части.

2.10. Даны точки $A(4;4;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;3;4)$, $D(1;4;4)$. Доказать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

2.11. Проверить, какие из указанных систем векторов можно выбрать в качестве базисных:

а) $\vec{a}(3;2;1), \vec{b}(1;0;7), \vec{c}(-1;2;4)$;

б) $\vec{a}(3;2;-3), \vec{b}(0;2;5), \vec{c}(0;0;-1)$;

в) $\vec{a}(5;-1;3), \vec{b}(-4;3;2), \vec{c}(1;2;5)$.

2.12. Найти $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, если:

а) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60°$;   б) $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=5$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$.

2.13. Найти угол между векторами $\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$ и $\vec{b}=4\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3$, если $\left|\vec{e}_1\right|=1, \left|\vec{e}_2\right|=2, \left|\vec{e}_3\right|=3, \left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2}\right)=\left(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_3}\right)=\dfrac{\pi}{3}, \left(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}_3}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

2.14. Показать, при каком значении параметра α векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\alpha\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$:

а) параллельны;

б) перпендикулярны между собой.

2.15. Даны точки $A(-5;7;-6)$, $B(7;-9;9)$ и вектор $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$. Найти $\mathrm{pr}_{\overline{AB}}\,\vec{a}$.

2.16. Найти проекцию вектора $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ на ось, составляющую с базисными векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ равные углы.

2.17. Луч образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ углы, равные $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{3}$ соответственно, а с вектором $\vec{k}$ – тупой угол. Найти этот угол.

2.18. Сила $\vec{F}=9\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}$ разложена по трем взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых задано вектором $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$. Найти составляющую силы в направлении вектора $\vec{a}$.

2.19. Даны три силы $\vec{F}_1(-1;2;3)$, $\vec{F}_2(3;4;1)$ и $\vec{F}_3(1;3;5)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $K(-3;4;6)$ в точку $L(1;5;9)$.

2.20. Дано $\left|\vec{a}\right|=10, \left|\vec{b}\right|=2, \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. Вычислить:

а) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$;

б) $\left|3\vec{a}\times2\vec{b}\right|$;

в) $\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right|$.

2.21. Найти условие, которому должны удовлетворять векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны.

2.22. Вычислить синус угла, образованного векторами:

а) $\vec{a}(2;-2;1)$ и $\vec{b}(2;3;6)$;

б) $\vec{a}=6\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=i+3\vec{j}$.

2.23. При помощи векторного произведения векторов найти площадь треугольника *ABC* и длину высоты *BH*, если:

$A(-1;2;2)$, $B(-2;4;4)$, $C(0;0;6)$.

2.24. Доказать: 1) если $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$; 2) если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$.

2.25. Доказать тождество $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$.

2.26. Даны три силы $\vec{N}(2;-1;3)$, $\vec{M}(3;2;-1)$, $\vec{P}(-4;1;3)$, приложенные к точке $C(-1;4;-2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей сил относительно точки $A(2;3;-1)$.

2.27. Вычислить смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и указать, какой тройкой являются векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левой или правой:

а) $\vec{a}(1;2;1),\vec{b}(1;2;-1),\vec{c}(8;6;4)$;

б) $\vec{a}(1;2;3),\vec{b}(3;1;2),\vec{c}(2;3;1)$;

в) $\vec{a}(0;1;-2),\vec{b}(1;0;1),\vec{c}(2;0;0)$;

г) $\vec{a}(1;0;1),\vec{b}(0;1;2),\vec{c}(2;0;0)$.

2.28. Проверить, компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}(0;1;1),\vec{b}(1;1;1),\vec{c}(1;0;0)$;

б) $\vec{a}(1;2;-1),\vec{b}(2;4;-2),\vec{c}(9;-11;13)$;

в) $\vec{a}(4;-2;0),\vec{b}(-3;6;3),\vec{c}(1;4;-5)$;

г) $\vec{a}(3;7;1),\vec{b}(-1;2;-3),\vec{c}(2;9;-2)$.

2.29. Доказать, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, то $\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\right)=\vec{a}^4\vec{b}$.

2.30. Доказать тождества:

а) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0}$;

б) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$;

в) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\vec{c}\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\vec{c}\vec{d}\right)\vec{a}$;

2.31. Даны три вектора $\vec{a}(8;4;1)$, $\vec{b}(2;2;1)$, $\vec{c}(1;1;1)$. Найти единичный вектор $\vec{d}$, образующий с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равные углы, перпендикулярный к вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

2.32. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный к оси Oz и вектору $\vec{a}(8;-15;3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{m}|=51$, найти его координаты.

2.33. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}(2;-3;1)$ и $\vec{b}(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

Ответы и указания

2.1. а) $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{CP}$; в) $\vec{0}$. **2.2.** $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. **2.3.** а) $\dfrac{1}{|\vec{a}|}$; б) $\dfrac{-2}{|\vec{a}|}$. **2.4.** 20. **2.5.** а) $\overrightarrow{M_1M}=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{M_1M_2}$; б) $\overrightarrow{M_1M}=\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{M_1M_2}$. **2.6.** $\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{AF}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{EF}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$. **2.7.** 15. **2.8.** $\dfrac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$. **2.9.** $(-17;0;-3)$, $(19;0;6)$. **2.11.** а) да; б) да; в) нет. **2.12.** а) $-21-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$; б) $-73-\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$. **2.13.** $\cos\alpha=-\dfrac{49}{2\sqrt{949}}$. **2.14.** а) $-\dfrac{1}{2}$; б) 17. **2.15.** 3. **2.16.** $\sqrt{3}$. **2.17.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **2.18.** $3\vec{a}$. **2.19.** 48. **2.20.** а) $10\sqrt{3}$; б) $60\sqrt{3}$; в) $20\sqrt{3}$. **2.21.** $\vec{a}\parallel\vec{b}$. **2.22.** а) $5\sqrt{17}/21$; б) $\sqrt{\dfrac{23}{185}}$. **2.23.** $3\sqrt{5}$; $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$. **2.26.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{66}}=\dfrac{2}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{-4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma=\dfrac{-7}{\sqrt{66}}$. **2.27.** а) -20; б) 18; в) 2; г) -2. **2.28.** а) да; б) да; в) нет; г) да. **2.31.** $\left(0;-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **2.32.** $(45;24;0)$. **2.33.** $(7;5;1)$.

Глава 3
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

3.1. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Здесь и далее считается, что на плоскости или в пространстве задана прямоугольная декартова система координат.

Определение 3.1. ***Направляющим вектором*** прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой. ***Нормальным вектором*** прямой на плоскости называется любой ненулевой вектор этой плоскости, перпендикулярный заданной прямой.

Будем использовать следующие обозначения: $\vec{n}(A;B)$ – нормальный вектор прямой на плоскости; $\vec{a}(l;m)$ – направляющий вектор прямой на плоскости; $M_0(x_0;y_0)$ – начальная (заданная) точка на прямой; $M(x;y)$ – произвольная (текущая) точка этой прямой; $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M $\left(\vec{r}_0 = (x_0;y_0);\ \vec{r} = (x;y)\right)$; k – угловой коэффициент прямой; a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно (*величиной* направленного отрезка, лежащего на некоторой оси, называется число, равное длине этого отрезка, если его направление совпадает с направлением оси, и число, противоположное длине, если направление отрезка противоположно направлению оси).

Основные виды уравнений прямой на плоскости приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Данные	Уравнения	Название	
$\vec{a}$, $M_0(\vec{r}_0)$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t,\ t \in \mathbb{R}$	Векторное параметрическое	(3.1)
$\vec{a}(l;m)$, $M_0(x_0;y_0)$	$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} t \in \mathbb{R}$	Параметрические	(3.2)

Окончание табл. 3.1

Данные	Уравнения	Название	
$\vec{a}(l;m)$, $M_0(x_0;y_0)$	$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$	Каноническое	(3.3)
$\vec{n}$, $M_0(\vec{r}_0)$	$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$	Уравнение по точке и нормальному вектору в векторной форме	(3.4)
	$\vec{r}\cdot\vec{n}=\alpha$, $\vec{r}\cdot\vec{n}-\alpha=0$	Общие уравнения прямой на плоскости в векторной форме	(3.5)
$\vec{n}(A;B)$, $M_0(x_0;y_0)$, $A^2+B^2\neq 0$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	Уравнение по точке и нормальному вектору	(3.6)
	$Ax+By+\mathrm{C}=0$	Общее уравнение прямой на плоскости	(3.7)
a, b	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	Уравнение прямой на плоскости в отрезках	(3.8)
k, $M_0(x_0;y_0)$	$y-y_0=k(x-x_0)$	Уравнения прямой на плоскости с угловым коэффициентом	(3.9)
	$y=kx+b$		(3.10)

Для решения задач, кроме основных уравнений, необходимо помнить геометрический смысл входящих в них коэффициентов: в параметрических уравнениях (3.2) коэффициенты при t – координаты направляющего вектора прямой, а свободные члены – координаты некоторой точки прямой; в каноническом уравнении (3.3) координаты направляющего вектора прямой записаны в знаменателях, а в числителях числа x_0, y_0 обозначают координаты некоторой заданной точки прямой; в общем уравнении (3.7) коэффициенты при неизвестных – это координаты нормального вектора прямой.

Чтобы составить уравнение прямой на плоскости, следует знать на этой прямой какую-то точку, которая называется начальной точкой, и, кроме того, либо направляющий вектор прямой, либо нормальный, либо угловой коэффициент.

З а м е ч а н и е 3.1. Поскольку скалярное произведение векторов $\vec{n}(A;B)$ и $\vec{a}(B;-A)$ равно нулю, они взаимно перпендикулярны. Поэтому нормальный и направляющий векторы прямой на плоскости связаны следующим образом: если $\vec{n}(A;B)$ – нормальный вектор некоторой прямой, то $\vec{a}(B;-A)$ – ее направляющий вектор. Таким образом, чтобы из нормального вектора прямой на плоскости получить направляющий или наоборот, следует координаты вектора поменять местами и у одной из них поменять знак.

Если $\overrightarrow{OK}=\vec{a}(l,m)$ – направляющий вектор прямой, то ее угловой коэффициент (тангенс угла наклона к оси Ox) $k=\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{KL}{OL}=\dfrac{m}{l}$ (рис. 3.1).

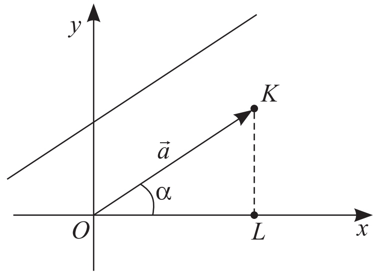


Рис. 3.1

З а м е ч а н и е 3.2. Нормальный и направляющий векторы определяются неоднозначно. Если для прямой на плоскости найден какой-либо нормальный вектор, то любой коллинеарный ему ненулевой вектор также является нормальным для этой прямой. То же самое можно сказать и о направляющих векторах.

З а м е ч а н и е 3.3. При решении задач довольно часто используется операция откладывания вектора от точки. Если $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, то говорят, что точка B получается в результате откладывания вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ от точки A. Эта операция сокращенно записывается так: $B=A+\overrightarrow{AB}$. Последняя запись равносильна следующим (рис. 3.2):

$$\left\{\vec{r}_B=\vec{r}_A+\overrightarrow{AB}\right\}\Leftrightarrow\left\{x_B=x_A+x_{\overrightarrow{AB}},y_B=y_A+y_{\overrightarrow{AB}}\right\}. \qquad (3.11)$$

Пример 3.1. Найти траекторию движения точки M, движущейся из начального положения $M_0(-4;12)$ прямолинейно и равномерно со скоростью $v=15$ см/с в направлении вектора $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$. Предполагается, что $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$ см. Вычислить, за какой промежуток времени точка пройдет отрезок траектории, заключенный между координатными осями.

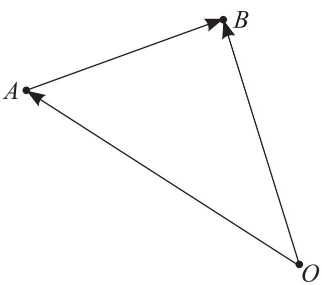


Рис. 3.2

Δ Если $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начальной точки M_0; $\vec{r}$ – радиус-вектор движущейся точки M; $\vec{v}$ – вектор скорости; t – время движения, то $\vec{r}=\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 3.3). Поскольку $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$, $\overrightarrow{M_0M}=\vec{v}t$, получаем $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}t$ – векторное параметрическое уравнение

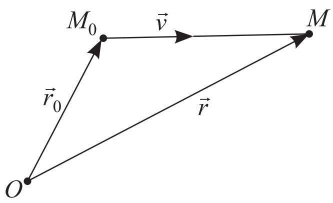


Рис. 3.3

прямой (см. (3.1)). Это и есть закон равномерного прямолинейного движения. Найдем вектор скорости. Векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, поэтому $\vec{v} = \alpha\vec{a}$. Кроме того, $|\vec{v}| = 15$, $|\vec{a}| = 5$, значит, $\vec{v} = 3\vec{a} = 9\vec{i} - 12\vec{j}$. Учитывая, что $\vec{r}_0 = -4\vec{i} + 12\vec{j}$, получаем уравнение движения: $\vec{r} = -4\vec{i} + 12\vec{j} + (9\vec{i} - 12\vec{j})t$. Это векторное параметрическое уравнение прямой. Из него можно получить и параметрические уравнения, если приравнять соответствующие координаты векторов в левой и правой частях (координаты вектора $\vec{r}$ равны x и y соответственно): $x = -4 + 9t$, $y = 12 - 12t$.

Чтобы найти время движения от точки A до точки B (рис. 3.4), чаще всего предлагают следующий способ: найти точки A и B, расстояние между ними и разделить это расстояние на скорость. Однако в жизни так не поступают. Чтобы узнать время движения между двумя пунктами на маршруте, по которому вы регулярно двигаетесь, проще посмотреть на часы в каждом из этих пунктов. В точке A $x = 0 \Rightarrow t_A = 4/9$. В точке B $y = 0 \Rightarrow t_B = 1$. Время движения $t = t_B - t_A = 1 - 4/9 = 5/9$ (с). ▲

З а м е ч а н и е 3.4. Поскольку направляющий вектор задается неоднозначно, то для уравнения прямой можно было взять и вектор $\vec{a}$. При составлении уравнения траектории движения вектор скорости выбирается именно с той целью, чтобы параметр t имел физическое содержание – это время.

Пример 3.2. Для прямой $6x - 7y - 42 = 0$ записать следующие уравнения: а) параметрические; б) каноническое; в) в отрезках; г) с угловым коэффициентом; д) общее уравнение в векторной форме.

Δ Прямая задана общим уравнением, ее нормальный вектор $\vec{n}(6;-7)$. Тогда направляющий вектор – это $\vec{a}(7;6)$ (см. замечание 3.1). В качестве начальной точки можно взять любую, чьи координаты удовлетворяют уравнению прямой, например $M_0(7;0)$.

а) Параметрические уравнения записываем по типу (3.2):

$$x = 7 + 7t;\ y = 6t.$$

б) Каноническое уравнение (см. (3.3)):

$$\frac{x-7}{7} = \frac{y}{6}.$$

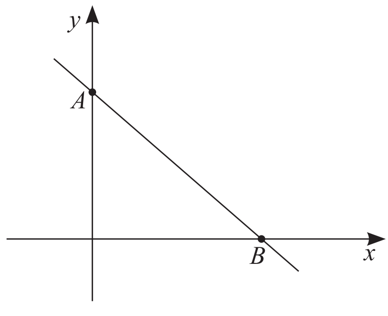


Рис. 3.4

в) Для получения уравнения в отрезках (см. (3.8)) перенесем в правую часть свободный член и разделим на него все уравнение:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{-6}=1.$$

г) Выразив из исходного уравнения переменную y, получаем уравнение типа (3.10):

$$y=\frac{6}{7}x-6.$$

д) Используя нормальный вектор $\vec{n}=6\vec{i}-7\vec{j}$ и точку M_0 с радиус-вектором $\vec{r}_0=7\vec{i}$, найденные в пункте а), записываем уравнение (3.4): $(\vec{r}-7\vec{i})\cdot(6\vec{i}-7\vec{j})=0.$ Учитывая, что в общем уравнении $Ax+By=\vec{r}\cdot\vec{n}$, на основании заданного можно сразу написать уравнение типа (3.5): $\vec{r}\cdot(6\vec{i}-7\vec{j})=42.$ ▲

Пример 3.3. Для прямой $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+3}{5}$ записать уравнения: а) параметрические; б) общее.

Δ а) Прямая задана каноническим уравнением, ее направляющий вектор – $\vec{a}(7;5),$ а начальная точка – $M_0(2;-3)$ (см. (3.3)). Параметрические уравнения: $x=2+7t; y=-3+5t$ (см. (3.2)).

б) Умножим заданное уравнение на 35, перенесем все в левую часть и приведем подобные. Получим общее уравнение: $5x-7y-31=0.$ ▲

Пример 3.4. На плоскости уравнением $3x+4y-5=0$ задана прямая l. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;-2)$: а) параллельно l (l_1); б) перпендикулярно l (l_2).

Δ а) Прямая l задана общим уравнением, $\vec{n}(3;4)$ – ее нормальный вектор. Для параллельной прямой можно взять тот же нормальный вектор: $\vec{n}_1=\vec{n}.$ По нормальному вектору и точке запишем уравнение вида (3.6): $3(x-3)+4(y+2)=0,$ или $3x+4y-1=0.$

б) Нормальный вектор $\vec{n}(3;4)$ прямой l является направляющим для прямой l_2 (рис. 3.5), т. е. $\vec{a}_2=(3;4).$ По направляющему вектору и точке запишем каноническое уравнение

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{4}.\ ▲$$

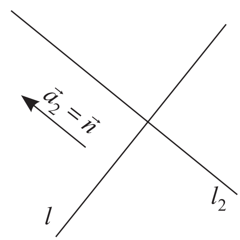


Рис. 3.5

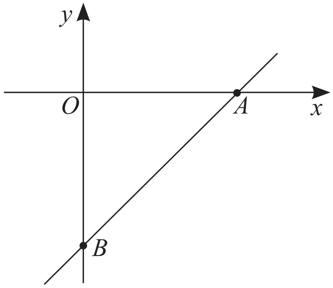


Рис. 3.6

Пример 3.5. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $5x - 4y - 40 = 0$ от координатного угла.

Δ Прямая задана общим уравнением. Следуя пункту в) примера 3.2, перейдем к уравнению в отрезках $\dfrac{x}{8} + \dfrac{y}{-10} = 1.$ Величины отрезков OA и OB, отсекаемых этой прямой на осях Ox и Oy, равны 8 и -10 соответственно (рис. 3.6). Тогда $S_{AOB} = |OA \cdot OB|/2 = 40.$ ▲

Пример 3.6. Заданы вершины треугольника $A(2;-1)$, $B(4;3)$, $C(6;-9)$. Составить: а) параметрические уравнения стороны BC (т. е. прямой, на которой лежит эта сторона); б) каноническое уравнение средней линии, параллельной BC; в) общее уравнение высоты, проведенной из вершины A; г) уравнение медианы, проведенной из вершины A, с угловым коэффициентом.

Δ На рис. 3.7 AH – высота треугольника, AD – медиана, EF – средняя линия.

а) Находим вектор $\overrightarrow{BC} = (2;-12)$. В качестве направляющего для прямой BC можно взять вектор $\vec{a} = \overrightarrow{BC}/2 = (1;-6)$, в качестве начальной точки – точку $B(4;3)$. Параметрические уравнения запишем используя (3.2): $x = 4 + t,\ \ y = 3 - 6t$.

б) За начальную точку для средней линии EF возьмем середину отрезка AB – точку E, в качестве направляющего вектора – тот же вектор $\vec{a} = (1;-6)$. Координаты середины отрезка находятся как полусуммы соответствующих координат его концов, поэтому $E(3;1)$. Воспользовавшись (3.3), записываем каноническое уравнение $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-6}$.

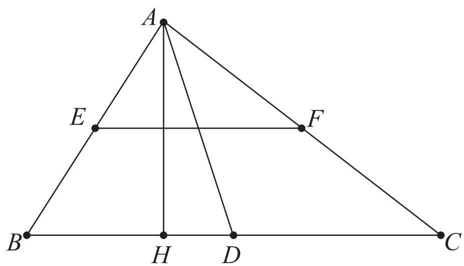


Рис. 3.7

в) Вектор $\vec{a}(1;-6)$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{BC}$ и перпендикулярен высоте AH, поэтому может служить для нее нормальным вектором. Зная нормальный вектор и начальную точку $A(2;-1)$, составляем уравнение

$$(x-2)-6(y+1)=0 \text{ (см. (3.6)), или } x-6y-8=0.$$

г) Находим координаты точки D – середины отрезка BC: $D(5;-3)$. Составляем уравнение (3.9) по точке $A(2;-1)$ и неизвестному пока угловому коэффициенту k: $y+1=k(x-2)$. Точка D принадлежит медиане, поэтому ее координаты удовлетворяют составленному уравнению, т. е. $-3+1=k(5-2)$. Отсюда находим $k=-2/3$. Получаем уравнение $y+1=-\dfrac{2}{3}(x-2)$, или $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$. ▲

Пример 3.7. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$.

Δ Для искомой прямой направляющим вектором является $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1)$, т. е. $l=x_2-x_1$, $m=y_2-y_1$. В качестве начальной точки можно взять точку $M_1(x_1;y_1)$. Используя (3.3), запишем каноническое уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{3.12}$$

Уравнение (3.12) также полезно запомнить. ▲

Говорят, что числа A_1, B_1, C_1 пропорциональны числам A_2, B_2, C_2, если существует такое число λ, что $A_1=\lambda A_2$, $B_1=\lambda B_2$, $C_1=\lambda C_2$. Если среди этих чисел нет нулевых, то условие их пропорциональности равносильно следующему: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Теорема 3.1. *Две прямые на плоскости совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при неизвестных и свободные члены в их общих уравнениях пропорциональны.*

Прямые на плоскости параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при неизвестных в их общих уравнениях пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны.

Прямые на плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при неизвестных в их общих уравнениях не пропорциональны.

Пример 3.8. Выяснить, при каких значениях параметров a и b прямые $ax+4y-10=0$ и $3x-2y+b=0$: а) совпадают; б) параллельны; в) пересекаются.

Δ а) На основании теоремы 3.1 для совпадения прямых необходимо и достаточно выполнения условий $\frac{a}{3}=\frac{4}{-2}=\frac{-10}{b}$. Отсюда получаем $a=-6,\ \ b=5.$

б) Для параллельности прямых необходимо и достаточно, чтобы $\frac{a}{3}=\frac{4}{-2}\neq\frac{-10}{b}$. Следовательно, $a=-6,\ \ b\neq 5.$

в) Для пересечения прямых необходимо и достаточно, чтобы $\frac{a}{3}\neq\frac{4}{-2}$. Значит, $a\neq -6.$

Прямые пересекаются при $a\neq -6$ и произвольном b, параллельны при $a=-6,\ \ b\neq 5$, совпадают при $a=-6,\ \ b=5.$ ▲

Пример 3.9. Выяснить взаимное расположение на плоскости следующих пар прямых, в случае их пересечения найти точку пересечения:

а) $3x-4y+7=0$ и $8x+5y+3=0$;

б) $3x-4y+7=0$ и $x=5+3t,\ \ y=8+2t$;

в) $\frac{x-2}{7}=\frac{y+3}{5}$ и $x=9+7t,\ \ y=2+5t.$

Δ Точка пересечения принадлежит как одной, так и второй прямой, значит, ее координаты удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Поэтому *для отыскания координат точки пересечения* M_0 *следует решить систему, состоящую из уравнений обеих прямых.*

а) Решаем систему $\begin{cases}3x-4y+7=0,\\ 8x+5y+3=0,\end{cases}$ для чего к первому уравнению, умноженному на 5, прибавляем второе, умноженное на 4. Получаем: $47x+47=0\Rightarrow x=-1.$

Вторую координату находим, например, из первого уравнения: $y=1.$ Прямые пересекаются, точка пересечения $M_0(-1;1).$

б) Решаем систему $\begin{cases}3x-4y+7=0,\\ x=5+3t,\\ y=8+2t.\end{cases}$ Переменные x и y, выраженные во втором и третьем уравнениях через t, подставляем в первое:

$$3(5+3t)-4(8+2t)+7=0\Leftrightarrow t=10.$$

Из параметрических уравнений второй прямой при полученном значении t находим точку пересечения $M_0(35;28).$

в) Решаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{5}, \\ x = 9 + 7t, \\ y = 2 + 5t. \end{cases}$$

Переменные x и y, выраженные во втором и третьем уравнениях через t, подставляем в первое:

$$\frac{9+7t-2}{7} = \frac{2+5t+3}{5} \Leftrightarrow t+1 = t+1 \Leftrightarrow 0t = 0.$$

Система имеет бесчисленное множество решений, прямые совпадают.

Заметим, что система для нахождения общих точек прямых проще всего решается в том случае, когда одна из них задана параметрическими уравнениями, а вторая – общим или каноническим. Если это не так, можно воспользоваться примерами 3.2 или 3.3. ▲

Пример 3.10. Найти точку N, симметричную точке $M(-2;9)$ относительно прямой $2x-3y+18=0$ (l_1).

Δ *Первый способ.* Прежде чем переходить к составлению каких-либо уравнений, полезно продумать, как по данным условия задачи построить необходимый объект, точку или прямую, и только затем каждый шаг построения перевести на язык уравнений.

Для построения точки N следует: 1) через M провести прямую l_2, перпендикулярную l_1; 2) найти точку A пересечения обеих прямых; 3) найти точку N такую, чтобы A была серединой отрезка MN (рис. 3.8).

Из уравнения прямой l_1 находим ее нормальный вектор: $\vec{n}_1 = (2;-3)$. Этот же вектор для прямой l_2 является направляющим $(\vec{a}_2 = \vec{n}_1)$. По

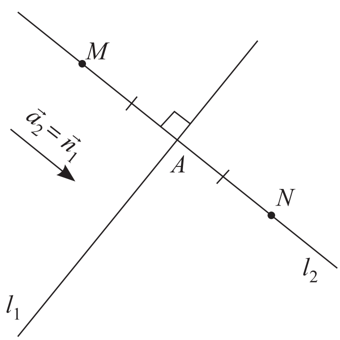


Рис. 3.8

направляющему вектору и точке M записываем параметрические уравнения прямой l_2: $x=-2+2t$, $y=9-3t$. Чтобы найти точку A, решим систему

$$\begin{cases} 2x-3y+18=0, \\ x=-2+2t, \\ y=9-3t \end{cases} \Rightarrow 2(-2+2t)-3(9-3t)+18=0 \Rightarrow t_A=1 \Rightarrow A(0;6).$$

Найти точку N можно различными способами.

а) Поскольку A – середина отрезка MN, следовательно,

$$\left\{\frac{x_N+x_M}{2}=0, \frac{y_N+y_M}{2}=6\right\} \Rightarrow \left\{\frac{x_N-2}{2}=0, \frac{y_N+9}{2}=6\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{x_N=2, y_N=3\}.$$

Таким образом, $N(2;3)$.

б) Точку N получаем, применяя операцию откладывания вектора от точки (см. (3.11)): $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MA}=(2;-3)$, $N=A+\overrightarrow{AN}$, следовательно, $N(2;3)$.

в) Параметрические уравнения прямой l_2 можно рассматривать как уравнения равномерного прямолинейного движения точки из положения M в направлении вектора $\vec{n}_1$. Если расстояние MA точка прошла за время $t_A=1$, то расстояние MN она пройдет за время в 2 раза большее, т. е. $t_N=2t_A=2$. Подставив найденное значение t_N в уравнение прямой l_2, получаем $N(2;3)$. Этот способ имеет то преимущество, что нет необходимости находить координаты точки A.

Второй способ. Запишем уравнение прямой в общем виде $Ax+By+C=0$. Если M_0 – некоторая точка этой прямой, $\vec{n}$ – ее нормальный вектор, то

$$(\vec{r}_M-\vec{r}_{M_0})\cdot\vec{n}=A(x_M-x_{M_0})+B(y_M-y_{M_0})=Ax_M+By_M+C.$$

На рис. 3.9 $N=M+\overrightarrow{MN}$,

$$\overrightarrow{MN}=-2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_0M}=-2\frac{(\vec{r}_M-\vec{r}_{M_0})\cdot\vec{n}}{\vec{n}^2}\vec{n}=-2\frac{Ax_M+By_M+C}{\vec{n}^2}\vec{n}.$$

Значит,

$$\vec{r}_N=\vec{r}_M-2\frac{Ax_M+By_M+C}{\vec{n}^2}\vec{n} \qquad (3.13)$$

(см. (3.11)). В нашей задаче

$$\vec{r}_N=(-2;9)-2\frac{-4-27+18}{13}(2;-3)=(-2;9)+(4;-6)=(2;3).$$

Получили ту же точку $N(2;3)$. ▲

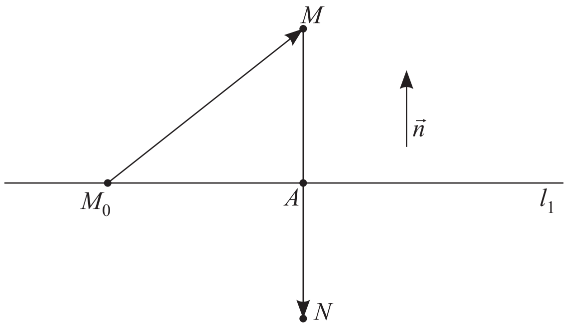


Рис. 3.9

З а м е ч а н и е 3.5. На первый взгляд второй способ решения сложнее первого. Однако этим способом получена готовая формула для нахождения точки, симметричной точке M относительно любой заданной прямой (формула (3.13)), которая может применяться для решения и других задач.

Пример 3.11. Вершина треугольника находится в точке $C(-2;9)$, а биссектрисами двух его углов служат прямые $2x-3y+18=0$ (l_1) и $y+2=0$ (l_2). Составить уравнение стороны треугольника, противолежащей заданной вершине.

Δ Непосредственной подстановкой убеждаемся, что C не принадлежит ни одной из заданных прямых, т. е. l_1 и l_2 – биссектрисы углов A и B соответственно (рис. 3.10). Точка C лежит на одной из сторон угла $\angle CAB$. Точка M, симметричная C относительно биссектрисы этого угла l_1, лежит на второй из сторон угла, т. е. на стороне AB или ее продолжении (на рис. 3.10 треугольники ACK и AMK равны). Аналогично получаем, что и точка N, симметричная C относительно l_2, принадлежит стороне AB или ее продолжению. Таким образом, дальнейшее решение задачи сводится к нахождению симметричных точек (см. пример 3.10).

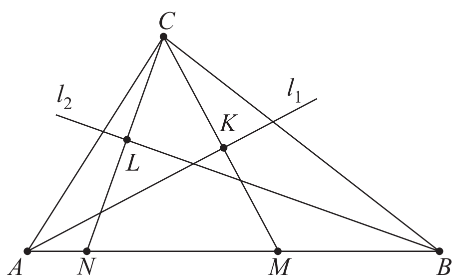


Рис. 3.10

Из уравнений прямых l_1 и l_2 находим $\vec{n}_1 = (2;-3)$, $\vec{n}_2 = (0;1)$ соответственно. По формуле (3.13) получаем:

$$\vec{r}_N = \vec{r}_C - 2\frac{A_2 x_C + B_2 y_C + C_2}{\vec{n}_2^2}\vec{n}_2 = (-2;9) - 2\frac{9+2}{1}(0;1) = (-2;-13);$$

$$\vec{r}_M = \vec{r}_C - 2\frac{A_1 x_C + B_1 y_C + C_1}{\vec{n}_1^2}\vec{n}_1 = (-2;9) - 2\frac{-4-27+18}{13}(2;-3) = (2;3).$$

Запишем уравнение прямой MN (она совпадает с AB), используя (3.12): $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{-16}$, или $4x - y - 5 = 0$. ▲

Пример 3.12. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x - y = 0$ (l_1), $5x - y = 0$ (l_2) и уравнение $3x - y = 0$ (l_3) одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $M(3;9)$.

Δ В некоторых случаях задачу легко решить без дополнительных геометрических построений, используя преимущества метода координат, на котором и построена аналитическая геометрия. Заметим, что все три заданные прямые проходят через начало координат. На рис. 3.11 это вершина B. Из уравнений прямых видим: каждая точка прямой l_1, в том числе и A, имеет координаты $A(a;2a)$ при некотором a, $C(c;5c)$ при некотором c, $E(x;3x)$ при некотором x. Если E – середина отрезка AC, то

$$\left\{\frac{a+c}{2} = x, \frac{2a+5c}{2} = 3x\right\} \Rightarrow \frac{2a+5c}{a+c} = 3 \Rightarrow a = 2c.$$

Таким образом, $A(2c;4c)$, $\overrightarrow{AC}(-c;c)$. Это значит, что любая прямая, отрезок которой между прямыми l_1 и l_2 при пересечении с прямой l_3 делится пополам, параллельна вектору $\vec{a} = (-1;1)$. Для такой прямой $\vec{n} = (1;1)$, а ее общее уравнение имеет вид $x + y + C = 0$, где C пока неизвестна. Искомая прямая проходит через точку M, поэтому координаты последней

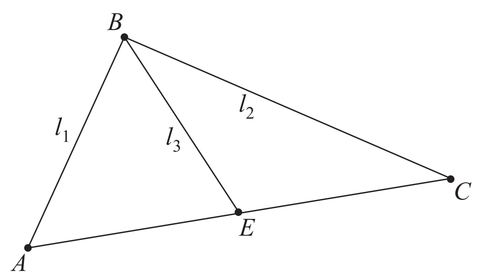


Рис. 3.11

удовлетворяют полученному уравнению, т. е. $3+9+C=0.$ Отсюда находим $C=-12.$ Общее уравнение прямой AC $x+y-12=0.$ ▲

Пример 3.13. Дано уравнение $2x+7y-18=0$ стороны AB треугольника и уравнения $x-3y+4=0,$ $3x+4y-40=0$ его медиан AD и BE соответственно. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

Δ Находим точки A и B, решая соответствующие системы уравнений:

$$A\colon \begin{cases} 2x+7y-18=0, \\ x-3y+4=0, \end{cases} \qquad B\colon \begin{cases} 3x+4y-40=0, \\ 2x+7y-18=0, \end{cases} \Rightarrow A(2;2);\ B(16;-2).$$

Для составления уравнения сторон BC и AC найдем еще и точку C. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Если точки D и E – середины отрезков BC и AC соответственно (рис. 3.12), то:

$$x_D=\frac{x_C+16}{2},\ y_D=\frac{y_C-2}{2};\ x_E=\frac{x_C+2}{2},\ y_E=\frac{y_C+2}{2}.$$

Точка D удовлетворяет уравнению медианы AD, а точка E – уравнению медианы BE:

$$\begin{cases} \dfrac{x_C+16}{2}-3\dfrac{y_C-2}{2}+4=0, \\ 3\dfrac{x_C+2}{2}+4\dfrac{y_C+2}{2}-40=0. \end{cases}$$

Решая систему, последовательно получаем:

$$\begin{cases} x_C-3y_C+30=0, \\ 3x_C+4y_C-66=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C-3y_C+30=0, \\ 13y_C-156=0 \end{cases} \Leftrightarrow y_C=12,\ x_C=6 \Rightarrow C(6;12).$$

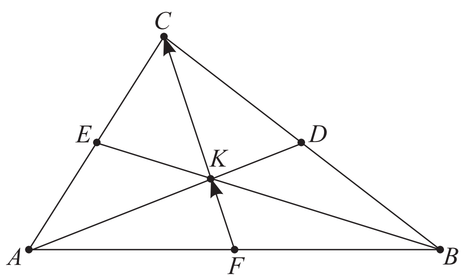


Рис. 3.12

Второй способ. Найдем середину отрезка AB – точку $F(9;0)$, а также точку K пересечения заданных медиан:

$$\begin{cases} 3x+4y-40=0, \\ x-3y+4=0, \end{cases} \quad K(8;4).$$

Тогда $\overrightarrow{FK}=(-1;4)$, $\overrightarrow{KC}=2\overrightarrow{FK}=(-2;8)$ (применяем известное свойство медиан треугольника), $C=K+\overrightarrow{KC}$, $C(6;12)$ (см. (3.11)).

Как и следовало ожидать, оба способа привели к одному результату. Записываем канонические уравнения прямых (см. (3.12)): AC – по точкам A и C, BC – по точкам B и C.

$$AC\colon \ \frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{10}; \qquad BC\colon \ \frac{x-16}{-10}=\frac{y+2}{14}. \ ▲$$

Определение 3.2. ***Пучком прямых на плоскости*** называется совокупность всех прямых на плоскости, проходящих через одну и ту же точку – центр пучка.

Если прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ пересекаются в точке M_0, то уравнение пучка прямых с центром в этой точке имеет вид

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{3.14}$$

где α и β – произвольные действительные числа, не равные нулю одновременно.

Пример 3.14. Даны уравнения сторон треугольника: $x-y+5=0$, $11x+3y-113=0$ и $x+6y-16=0$. Составить уравнение его высоты, проведенной к третьей стороне.

Δ Искомая высота проходит через точку пересечения первых двух сторон, поэтому ее уравнение получается из уравнения пучка $\alpha(x-y+5)+\beta(11x+3y-113)=0$ при некоторых значениях α и β (см. (3.14)). Коэффициенты α и β находим из условия, что эта прямая перпендикулярна третьей стороне. Значит, нормальный вектор $\vec{n}(\alpha+11\beta;-\alpha+3\beta)$ искомой прямой и нормальный вектор $\vec{n}_3(1;6)$ третьей из заданных прямых взаимно ортогональны, т. е. их скалярное произведение равно нулю:

$$(\alpha+11\beta)+6(-\alpha+3\beta)=0 \Leftrightarrow -5\alpha+29\beta=0.$$

Выбрав в качестве решения $\alpha=29, \beta=5$ и подставив эти значения в уравнение пучка, получаем $84x-14y-420=0$ или $6x-y-30=0$. ▲

3.2. ПЛОСКОСТЬ

Определение 3.3. ***Нормальным вектором*** плоскости называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный этой плоскости.

Будем использовать следующие обозначения: $\vec{n}(A;B;C)$ – нормальный (перпендикулярный) вектор плоскости; $\vec{a}(l_1;m_1;n_1)$ и $\vec{b}(l_2;m_2;n_2)$ – неколлинеарные векторы, параллельные плоскости; $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – начальная точка на плоскости; $M(x;y;z)$ – произвольная (текущая) точка этой плоскости; $\vec{r}_0(x_0;y_0;z_0)$ – радиус-вектор начальной точки M_0; $\vec{r}(x;y;z)$ – радиус-вектор текущей точки M; a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях Ox, Oy и Oz соответственно. Основные виды уравнений плоскости приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Данные	Уравнения	Название	
$\vec{n}$, $M_0(\vec{r}_0)$	$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$	Уравнение по точке и нормальному вектору в векторной форме	(3.15)
	$\vec{r}\cdot\vec{n}=\alpha$, $\vec{r}\cdot\vec{n}-\alpha=0$	Общие уравнения плоскости в векторной форме	(3.16)
$\vec{n}(A;B;C)$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0$	Уравнение по точке и нормальному вектору	(3.17)
	$Ax+By+Cz+D=0$	Общее уравнение плоскости	(3.18)
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $M_0(\vec{r}_0)$	$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}u+\vec{b}v,\ u,v\in\mathbb{R}$	Векторное параметрическое	(3.19)
$\vec{a}(l_1;m_1;n_1)$, $\vec{b}(l_2;m_2;n_2)$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$\begin{cases} x=x_0+l_1u+l_2v, \\ y=y_0+m_1u+m_2v, \quad u,v,\in\mathbb{R} \\ z=z_0+n_1u+n_2v \end{cases}$	Параметрические	(3.20)
$\vec{a}(l_1;m_1;n_1)$, $\vec{b}(l_2;m_2;n_2)$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$	В виде определителя	(3.21)
a, b, c	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Уравнение плоскости в отрезках	(3.22)

Чтобы составить уравнение плоскости, следует знать на этой плоскости какую-то точку, которая называется начальной точкой, и либо нормальный вектор плоскости, либо два неколлинеарных вектора, параллельных этой плоскости.

Пример 3.15. Заданы уравнения плоскости:

$$x = 5 + 3u - v,\ \ y = -8 + 2u + 3v,\ \ z = 4 - 3u + 2v.$$

Записать для нее следующие уравнения: а) векторное параметрическое; б) общее; в) общее в векторной форме.

Δ а) Плоскость задана параметрическими уравнениями. Координаты векторов, параллельных плоскости, – коэффициенты при u и v соответственно, значит, $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k},\ \ \vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ (см. (3.20)). Начальная точка $M_0(5;-8;4)$, ее координаты – свободные члены в параметрических уравнениях. Составляем уравнение вида (3.19):

$$\vec{r} = 5\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k} + (3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k})u + (-\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})v.$$

б) *Первый способ*. Для составления общего уравнения плоскости (3.18) надо знать ее нормальный вектор, который перпендикулярен как вектору $\vec{a}$, так и вектору $\vec{b}$. Поэтому его можно найти как их векторное произведение:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 13\vec{i} - 3\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Записываем уравнение вида (3.17), используя найденный вектор $\vec{n}$ и точку M_0:

$$13(x-5) - 3(y+8) + 11(z-4) = 0,\ \text{или}\ 13x - 3y + 11z - 133 = 0.$$

Второй способ. Исключим из параметрических уравнений u и v:

$$x + z = 9 + v \Rightarrow v = x + z - 9 \Rightarrow x = 5 + 3u - x - z + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = (2x + z - 14)/3 \Rightarrow y = -8 + 2(2x + z - 14)/3 + 3(x + z - 9).$$

После преобразований получаем то же уравнение, что и при решении первым способом.

в) Записываем уравнение (3.15), используя радиус-вектор точки $M_0(5;-8;4)$ и нормальный вектор $\vec{n} = 13\vec{i} - 3\vec{j} + 11\vec{k}$, найденный при решении первым способом в пункте а): $\left(\vec{r} - \left(5\vec{i} - 8\vec{j} + 4\vec{k}\right)\right) \cdot \left(13\vec{i} - 3\vec{j} + 11\vec{k}\right) = 0.$ После вычисления скалярного произведения получим уравнение вида (3.16): $\vec{r} \cdot (13\vec{i} - 3\vec{j} + 11\vec{k}) = 133.$ ▲

Пример 3.16. Задана плоскость своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Выяснить, как она расположена по отношению к системе координат в следующих случаях: а) $D = 0$; б) $A = 0,\ D \neq 0$; в) $A = D = 0$; г) $A = B = 0,\ D \neq 0$; д) $A = B = D = 0$.

Δ а) $D = 0$. Плоскость проходит через начало координат, что легко проверяется непосредственной подстановкой координат точки $O(0;0;0)$ в уравнение плоскости.

б) $A = 0$, $D \neq 0$. Плоскость параллельна оси Ox. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что ни одна из точек оси Ox не лежит в этой плоскости, т. е. что координаты ни одной из точек оси Ox не удовлетворяют уравнению плоскости. Действительно, произвольная точка оси Ox имеет координаты $(a;0;0)$ при некотором a. Подставляя их в уравнение плоскости, получаем $0a + B0 + C0 + D \neq 0$.

в) $A = D = 0$. В данном случае любая точка оси Ox удовлетворяет уравнению плоскости, значит, плоскость проходит через ось Ox.

г) $A = B = 0$, $D \neq 0$. Поскольку $A = 0$, $D \neq 0$, то плоскость параллельна оси Ox. Так как $B = 0$, $D \neq 0$, то она параллельна также и оси Oy, поэтому в этом случае плоскость параллельна плоскости Oxy.

д) $A = B = D = 0$. Плоскость проходит как через ось Ox, так и через ось Oy. Значит, эта плоскость совпадает с плоскостью Oxy. ▲

Пример 3.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Δ В качестве векторов, параллельных плоскости, можно взять $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. По этим двум векторам и точке $M_1(x_1;y_1;z_1)$ составляем уравнение в виде определителя (см. (3.21)):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение также полезно запомнить. ▲

Пример 3.18. Точки $A(3;5;-1)$, $B(7;5;3)$, $D(0;-7;8)$ и $A'(5;3;4)$ являются вершинами параллелепипеда. Составить:

а) параметрические уравнения плоскости ABD;

б) общее уравнение плоскости ABA';

в) общее уравнение в векторной форме плоскости, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости $BB'C$.

Δ а) Для составления уравнения искомой плоскости возьмем точку A в качестве начальной и векторы $\vec{a} = (1;0;1)$ и $\vec{b} = (1;4;-3)$, которые коллинеарны векторам $\vec{a}_1 = \overrightarrow{AB} = (4;0;4)$ и $\vec{b}_1 = \overrightarrow{AD} = (-3;-12;9)$ соответственно (рис. 3.13). Параметрические уравнения плоскости ABD: $x = 3 + u + v$, $y = 5 + 4v$, $z = -1 + u - 3v$.

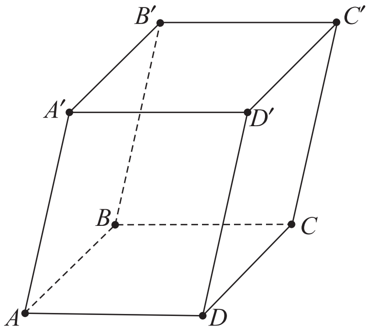


Рис. 3.13

б) Векторы $\vec{a} = (1;0;1)$ $\left(\vec{a} \| \overline{AB}\right)$ и $\vec{b} = \overline{AA'} = (2;-2;5)$ параллельны искомой плоскости. Начальной точкой также может служить точка A. Составляем уравнение, используя (3.21):

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x-3) - 3(y-5) - 2(z+1).$$

После приведения подобных получаем общее уравнение:

$$2x - 3y - 2z + 7 = 0.$$

в) Векторы $\vec{a} = \overline{AA'} = (2;-2;5)$ и $\vec{b} = (1;4;-3)$ $\left(\vec{b} \| \overline{AD}\right)$ параллельны плоскости $BB'C$ (рис. 3.13), а их векторное произведение перпендикулярно этой плоскости:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -14\vec{i} + 11\vec{j} + 10\vec{k}.$$

В качестве начальной точки возьмем середину ребра AB. Ее радиус-вектор $\vec{r}_0 = 5\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$. По этим данным записываем уравнение плоскости в векторной форме, используя (3.15):

$$(\vec{r} - (5\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})) \cdot (14\vec{i} - 11\vec{j} - 10\vec{k}) = 0.$$

После раскрытия скобок получаем $\vec{r} \cdot (14\vec{i} - 11\vec{j} - 10\vec{k}) = 5$. ▲

Пример 3.19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;1;-5)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной величины.

Δ Воспользуемся уравнением плоскости в отрезках (3.22). Если a – величина отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях ($a \neq 0$), то уравнение плоскости имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Поскольку плоскость проходит через точку A, то координаты последней удовлетворяют уравнению, т. е. $\frac{2}{a} + \frac{1}{a} - \frac{5}{a} = 1$. Отсюда получаем, что $a = -2$, и уравнение плоскости принимает вид $x + y + z + 2 = 0$. ▲

Пример 3.20. Найти основание перпендикуляра (точку A'), проведенного из точки $A(1;3;5)$ к прямой l, по которой пересекаются плоскости

$$2x + y + z - 1 = 0 \ (\alpha_1) \text{ и } 3x + y + 2z - 3 = 0 \ (\alpha_2).$$

Δ Перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой l, – прямая l_1, проходящая через A и пересекающая l под прямым углом. Но через точку A проходит бесконечно много прямых, перпендикулярных l, и только одна из них пересекает l. Как угадать, какая? Известно, что все прямые, проходящие через A перпендикулярно l, в том числе и l_1, лежат в плоскости α, перпендикулярной l и содержащей A. Поэтому A' является точкой пересечения плоскости α и прямой l (рис. 3.14).

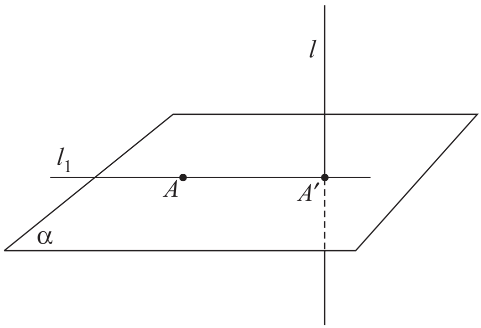


Рис. 3.14

Прямая l перпендикулярна плоскости α. Значит, все плоскости, проходящие через l, в том числе α_1 и α_2, также перпендикулярны плоскости α. Если плоскости α и α_1 перпендикулярны, то вектор $\vec{n}_1$, нормальный плоскости α_1, параллелен плоскости α (рис. 3.15). Таким образом, для составления

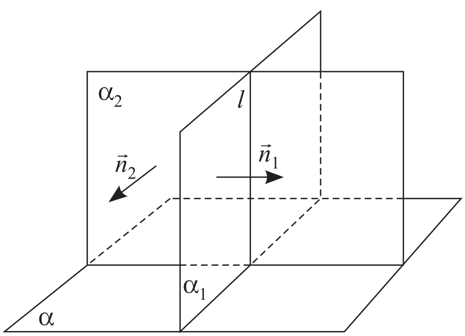


Рис. 3.15

уравнения плоскости α имеем точку A, а также два вектора, параллельных ей, – нормальные векторы $\vec{n}_1(2;1;1)$ и $\vec{n}_2(3;1;2)$ плоскостей α_1 и α_2 соответственно. Составляем уравнение, используя определитель:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)-(y-3)-(z-5) = x-y-z+7.$$

Общее уравнение плоскости α $x-y-z+7=0$.

Чтобы найти точку A' (точку пересечения плоскости α и прямой l), следует, как обычно, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y+z-1=0, \\ 3x+y+2z-3=0, \\ x-y-z+7=0, \end{cases}$$

из которой находим $A'(-2;1;4)$. ▲

Пример 3.21. Составить уравнение плоскостей, проходящих через ось Oy и равноудаленных от точек $A(2;7;3)$ и $B(-1;1;0)$.

Δ Если точки A и B, равноудаленные от плоскости α, лежат от нее по разные стороны, то плоскость α проходит через середину отрезка AB – точку E (рис. 3.16). Это вытекает из равенства треугольников $AA'E$ и $BB'E$ на рис. 3.16, на котором буквами A' и B' обозначены проекции на плоскость α точек A и B соответственно. Если же точки A и B равноудалены от плоскости и лежат от нее по одну сторону, то вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен этой плоскости (рис. 3.17), так как четырехугольник $AA'B'B$ является прямоугольником. Таким образом, условию задачи удовлетворяют две плоскости. Одна из них, α_1, проходит через ось Oy и середину отрезка AB – точку E, а вторая, α_2, – через ось Oy параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$.

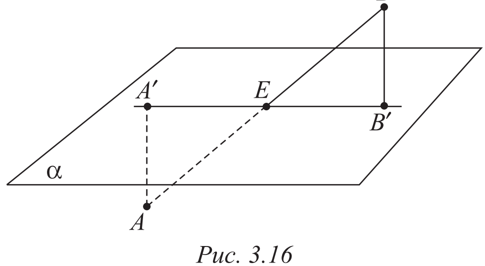


Рис. 3.16

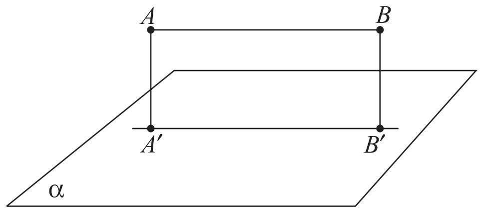


Рис. 3.17

Уравнение плоскости, проходящей через ось Oy, имеет вид $Ax + Cz = 0$, где A и C – некоторые числа, не равные нулю одновременно (см. пример 3.16). Плоскость α_1 проходит через середину отрезка AB – точку $E(0{,}5;\ 4;\ 1{,}5)$, поэтому координаты последней удовлетворяют уравнению этой плоскости: $0{,}5A + 1{,}5C = 0$. Одним из решений полученного уравнения является, например, пара чисел $A = 3$, $C = -1$. Таким образом, плоскость α_1 имеет уравнение $3x - z = 0$.

Плоскость α_2 параллельна вектору $\overrightarrow{AB} = (-3; -6; -3)$, значит, нормальный вектор $\vec{n}(A; 0; C)$ искомой плоскости и вектор $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярны, что возможно в том и только том случае, когда их скалярное произведение равно нулю: $-3A - 3C = 0$. Этому уравнению удовлетворяет, например, пара чисел $A = 1$, $C = -1$. Уравнение второй плоскости имеет вид $x - z = 0$. ▲

Теорема 3.2. *Две плоскости совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при неизвестных и свободные члены в их общих уравнениях пропорциональны.*

Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при неизвестных в их общих уравнениях пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны.

Плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при неизвестных в их общих уравнениях не пропорциональны.

Пример 3.22. Выяснить взаимное расположение пар плоскостей:

а) $3x - 8y + 3z - 9 = 0$ и $-6x + 16y - 6z - 9 = 0$;

б) $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 2$ и $\vec{r} \cdot (6\vec{i} - 9\vec{j} + 15\vec{k}) = 6$;

в) $\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = 1 + v, \\ z = u - v \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 + 3u' + 4v', \\ y = 2 + u' + v', \\ z = 2 + v'. \end{cases}$

Δ а) Используем теорему 3.2. Коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены им не пропорциональны – плоскости параллельны.

б) Плоскости заданы общими уравнениями в векторной форме. Можно перейти к общим уравнениям и воспользоваться теоремой 3.2, но можно обойтись и без этого. Нормальные векторы к заданным плоскостям $\vec{n}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{n}_2 = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 15\vec{k}$ коллинеарны, значит, плоскости параллельны либо совпадают. Возьмем произвольную точку $M_1(\vec{r}_1)$, лежащую в первой плоскости. Тогда $\vec{r}_1 \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 2.$ Проверим, лежит ли эта точка во второй плоскости, для чего подставим ее радиус-вектор во второе уравнение:

$$\vec{r}_1 \cdot (6\vec{i} - 9\vec{j} + 15\vec{k}) = \vec{r}_1 \cdot 3(2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}) = 3(\vec{r}_1 \cdot (2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k})) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Итак, M_1 лежит и во второй плоскости, поэтому плоскости совпадают. Следует заметить, что все эти действия можно проводит устно, поэтому решение на самом деле не такое громоздкое, каким выглядит.

в) Переходим к общему уравнению первой плоскости: $v = y - 1,$ $u = z + v = y + z - 1,$ $x = y + z - 1 + 2y - 2.$ Общее уравнение первой плоскости имеет вид $x - 3y - z + 3 = 0,$ $\vec{n}(1;-3;-1).$ Из уравнений второй плоскости находим параллельные ей векторы $\vec{a}(3;1;0)$ и $\vec{b}(4;1;1).$ Поскольку $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ и $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0,$ то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны вектору $\vec{n},$ значит, заданные плоскости параллельны либо совпадают. Чтобы различить два этих случая, возьмем на второй плоскости точку $M_0(2;2;2)$ и подставим ее координаты в общее уравнение первой плоскости: $2 - 6 - 2 + 3 \neq 0.$ Точка M_0 первой плоскости не принадлежит, поэтому плоскости параллельны. ▲

Определение 3.4. ***Пучком плоскостей*** называется совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую – ось пучка.

Если осью пучка является линия пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$ то уравнение этого пучка имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (3.23)$$

где α и β – произвольные действительные числа, не равные нулю одновременно.

Если плоскости заданы общими уравнениями в векторной форме $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 - \alpha_1 = 0$ и $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 - \alpha_2 = 0,$ то уравнение пучка примет вид

$$\alpha(\vec{r} \cdot \vec{n}_1 - \alpha_1) + \beta(\vec{r} \cdot \vec{n}_2 - \alpha_2) = 0, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \qquad (3.24)$$

Пример 3.23. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $5x - y + 3z - 1 = 0$ (плоскости α) и пересекающей ее по прямой, лежащей в плоскости Oxy.

Δ Обозначим α_1 искомую плоскость. Она проходит через линию пересечения плоскости α и плоскости Oxy, т. е. принадлежит пучку, заданному этими плоскостями. Плоскость Oxy имеет уравнение $z = 0$. Уравнение α_1 получается при некоторых значениях α и β из уравнения пучка (см. (3.23))

$$\alpha(5x - y + 3z - 1) + \beta z = 0. \tag{3.25}$$

Из (3.25) находим нормальный вектор для α_1: $\vec{n}'(5\alpha; -\alpha; 3\alpha + \beta)$. Поскольку плоскости α_1 и α перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы, т. е. $\vec{n}' \perp \vec{n}(5; -1; 3)$. Критерием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения. На этом основании получаем уравнение для нахождения α и β:

$$25\alpha + \alpha + 3(3\alpha + \beta) = 0,$$

откуда выразим $\beta = -35\alpha/3$. Учитывая, что α и β не равны нулю одновременно, можно взять в качестве решения, например, числа $\alpha = 3$ и $\beta = -35$. Подставляя в (3.25), записываем уравнение искомой плоскости: $15x - 3y - 26z - 3 = 0$. ▲

3.3. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 3.5. ***Направляющим вектором*** прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

Будем использовать следующие обозначения: $\vec{a}(l; m; n)$ – направляющий вектор прямой; $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – начальная (заданная) точка на прямой; $M(x; y; z)$ – произвольная (текущая) точка этой прямой; $\vec{r}_0(x_0; y_0; z_0)$ – радиус-вектор точки M_0; $\vec{r}(x; y; z)$ – радиус-вектор точки M. Основные виды уравнений прямой в пространстве приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Данные	Уравнения	Название	
$\vec{a}$, $M_0(\vec{r}_0)$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t,\ t \in \mathbb{R}$	Векторное параметрическое	(3.26)
$\vec{a}(l; m; n)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$	Параметрические	(3.27)
$\vec{a}(l; m; n)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$	$\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$	Канонические	(3.28)
$\vec{a}$, $M_0(\vec{r}_0)$	$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} = \vec{0};\ \vec{r} \times \vec{a} = \vec{\beta}$	Векторные уравнения прямой в пространстве	

Чтобы составить уравнение прямой в пространстве, следует знать на этой прямой какую-либо точку, которая называется начальной точкой, и направляющий вектор этой прямой.

Кроме того, прямую в пространстве можно задать в виде пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что в этих уравнениях коэффициенты при неизвестных не должны быть пропорциональными.

Пример 3.24. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Δ В качестве направляющего вектора возьмем $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, в качестве начальной точки – точку M_1. Канонические уравнения записываем по примеру уравнений (3.28):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \ \blacktriangle$$

Пример 3.25. Для прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{4}$ записать уравнения:

а) параметрические; б) в виде пересечения плоскостей.

Δ а) Прямая задана каноническими уравнениями, из которых находим начальную точку $M_0(3;-5;1)$ (ее координаты с противоположными знаками записаны в числителях) и направляющий вектор $\vec{a} = (2;3;4)$, координаты которого находятся в знаменателях. Параметрические уравнения записываем по примеру уравнений (3.27):

$$x = 3 + 2t, y = -5 + 3t, z = 1 + 4t.$$

б) Канонические уравнения прямой – система трех уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{3}, \\ \frac{x-3}{2} = \frac{z-1}{4}, \\ \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{4}. \end{cases}$$

Одно из них является следствием двух других. Каждое из этих уравнений в пространстве задает плоскость. Если точка лежит на прямой, то она лежит во всех трех плоскостях, т. е. ее координаты удовлетворяют всем трем уравнениям. Для однозначного задания прямой достаточно оставить два из них. Например, оставим первое и второе. После преобразований получим $\begin{cases} 3x - 2y - 19 = 0, \\ 2x - z - 5 = 0. \end{cases}$ Конечно, задача имеет не единственное решение, так как через данную прямую в пространстве проходит бесчисленное множество плоскостей. Для ответа подходят любые две из них. ▲

Пример 3.26. Для прямой $\begin{cases} 3x - 2y + z + 9 = 0, \\ 2x + y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ составить параметрические уравнения.

Δ *Первый способ.* Для составления параметрических уравнений требуется знать направляющий вектор прямой и какую-нибудь ее точку. Заданная прямая представлена в виде пересечения плоскостей. Если прямая лежит в плоскости α, то ее направляющий вектор $\vec{a}$ перпендикулярен нормальному вектору $\vec{n}$ этой плоскости (рис. 3.18). Поэтому направляющий вектор прямой, заданной в виде пересечения плоскостей, перпендикулярен как нормальному вектору $\vec{n}_1 = (3;-2;1)$ первой, так и нормальному вектору $\vec{n}_2 = (2;1;3)$ второй плоскости. Найдем векторное произведение

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Направляющим вектором искомой прямой возьмем вектор $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, коллинеарный векторному произведению.

Система, которая задает прямую, имеет бесчисленное множество решений. В качестве координат начальной точки можно взять любое из них. Иногда это решение можно просто увидеть. Если же увидеть не удается, зафиксируем одно из неизвестных, например положим $x = 0$, и решим

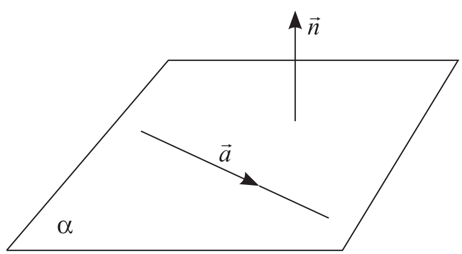


Рис. 3.18

полученную систему (тем самым мы ищем точку пересечения заданной прямой с плоскостью Oyz):

$$\begin{cases} -2y+z+9=0, \\ y+3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7z+7=0, \\ y+3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-1, \\ y=4. \end{cases}$$

Таким образом, искомая точка – $M_0(0;4;-1)$. Записываем параметрические уравнения: $x=t,\ \ y=4+t,\ \ z=-1-t.$

Второй способ. Возьмем в качестве параметра одну из переменных, например положим $x = t$, и выразим из системы остальные переменные через t:

$$\begin{cases} 3t-2y+z+9=0, \\ 2t+y+3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7t+7z+7=0, \\ 2t+y+3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-t-1, \\ y=4+t. \end{cases}$$

Получили те же уравнения: $x=t, y=4+t, z=-1-t.$

Очень часто второй способ оказывается проще первого, так как нет необходимости искать векторное произведение, а системы приходится решать в обоих случаях. ▲

Пример 3.27. Заданы вершины треугольника $A(4;2;3)$, $B(6;4;1)$ и $C(7;5;6)$. Составить:

а) векторное параметрическое уравнение медианы, проведенной из вершины A;

б) параметрические уравнения биссектрисы внутреннего угла и биссектрисы внешнего угла при вершине A;

в) уравнения высоты, проведенной из вершины B, в виде пересечения плоскостей;

г) канонические уравнения высоты, проведенной из вершины B.

Δ а) Для составления векторного параметрического уравнения прямой (уравнения типа (3.26)) надо знать ее направляющий вектор и какую-нибудь точку. В качестве начальной точки можно взять A, в качестве направляющего вектора – вектор, коллинеарный $\overrightarrow{AD}$, где D – середина BC (рис. 3.19). Переходим к вычислениям: $D(6{,}5;4{,}5;3{,}5)$, $\overrightarrow{AD}=(2{,}5;2{,}5;0{,}5)$, $\vec{a}=(5;5;1)$. Векторные параметрические уравнения медианы (т. е. прямой, на которой лежит медиана):

$$\vec{r}=4\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}+(5\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k})t.$$

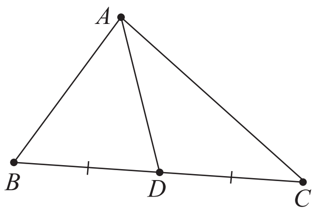


Рис. 3.19

б) Для составления параметрических уравнений прямой также требуются начальная точка и направляющий вектор. Начальной точкой может служить все та же точка A. Из векторной алгебры мы знаем, что вектор $\vec{l}_1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ делит пополам внутренний угол, а вектор $\vec{l}_2 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ – внешний угол треугольника при вершине A (рис. 3.20).

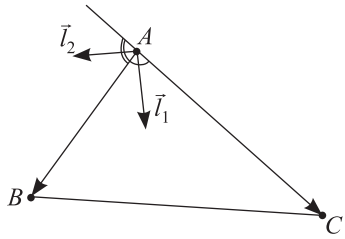


Рис. 3.20

Переходим к вычислениям:

$$\overrightarrow{AB} = (2;2;-2),\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{3};\ \overrightarrow{AC} = (3;3;3),\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 3\sqrt{3};$$

$$\vec{l}_1 = \frac{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{3}} + \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}} = \frac{2\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{3}},\ \vec{a}_1 = (1;1;0);$$

$$\vec{l}_2 = \frac{\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{3}} - \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}} = -2\frac{\vec{k}}{\sqrt{3}},\ \vec{a}_2 = (0;0;1).$$

Параметрические уравнения биссектрисы внутреннего угла при вершине A: $x = 4+t,\ y = 2+t,\ z = 3;$ параметрические уравнения биссектрисы внешнего угла при вершине A: $x = 4,\ y = 2,\ z = 3+t.$

в) В этом случае требуется найти две плоскости, проходящие через прямую, на которой лежит высота треугольника. Одной из этих плоскостей, очевидно, является плоскость α_1 заданного треугольника, а второй – плоскость α_2, проходящая через B перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AC} = (3;3;3)$ (рис. 3.21). Для плоскости α_1 имеем два вектора, параллельных ей:

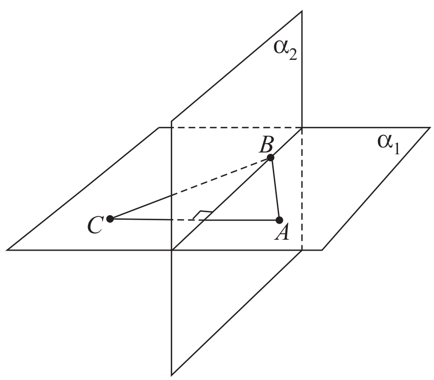


Рис. 3.21

$\vec{a} = (1;1;-1)$ $\left(\vec{a} \parallel \overrightarrow{AB}\right)$ и $\vec{b} = (1;1;1)$ $\left(\vec{b} \parallel \overrightarrow{AC}\right)$; для плоскости α_2 – вектор $\vec{b} = (1;1;1)$, перпендикулярный α_2. Составляем общие уравнения плоскостей, выбирая для каждой из них в качестве начальной точку B:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-4 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-6) - 2(y-4) = 2x - 2y - 4,$$

значит, α_1 имеет уравнение $x - y - 2 = 0$, а α_2 – уравнение

$$(x-6) + (y-4) + (z-1) = 0, \text{ или } x + y + z - 11 = 0.$$

Искомая прямая задается системой $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ x + y + z - 11 = 0. \end{cases}$

г) Для составления канонических уравнений требуется начальная точка (ею может служить, например, точка B) и направляющий вектор. Чтобы найти направляющий вектор предлагаются три способа.

Первый способ. Направляющий вектор высоты ортогонален вектору $\overrightarrow{AC}$ и вектору $\vec{n}$, перпендикулярному плоскости треугольника (рис. 3.22). В свою очередь, вектор $\vec{n}$ ортогонален векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Вектор, перпендикулярный двум заданным, можно найти как их векторное произведение. Поэтому

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC} \times \vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC}^2\right) - \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right). \quad (3.29)$$

Подставляя координаты векторов $\overrightarrow{AC} = (3;3;3)$ и $\overrightarrow{AB} = (2;2;-2)$, получаем

$$\vec{a} = 27\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AC} = 3\left(9\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) =$$

$$= 3\left(18\left(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) - 6\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)\right) = 36\left(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\right).$$

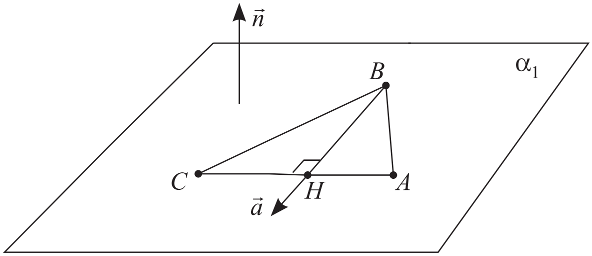


Рис. 3.22

Второй способ. Если BH – высота треугольника ABC, то по рис. 3.23 видим, что

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BA} + \mathrm{pr}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC}^2}\overrightarrow{AC} =$$

$$= \frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{AC}^2\right)\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}^2}. \qquad (3.30)$$

Сравнивая (3.29) и (3.30), замечаем, что векторы, найденные двумя способами, получились, как и следовало ожидать, коллинеарными.

Третий способ. Запишем параметрические уравнения прямой AC: $x = 4 + t, y = 2 + t, z = 3 + t$. Если M_0 – некоторая точка этой прямой, то ее координаты получаются из параметрических уравнений при некотором значении t_0, т. е. $M_0(4 + t_0; 2 + t_0; 3 + t_0)$. Тогда $\overrightarrow{BM_0} = (t_0 - 2; t_0 - 2; t_0 + 2)$ (рис. 3.24). Чтобы $\overrightarrow{BM_0}$ был ортогонален вектору $\overrightarrow{AC}$, потребуем, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю: $t_0 - 2 + t_0 - 2 + t_0 + 2 = 0 \Rightarrow t_0 = 2/3$. Таким образом, $\overrightarrow{BM_0} = (-4/3; -4/3; 8/3)$, и опять получили вектор, коллинеарный двум предыдущим.

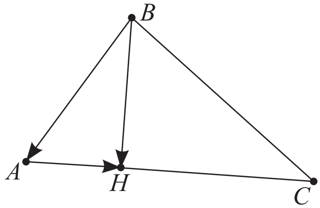


Рис. 3.23

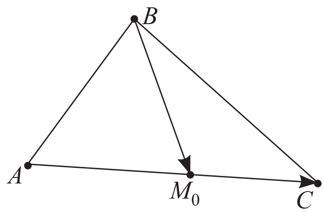


Рис. 3.24

Записываем канонические уравнения высоты, используя в качестве начальной точку $B(6;4;1)$, а в качестве направляющего вектора – $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$:

$$\frac{x-6}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{-2}. \ \blacktriangle$$

Взаимное расположение прямых в пространстве можно выяснить двумя способами.

Первый способ. Какими бы уравнениями ни была задана прямая в пространстве, всегда можно найти ее направляющий вектор и какую-либо точку на этой прямой. Предположим, что в пространстве заданы две прямые

l_1 и l_2. Обозначим их направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ соответственно. Выберем также на каждой из этих прямых по точке: $M_1 \in l_1$, $M_2 \in l_2$.

Два вектора либо коллинеарны, либо неколлинеарны. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, то прямые могут либо быть параллельными, либо совпадать. В том случае, когда прямые совпадают, точки M_1 и M_2 – две точки на одной и той же прямой, поэтому вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарен каждому из векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (рис. 3.25). Если прямые параллельны, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ направляющим векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарен (рис. 3.26).

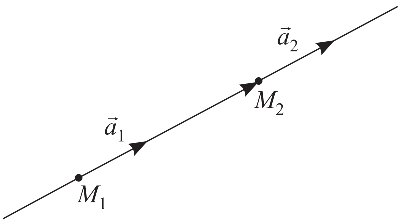


Рис. 3.25

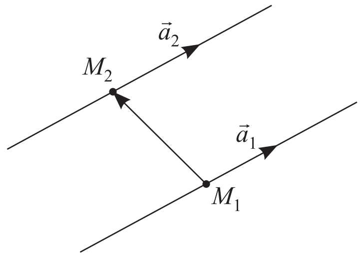


Рис. 3.26

Если же векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны, то прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Скрещивающимися называются те прямые, через которые нельзя провести одну плоскость. Поэтому, если векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ некомпланарны, то прямые скрещиваются, в противном случае они пересекаются.

Вывод:

1) $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$ – прямые совпадают;

2) $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$ – прямые параллельны;

3) $\cancel{\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2}$, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны – прямые пересекаются;

4) $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ некомпланарны – прямые скрещиваются.

Второй способ. Взаимное расположение прямых в пространстве также почти всегда можно различить по количеству их общих точек: если две прямые имеют одну общую точку, то они пересекаются, если бесчисленное множество, то совпадают, и только тогда, когда прямые общих точек не имеют, требуется дополнительное исследование (например, по взаимному расположению направляющих векторов).

Пример 3.28. Выяснить взаимное расположение пар прямых:

а) $\vec{r}=(2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})+(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})t$ и $\vec{r}=(\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k})+(2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k})t'$;

б) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-5}{-2}$ и $\dfrac{x-5}{4}=\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{z-1}{-4}$;

в) $\vec{r}=(2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})+(\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})t$ и $\vec{r}=(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})+(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})t'$.

Δ Поскольку во всех трех случаях известны начальные точки прямых и их направляющие векторы, то более рациональным будет первый способ.

а) Координаты направляющих векторов $\vec{a}_1=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{a}_2=2\vec{i}-$ $-4\vec{j}+6\vec{k}$ пропорциональны, поэтому они коллинеарны. Из уравнений прямых также находим $\vec{r}_{M_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{r}_{M_2}=\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$, значит,

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_{M_2}-\vec{r}_{M_1}=\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}-2\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}.$$

Поскольку $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel M_1M_2$, то прямые совпадают.

б) Направляющие векторы $\vec{a}_1=(2;3;-2)$, $\vec{a}_2=(4;6;-4)$ опять коллинеарны, прямые либо параллельны, либо совпадают. Два этих случая можно различить и так: при совпадении каждая точка одной из прямых принадлежит также и второй. Из уравнений первой прямой находим одну из ее точек $M_1(3;1;5)$ и подставляем ее координаты в уравнения второй прямой: $\dfrac{3-5}{4}\neq\dfrac{1-3}{6}\neq\dfrac{5-1}{-4}$. Таким образом, $M_1\notin l_2$, поэтому прямые параллельны.

З а м е ч а н и е 3.6. При наличии опыта можно все эти векторы не выписывать, а проверять их коллинеарность, сравнивая коэффициенты непосредственно в уравнениях прямых.

в) Из уравнений прямых находим следующие данные:

$$\vec{a}_1=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k},\ \vec{a}_2=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{r}_{M_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\vec{r}_{M_2}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\ \overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}_{M_2}-\vec{r}_{M_1}=-\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}.$$

Проверим компланарность векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$, для чего вычислим их смешанное произведение:

$$\vec{a}_1\vec{a}_2\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & -4 & -3\end{vmatrix}=(-3-4)+2(-6-1)+3(-8+1)=-42\neq 0.$$

Поскольку $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ некомпланарны, то прямые скрещиваются. ▲

Пример 3.29. Выяснить взаимное расположение прямых. В случае их пересечения найти точку пересечения:

а) $x = 2 + t,\ y = 3 - 2t,\ z = 5 + 3t$ и $x = 1 + 2t',\ y = t',\ z = 9 - t'$;

б) $x = 9t,\ y = 5t,\ z = -3 + t$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$

в) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-4}{2}$ и $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{2}$;

г) $\begin{cases} y + 4z = 0, \\ x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0, \\ 3x + 4y + 7z = 0. \end{cases}$

Δ Эту задачу лучше решать вторым способом, так как все равно необходимо искать точку пересечения.

а) Чтобы найти общие точки прямых, надо решить систему, состоящую из всех уравнений, задающих обе прямые. Таким образом, получаем систему из шести уравнений. Для решения же конкретной системы, полученной в этой задаче, проще всего приравнять неизвестные x, y, z, выраженные в уравнениях каждой из прямых через t и t' соответственно:

$$\begin{cases} 2 + t = 1 + 2t', \\ 3 - 2t = t', \\ 5 + 3t = 9 - t'. \end{cases}$$

Получили систему трех уравнений с двумя неизвестными. Из двух последних уравнений находим $t = t' = 1$. Эти значения удовлетворяют и первому уравнению, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Система имеет единственное решение, значит, прямые пересекаются. Чтобы найти точку пересечения, следует полученное значение $t = 1$ подставить в уравнения первой прямой либо $t' = 1$ – в уравнения второй. Таким образом, точкой пересечения является $M_0(3;1;8)$.

б) Решаем систему, состоящую из уравнений, задающих обе прямые:

$$\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t, \\ 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Проще всего эту систему решать так: неизвестные x, y, z, выраженные в первых трех уравнениях через t, подставим в два последних, в результате чего получим систему двух уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 18t - 15t + 9 - 3t - 9 = 0, \\ 9t - 10t - 3 + t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0t = 0, \\ 0t = 0. \end{cases}$$

Система имеет бесчисленное множество решений, поэтому прямые совпадают.

в) Перепишем уравнения первой прямой в параметрическом виде, а второй – в виде пересечения плоскостей:

$$x = 3 + 2t; \quad y = -1 + 3t; \quad z = 4 + 2t; \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Поступая, как при решении предыдущего примера, получаем систему

$$\begin{cases} 3 + 2t + 1 - 3t + 2 = 0, \\ -2 + 6t - 4 - 2t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 6, \\ t = 1. \end{cases} \qquad (3.31)$$

В этом случае она не имеет решений, значит, прямые либо параллельны, либо скрещиваются. Проанализируем метод решения задачи. Вторая прямая задана в виде пересечения плоскостей. Решая каждое из уравнений системы (3.31), замечаем, что первая прямая пересекает каждую из этих плоскостей, но в разных точках, откуда делаем вывод, что с линией пересечения она скрещивается (рис. 3.27).

Вообще, в том случае когда одна из прямых задана параметрическими уравнениями, а вторая – в виде пересечения плоскостей, используя описанный метод решения, получаем систему двух линейных уравнений с одним неизвестным (систему типа (3.31)). Поскольку каждое из линейных уравнений с одним неизвестным может либо иметь единственное решение, либо бесчисленное множество решений, либо не иметь решений вовсе, то кроме описанных двух случаев могут возникать еще и следующие:

1) $\begin{cases} 0t = 0, \\ t = t_0; \end{cases}$ система имеет единственное решение, прямые пересекаются;

2) $\begin{cases} 0t = 0, \\ \varnothing; \end{cases}$ первая прямая принадлежит первой плоскости, второй параллельна,

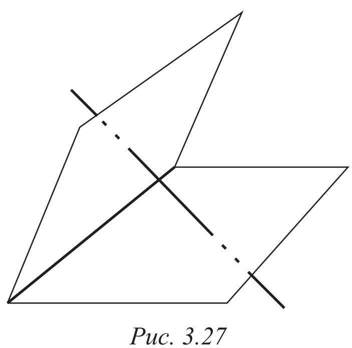


Рис. 3.27

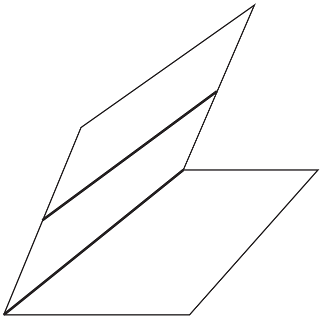


Рис. 3.28

по отношению к линии пересечения параллельна (рис. 3.28);

3) $\begin{cases}\varnothing,\\ \varnothing;\end{cases}$ первая прямая параллельна каждой из пересекающихся плоскостей, по отношению к линии пересечения параллельна (рис. 3.29);

4) $\begin{cases}\varnothing,\\ t = t_0;\end{cases}$ первая прямая параллельна первой плоскости, вторую пересекает, с линией пересечения скрещивается (рис. 3.30).

г) Перепишем уравнения первой прямой в параметрическом виде. В качестве параметра выберем, например, переменную z ($z = t$). Тогда из первого уравнения прямой получаем $y = -4t$, а из второго – $x = 1 + 3t$, и в результате параметрические уравнения первой прямой выглядят так: $x = 1 + 3t$, $y = -4t$, $z = t$. Составляем и решаем систему из уравнений обеих прямых:

$$\begin{cases}x = 1 + 3t,\\ y = -4t,\\ z = t,\\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0,\\ 3x + 4y + 7z = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2 + 6t - 12t + 6t - 6 = 0,\\ 3 + 9t - 16t + 7t = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4 = 0,\\ 3 = 0.\end{cases}$$

Из последней системы видим, что первая прямая параллельна каждой из плоскостей, задающих вторую прямую (см. рис. 3.29). Это означает, что заданные прямые параллельны. ▲

Вывод. Если прямые l_1 и l_2 заданы параметрическими или каноническими уравнениями, то взаимное расположение их направляющих векторов определяется непосредственно из уравнений. В том случае, когда

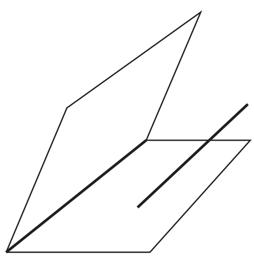


Рис. 3.29

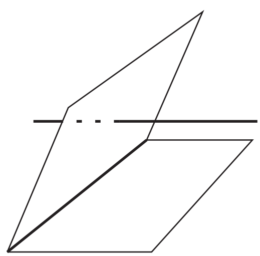


Рис. 3.30

векторы коллинеарны, прямые параллельны или совпадают, остается проверить, принадлежит ли прямой l_2 какая-либо точка прямой l_1. Во всех остальных случаях лучше искать общие точки (второй способ), причем система для их нахождения проще всего решается, когда одна из прямых задана параметрическими уравнениями, а вторая – в виде пересечения плоскостей. Если это не так, имеет смысл перейти именно к этим способам задания (см. пример 3.29).

3.4. УГЛЫ И РАССТОЯНИЯ

В этом разделе собраны задачи на плоскости и в пространстве, которые решаются похожим образом. Плоскую задачу от пространственной можно отличить по количеству координат вектора или точки.

Пересекающиеся прямые на плоскости или в пространстве образуют две пары вертикальных углов. Под *углом между двумя пересекающимися прямыми* понимается меньший из этих углов. Угол между параллельными прямыми по определению равен нулю.

Если две прямые на плоскости заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, а φ – угол между ними, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\right|. \tag{3.32}$$

Условием перпендикулярности прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ на плоскости является равенство $k_2k_1 = -1$.

Пример 3.30. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x - 5y + 1 = 0$ (l_1), а боковой стороной – прямая $12x - y - 23 = 0$ (l_2). Написать уравнение другой боковой стороны, зная, что она проходит через точку $M(3;1)$.

Δ Обозначим φ угол между основанием треугольника и известной боковой стороной. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны (рис. 3.31). Из этих соображений найдем угловой коэффициент неизвестной стороны треугольника. Для начала выразим из уравнений заданных прямых переменную y, чтобы определить их угловые коэффициенты: $y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$

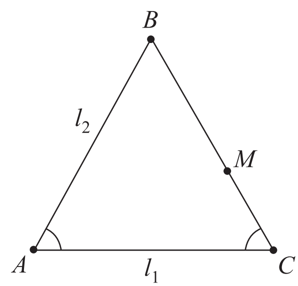


Рис. 3.31

(l_1), $y = 12x - 23$ (l_2). Итак, $k_1 = 2/5$, $k_2 = 12$. Если k – угловой коэффициент искомой прямой, то на основании (3.32) запишем

$$\left|\frac{k - k_1}{1 + kk_1}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right|, \text{ или } \left|\frac{k - 2/5}{1 + (2/5)k}\right| = \left|\frac{12 - 2/5}{1 + 24/5}\right|.$$

Решаем последнее уравнение:

$$\left|\frac{k - 2/5}{1 + (2/5)k}\right| = \left|\frac{12 - 2/5}{1 + 24/5}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{5k - 2}{5 + 2k}\right| = \frac{58}{29} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5k - 2 = 10 + 4k, \\ 5k - 2 = -10 - 4k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 12, \\ k = -\dfrac{8}{9}. \end{array}\right.$$

Через точку проходят две прямые под углом φ. Одна из них имеет угловой коэффициент 12, она параллельна заданной боковой стороне. Искомая прямая имеет угловой коэффициент $k = -8/9$. Используя этот угловой коэффициент и точку M, записываем уравнение второй боковой стороны (см. (3.9)): $y - 1 = -\dfrac{8}{9}(x - 3)$, или $8x + 9y - 33 = 0$. ▲

Пример 3.31. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин – $A(-3;-2)$, а также уравнения биссектрисы $5x + 9y - 73 = 0$ (l_1) и высоты $12x + 11y - 154 = 0$ (l_2), проведенных из вершины C, не находя координат этой вершины.

Δ Сторона AC проходит через точку пересечения прямых l_1 и l_2 (рис. 3.32), значит, она принадлежит пучку с центром в точке пересечения этих прямых. Уравнение пучка $\alpha(5x + 9y - 73) + \beta(12x + 11y - 154) = 0$ (см. (3.14)). Коэффициенты α и β находим из того условия, что искомая прямая проходит через вершину A: $\alpha(-15 - 18 - 73) + \beta(-36 - 22 - 154) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -106\alpha - 212\beta = 0$. В качестве α и β можно взять, например, $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Тогда уравнение стороны AC: $-2(5x + 9y - 73) + (12x + 11y - 154) = 0$, или $2x - 7y - 8 = 0$.

Биссектриса l_1 образует со стороной BC такой же угол, как и с AC. Из этих соображений найдем угловой коэффициент k для BC. Для прямой l_1

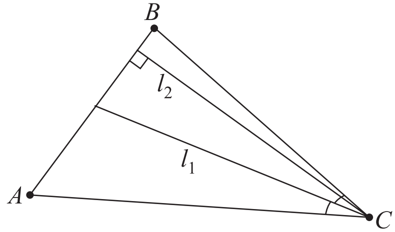


Рис. 3.32

$k_1 = -5/9$, для прямой AC $k_2 = 2/7$. На основании (3.32) записываем уравнение для k и решаем его:

$$\left|\frac{k-k_1}{1+kk_1}\right| = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{k+5/9}{1-5/9\,k}\right| = \left|\frac{2/7+5/9}{1-2/7\cdot 5/9}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{9k+5}{9-5k}\right| = \frac{18+35}{63-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{9k+5}{9-5k}\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9k+5 = 9-5k, \\ 9k+5 = -9+5k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2/7, \\ k = -7/2. \end{array}\right.$$

Из этих двух решений первое является угловым коэффициентом для AC, а второе, $k = -7/2$, для BC. Сторона BC принадлежит тому же пучку, который рассматривался выше. Преобразуем уравнение пучка к виду $(5\alpha+12\beta)x + (9\alpha+11\beta)y - (73\alpha+154\beta) = 0$ и найдем угловой коэффициент произвольной прямой пучка: $k = -\dfrac{5\alpha+12\beta}{9\alpha+11\beta}$. Приравнивая полученные значения для k, получаем уравнение для α и β и решаем его:

$$\frac{5\alpha+12\beta}{9\alpha+11\beta} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 10\alpha+24\beta = 63\alpha+77\beta \Leftrightarrow 53\alpha+53\beta = 0.$$

В качестве искомых значений можем взять, например, $\alpha = -1, \beta = 1$. Тогда уравнение BC примет вид $7x+2y-81=0$.

Проще всего написать уравнение стороны AB. Она перпендикулярна l_2, поэтому направляющим для нее может служить вектор $\vec{a}(12;11)$, нормальный к l_2. Записываем каноническое уравнение, используя точку A: $\dfrac{x+3}{12} = \dfrac{y+2}{11}$. После преобразований получаем $11x-12y+9=0$. ▲

Угол между пересекающимися или параллельными прямыми в пространстве определяется так же, как и для прямых на плоскости. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися прямыми, каждая из которых параллельна одной из двух заданных скрещивающихся прямых.

Вычисление угла φ между прямыми в пространстве сводится к вычислению угла φ_1 между их направляющими векторами: если φ_1 – острый угол, то $\varphi = \varphi_1$, если же φ_1 – тупой, то $\varphi = \pi - \varphi_1$ (рис. 3.33), поэтому в обоих случаях $\cos\varphi = |\cos\varphi_1|$. Если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – направляющие векторы двух заданных прямых, то

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}. \qquad (3.33)$$

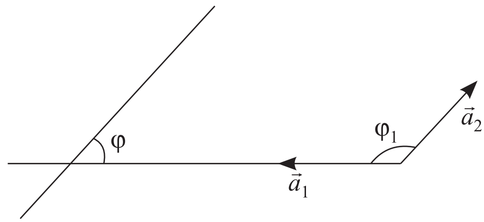


Рис. 3.33

З а м е ч а н и е 3.7. Формулу (3.33) можно использовать также и для вычисления угла между прямыми на плоскости, но в этом случае ее применение не целесообразно. Дело в том, что при решении задач формула (3.33) приводит к иррациональному уравнению, тогда как формула для тангенса всего лишь к линейному. В пространстве же приходится решать подобные задачи через косинус, так как другого способа просто нет.

Пример 3.32. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ и } x = 2 + t,\ y = 3 + t,\ z = -4t.$$

Δ Первая прямая задана в виде пересечения плоскостей, ее направляющий вектор можно найти как векторное произведение нормальных векторов к заданным плоскостям:

$$\vec{a}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.$$

Поскольку $\vec{a}_2 = (1;1;-4)$, то (см. (3.33)) $\cos\varphi = \dfrac{|1-1+4|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{4}{3\sqrt{6}}$, $\varphi = \arccos\dfrac{4}{3\sqrt{6}}$.▲

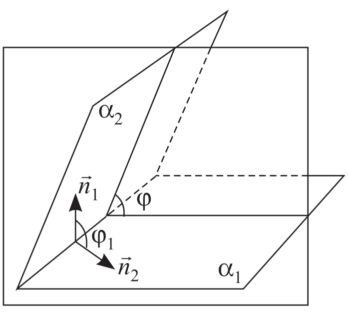


Рис. 3.34

При пересечении двух плоскостей каждая из них линией пересечения делится на две полуплоскости. *Углом между пересекающимися плоскостями* называется меньший из двугранных углов, образованных полученными полуплоскостями. Нарисуем сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной линии пересечения заданных плоскостей (рис. 3.34).

Если φ – линейный угол двугранного угла между плоскостями, а φ_1 – угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, то по рис. 3.34 видно, что это углы со взаимно перпендикулярными сторонами, которые совпадают в том случае, когда они оба острые, и составляют в сумме π, когда один из них острый, а второй тупой. В обоих случаях

$$\cos\varphi = \left|\cos\varphi_1\right| = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}. \tag{3.34}$$

Пример 3.33. Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Oz и образует с плоскостью $2x + y - \sqrt{5}\cdot z - 7 = 0$ (α) угол, равный $\pi/3$.

Δ Общее уравнение плоскости α_1, проходящей через ось Oz, имеет вид $Ax + By = 0$ (см. пример 3.16), где A и B – неизвестные пока коэффициенты. Плоскости α и α_1 имеют нормальные векторы $\vec{n}_1(2;1;-\sqrt{5})$ и $\vec{n}_2(A;B;0)$ соответственно. Если φ – угол между плоскостями α и α_1, то на основании (3.34)

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{|2A + B|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Учитывая, что $\varphi = \pi/3$, записываем и решаем уравнение:

$$\frac{|2A + B|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot|2A + B| = \sqrt{5}\cdot\sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(2A + B)^2 = 5(A^2 + B^2) \Leftrightarrow 3A^2 + 8AB - 3B^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 8\frac{A}{B} - 3 = 0,\ B \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A/B = 1/3, \\ A/B = -3. \end{array}\right.$$

Если выбрать в качестве коэффициентов числа $A = 1$, $B = 3$ для первого случая и $A = 3$, $B = -1$ для второго, получим уравнения двух плоскостей: $x + 3y = 0$ и $3x - y = 0$. ▲

Углом между прямой и плоскостью называется меньший из углов, образованных прямой и ее проекцией на эту плоскость. Нарисуем сечение плоскостью, проходящей через прямую и ее проекцию. Если φ – угол между прямой и плоскостью, φ_1 – угол между нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости α и направляющим вектором $\vec{a}$ прямой l, то по рис. 3.35 и 3.36 видим, что $\varphi = \pm(\pi/2 - \varphi_1)$. Это значит, что $\sin\varphi = \left|\cos\varphi_1\right|$.

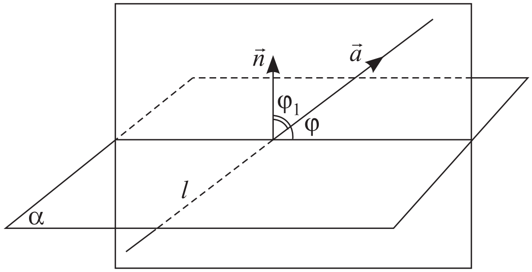


Рис. 3.35

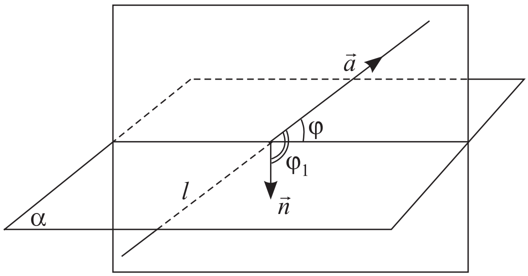


Рис. 3.36

Пример 3.34. Найти угол между прямой $\vec{r} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}\right) + \left(11\vec{i} - 7\vec{j} - 8\vec{k}\right)t$ (l) и плоскостью $\vec{r} \cdot \left(7\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}\right) - 28 = 0$ (α).

Δ Из условия задачи находим $\vec{a} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{n} = 7\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}$. Тогда

$$\sin\varphi = \left|\cos\varphi_1\right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|} = \frac{|77 + 56 - 16|}{\sqrt{121 + 49 + 64} \cdot \sqrt{49 + 64 + 4}} = \frac{117}{\sqrt{234} \cdot \sqrt{117}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\varphi = \pi/4$. ▲

Теорема 3.3. *Пусть прямая l на плоскости задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и пусть точка $M_0(x_0; y_0) \notin l$. Тогда расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки M_0 до прямой l вычисляется по формуле*

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.35}$$

Если прямая на плоскости задана общим уравнением в векторной форме $\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \alpha = 0$, точка M_0 имеет радиус-вектор $\vec{r}_0$, то $\rho(M_0, l) = \dfrac{|(\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \alpha)|}{|\vec{n}|}$.

Расстояние от точки до прямой на плоскости численно равно модулю результата подстановки точки в левую часть общего уравнения этой прямой, деленному на длину нормального вектора.

Теорема 3.4. *Любая прямая на плоскости делит плоскость на две полуплоскости так, что для всех точек одной полуплоскости результат подстановки координат точки в левую часть общего уравнения прямой есть число положительное* $(Ax+By+C>0)$*, а для всех точек другой – отрицательное* $(Ax+By+C<0)$*. Первая из этих двух полуплоскостей называется положительной, а вторая – отрицательной. Нормальный вектор* $\vec{n}(A;B)$ *прямой, заданной уравнением* $Ax+By+C=0$*, будучи отложенным от любой точки этой прямой, направлен в сторону положительной полуплоскости.*

Аналогичные утверждения справедливы и для плоскости.

Теорема 3.5. *Если плоскость* α *задана общим уравнением* $Ax+By+Cz+D=0$ *и* $M_0(x_0;y_0;z_0)\notin\alpha$*, то*

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.36}$$

Если плоскость задана уравнением $\vec{r}_0\cdot\vec{n}-\alpha=0$*, а точка* M_0 *имеет радиус-вектор* $\vec{r}_0$*, то*

$$\rho(M_0,\alpha)=|(\vec{r}_0\cdot\vec{n}-\alpha)|/|\vec{n}|. \tag{3.37}$$

Расстояние от точки до плоскости численно равно модулю результата подстановки точки в левую часть общего уравнения этой плоскости, деленному на длину нормального вектора.

Теорема 3.6. *Любая плоскость делит пространство на два полупространства так, что для всех точек одного полупространства результат подстановки координат точки в левую часть общего уравнения плоскости есть число положительное* $(Ax+By+Cz+D>0)$*, а для всех точек другого – отрицательное* $(Ax+By+Cz+D<0)$*. Первое из этих полупространств называется положительным, а второе – отрицательным. Нормальный вектор* $\vec{n}(A;B;C)$ *плоскости, заданной уравнением* $Ax+By+Cz+D=0$*, будучи отложенным от любой точки этой плоскости, направлен в сторону положительного полупространства.*

Теоремы 3.4 и 3.6 могут быть перефразированы и для случая, когда прямая на плоскости либо плоскость заданы общими уравнениями в векторной форме. Приведем, например, аналог теоремы 3.6.

Теорема 3.7. *Всякая плоскость, заданная уравнением* $\vec{r}\cdot\vec{n}-\alpha=0$*, делит пространство на два полупространства так, что для всех точек* *одного полупространства результат подстановки радиус-вектора точки в левую часть уравнения есть число положительное* $(\vec{r}\cdot\vec{n}-\alpha>0)$, *а для всех точек другого – отрицательное* $(\vec{r}\cdot\vec{n}-\alpha<0)$. *Первое из этих полупространств будем называть положительным, а второе – отрицательным. Нормальный вектор* $\vec{n}$ *плоскости, будучи отложенным от любой ее точки, направлен в сторону положительного полупространства.*

Пример 3.35. Проверить, пересекает ли плоскость $3x-4y-2z+5=0$ отрезок M_1M_2, если $M_1(-3;7;2)$, а $M_2(-2;5;2)$.

Δ Обозначим $F(M)=F(x,y,z)=3x-4y-2z+5$. Тогда

$$F(M_1)=3(-3)-4\cdot7-2\cdot2+5<0,\ F(M_2)=3(-2)-4\cdot5-2\cdot2+5<0.$$

На основании теоремы 3.6 точки M_1 и M_2 находятся по одну сторону от заданной плоскости, т. е. отрезок M_1M_2 этой плоскостью не пересекается. ▲

Пример 3.36. Найти расстояние от прямой $\vec{r}=(2\vec{i}+3\vec{j})+(4\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})t$ (l) до плоскости $\vec{r}\cdot(\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k})-2=0$ (α).

Δ Из условия задачи находим направляющий вектор прямой l $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ и нормальный вектор плоскости α $\vec{n}=\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$. Поскольку $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, значит, прямая параллельна плоскости либо лежит в ней. В первом случае все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости. Это расстояние и называется расстоянием от прямой, параллельной плоскости, до этой плоскости. Во втором случае все эти расстояния будут равными нулю. Чтобы найти искомое расстояние, выберем на прямой l какую-либо точку, например $M_0(2;3;0)$, и найдем расстояние от нее до плоскости α по формуле (3.37):

$$\rho(l,\alpha)=\rho(M_0,\alpha)=\frac{\left|\left(\vec{r}_0\cdot\vec{n}-\alpha\right)\right|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}\right)-2\right|}{\sqrt{66}}=\frac{24}{\sqrt{66}}.\ ▲$$

Пример 3.37. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-2y-2z-12=0$ (α_1) и $4x-8y-8z+12=0$ (α_2).

Δ Если плоскости параллельны, то все точки одной из плоскостей находятся на одинаковом расстоянии от другой. Это расстояние и называется расстоянием между параллельными плоскостями. Выберем на первой из плоскостей точку $M_0(0;-6;0)$ и найдем ее расстояние до другой плоскости (см. (3.36)):

$$\rho(\alpha_1,\alpha_2)=\rho(M_0,\alpha_2)=\frac{|48+12|}{\sqrt{16+64+64}}=\frac{60}{12}=5.\ ▲$$

Пример 3.38. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей $\vec{r}\cdot\left(5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)=3$ (α_1) и $\vec{r}\cdot\left(10\vec{i}-6\vec{j}+\right.$ $\left.+2\vec{k}\right)=7$ (α_2).

Δ а) Обозначим $\vec{r}$ радиус-вектор произвольной точки M искомого множества. По условию задачи $\rho(M,\alpha_1)=\rho(M,\alpha_2)$. Применяем формулу (3.37):

$$\frac{\left|\vec{r}\cdot\left(5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)-3\right|}{\sqrt{35}}=\frac{\left|\vec{r}\cdot\left(10\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right)-7\right|}{\sqrt{140}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left|\vec{r}\cdot\left(5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)-3\right|=\left|\vec{r}\cdot\left(10\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right)-7\right|.$$

Если модули чисел равны, то сами числа либо равны, либо противоположны. Раскрывая модули, получаем два уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}2(\vec{r}\cdot(5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})-3)=\vec{r}\cdot(10\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k})-7,\\ 2(\vec{r}\cdot(5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})-3)=-\vec{r}\cdot(10\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k})+7\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-6=-7,\\ \vec{r}\cdot(20\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k})-13=0.\end{array}\right.$$

Искомое множество – плоскость $\vec{r}\cdot\left(20\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\right)-13=0.$ ▲

Пример 3.39. Составить уравнение плоскостей, параллельных плоскости $2x-2y-z-3=0$ (α_1) и отстоящих от нее на расстоянии $\rho = 15$.

Δ В качестве уравнения плоскости, параллельной α_1, можно взять уравнение, отличающееся от заданного только свободным членом, т. е. уравнение $2x-2y-z+D=0,$ в котором D пока неизвестно. Выберем какую-либо точку на заданной плоскости, например $M_0(0;0;-3).$ Тогда

$$\rho(M_0,\alpha)=\rho(\alpha_1,\alpha)=15\Rightarrow\frac{|3+D|}{3}=15\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3+D=45,\\ 3+D=-45\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}D=42,\\ D=-48.\end{array}\right.$$

Получаем две плоскости: $2x-2y-z-48=0$ и $2x-2y-z+42=0.$ ▲

Пример 3.40. Заданы две прямые на плоскости: $3x-4y+24=0$ (l_1) и $3x+4y=0$ (l_2). Найти центр круга радиусом 6, который касается обеих прямых.

Δ Искомый центр круга $M(x;y)$ находится от каждой из заданных прямых на расстоянии, равном 6. Значит, его координаты можно найти из системы уравнений (см. (3.35)):

$$\begin{cases} \dfrac{|3x-4y+24|}{5}=6, \\ \dfrac{|3x+4y|}{5}=6, \end{cases}$$

которая распадается на четыре системы:

$$\begin{cases} 3x-4y+24=30, \\ 3x+4y=30; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-4y+24=30, \\ 3x+4y=-30; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-4y+24=-30, \\ 3x+4y=30; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-4y+24=-30, \\ 3x+4y=-30. \end{cases}$$

Решая каждую из них, находим четыре точки: $M_1(6;3)$, $M_2(-4;-4{,}5)$, $M_3(-4;10{,}5)$ и $M_4(-14;3)$, что соответствует условию задачи, так как две прямые на плоскости при пересечении образуют четыре угла и в каждый из этих углов можно вписать круг. ▲

Пример 3.41. Трактору нужно переместиться из пункта $A(-3;10)$ в пункт $B(17;6)$. По пути на шоссе он встречается для заправки с бензовозом. Положение шоссе задано уравнением $x+5y-21=0$ (l_1). В какой точке должна произойти встреча, чтобы путь трактора из пункта A в пункт B был наикратчайшим?

Δ Обозначим $F(M)=F(x,y)=x+5y-21.$ Тогда $F(A)=-3+50-21>0$ и $F(B)=17+30-21>0.$ Это означает, что точки A и B расположены по одну сторону от прямой l_1 (рис. 3.37). Если B' – точка, симметричная точке B относительно прямой l_1, l_2 – прямая AB', C – точка встречи трактора и бензовоза, то по рис. 3.37 видно, что $AC+CB=AC+CB'$. Длина ломаной, соединяющей точки A и B', больше длины отрезка AB', поэтому встреча должна произойти в точке M_0 пересечения прямых l_1 и l_2.

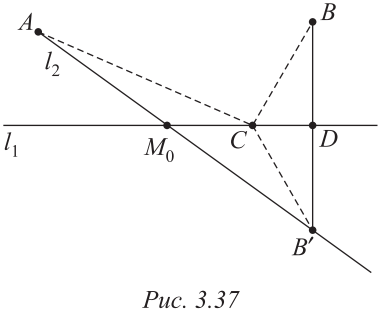


Рис. 3.37

Переходим к вычислениям. Точку B' находим по формуле (3.13):

$$\vec{r}_{B'}=\vec{r}_B-2\frac{Ax_B+By_B+C}{\vec{n}^2}\vec{n}=$$

$$=(17;6)-2\frac{17+30-21}{26}(1;5)=(15;-4)$$

(здесь $\vec{n}$ – нормальный вектор прямой l_1, $Ax+By+C=0$ – ее уравнение).

Итак, $B'(15;-4) \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = (18;-14)$. Параметрические уравнения прямой l_2 записываем по направляющему вектору $\vec{a} = \overrightarrow{AB'}/2 = (9;-7)$ и точке $A(-3;10)$: $x = -3+9t$, $y = 10-7t$. Точка M_0 пересечения прямых l_1 и l_2 находится как решение системы:

$$\begin{cases} x+5y-21=0, \\ x=-3+9t, \\ y=10-7t \end{cases} \Rightarrow -3+9t+5(10-7t)-21=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow M_0(6;3). \ \blacktriangle$$

Пример 3.42. Составить уравнение биссектрис углов, образованных при пересечении двух прямых на плоскости: $2x-3y+5=0$ (l_1) и $9x+6y-1=0$ (l_2).

Δ На рис. 3.38 прямые l_1 и l_2 нарисованы сплошной линией, биссектрисы l_3 и l_4 – пунктирной. Все точки биссектрисы и только они равноудалены от сторон угла. Обозначим $M(x;y)$ – произвольную точку искомой биссектрисы. Тогда $\rho(M,l_1)=\rho(M,l_2)$. Применяя формулу (3.35), получаем:

$$\frac{|2x-3y+5|}{\sqrt{13}} = \frac{|9x+6y-1|}{3\sqrt{13}} \Leftrightarrow 3|2x-3y+5| = |9x+6y-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x-9y+15=9x+6y-1, \\ 6x-9y+15=-9x-6y+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+15y-16=0, \\ 15x-3y+14=0. \end{array}\right. \ \blacktriangle$$

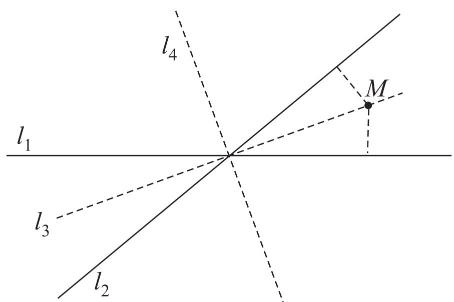


Рис. 3.38

Пример 3.43. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $\vec{r}\cdot(\vec{i}+3\vec{j})-11=0$ (l_1) и $\vec{r}\cdot(3\vec{i}+\vec{j})-5=0$ (l_2), смежного с тем, которому принадлежит точка $A(-3;10)$.

Δ Составим сначала уравнение обеих биссектрис. Для произвольной точки M искомого множества $\rho(M,l_1)=\rho(M,l_2)$. Если $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M, то

$$\frac{\left|\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)-11\right|}{\sqrt{10}}=\frac{\left|\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)-5\right|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow\left|\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)-11\right|=\left|\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)-5\right|.$$

Обозначим $F_1(M)=\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)-11,$ $F_2(M)=\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)-5.$ Если M – точка искомой биссектрисы, то по рис. 3.39 видно, что точки M и A от прямой l_1 лежат по одну сторону, а от прямой l_2 по разные. Поскольку $F_1(A)=\left(-3\vec{i}+10\vec{j}\right)\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)-11>0,$ $F_2(A)=\left(-3\vec{i}+10\vec{j}\right)\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)-5<0,$ то $F_1(M)>0,$ $F_2(M)>0.$ Поэтому и в левой, и в правой частях уравнения биссектрис следует опустить модули, не меняя знаков:

$$\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)-11=\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)-5.$$

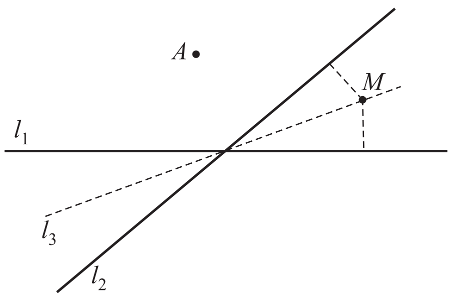


Рис. 3.39

Окончательно уравнение принимает вид $\vec{r}\cdot(\vec{i}-\vec{j})+3=0.$ ▲

Пример 3.44. Две стороны параллелограмма лежат на прямых $5x-2y-6=0$ (l_1) и $3x-y-4=0$ (l_2), а диагонали его пересекаются в точке $E(7;7)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

Δ Каждая из неизвестных сторон параллелограмма лежит на одной из прямых l_3 и l_4, параллельных прямым l_1 и l_2 соответственно (рис. 3.40).

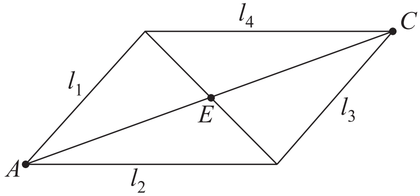


Рис. 3.40

Поэтому прямые l_3 и l_4 задаются уравнениями $5x-2y+D_1=0$ и $3x-y+D_2=0$, в которых свободные члены D_1 и D_2 пока неизвестны.

Для их нахождения предлагаются два способа.

Первый способ. Найдем точку A, решив систему

$$\begin{cases} 5x - 2y - 6 = 0, \\ 3x - y - 4 = 0, \end{cases} \quad A(2;2).$$

Затем находим точку C, используя операцию откладывания вектора от точки: $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} = (5;5)$, $C = E + \overrightarrow{EC}$, $C(12;12)$. Подставляя координаты точки C в уравнения прямых l_3 и l_4, находим $D_1 = -36$, $D_2 = -24$. Таким образом, неизвестные стороны параллелограмма задаются уравнениями $5x - 2y - 36 = 0$ и $3x - y - 24 = 0$.

Второй способ. Точка E находится на одинаковом расстоянии как от прямой l_1, так и от прямой l_3, поэтому

$$\frac{|35 - 14 + D_1|}{\sqrt{29}} = \frac{|35 - 14 - 6|}{\sqrt{29}} \Rightarrow \left[\begin{aligned} D_1 &= -6, \\ D_1 &= -36. \end{aligned}\right.$$

Одно из найденных значений приводит к уравнению прямой l_1, а второе – к уравнению искомой прямой l_3.

Аналогично

$$\rho(E, l_2) = \rho(E, l_4) \Rightarrow \frac{|21 - 7 + D_2|}{\sqrt{10}} = \frac{|21 - 7 - 4|}{\sqrt{10}} \Rightarrow \left[\begin{aligned} D_1 &= -4, \\ D_1 &= -24. \end{aligned}\right.$$

Получили те же две прямые $5x - 2y + 36 = 0$ и $3x - y - 24 = 0$, что и при решении первым способом.

Заметим, что в данном случае второй способ оказывается гораздо проще, так как нет необходимости искать точки A и C, а вычисление расстояний не требует особых усилий. ▲

Пример 3.45. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между плоскостями $2x - y + 2z - 3 = 0$ (α_1) и $4x + 8y - z - 1 = 0$ (α_2), которому принадлежит точка $A(1;2;-3)$.

Δ Все точки биссекторных плоскостей и только они равноудалены от граней двугранного угла. Таким образом, если $M(x;y;z)$ – произвольная точка какой-либо из этих плоскостей, то для нее $\rho(M, \alpha_1) = \rho(M, \alpha_2)$:

$$\frac{|2x - y + 2z - 3|}{3} = \frac{|4x + 8y - z - 1|}{9} \Leftrightarrow 3|2x - y + 2z - 3| = |4x + 8y - z - 1|.$$

Последнее уравнение задает две плоскости. Чтобы выбрать из них искомую, сделаем рисунок сечения плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно линии пересечения всех плоскостей (рис. 3.41).

Если $M(x;y;z)$ – точка искомой биссекторной плоскости α_3, то по рис. 3.41 видно, что точки M и A лежат по одну сторону как от плоскости α_1, так и от плоскости α_2. Обозначим $F_1(M) = F_1(x, y, z) = 2x - y + 2z - 3$,

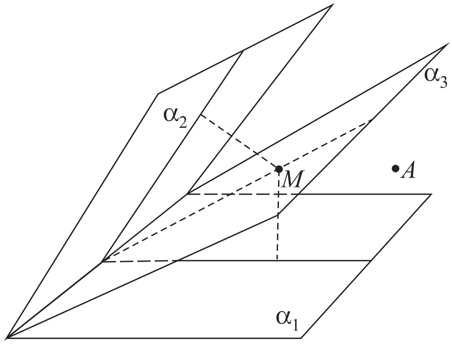


Рис. 3.41

$F_2(M) = F_2(x, y, z) = 4x + 8y - z - 1$. Поскольку $F_1(A) = 2 - 2 - 6 - 3 < 0$, $F_2(A) = 4 + 16 + 3 - 1 > 0$, то $F_1(M) < 0$, а $F_2(M) > 0$. Поэтому при опускании модулей в левой части уравнения знак следует поменять, а в правой – сохранить: $-3(2x - y + 2z - 3) = 4x + 8y - z - 1$. Окончательно уравнение принимает вид $10x + 5y + 5z - 10 = 0$, или $2x + y + z - 2 = 0$. ▲

Пример 3.46. Составить уравнения биссекторной плоскости тупого двугранного угла, образованного плоскостями $\vec{r} \cdot \left(5\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}\right) - 3 = 0$ (α_1) и $\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}\right) + 1 = 0$ (α_2).

Δ Составим вначале уравнение двух биссекторных плоскостей (см. пример 3.45): если $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M, то, применяя формулу (3.37), имеем

$$\frac{\left|\vec{r} \cdot \left(5\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}\right) - 3\right|}{\sqrt{54}} = \frac{\left|\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}\right) + 1\right|}{\sqrt{54}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{r} \cdot \left(5\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}\right) - 3\right| = \left|\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}\right) + 1\right|. \qquad (3.38)$$

Выберем на линии пересечения плоскостей α_1 и α_2 произвольную точку M_0 и отложим от нее нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих плоскостей. На основании теоремы 3.7 каждый из векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ направлен в сторону положительного полупространства, определяемого соответствующей плоскостью. Обозначим φ величину угла между нормальными векторами. На рис. 3.42 и 3.43, на которых изображены сечения двугранного угла плоскостью, проходящей через точку M_0 перпендикулярно линии пересечения плоскостей α_1 и α_2, видно, что все точки, лежащие внутри двугранного угла, по величине равного φ, и только они принадлежат пересечению полупространств разных знаков. Внутри же двугранного угла, по величине равного

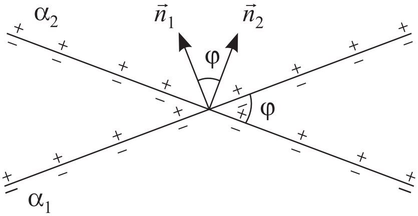


Рис. 3.42

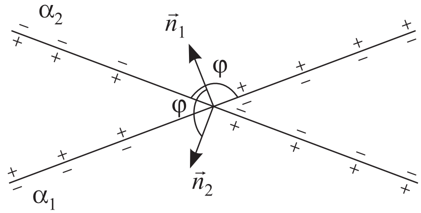


Рис. 3.43

$\pi-\varphi,$ лежат точки пересечения полупространств одного знака. Значит, если требуется составить уравнение биссекторной плоскости двугранного угла, по величине равного $\pi-\varphi,$ то в уравнении (3.38) модули следует опустить с одинаковыми знаками, в противном случае – с противоположными. В нашей задаче нормальные векторы образуют тупой угол, так как $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=\left(5\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}+7\vec{j}-2\vec{k}\right)=-26<0.$ Опуская модули с противоположными знаками, из (3.38) получаем

$$\vec{r}\cdot\left(5\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k}\right)-3=-\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+7\vec{j}-2\vec{k}\right)-1\Leftrightarrow\vec{r}\cdot\left(6\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}\right)-2=0.$$

В итоге уравнение принимает вид $\vec{r}\cdot(3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})-1=0.$ ▲

Пример 3.47. Через линию пересечения плоскостей $5x-4y+16z+13=0$ (α_1) и $x+4y-4z-7=0$ (α_2) провести плоскости, касающиеся сферы $x^2+y^2+z^2=1.$

Δ Искомые плоскости принадлежат пучку плоскостей, проходящих через линию пересечения α_1 и α_2, поэтому их уравнения могут быть получены из уравнения пучка $\alpha(5x-4y+16z+13)+\beta(x+4y-4z-7)=0$ при некоторых значениях α и β, не равных нулю одновременно. Уравнение пучка перепишем в виде

$$(5\alpha+\beta)x+4(-\alpha+\beta)y+4(4\alpha-\beta)z+13\alpha-7\beta=0.$$

Если эта плоскость касается заданной сферы, то она находится от начала координат на расстоянии, равном единице, т. е.

$$\frac{|13\alpha-7\beta|}{\sqrt{(5\alpha+\beta)^2+16(\alpha-\beta)^2+16(4\alpha-\beta)^2}}=1,$$

откуда получаем уравнение для нахождения α и β:

$$(13\alpha-7\beta)^2=(5\alpha+\beta)^2+16(\alpha-\beta)^2+16(4\alpha-\beta)^2.$$

Это уравнение является однородным относительно α и β. Для решения разделим его на α^2 и обозначим $t=\beta/\alpha$:

$$(13-7t)^2=(5+t)^2+16(1-t)^2+16(4-t)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16t^2-32t-128=0\Leftrightarrow t^2-2t-8=0.$$

Последнее уравнение имеет корни $t_1 = 4$ и $t_2 = -2$. Таким образом, $\beta/\alpha = 4$ или $\beta/\alpha = -2$. В первом случае возьмем $\alpha = 1$, $\beta = 4$ и получим уравнение $9x + 12y - 15 = 0$, или $3x + 4y - 5 = 0$, во втором – положим $\alpha = 1$, $\beta = -2$, получим уравнение $3x - 12y + 24z + 27 = 0$, или $x - 4y + 8z + 9 = 0$. ▲

Пример 3.48. Рассматривается двугранный угол между плоскостями $x - 2y + z + 3 = 0$ (α_1) и $x + y + 2z - 1 = 0$ (α_2), которому принадлежит точка $A(-1;0;0)$. Найти множество точек, лежащих внутри этого угла и удаленных от заданных плоскостей на расстояния, равные $\sqrt{6}$ и $2\sqrt{6}$ соответственно.

Δ Как обычно, обозначим $M(x;y;z)$ произвольную точку искомого множества. Из условия задачи получаем

$$\begin{cases} \dfrac{|x - 2y + z + 3|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}, \\ \dfrac{|x + y + 2z - 1|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

Если $F_1(M) = F_1(x,y,z) = x - 2y + z + 3$, $F_2(M) = F_2(x,y,z) = x + y + {}$ ${} + 2z - 1$, то $F_1(A) = 2 > 0$, $F_2(A) = -2 < 0$. Поскольку все точки искомого множества находятся в том же угле, что и точка A, то $F_1(M) > 0$, а $F_2(M) < 0$. Значит, при опускании модулей в первом уравнении знак сохраняется, а во втором – меняется на противоположный:

$$\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 6, \\ x + y + 2z - 1 = -12. \end{cases}$$

Получаем прямую, заданную в виде пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y + 2z + 11 = 0. \end{cases} ▲$$

Пример 3.49. Найти расстояние от точки $M_0(1;2;5)$ до прямой:

а) $x = t$, $y = 1 - 2t$, $z = 3 + t$ (l); б) $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$

Δ а) *Первый способ*. Расстоянием от точки M_0 до прямой l называется длина перпендикуляра, проведенного из точки M_0 на эту прямую. Проведем плоскость α через точку M_0 перпендикулярно l. Если эта плоскость пересекает прямую l в точке A, то последняя и будет основанием искомого перпендикуляра (рис. 3.44). Тогда $\rho(M_0,l) = \rho(M_0,A)$.

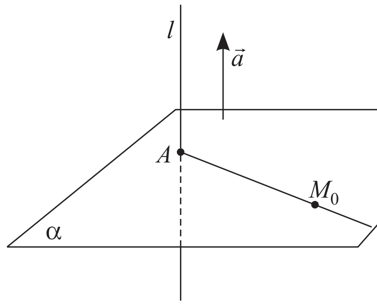


Рис. 3.44

Переходим к вычислениям. Из условия находим направляющий вектор $\vec{a}(1;-2;1)$ прямой l, который будет нормальным для плоскости α. По точке M_0 и нормальному вектору составляем уравнение плоскости $x-1-2(y-2)+z-5=0$, или $x-2y+z-2=0$. Точку пересечения прямой l и плоскости α ищем, решая систему

$$\begin{cases} x-2y+z-2=0, \\ x=t, \\ y=1-2t, \\ z=3+t \end{cases} \Rightarrow t-2(1-2t)+3+t-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6t-1=0 \Rightarrow t=1/6 \Rightarrow A(1/6;2/3;19/6);$$

$$\rho(M_0,l)=\rho(M_0,A)=\sqrt{(1-1/6)^2+(2-2/3)^2+(5-19/6)^2}=\sqrt{210}/6.$$

Второй способ. Из уравнений прямой найдем ее направляющий вектор $\vec{a}(1;-2;1)$ и точку $M_1(0;1;3)$. Построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{M_1M_0}=(1;1;2)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{a}$. По рис. 3.45 видно, что расстояние от точки M_0 до прямой l совпадает с высотой этого параллелограмма, которую можно найти по формуле $h=\dfrac{S_{\text{пар}}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\left|\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{a}|}$.

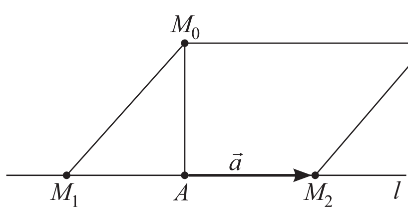


Рис. 3.45

Переходим к вычислениям:

$$\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\ \left|\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\sqrt{35},$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{6},\ \rho(M_0,l)=\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{210}}{6}.$$

Заметим, что в данном случае второй способ проще, так как нет необходимости решать систему и проводить вычисления с дробями.

б) Перепишем уравнения прямой в параметрическом виде: если ко второму уравнению прибавить первое, умноженное на (-1), получим $x=2-z$, тогда из первого уравнения находим $y=-3+z$. Полагая $z=t$, получаем параметрические уравнения: $x=2-t,\ y=-3+t,\ z=t.$ Из уравнений прямой выписываем ее направляющий вектор $\vec{a}(-1;1;1)$ и точку $M_1(2;-3;0)$.

Решаем задачу вторым способом: расстояние от точки M_0 до прямой l совпадает с высотой параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_0}=(-1;5;5)$ и $\vec{a}$. Переходим к вычислениям:

$$\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 5 & 5\end{vmatrix}=4\vec{j}-4\vec{k},\ \left|\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|=4\sqrt{2},$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{3},\ h=\frac{S_{\text{пар}}}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\vec{a}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}.\ \blacktriangle$$

Пример 3.50. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}\ (l_1)\ \text{и}\ \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}\ (l_2).$$

Δ Если прямые параллельны, то все точки одной из них находятся на одинаковом расстоянии от другой. Это расстояние и называется расстоянием между параллельными прямыми. Таким образом, задача свелась к предыдущей.

Из уравнений первой прямой находим ее направляющий вектор $\vec{a}(3;4;2)$ и точку $M_1(2;-1;0)$, а из уравнений второй – точку $M_0(7;1;3)$. Расстояние между параллельными прямыми совпадает с высотой параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_1M_0}=(5;2;3)$ (см. второй способ примера 3.49). Переходим к вычислениям:

$$\vec a\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 3 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 3\end{vmatrix}=8\vec i+\vec j-14\vec k,\ \left|\vec a\times\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\sqrt{261},$$

$$|\vec a|=\sqrt{29},\ \rho(l_1,l_2)=\rho(M_0,l)=\frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}}=3.\ \blacktriangle$$

Пример 3.51. Найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}\ (l_1)\text{ и }\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}\ (l_2).$$

Δ *Первый способ*. Построим плоскость α, проходящую через l_2 параллельно l_1. Все точки прямой l_1, в том числе и $M_1(9;-2;0)\in l_1$, находятся на одинаковом расстоянии от плоскости α, оно как раз и совпадает с кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми (рис. 3.46). Для плоскости α имеем: направляющие векторы $\vec a_1(4;-3;1)$ и $\vec a_2(-2;9;2)$ прямых l_1 и l_2 соответственно параллельны α, точка $M_2(0;-7;2)$, лежащая на прямой l_2, принадлежит также и плоскости α. Составляем уравнение

$$\begin{vmatrix}x & y+7 & z-2\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=-15x-10(y+7)+30(z-2),\ 3x+2y-6z+26=0.$$

Тогда $\rho(l_1,l_2)=\rho(M_1,\alpha)=\dfrac{|27-4+26|}{\sqrt{9+4+36}}=\dfrac{49}{7}=7.$

Второй способ. Построим параллелепипед на векторах $\overrightarrow{M_1M_3}=\vec a_1=(4;-3;1)$, $\overrightarrow{M_2M_4}=\vec a_2=(-2;9;2)$ и $\overrightarrow{M_2M_1}=(9;5;-2)$ (рис. 3.47). Его

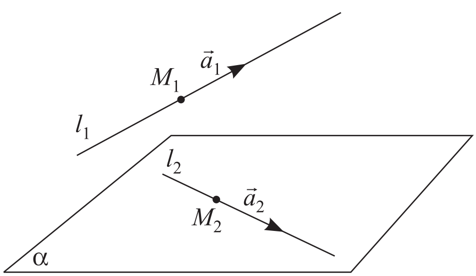


Рис. 3.46

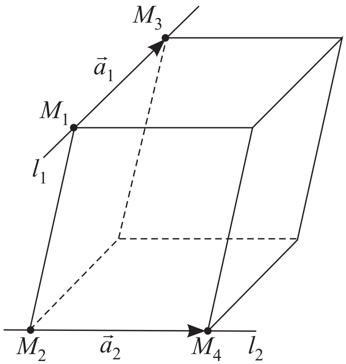


Рис. 3.47

высота совпадает с кратчайшим расстоянием между скрещивающимися прямыми. Переходим к вычислениям:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 10\vec{j} + 30\vec{k} =$$

$$= -5(3\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}), \ |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = 5\sqrt{49} = 35,$$

$$\overrightarrow{M_2M_1}\vec{a}_1\vec{a}_2 = \overrightarrow{M_2M_1} \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) =$$

$$= -5(27 + 10 + 12) = -5 \cdot 49,$$

$$\rho(l_1, l_2) = h_{\text{пар}} = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{\left|\overrightarrow{M_2M_1}\vec{a}_1\vec{a}_2\right|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{5 \cdot 49}{35} = 7.$$

При сравнении этих двух способов замечаем, что вычисления в них абсолютно одинаковые, поэтому можно выбрать тот, который кажется более простым. ▲

3.5. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе собраны задачи, для решения которых требуется знание как уравнений прямой в пространстве, так и уравнений плоскости.

Пример 3.52. Заданы прямые $x = 2 - t, y = 3 + t, z = 4 + 3t$ (l_1), $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-8}{4}$ (l_2), $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-5}{-9}$ (l_3). Составить общее уравнение плоскости, проходящей через:

а) точку $A(2;-1;3)$ перпендикулярно прямой (l_1);

б) пересекающиеся прямые (l_1) и (l_2);

в) параллельные прямые (l_1) и (l_3).

Δ а) Если плоскость α перпендикулярна прямой l_1, то в качестве нормального вектора к этой плоскости можно взять направляющий вектор заданной прямой (рис. 3.48), т. е. для искомой плоскости $\vec{n} = (-1;1;3)$. По точке A и вектору $\vec{n}$ составляем уравнение

$$-(x-2) + (y+1) + 3(z-3) = 0, \text{ или } x - y - 3z + 6 = 0.$$

б) Направляющие векторы $\vec{a}_1(-1;1;3)$ и $\vec{a}_2(2;-3;4)$ обеих прямых параллельны искомой плоскости, а в качестве начальной можно взять любую из точек, заданных на этих прямых, например $M_1(2;3;4)$ (рис. 3.49). Уравнение составляем в виде определителя

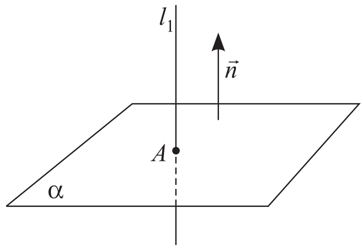


Рис. 3.48

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Оно равносильно следующему: $13x+10y+z-60=0$.

в) В этом случае также известны два направляющих вектора $\vec{a}_1(-1;1;3)$, $\vec{a}_2(3;-3;-9)$ и на каждой из прямых по точке: $M_1(2;3;4)$ и $M_2(3;4;5)$. Поскольку векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, они не задают плоскость однозначно. Для составления уравнения можно использовать только один из них, например $\vec{a}_1$. Вторым вектором возьмем $\overrightarrow{M_1M_2}(1;1;1)$, который параллелен искомой плоскости в силу того, что обе точки M_1 и M_2 лежат в ней (рис. 3.50). Выбираем в качестве начальной точку M_1 и получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } x-2y+z=0. \ \blacktriangle$$

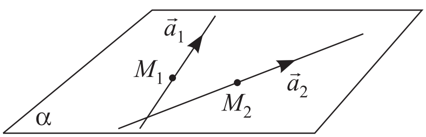


Рис. 3.49

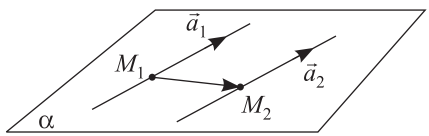


Рис. 3.50

Пример 3.53. Составить общее уравнение в векторной форме плоскости, проходящей через:

а) прямую $\vec{r} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} + \left(4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right)t$ и точку $A(2;-1;3)$;

б) прямую $\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} + \left(-\vec{i} + j + 3\vec{k}\right)t$ перпендикулярно плоскости $\vec{r} \cdot \left(3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}\right) = 2$.

Δ а) Из векторного параметрического уравнения заданной прямой находим направляющий вектор $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и координаты одной из ее точек –

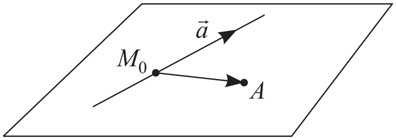


Рис. 3.51

$M_0(-1;-2;3)$. На рис. 3.51 видно, что векторы $\vec a$ и $\overline{M_0A} = 3\vec i + \vec j$ параллельны искомой плоскости. Нормальным для нее является любой вектор, перпендикулярный им обоим, например

$$\vec n = \vec a \times \overline{M_0A} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec i - 3\vec j + \vec k.$$

В качестве начальной точки можно выбрать точку A либо M_0. Если возьмем M_0, получим уравнение $\left(\vec r + \vec i + 2\vec j - 3\vec k\right)\cdot\left(i - 3\vec j + \vec k\right) = 0$, или $\vec r \cdot \left(\vec i - 3\vec j + \vec k\right) = 8$.

б) Поскольку искомая и заданная плоскости перпендикулярны, то нормальный вектор одной из них параллелен другой (см. пример 3.20). Поэтому в качестве одного из векторов, параллельных искомой плоскости, можно взять нормальный вектор заданной плоскости $\vec a = 3\vec i + 4\vec j - 2\vec k$, а в качестве другого – направляющий вектор заданной прямой $\vec b = -\vec i + j + 3\vec k$. Кроме того, точка $M_0(2;3;4)$, лежащая на заданной прямой, лежит и в искомой плоскости. Находим нормальный вектор

$$\vec n = \vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec i - \vec j + \vec k$$

и составляем уравнение

$$\left(\vec r - 2\vec i - 3\vec j - 4\vec k\right)\cdot\left(2i - \vec j + \vec k\right) = 0, \text{ или } \vec r \cdot \left(2\vec i - \vec j + \vec k\right) = 5. \ \blacktriangle$$

Пример 3.54. Найти точку пересечения прямой $\vec r = 7\vec i + 4\vec j + 5\vec k +$ $+\left(5\vec i + j + 4\vec k\right)t$ и плоскости $\vec r \cdot \left(3\vec i - \vec j + 2\vec k\right) = 5$.

Δ Перепишем уравнения прямой и плоскости в общем виде: $\vec r = \vec r_0 + \vec a t$, $\vec r \cdot \vec n = \alpha$, где $\vec r_0 = 7\vec i + 4\vec j + 5\vec k$, $\vec a = 5\vec i + j + 4\vec k$, $\vec n = 3\vec i - \vec j + 2\vec k$, $\alpha = 5$. Точка пересечения принадлежит как заданной прямой, так и заданной плоскости, поэтому она удовлетворяет одновременно двум уравнениям. Значит, эту точку можно найти как решение системы

$$\begin{cases} \vec r = \vec r_0 + \vec a t, \\ \vec r \cdot \vec n = \alpha. \end{cases}$$

Система решается известным школьным методом: одно из неизвестных выражаем из одного уравнения и подставляем во второе. Часто студенты предлагают следующий вариант: найти $\vec{r}$, выразив его из второго уравнения. Но тогда пришлось бы применить операцию деления числа на вектор, которую мы не вводили. Теперь понятно почему: второму уравнению системы удовлетворяет бесчисленно много векторов, их концы образуют целую плоскость. В первом же уравнении $\vec{r}$ уже выражено через t, его можно подставить во второе: $(\vec{r}_0 + \vec{a}t) \cdot \vec{n} = \alpha$. После преобразований получаем $\vec{r}_0 \cdot \vec{n} + (\vec{a} \cdot \vec{n})t = \alpha \Rightarrow t = \dfrac{\alpha - \vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{\vec{a} \cdot \vec{n}}$. Необходимые скалярные произведения посчитаем устно и получим $t = (5 - 27)/22 = -1$. Подставляя найденное значение t в уравнение заданной прямой, находим искомую точку $M_0(2;3;1)$. ▲

Взаимное расположение прямой и плоскости. Прямая и плоскость могут располагаться следующим образом: прямая пересекает плоскость, параллельна ей или лежит в плоскости. Определить, какой из случаев имеет место, можно двумя способами.

Первый способ. Прямая l пересекает плоскость α в том и только том случае, когда направляющий вектор прямой $\vec{a}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n}$ не перпендикулярны (рис. 3.52).

Если же они перпендикулярны, то прямая либо лежит в плоскости, либо ей параллельна. Различить два этих случая можно проверив, принадлежит ли плоскости какая-либо точка прямой.

Второй способ. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости можно также по количеству их общих точек: если общая точка одна, то прямая пересекает плоскость, если бесчисленно много, то она принадлежит плоскости, если общих точек нет, то прямая параллельна плоскости.

Пример 3.55. Выяснить взаимное расположение прямой l и плоскости α в зависимости от значений параметров a и d, если эти плоскость и прямая заданы следующими уравнениями:

а) α: $4x + y - 3z + d = 0$, l: $x = 1 - 3t$, $y = at$, $z = 3 - 7t$;

б) α: $\vec{r} \cdot \left(2\vec{i} + \vec{j} + a\vec{k}\right) = d$,

l: $\vec{r} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} + \left(\vec{i} + 4j - 2\vec{k}\right)t$.

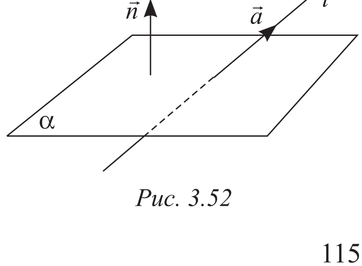


Рис. 3.52

Δ а) *Первый способ*. Выписываем направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости: $\vec{a} = (-3; a; -7)$, $\vec{n} = (4; 1; -3)$. Условием их перпендикулярности является равенство нулю скалярного произведения: $-12 + a + 21 = 0$.

Отсюда получаем $a = -9$. Итак, если $a \neq -9$, то прямая пересекает плоскость. Пусть теперь $a = -9$. Возьмем на прямой точку $M_0(1;0;3)$ и проверим, принадлежит ли она плоскости, для чего подставим координаты точки M_0 в уравнение этой плоскости: $4 - 9 + d = 0$. Мы видим, что при $d = 5$ точка лежит в плоскости, а при $d \neq 5$ – нет. Таким образом, если $a = -9$ и $d \neq 5$, то прямая l параллельна плоскости α, а если $a = -9$ и $d = 5$, то прямая лежит в этой плоскости.

Второй способ. Находим общие точки прямой и плоскости, решая систему, составленную из их уравнений, обычным способом, т. е. подставляя неизвестные, выраженные в уравнениях прямой через t, в уравнение плоскости: $4(1-3t) + at - 3(3-7t) + d = 0$. После преобразований получаем линейное относительно переменной t уравнение $(9+a)t = 5 - d$ с двумя параметрами a и d. Это уравнение при $a \neq -9$ имеет единственное решение, т. е. прямая и плоскость имеют единственную общую точку, значит, они пересекаются. При $a = -9$ и $d \neq 5$ решений нет, общих точек нет, прямая параллельна плоскости. При $a = -9$ и $d = 5$ уравнение имеет бесчисленное множество решений, прямая лежит в плоскости.

б) *Первый способ*. Решаем так же, как и пример а): $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} + a\vec{k}$. Условие перпендикулярности: $6 - 2a = 0$, $a = 3$. Если $a \neq 3$, то прямая пересекает плоскость. Пусть $a = 3$. Подставляем радиус-вектор $\vec{r}_0 = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ точки, принадлежащей прямой, в уравнение плоскости: $\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) = d \Leftrightarrow 9 = d$. При $a = 3$ и $d \neq 9$ прямая параллельна плоскости, при $a = 3$ и $d = 9$ прямая лежит в ней.

Второй способ. В уравнение плоскости подставляем $\vec{r}$, выраженное из уравнения прямой:

$$\left(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} + \left(\vec{i} + 4j - 2\vec{k}\right)t\right) \cdot \left(2\vec{i} + \vec{j} + a\vec{k}\right) = d \Leftrightarrow (6-2a)t = d - 3a.$$

Если $a \neq 3$, то уравнение имеет единственное решение, прямая пересекает плоскость. Если же $a = 3$, то при $d = 9$ решений бесчисленно много – прямая лежит в плоскости, а при $a = 3$ и $d \neq 9$ решений нет – прямая и плоскость параллельны. ▲

З а м е ч а н и е 3.8. По выкладкам оба способа примерно равноценны, однако второй проще запомнить, точнее, его не надо запоминать. Кроме того, в случае пересечения прямой с плоскостью этот способ позволяет сразу найти точку пересечения.

Пример 3.56. Найти точку, симметричную точке $A(-4;3;-6)$ относительно прямой $\vec{r} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k} + \left(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)t$ (l).

Δ *Первый способ*. Для построения искомой точки A' следует вначале найти основание перпендикуляра, проведенного из точки A к заданной прямой. С этой целью через точку A проводим плоскость α, перпендикулярную к прямой l, и находим точку B пересечения плоскости α и прямой l. Затем строим точку A' так, чтобы B была серединой отрезка AA' (рис. 3.53).

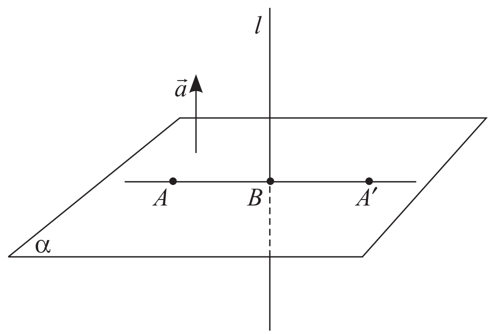


Рис. 3.53

Направляющий вектор $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ прямой l является нормальным для плоскости α. Составляем уравнение плоскости α:

$$\left(\vec{r} - \left(-4\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}\right)\right) \cdot \left(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) = 0.$$

Чтобы найти точку B, следует решить совместно уравнения плоскости α и прямой l. С этой целью, как обычно, $\vec{r}$, выраженное из уравнения прямой, подставляем в уравнение плоскости:

$$\left(6\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k} + \left(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)t\right) \cdot \left(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 42 + 14t = 0 \Rightarrow t_B = -3 \Rightarrow B(-7;0;-3).$$

Точку A' находим, используя операцию откладывания вектора от точки: $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} = (-3;-3;3)$, $A' = B + \overrightarrow{BA'} \Rightarrow A'(-10;-3;0)$.

Второй способ. На рис. 3.54

$$\overrightarrow{M_0A'} = \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{M_0A} + 2\overrightarrow{AB} =$$

$$= \overrightarrow{M_0A} + 2\left(\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{M_0B}\right) = -\overrightarrow{M_0A} + 2\,\mathrm{pr}_{\vec{a}}\,\overrightarrow{M_0A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0A'} = 2\frac{\overrightarrow{M_0A} \cdot \vec{a}}{\vec{a}^2}\vec{a} - \overrightarrow{M_0A}.$$

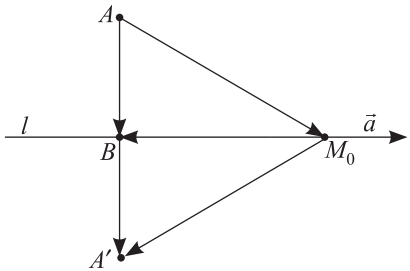


Рис. 3.54

В рассматриваемом случае $M_0(2;-3;3)$, $\overline{M_0A} = -6\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}$;

$$\overline{M_0A'} = 2\frac{\left(-6\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}\right)\cdot\left(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)}{14}\vec{a} - \left(-6\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}\right) =$$

$$= -6\left(3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right) - \left(-6\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}\right) = -12\vec{i} - 3\vec{k}.$$

Поскольку $A' = M_0 + \overline{M_0A'}$, то получаем ту же точку $A'(-10;-3;0)$. ▲

Пример 3.57. Положение плоского зеркала определяется уравнением $2x - 6y + 3z - 14 = 0$. С какой точкой должно совпадать зеркальное изображение точки $A(3;-7;5)$?

Δ Зеркальное изображение совпадает с точкой A', симметричной точке A относительно заданной плоскости.

Первый способ. Для построения искомой точки A' через точку A проведем прямую l, перпендикулярную заданной плоскости. Найдем точку B пересечения этой прямой с плоскостью α, затем построим точку A' так, чтобы B была серединой отрезка AA' (рис. 3.55). Вектор $\vec{n} = (2;-6;3)$ перпендикулярен плоскости α и параллелен прямой l. Параметрические уравнения прямой l: $x = 3 + 2t$, $y = -7 - 6t$, $z = 5 + 3t$. Подставляем в уравнение плоскости:

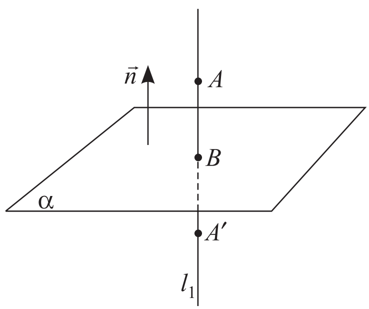


Рис. 3.55

$$2(3 + 2t) - 6(-7 - 6t) + 3(5 + 3t) - 14 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49t + 49 = 0 \Rightarrow t_B = -1.$$

Параметрические уравнения любой прямой можно рассматривать как закон равномерного прямолинейного движения, причем параметр t в этих уравнениях можно считать временем движения. В данном случае движение начинается из точки A. Если из A в B точка пришла за время t_B, то в точку A' она будет идти в 2 раза дольше, т. е. $t_{A'} = -2,$ значит, $A'(-1;5;-1)$.

Второй способ. Выберем в плоскости α произвольную точку M_0. На рис. 3.56

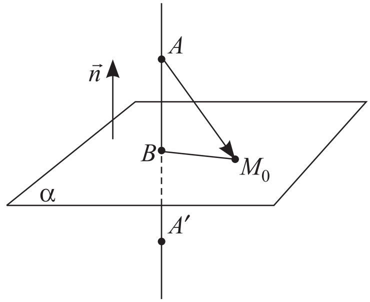


Рис. 3.56

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{AM_0} = -2\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_0A} =$$

$$= -2\frac{\overrightarrow{M_0A}\cdot\vec{n}}{\vec{n}^2}\vec{n} = -2\frac{\vec{r}_A\cdot\vec{n} - \vec{r}_0\cdot\vec{n}}{\vec{n}^2}\vec{n} =$$

$$= -2\frac{Ax_A + By_A + Cz_A - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\vec{n}^2}\vec{n} = -2\frac{Ax_A + By_A + Cz_A + D}{\vec{n}^2}\vec{n}.$$

Тогда

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AA'} = \vec{r}_A - 2\frac{Ax_A + By_A + Cz_A + D}{\vec{n}^2}\vec{n} \qquad (3.39)$$

(ср. с формулой (3.13)). В рассматриваемом случае

$$\overrightarrow{AA'} = -2\frac{6+42+15-14}{49}\vec{n} = -2\vec{n} = (-4;12;-6), \text{ значит, } A'(-1;5;-1). \ \blacktriangle$$

Пример 3.58. Составить уравнение проекции прямой l_1 на плоскость α_1, если эта прямая и эта плоскость заданы уравнениями:

а) l_1: $x = 1 - 2t$, $y = 2t$, $z = 1 - t$; α_1: $2x - y + z - 1 = 0$;

б) l_1: $\begin{cases} \vec{r}\cdot\left(5\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}\right) - 5 = 0, \\ \vec{r}\cdot\left(\vec{i} + 2\vec{k}\right) - 2 = 0; \end{cases}$ α_1: $\vec{r}\cdot\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) - 1 = 0.$

Δ Чтобы спроектировать прямую l_1 на плоскость α_1, следует через l_1 провести плоскость α_2, перпендикулярную плоскости α_1, т. е. проектирующую плоскость (рис 3.57). Проекция (прямая l_2) задается в виде пересечения плоскостей α_1 и α_2.

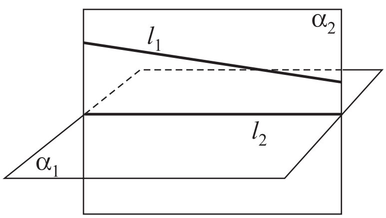


Рис. 3.57

а) Для составления уравнения проектирующей плоскости имеем векторы: $\vec{a} = (-2;2;-1)$ – направляющий вектор прямой l_1 и $\vec{b} = (2;-1;1)$ – нормальный вектор плоскости α_1. Оба они параллельны плоскости α_2. Используя в качестве начальной точку $M_0(1;0;1)$, лежащую на заданной прямой, получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } x-2z+1=0.$$

Таким образом, проекция задается системой $\begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x-2z+1=0. \end{cases}$

б) Прямая l_1 представлена в виде пересечения плоскостей, каждая из которых задана общим уравнением в векторной форме. В этом случае для составления уравнения плоскости α_2 удобно использовать уравнение пучка (3.24): $\alpha\left(\vec{r}\cdot\left(5\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}\right)-5\right)+\beta\left(\vec{r}\cdot\left(\vec{i}+2\vec{k}\right)-2\right)=0.$

Поскольку плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны, то нормальные векторы $\vec{n}_1=(2;-1;1)$ и $\vec{n}_2=(5\alpha+\beta;-4\alpha;-2\alpha+2\beta)$ также перпендикулярны, т. е. их скалярное произведение равно нулю. Для нахождения α и β получаем уравнение $12\alpha+4\beta=0,$ ненулевым решением которого является, например, пара $\alpha=1,$ $\beta=-3.$ Плоскость α_2 задается уравнением $\vec{r}\cdot\left(2\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}\right)+1=0,$ а проекция – системой $\begin{cases} \vec{r}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)-1=0, \\ \vec{r}\cdot\left(2\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}\right)+1=0. \end{cases}$ ▲

Пример 3.59. Положение плоского зеркала задано уравнением $2x-3y+z-16=0$. Луч света, направленный по прямой $x=5+t$, $y=1-t$, $z=-3+t$, падает на зеркало. Найти угол падения и уравнение прямой, по которой направлен отраженный луч.

Δ Сделаем рисунок сечения плоскостью, проходящей через оба луча (рис. 3.58). На этом рисунке плоскость α – зеркало, l_1 и l_2 – прямые, по которым направлены падающий и отраженный лучи соответственно.

Угол падения φ_1 – угол между нормалью к плоскости и падающим лучом. Поскольку $\vec{a}_1(1;-1;1)$ – направляющий вектор заданной прямой, а $\vec{n}(2;-3;1)$ – нормальный вектор заданной плоскости, то

$$\cos\varphi_1=\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}||\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{42}}=\frac{\sqrt{42}}{7},\ \varphi_1=\arccos\frac{\sqrt{42}}{7}.$$

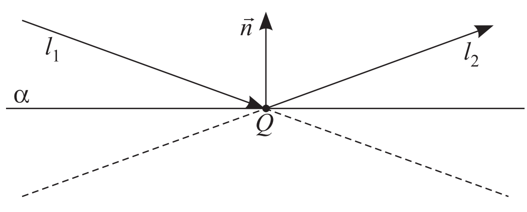


Рис. 3.58

Для составления уравнения отраженного луча прежде всего надо знать какую-либо его точку. Можно найти точку Q встречи падающего луча и зеркала, для чего, как обычно, решим систему

$$\begin{cases} 2x-3y+z-16=0, \\ x=5+t, \\ y=1-t, \\ z=-3+t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(5+t)-3(1-t)+(-3+t)-16=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow Q(7;-1;-1).$$

Найдем направляющий вектор искомой прямой.

Первый способ (его чаще всего предлагают студенты). Падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью к зеркалу, т. е. векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{n}$ компланарны. Это значит, что их смешанное произведение равно нулю. Если φ_2 – угол отражения, то углы φ_1 и φ_2 равны, поэтому и $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2$. Обозначим направляющий вектор искомой прямой $\vec{a}_2(l;m;n)$. Тогда

$$\cos\varphi_2=\frac{\vec{a}_2\cdot\vec{n}}{|\vec{a}_2||\vec{n}|}=\frac{2l-3m+n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{14}},\quad \frac{2l-3m+n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{14}}=\frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}},$$

$$\vec{a}_2\vec{a}_1\vec{n}=\begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=2l+m-n.$$

Для облегчения вычислений добавим еще условие равенства длин векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2l-3m+n=6, \\ 2l+m-n=0, \\ l^2+m^2+n^2=3. \end{cases}$$

Решаем систему обычными школьными методами: отняв от первого уравнения второе, а затем, подставив результат в первое, находим $n=3+2m,\ \ l=(3+m)/2$. После подстановки в третье уравнение получаем $21m^2+54m+33=0$. Последнее уравнение имеет два корня $m_1=-1$ и $m_2=-11/7$. Первый корень приведет нас к вектору $\vec{a}_1$. Используя второй, получаем $n=-1/7$, $l=5/7$. Учитывая, что направляющий вектор определяется неоднозначно, умножим все координаты на 7 и получим $\vec{a}_2(5;-11;-1)$.

Второй способ. Посмотрим еще раз внимательно на рис. 3.58. Видно, что прямые, на которых лежат падающий и отраженный лучи, симметричны относительно плоскости α. Из параметрических уравнений прямой l_1 мы можем определить на ней одну из точек $A(5;1;-3)$. Если A' – точка, симметричная точке A относительно плоскости α, то вектор $\overrightarrow{A'Q}$ будет направляющим для прямой l_2 (рис. 3.59).

Точку A' находим по формуле (3.39):

$$\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AA'} = \vec{r}_A - 2\frac{Ax_A + By_A + Cz_A + D}{\vec{n}^2}\vec{n} =$$

$$= (5;1;-3) - 2\frac{10-3-3-16}{14}(2;-3;1) =$$

$$= (5;1;-3) + \frac{12}{7}(2;-3;1) = \left(\frac{59}{7};-\frac{29}{7};-\frac{9}{7}\right).$$

Итак, $A'(59/7;-29/7;-9/7)$, $\overrightarrow{A'Q} = (-10/7;22/7;2/7)$. Последний вектор коллинеарен вектору $\vec{a}_2(5;-11;-1)$, найденному первым способом, что подтверждает верность наших выкладок.

Третий способ. Поскольку прямые l_1 и l_2 симметричны относительно плоскости зеркала, то в качестве вектора, направляющего для l_2, можно взять вектор $\vec{a}_2'$, симметричный $\vec{a}_1$ относительно плоскости α. На рис. 3.60

$$\vec{a}_2' = \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QC} + 2\overrightarrow{CF} = \vec{a}_1 + 2\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\vec{n}}\overrightarrow{CQ} = \vec{a}_1 - 2\overrightarrow{\mathrm{pr}}_{\vec{n}}\vec{a}_1 = \vec{a}_1 - 2\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{n}}{\vec{n}^2}\vec{n}. \qquad (3.40)$$

В нашем случае

$$\vec{a}_2' = \frac{(\vec{n}^2)\vec{a}_1 - 2(\vec{a}_1\cdot\vec{n})\vec{n}}{\vec{n}^2} = \frac{14(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) - 12(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})}{14} = \frac{-5\vec{i}+11\vec{j}+\vec{k}}{7}.$$

Как и следовало ожидать, опять получили вектор, коллинеарный $\vec{a}_2$. По этому вектору и начальной точке $Q(7;-1;-1)$ записываем параметрические уравнения прямой, на которой лежит отраженный луч:

$$x = 7 + 5t,\ y = -1 - 11t,\ z = -1 - t.$$

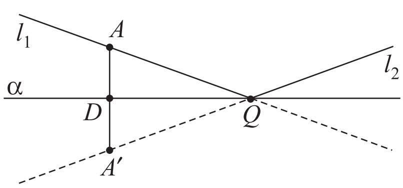


Рис. 3.59

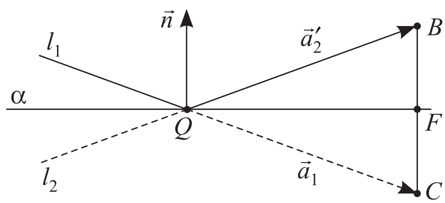


Рис. 3.60

Если еще раз просмотреть все три способа, можно заметить, что первый, основанный на физических соображениях, на самом деле оказывается очень трудоемким, так как приходится решать систему с уравнением второй степени. Второй способ несколько проще, но и здесь необходимо работать с дробями. При решении последним способом вычисления оказываются совсем простыми, если хорошо знать векторную алгебру. Кроме того, этим способом получена готовая формула (3.40) для нахождения вектора, симметричного заданной плоскости. ▲

Пример 3.60. Найти прямую l, пересекающую две прямые $x = 1 - 2t$, $y = 2t,\ z = 1 - t\ \ (l_1)$ и $x = 3 + t,\ y = -2 - 2t,\ z = 2 + 3t\ \ (l_2)$, а также проходящую через точку: а) $A(2;-1;3)$; б) $B(1;4;-9)$.

Δ а) *Первый способ.* Ищем прямую в виде пересечения плоскостей. Если прямые l и l_1 пересекаются, то они лежат в одной плоскости α_1, которой также принадлежит и точка A (рис. 3.61). Для составления уравнения этой плоскости имеем на выбор две точки $M_1(1;0;1) \in l_1$ и $A(2;-1;3) \in l$, векторы $\vec{a}_1 = (-2;2;-1)$ (направляющий вектор прямой l_1) и $\overrightarrow{M_1A} = (1;-1;2)$, параллельные плоскости. Уравнение плоскости α_1

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } x + y - 1 = 0.$$

Аналогично составляется уравнение плоскости α_2, проходящей через прямую l_2 и ту же точку $A(2;-1;3)$: $M_2(3;-2;2) \in l_2$, $\vec{a}_2 = (1;-2;3)$ (направляющий вектор прямой l_2), $\overrightarrow{M_2A} = (-1;1;1)$. Уравнение плоскости α_2

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 5x + 4y + z - 9 = 0.$$

Искомая прямая задается системой $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 5x + 4y + z - 9 = 0. \end{cases}$

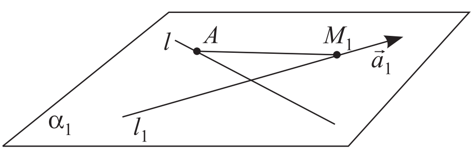


Рис. 3.61

Второй способ. Параметрические уравнения любой прямой, проходящей через точку A, имеют вид $x=2+lt,\ y=-1+mt,\ z=3+nt,$ где $\vec{a}=(l;m;n)$ – неизвестный пока еще направляющий вектор. Его надо подобрать так, чтобы искомая прямая пересекалась как с l_1, так и с l_2. Если l_1 и l пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Это значит, что векторы $\vec{a}=(l;m;n),\ \ \vec{a}_1=(-2;2;-1)$ и $\overrightarrow{M_1A}=(1;-1;2)$ компланарны. Точно так же компланарными должны быть векторы $\vec{a}=(l;m;n),\ \ \vec{a}_2=(1;-2;3)$ и $\overrightarrow{M_2A}=(-1;1;1).$ Из условий компланарности получаем

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \text{ и } \begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} l+m=0, \\ 5l+4m+n=0 \end{cases} \Rightarrow m=-l,\ n=-l.$$

Одним из направляющих векторов может служить $\vec{a}=(1;-1;-1),$ а параметрические уравнения запишутся так: $x=2+t,\ y=-1-t,\ z=3-t.$

б) Пример решается точно так же, как и предыдущий.

Первый способ (в виде пересечения плоскостей). Для составления уравнения плоскости α_1 имеем две точки $M_1(1;0;1)\in l_1$ и $B(1;4;-9),$ а также векторы $\vec{a}_1=(-2;2;-1)$ (направляющий вектор прямой l_1) и $\overrightarrow{M_1B}=(0;4;-10),$ параллельные плоскости. Уравнение плоскости α_1 имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0, \text{ или } 4x+5y+2z-6=0.$$

Для уравнения плоскости α_2: $M_2(3;-2;2)\in l_2,\ \ B(1;4;-9),\ \ \vec{a}_2=(1;-2;3),$ $\overrightarrow{M_2B}=(-2;6;-11).$ Уравнение плоскости α_2

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -11 \end{vmatrix}=0, \text{ или } 4x+5y+2z-6=0.$$

Однако не все так просто! Мы получили две одинаковые плоскости. Что это может означать? Попробуем решить задачу по-другому.

Второй способ. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку B, имеют вид $x=1+lt,\ y=4+mt,\ z=-9+nt,\ \ \vec{a}=(l;m;n)$ – направляющий вектор. Искомая прямая пересекается и с l_1, и с l_2. Как и в предыдущей задаче, условия пересечения прямых приводят нас к равенству нулю определителей:

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда для определения l, m и n получаем только одно уравнение $4l + 5m + 2n = 0,$ которому удовлетворяет целая плоскость векторов. Почему так произошло? Проанализировав условие, можно заметить, что заданные прямые l_1 и l_2 пересекаются, т. е. лежат в одной плоскости. Это и есть построенная плоскость $4x + 5y + 2z - 6 = 0.$ Точка B также лежит в ней, но не принадлежит ни одной из прямых (рис. 3.62).

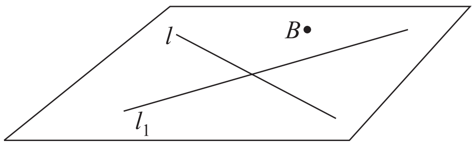


Рис. 3.62

Из всех прямых этой плоскости, проходящих через B, только две не удовлетворяют условию задачи: одна из них параллельна l_1, а вторая параллельна l_2. Итак, условию удовлетворяет любая прямая плоскости $4x + 5y + 2z - 6 = 0,$ проходящая через B, но не параллельная ни l_1, ни l_2. ▲

Пример 3.61. Составить уравнения прямой, пересекающей две прямые $x = 1 - 2t,\ y = 2t,\ z = 1 - t\ (l_1)$ и $x = 3 + t,\ y = 4 - 3t,\ z = 2t\ (l_2)$, а также проходящей через точку $A(3; 2; -1)$.

Δ Пример решаем по принципу предыдущего.

Первый способ. Зададим прямую в виде пересечения плоскостей. Составляем уравнение плоскости α_1, проходящей через прямую l_1 и точку A по следующим данным: две точки $M_1(1; 0; 1) \in l_1$ и $A(3; 2; -1),$ векторы $\vec{a}_1 = (-2; 2; -1)$ (направляющий вектор прямой l_1) и $\overrightarrow{M_1A} = (2; 2; -2),$ параллельные плоскости. Уравнение плоскости α_1

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } x + 3y + 4z - 5 = 0.$$

Плоскость α_2 проходит через прямую l_2 и ту же точку $A(3; 2; -1).$ Для нее имеем следующие данные: $M_2(3; 4; 0) \in l_2,$ $\vec{a}_2 = (1; -3; 2)$ (направляющий вектор прямой l_2), $\overrightarrow{M_2A} = (0; -2; -1).$ Уравнение плоскости α_2

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 7x + y - 2z - 25 = 0.$$

Искомая прямая задается системой

$$\begin{cases} x + 3y + 4z - 5 = 0, \\ 7x + y - 2z - 25 = 0. \end{cases} \tag{3.41}$$

Второй способ. Записываем параметрические уравнения произвольной прямой, проходящей через точку A: $x = 2 + lt$, $y = -1 + mt$, $z = 3 + nt$, где $\vec{a} = (l; m; n)$ – неизвестный направляющий вектор. Из условий пересечения прямой l с каждой из прямых l_1 и l_2 получаем (подробное объяснение см. в п. а) примера 3.60):

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} l + 3m + 4n = 0, \\ 7l + m - 2n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -3l, n = 2l$$

и $\vec{a} = (l; -3l; 2l)$. Мы видим, что векторы $\vec{a} = (l; -3l; 2l)$ и $\vec{a}_2 = (1; -3; 2)$ коллинеарны. Поскольку векторы $\overrightarrow{M_2 A} = (0; -2; -1)$ и $\vec{a}_2 = (1; -3; 2)$ неколлинеарны, делаем вывод, что прямая, построенная при решении вторым способом, параллельна второй из заданных прямых, т. е. условию задачи не удовлетворяет.

Однако при решении первым способом, казалось, искомая прямая построена в виде пересечения плоскостей (см. (3.41)). Проверим, действительно ли она пересекает l_2. Если $\vec{n}_1 = (1; 3; 4)$, а $\vec{n}_2 = (7; 1; -2)$, то $\vec{a}_2 \cdot \vec{n}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Это значит, что l_2 параллельна либо совпадает с прямой (3.41). Кроме того, векторы $\overrightarrow{M_2 A} = (0; -2; -1)$ и $\vec{a}_2 = (1; -3; 2)$ неколлинеарны. Поэтому прямая l_2 параллельна прямой (3.41), т. е. условию задачи не удовлетворяет. Таким образом, не существует прямых, которые бы удовлетворяли условию задачи.

Почему так произошло? Опять вернемся к подробному описанию решения в п. а) примера 3.60, где написано: *если* прямые l и l_1 пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Обратное, вообще говоря, неверно! Мы построили две пересекающиеся плоскости, каждая из которых содержит точку A и одну из двух заданных прямых. Но пересекаются эти плоскости по прямой, которая параллельна одной из двух заданных, а при задании в виде пересечения плоскостей это не очень и заметно. Почему же эта задача не имеет решения? Анализируя условие, можно заметить, что заданные прямые l_1 и l_2 скрещиваются, а точка A лежит в той плоскости, которая проходит через l_1 параллельно l_2 (рис. 3.63). Если прямая l проходит через A и пересекает l_1, то она тоже лежит в этой плоскости (это как раз и есть плоскость α_1). Но ни одна прямая этой плоскости не может пересекать прямую l_2.

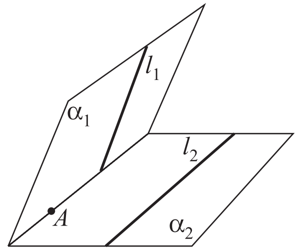


Рис. 3.63

Сравнивая оба способа решения, замечаем, что по вычислениям они практически одинаковые: приходится находить одни и те же векторы, считать одинаковые определители. Но при первом способе решения можно и не различить случаи, когда задача имеет бесчисленное множество решений или не имеет их вовсе. Поэтому, если представляется ответ в виде пересечения плоскостей, его обязательно следует проверить. ▲

Пример 3.62. Составить уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым:

$$x = 2 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3 - 3t\ \ (l_1) \text{ и } x = 5 + t,\ y = -1 - t,\ z = 3 - t\ \ (l_2).$$

Δ *Первый способ.* Представим искомую прямую l в виде пересечения двух плоскостей α_1 и α_2, каждая из которых проходит через искомую прямую и одну из двух заданных (рис. 3.64). Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой l перпендикулярен направляющим векторам $\vec{a}_1 = (2;-1;-3)$ и $\vec{a}_2 = (1;-1;-1)$ прямых l_1 и l_2 соответственно, поэтому можно положить $\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$. Для составления уравнения плоскости α_1 имеем векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}$, параллельные плоскости, можно найти и нормальный вектор:

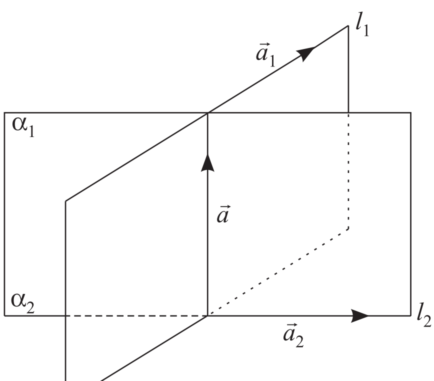


Рис. 3.64

$$\vec{n}_1 = \vec{a}_1 \times \vec{a} = \vec{a}_1 \times \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) =$$

$$= \left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right)\vec{a}_1 - \left(\vec{a}_1\right)^2 \vec{a}_2 =$$

$$= 6\vec{a}_1 - 14\vec{a}_2 = -2\left(\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}\right).$$

Используя точку $M_1(2;-1;3) \in l_1$, записываем уравнение плоскости α_1: $x - 4y + 2z - 12 = 0$.

Аналогично составляем уравнение плоскости α_2:

$$\vec{n}_2 = \vec{a}_2 \times \vec{a} = \vec{a}_2 \times \left(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right) = \left(\vec{a}_2\right)^2 \vec{a}_1 - \left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right)\vec{a}_2 = 3\vec{a}_1 - 6\vec{a}_2 = 3\left(\vec{j} - \vec{k}\right).$$

Используя точку $M_2(5;-1;3) \in l_2$, записываем уравнение плоскости α_2: $y - z + 4 = 0$. Искомая прямая задается системой уравнений

$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 12 = 0, \\ y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

Второй способ. Составим канонические уравнения. Возьмем на прямых l_1 и l_2 точки $M_1(2+2a;-1-a;3-3a)$ и $M_2(5+b;-1-b;3-b)$ соответственно, где a и b – неизвестные пока числа. Прямая M_1M_2 заведомо пересекает обе заданные прямые (рис. 3.65). Чтобы эта прямая была перпендикулярной к каждой из заданных, ее направляющий вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (3-2a+b;a-b;3a-b)$ должен быть перпендикулярным каждому из векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, откуда и получаем условия для нахождения a и b:

$$\begin{cases} 2(3-2a+b)-(a-b)-3(3a-b)=0, \\ 3-2a+b-(a-b)-(3a-b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14a+6b+6=0, \\ -6a+3b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0,\ b = -1.$$

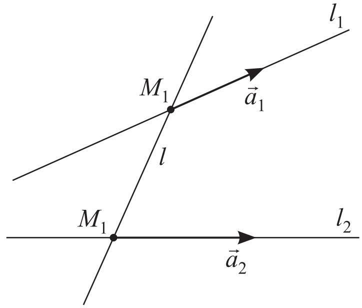


Рис. 3.65

Таким образом, $M_1(2;-1;3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (2;1;1)$. Канонические уравнения общего перпендикуляра имеют вид $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. ▲

Задачи для самостоятельной работы

3.1. Записать общее уравнение каждой из следующих прямых:

а) $x = 5 + 3t,\ y = -8 + 2t$;

б) $\vec{r} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + \left(6\vec{i} - 7\vec{j}\right)t$;

в) $\left(\vec{r} - 5\vec{i} + 3\vec{j}\right)\cdot\left(6\vec{i} - 7\vec{j}\right) = 0$;

г) $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{5}$;

д) $y = 5x - 7$.

3.2. Записать векторное параметрическое уравнение для каждой из следующих прямых:

а) $x = 5 + 3t,\ y = -8 + 2t$;

б) $3x - 8y + 9 = 0$;

в) $\left(\vec{r} - 5\vec{i} + 3\vec{j}\right)\cdot\left(6\vec{i} - 7\vec{j}\right) = 0$;

г) $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{5}$;

д) $y = 5x - 7$.

3.3. На плоскости задана прямая l_1. Составить уравнение прямой l_2, проходящей через точку $M_0(3;-2)$: а) параллельно l_1, б) перпендикулярно l_1, если уравнение прямой l_1 имеет вид:

1) $x = 3 + 2t,\ y = -1 + t$; 2) $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+2}{3}$; 3) $y = -3x + 2$.

3.4. Даны вершины треугольника: $A(3;4)$, $B(1;2)$, $C(7;-2)$. Составить

а) параметрические уравнения прямой AC;

б) каноническое уравнение прямой, проходящей через точку B, параллельно AC;

в) общее уравнение высоты, проведенной из вершины B.

3.5. Выяснить взаимное расположение на плоскости следующих прямых:

а) $3x - 4y + 7 = 0$ и $6x - 8y + 7 = 0$;

б) $3x - 4y + 7 = 0$ и $6x + 8y + 7 = 0$;

в) $3x - 4y + 7 = 0$ и $6x - 8y + 14 = 0$.

3.6. Выяснить взаимное расположение на плоскости следующих прямых, в случае их пересечения найдите точку пересечения M_0:

а) $3x - 4y + 7 = 0$ и $x = 5 + 3t,\ y = 8 + 2t$;

б) $3x + 4y - 19 = 0$ и $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-3}$;

в) $\dfrac{x+5}{7} = \dfrac{y+8}{5}$ и $x = 9 + 7t,\ y = 2 + 5t$;

г) $y = 5x + 1$ и $3x - 4y - 13 = 0$.

3.7. Дан треугольник ABC: $A(4;4)$, $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$. Составить уравнения биссектрис внутреннего и внешнего углов при вершине C.

3.8. Найти точку N, симметричную точке $M(7;6)$ относительно прямой $3x + 2y - 7 = 0$.

3.9. Даны две вершины треугольника $A(-6;2)$, $B(2;-2)$ и точка $H(1;2)$ пересечения его высот. Найти координаты третьей вершины C.

3.10. Луч света, пройдя через точки $A(4;6)$ и $B(5;8)$, упал на прямую $\vec{r}\cdot\left(\vec{i}-2\vec{j}\right)=-2$ и отразился от нее. Записать уравнение прямой, по которой направлен отраженный луч.

3.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x + y - 13 = 0$ и $x + y - 6 = 0$, не совпадающей с данными и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

3.12. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $\vec{r}\cdot\left(3\vec{i}-\vec{j}\right)-3=0$, $\vec{r}\cdot\left(4\vec{i}-3\vec{j}\right)-4=0$ перпендикулярно второй из них.

3.13. Точка $A(2;-1;3)$ является основанием перпендикуляра, проведенного из точки $B(4;2;-1)$ на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.

3.14. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4;2;-1)$ параллельно плоскости, проведенной через точки $M_1(5;7;-1)$, $M_2(7;4;2)$ и $M_3(3;4;5)$.

3.15. Плоскость отсекает на координатных осях Ox, Oy и Oz отрезки, величины которых равны 2, –3 и 5 соответственно. Составить уравнение этой плоскости.

3.16. Найти основание перпендикуляра, проведенного из точки $A(-2;-2;1)$ к прямой, по которой пересекаются плоскости $2x+y+z-4=0$ и $3x+y+2z-6=0$.

3.17. Даны вершины треугольной пирамиды $A(3;5;-1)$, $B(7;5;3)$, $C(6;3;4)$, $D(5;-7;7)$. Составить уравнения плоскостей, равноудаленных от всех четырех вершин.

3.18. Плоскость α, заданная уравнением $3x + y - 2z - 18 = 0$, вместе с координатными плоскостями образует треугольную пирамиду. Найти ребро куба, который можно поместить внутри этой пирамиды так, чтобы три его грани лежали в координатных плоскостях, а вершина, противолежащая началу координат, лежала в плоскости α.

3.19. Выяснить взаимное расположение плоскостей:

а) $5x - 7y + 3z - 9 = 0$ и $-6x + 16y - 6z - 9 = 0$;

б) $8x - 12y + 24z - 16 = 0$ и $2x - 3y + 6z - 4 = 0$;

в) $15x - 9y + 3z - 9 = 0$ и $5x - 3y + z - 18 = 0$;

г) $\vec{r}\cdot\left(2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}\right)=2$ и $\vec{r}\cdot\left(6\vec{i}-9\vec{j}+15\vec{k}\right)=6$;

д) $\begin{cases} x=1+u+v, \\ y=2+u, \\ z=3+u-v \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3+2u', \\ y=2-2u'+4v', \\ z=1+u'+3v'. \end{cases}$

3.20. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $5x - y + 3z - 1 = 0$ и проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$ и $x + 2y - z + 2 = 0$.

3.21. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(5;-8;3)$ и $B(7;-5;4)$.

3.22. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(5;-8;3)$ перпендикулярно плоскости $3x - 4y - 3z + 39 = 0$.

3.23. Для прямой $x = 5 + 5t$, $y = -8 + 2t$, $z = 3 - t$ составить уравнения: а) канонические; б) в виде пересечения плоскостей.

3.24. Прямая задана в виде пересечения плоскостей

$$\begin{cases} 3x - 4y + z + 2 = 0, \\ x + y - 2z + 8 = 0. \end{cases}$$

Составить уравнения параллельной прямой, проходящей через точку $B(7;-5;4)$: а) в виде пересечения плоскостей; б) канонические.

3.25. Составить параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 3 = 0, \\ 3x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

3.26. Выяснить взаимное расположение прямых в пространстве:

а) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-5}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$ и $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-3}{2}$;

б) $x = 3 + 2t,\ y = -6 - 5t,\ z = 5 + 2t$ и $x = t_1,\ y = -6,\ z = 2 + t_1$;

в) $x = 3 + 4t,\ y = 6 + 5t,\ z = 9 + 3t$ и $x = -1 + 8t_1,\ y = 1 + 10t_1,\ z = 6 + 6t_1$;

г) $\vec{r} = \left(3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}\right) + t\left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$ и $\vec{r} = \left(5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}\right) + t_1\left(-\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}\right)$.

3.27. Выяснить взаимное расположение прямых. В случае пересечения найти точку пересечения:

а) $x = 2 + 3t,\ y = 3 - t,\ z = 5 + t$ и $x = 1 + t',\ y = 3 + t',\ z = 9 - 2t'$;

б) $x = t,\ y = 3 + 5t,\ z = -3 + t$ и $\begin{cases} 4x - y + z + 6 = 0, \\ 3x - 2y + 7z + 27 = 0; \end{cases}$

в) $x = 3 - t,\ y = 1 + 3t,\ z = t$ и $\begin{cases} x + 2y - 5z - 5 = 0, \\ x + y - 2z + 4 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + z - 1 = 0, \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

Задачи 3.28 и 3.29 относятся к разделу 3.1 «Прямая на плоскости».

3.28. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 2x + 8$ и координаты одной вершины $(1;3)$.

3.29. Зная уравнения сторон равнобедренного треугольника $6x - 2y + 5 = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$, найти уравнение его третьей стороны, если она проходит через точку $A(1;1)$.

3.30. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-3}{3} \text{ и } \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-3}{1}.$$

3.31. Найти величину угла между плоскостями:

а) $2x - 2y + z + 5 = 0$ (α_1) и $x + y + z + 12 = 0$ (α_2);

б) $x = 2 + u + v,\ y = 3 + u,\ z = u - v$ (α_1) и $x = 3 + 2u',\ y = 2 - 2u' + 4v',\ z = u' + 3v'$.

3.32. Найти угол между прямой $\vec{r} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} + \left(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)t$ и плоскостью $\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right) - 13 = 0$.

3.33. Найти расстояние от точки $M_0(-1;2;0)$ до плоскости $11x - 2y - 10z - 45 = 0$.

3.34. Проверить, пересекает ли плоскость $7x - 5y - z + 5 = 0$ отрезок M_1M_2, если $M_1(-3;7;2)$, а $M_2(-2;5;2)$.

3.35. Найти расстояние между параллельными плоскостями $\vec{r} \cdot \left(6\vec{i} - 18\vec{j} - 9\vec{k}\right) - 24 = 0$ и $\vec{r} \cdot \left(4\vec{i} - 12\vec{j} - 6\vec{k}\right) - 7 = 0$.

3.36. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x + 12y - 6z + 3 = 0$ и $2x + 24y - 12z + 4 = 0$.

3.37. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей $4x - y - 2z - 3 = 0$ и $8x - 2y - 4z - 13 = 0$.

3.38. Составить уравнение биссектрис углов, образованных при пересечении двух прямых на плоскости $\vec{r} \cdot \left(5\vec{i} - 2\vec{j}\right) - 3 = 0$ и $\vec{r} \cdot \left(2\vec{i} - 5\vec{j}\right) + 1 = 0$.

3.39. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми на плоскости $2x + 3y - 11 = 0$ и $4x - 6y - 5 = 0$, которому принадлежит точка $A(-3;10)$.

3.40. Составить уравнения плоскостей, которые делят пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимися плоскостями, если эти плоскости заданы уравнениями:

а) $x - 3y + 2z - 5 = 0$ и $3x - 2y - z + 3 = 0$;

б) $\vec{r} \cdot \left(5\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}\right) - 3 = 0$ и $\vec{r} \cdot \left(\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}\right) + 1 = 0$.

3.41. Составить уравнение биссекторной плоскости двугранного угла между плоскостями $\vec{r} \cdot \left(\vec{i} - \vec{k}\right) - 5 = 0$ и $\vec{r} \cdot \left(3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}\right) = 0$, смежного с тем, которому принадлежит точка $A(1;1;1)$.

3.42. На оси Oz найти точку, равноудаленную от плоскостей $x + 4y - 3z - 2 = 0$ (α_1) и $5x + y + 8 = 0$ (α_2).

3.43. Три грани $ABCD$, $ABB'A'$ и $ADD'A'$ параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ лежат в плоскостях $2x+3y+4z+7=0$, $x+3y-11=0$, $z+5=0$ соответственно, центр параллелепипеда – точка $Q(6;-5;1)$. Составить уравнения остальных граней параллелепипеда.

3.44. Найти центр и радиус сферы, описанной около треугольной пирамиды с вершинами $A(1;2;3)$, $B(-2;8;9)$, $C(5;0;7)$ и $D(3;4;2)$.

3.45. Найти центр и радиус сферы, вписанной в треугольную пирамиду с вершинами $A(1;2;3)$, $B(-2;8;9)$, $C(5;0;7)$ и $D(3;4;2)$.

3.46. Найти центр и радиус сферы, вписанной в треугольную пирамиду, ограниченную тремя координатными плоскостями и плоскостью $8x-4y-z-110=0$ (α).

3.47. Составить уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла, образованного плоскостями $7x+3y-z+52=0$ и $5x-y-5z+30=0$.

3.48. Найти расстояние от точки $M_0(1;2;5)$ до прямой $x=t$, $y=1-2t$, $z=3+t$ (l).

3.49. Найти расстояние между параллельными прямыми $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

3.50. Найти кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z-2}{2}$.

3.51. Заданы точки $A(1;-1;3)$, $B(5;2;0)$, $C(3;2;-1)$ и прямые: $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{5}$ (l_1); $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{-5}$ (l_2); $x=1+5t$, $y=5+3t$, $z=5+4t$ (l_3). Составить: а) параметрические уравнения плоскости, проходящей через точки A, B и C; б) общее уравнение плоскости, проходящей через точку A и прямую l_1; в) общее уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые l_1 и l_2; г) общее уравнение плоскости, проходящей через прямую l_1 параллельно прямой l_3.

3.52. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;3)$ перпендикулярно прямой, если эта прямая задана уравнениями:

а) $x=2-3t$, $y=3+2t$, $z=4+t$; б) $\begin{cases} 2x-3y+5z-1=0, \\ 4x+2y-7z+8=0. \end{cases}$

3.53. Составить общее уравнение в векторной форме плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;3)$ и через прямую $\vec{r}=\vec{i}-\vec{j}+\left(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}\right)t$.

3.54. Составить общее уравнение плоскости, проходящей:

а) через пересекающиеся прямые $x = 2 - t$, $y = 3 + t$, $z = 4 + 3t$ и $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-8}{4}$;

б) через прямую $x = 2 - 2t$, $y = 3 + 6t$, $z = 4 + 4t$ перпендикулярно плоскости $3x - 8y + 5z = 0$;

в) через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z + 3 = 0, \\ x + y - 2z + 8 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $\dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-8}{-3} = \dfrac{z-19}{4}$.

3.55. Составить общее уравнение в векторной форме плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} \vec{r} \cdot \left(\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\right) = 0, \\ \vec{r} \cdot \left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) + 1 = 0 \end{cases}$ параллельно прямой $\vec{r} \times \left(-2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right) = \vec{i} - 2\vec{j}$.

3.56. Выяснить, как расположена прямая $x = -1 + t$, $y = t$, $z = t$ по отношению к плоскости $3x + 4y - 7z + 3 = 0$.

3.57. Написать уравнение перпендикуляра, проведенного из точки $A(2;3;1)$ к прямой $x = -1 + 2t$, $y = -t$, $z = 2 + 3t$.

3.58. Найти точку, симметричную точке $A(4;-5;9)$ относительно прямой $\vec{r} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} + \left(2\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}\right)t$.

3.59. Найти точку, симметричную точке $A(0;1;6)$ относительно плоскости $\vec{r} \cdot \left(3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}\right) = 3$.

3.60. Составить уравнение проекции на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$ следующих прямых:

а) $x = 1 - 3t$, $y = 5t$, $z = 1 - t$; б) $\begin{cases} x - 4y - z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0. \end{cases}$

3.61. Составить уравнения прямой, пересекающей две прямые: $x = -2 + 2t$, $y = 5 + 3t$, $z = t$ и $x = 10 + 5t'$, $y = -7 + 4t'$, $z = t'$ и параллельной прямой $\dfrac{x+2}{8} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-3}{1}$.

3.62. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1;1;-1)$ и пересекающей две прямые: $x = -12 + t$, $y = -10 + t$, $z = t$ и $x = -4 + t'$, $y = t'$, $z = t'$.

3.63. Составить уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым $x = 3 + t$, $y = -4 - 3t$, $z = 2 - t$ и $x = -4 + 2t'$, $y = -2 + 3t'$, $z = -5t'$.

Ответы и указания

3.1. а) $2x - 3y - 34 = 0$; б) $7x + 6y - 53 = 0$; в) $6x - 7y - 51 = 0$; г) $5x - 7y - 31 = 0$; д) $5x - y - 7 = 0$. **3.2.** а) $\vec r = 5\vec i - 8\vec j + (3\vec i + 2\vec j)t$; б) $\vec r = -3\vec i + (8\vec i + 3\vec j)t$; в) $\vec r = 5\vec i - 3\vec j + (7\vec i + 6\vec j)t$; г) $\vec r = 2\vec i - 3\vec j + (7\vec i + 5\vec j)t$; д) $\vec r = -7\vec j + (\vec i + 5\vec j)t$. **3.3.** 1) а) $x = 3 + 2t$, $y = -2 + t$; б) $x = 3 + t$, $y = -2 - 2t$; 2) а) $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{3}$; б) $2x + 3y = 0$; 3) а) $y = -3x + 7$; б) $x - 3y - 9 = 0$. **3.4.** а) $x = 3 + 2t$, $y = 4 - 3t$; б) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3}$; в) $2x - 3y + 4 = 0$. **3.5.** а) параллельны; б) пересекаются; в) совпадают. **3.6.** а) пересекаются, $M_0(35;28)$; б) параллельны; в) совпадают; г) пересекаются, $M_0(-1;-4)$. **3.7.** $7x + y + 18 = 0$, $x - 7y - 26 = 0$. *Указание*: см. пример 3.27. **3.8.** $N(-5;-2)$. *Указание*: см. пример 3.10. **3.9.** $C(2;4)$. **3.10.** $\vec r = 2\vec i + 2\vec j + (11\vec i - 2\vec j)t$. **3.11.** $x - y - 8 = 0$. **3.12.** $\vec r \cdot (3\vec i + 4\vec j) - 3 = 0$. **3.13.** $2x + 3y - 4z + 11 = 0$. **3.14.** $3x + 6y + 4z - 20 = 0$. **3.15.** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{5} = 1$. **3.16.** $A'(1;1;1)$. **3.17.** Плоскости, параллельные граням пирамиды: $x - y - z - 2 = 0$, $22x - 7y - 16z - 59 = 0$, $2x - y - 2z - 2 = 0$, $2x + y + 4z - 19 = 0$; плоскости, параллельные парам скрещивающихся ребер: $5x - 2y - 5z - 7 = 0$, $26x - 11y - 20z - 55 = 0$, $2x - 5y - 8z + 23 = 0$. *Указание*: см. пример 3.21. **3.18.** 3. **3.19.** а) пересекаются; б) совпадают; в) параллельны; г) совпадают; д) пересекаются. **3.20.** $x + 2y - z + 2 = 0$. **3.21.** $x = 5 + 2t$, $y = -8 + 3t$, $z = 3 + t$. **3.22.** $\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+8}{-4} = \dfrac{z-3}{-3}$. **3.23.** а) $\dfrac{x-5}{5} = \dfrac{y+8}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$; б) $\begin{cases} 2x - 5y - 50 = 0, \\ x + 5z - 20 = 0. \end{cases}$ **3.24.** а) $\begin{cases} 3x - 4y + z - 45 = 0, \\ x + y - 2z + 6 = 0; \end{cases}$ б) $x - 7 = y + 5 = z - 4$. **3.25.** $x = 2t$, $y = 1 - 3t$, $z = -13t$. **3.26.** а) параллельны; б) пересекаются; в) совпадают; г) скрещиваются. **3.27.** а) скрещиваются; б) совпадают; в) параллельны; г) пересекаются, $M_0(-3;0;4)$. **3.28.** $3x + y - 6 = 0$ и $x - 3y + 8 = 0$. **3.29.** $2x + y - 3 = 0$ и $x - 2y + 1 = 0$. **3.30.** $\varphi = \arccos\dfrac{11}{\sqrt{1015}}$. **3.31.** а) $\varphi = \arccos\dfrac{1}{3\sqrt3}$; б) $\varphi = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt3}$. **3.32.** $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt6}$. **3.33** 4. **3.34.** Нет. **3.35.** $\dfrac{9}{14}$. **3.36.** $\dfrac{1}{\sqrt{181}}$. **3.37.** $16x - 4y - 8z - 19 = 0$. **3.38.** $\vec r \cdot (7\vec i - 7\vec j) - 2 = 0$ и $\vec r \cdot (3\vec i + 3\vec j) - 4 = 0$. **3.39.** $8x - 27 = 0$. **3.40.** а) $2x + y - 3z + 8 = 0$ и $4x - 5y + z - 2 = 0$; б) $\vec r \cdot (\vec i - 3\vec j) - 1 = 0$ и $\vec r \cdot (3\vec i + \vec j - 2\vec k) - 1 = 0$. **3.41.** $\vec r \cdot (2\vec i - 5\vec j - 9\vec k) - 25 = 0$. **3.42.** $M_0(0;0;2)$ и $M_0'(0;0;-10/3)$. **3.43.** $2x + 3y + 4z - 9 = 0$; $x + 3y + 29 = 0$; $z - 7 = 0$. **3.44.** $O'(2{,}5;\,5;\,7{,}5)$, $R = 3\sqrt{14}/2$. **3.45.** $O'(2;3;4)$, $r = 1$. **3.46.** $O'(5;-5;-5)$, $r = 5$. **3.47.** $6x + y - 3z + 41 = 0$. *Указание*: см. пример 3.46. **3.48.** $\sqrt{210}/6$. **3.49.** $\sqrt{174/35}$.

3.50. $36/\sqrt{17}$. **3.51.** а) $x = 1 + 4u + 2v$, $y = -1 + 3u + 3v$, $z = 3 - 3u - 4v$; б) $13x - y + 3z - 23 = 0$; в) $13x - y + 3z - 23 = 0$; г) $7x - 29y + 13z + 73 = 0$. **3.52.** а) $3x - 2y - z - 5 = 0$; б) $11x + 34y + 16z - 36 = 0$. **3.53.** $\vec{r}\cdot(3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) = 0$. **3.54.** а) $13x + 10y + z - 60 = 0$; б) $31x + 11y - z - 91 = 0$; в) $7x - 2y - 5z + 29 = 0$. **3.55.** $\vec{r}\cdot\left(3\vec{i} + 2\vec{j}\right) + 1 = 0$. **3.56.** Прямая принадлежит плоскости. **3.57.** $x = 2 + 3t$, $y = 3 + 3t$, $z = 1 - t$. *Указание*: см. пункт в) примера 3.27. **3.58.** $A'(6;-7;7)$. **3.59.** $A'(6;3;-2)$. **3.60.** а) $\begin{cases} 4x + y - 7z + 3 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 16y + 14z + 10 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$ **3.61.** $x = -26 + 8t$, $y = -31 + 7t$, $z = -12 + t$. **3.62.** Такой прямой не существует. **3.63.** $x = 2 + 6t$, $y = -1 + t$, $z = 3 + 3t$.

Глава 4
ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

4.1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ФИГУР ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА И ИХ КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 4.1. ***Уравнением второй степени с двумя переменными*** называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{4.1}$$

в котором $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Определение 4.2. ***Линией второго порядка*** называется множество точек плоскости, координаты каждой из которых в некоторой прямоугольной системе координат удовлетворяют какому-либо уравнению 2-й степени с двумя переменными. Это уравнение называется ***общим***.

Определение 4.3. ***Уравнением второй степени с тремя переменными*** называется уравнение вида

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz +& \\ + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0&, \end{aligned} \tag{4.2}$$

в котором числа a_{ij} не обращаются в нуль одновременно.

Определение 4.4. ***Поверхностью второго порядка*** называется множество точек пространства, координаты каждой из которых удовлетворяют в некоторой прямоугольной системе координат уравнению 2-й степени с тремя переменными.

З а м е ч а н и е 4.1. В уравнениях (4.1) и (4.2) $a_{ij}(i, j = 1; 2; 3)$, $=$
$a_i(i = 0; 1; 2; 3)$ – вещественные числа, называемые коэффициентами

уравнения. Множитель 2 при некоторых коэффициентах выбран для удобства записи формул, получаемых в общей теории квадратичных форм. Функцию двух (трех) переменных, образованную левой частью уравнения, называют *квадратичной функцией*. Числа a_{ij} называют *старшими коэффициентами квадратичной формы*.

Определение 4.5. ***Каноническим уравнением*** называется уравнение второй степени с двумя (или тремя) переменными, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) не содержит произведения переменных ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$);

2) если содержит квадрат какой-либо переменной, то не содержит ее первой степени $(a_{ii} \neq 0 \Rightarrow a_i = 0)$;

3) если содержит первую степень, то только одной переменной, и тогда свободный член равен нулю $(\exists a_i \neq 0 \Rightarrow a_0 = 0)$;

4) если свободный член не равен нулю, то он равен 1 или -1.

Определение 4.6. Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, и дано число $a > c$. Множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек F_1 и F_2 равно $2a$, называется ***эллипсом***. Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами*** эллипса, число $2c$ – ***фокальным расстоянием***.

Пусть M – произвольная точка эллипса, тогда по определению 4.6

$$\left|F_1M\right| + \left|F_2M\right| = 2a. \tag{4.3}$$

Если $c = 0$, то получим окружность – частный случай эллипса с совпадающими фокусами.

Оси симметрии эллипса называются его *осями*, а центр симметрии – *центром эллипса*, точки пересечения эллипса с его осями – *вершинами эллипса*. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей эллипса и касающийся его в вершинах, называется *основным прямоугольником* эллипса, числа $2a$ и $2b$ – *полуосями*. Большее из чисел называется *большой* (*фокальной*) *полуосью*, а меньшее – *малой полуосью*. Фокусы располагаются всегда на той оси, которая содержит большую полуось.

Определение 4.7. ***Эксцентриситетом эллипса*** называется число ε, равное отношению половины расстояния между фокусами к его большой (фокальной) полуоси.

Замечание 4.2. Для эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$. Чем ближе ε к нулю, тем больше эллипс похож на окружность; при увеличении ε эллипс становится более вытянутым вдоль фокальной оси (табл. 4.1, стб. 2, 3).

Таблица 4.1

1	2	3	4	5
Каноническое уравнение	Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$ (рис. 4.1)	Эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $b>a$ (рис. 4.2)	Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 4.3)	Гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (рис. 4.4)
Полуоси	a – фокальная (большая), b – малая	b – фокальная (большая), a – малая	a – фокальная (действительная), b – мнимая	b – фокальная (действительная), a – мнимая
Половина расстояния между фокусами	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{b^2-a^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
Координаты фокусов	$F_1(-c;0),$ $F_2(c;0)$	$F_1(0;-c),$ $F_2(0;c)$	$F_1(-c;0),$ $F_2(c;0)$	$F_1(0;-c),$ $F_2(0;c)$
Координаты вершин	$A_1(-a;0),$ $A_2(a;0),$ $B_1(0;-b),$ $B_2(0;b)$	$A_1(-a;0),$ $A_2(a;0),$ $B_1(0;-b),$ $B_2(0;b)$	$A_1(-a;0),$ $A_2(a;0)$	$B_1(0;b),$ $B_2(0;-b)$
Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}$	$\varepsilon=\frac{c}{b}$	$\varepsilon=\frac{c}{a}$	$\varepsilon=\frac{c}{b}$
Уравнения директрис	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$	$y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$
Фокальный параметр	$p=\frac{b^2}{a}$	$p=\frac{a^2}{b}$	$p=\frac{b^2}{a}$	$p=\frac{a^2}{b}$
Уравнения асимптот	Нет асимптот	Нет асимптот	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{b}{a}x$

Определение 4.8. Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, и, кроме того, выбрано число a, удовлетворяющее неравенствам $0 < a < c$. Множество всех точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до точек F_1 и F_2 равна $2a$, называется ***гиперболой***. Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами*** гиперболы, число $2c$ – ***фокальным расстоянием***.

Пусть M – произвольная точка гиперболы, тогда по определению 4.8

$$\left||F_1M|-|F_2M|\right|=2a. \tag{4.4}$$

Оси симметрии гиперболы называются ее *осями*, а центр симметрии – *центром гиперболы*. Та ось гиперболы, которую она пересекает, называется *действительной* (*фокальной*) *осью*, а та, которую не пересекает, – *мнимой*. Точки, в которых действительная ось пересекает гиперболу, называются ее *вершинами*. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся его в вершинах, называется *основным прямоугольником* гиперболы, числа $2a$ и $2b$ – *полуосями*.

Асимптотой гиперболы называется прямая, проходящая через центр гиперболы, и при удалении от центра расстояние между гиперболой и прямой стремится к нулю. Гипербола имеет две асимптоты.

Гипербола с равными осями называется *равносторонней.* Ее основной прямоугольник есть квадрат, а асимптоты перпендикулярны друг другу.

Определение 4.9. ***Эксцентриситетом*** гиперболы называется число ε, равное отношению половины расстояния между фокусами к его действительной (фокальной) полуоси.

Замечание 4.3. Для гиперболы $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника и, следовательно, форму самой линии. Чем меньше ε, тем более вытянут ее основной прямоугольник вдоль действительной оси (табл. 4.1, стб. 4, 5).

Определение 4.10. ***Директрисами*** эллипса (гиперболы) называются прямые, перпендикулярные его (ее) фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии, равном отношению фокальной полуоси к эксцентриситету.

Определение 4.11. ***Фокальным параметром*** называется длина отрезка перпендикуляра к фокальной оси, восстановленного из фокуса до пересечения с линией.

Фокальными радиусами точки $M(x;\, y)$ эллипса называются отрезки прямых, соединяющих эту точку с фокусами F_1 и F_2 (см. рис. 4.1).

Замечание 4.4. Для длин r_1 и r_2 фокальных радиусов эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$, справедливы выражения $r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x.$

Фокальными радиусами точки $M(x;\, y)$ гиперболы называются отрезки прямых, соединяющих эту точку с фокусами F_1 и F_2 (см. рис. 4.3).

Замечание 4.5. Для длин r_1 и r_2 фокальных радиусов гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ справедливы выражения: для правой ветви – $r_1=\varepsilon x+a$, $r_2=\varepsilon x-a$, для левой – $r_1=-(\varepsilon x+a)$, $r_2=-(\varepsilon x-a)$.

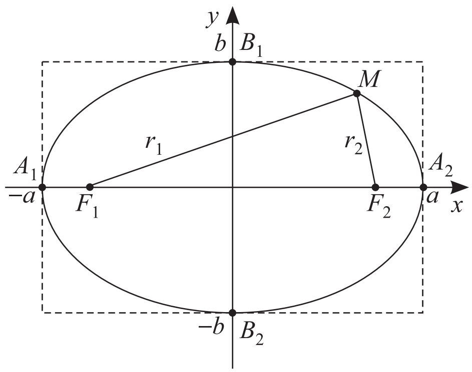


Рис. 4.1

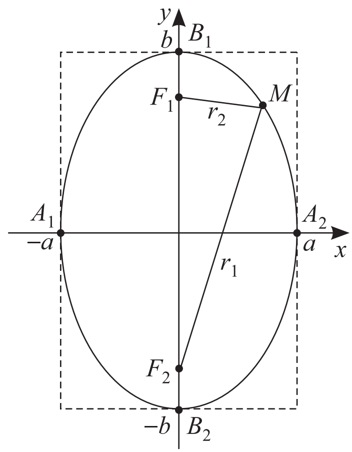


Рис. 4.2

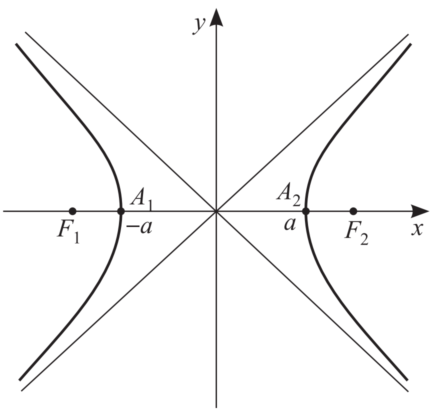


Рис. 4.3

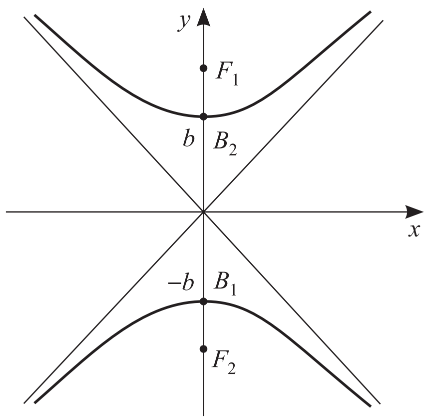


Рис. 4.4

Пример 4.1. Для эллипсов: а) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ найти: 1) полуоси; 2) расстояние между фокусами; 3) эксцентриситет ε; 4) координаты фокусов; 5) координаты вершин; 6) уравнения директрис; 7) фокальный параметр.

Δ а) Для эллипса $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ справедливы формулы из табл. 4.1, стб. 2. Применив их, получим: 1) a = 4, b = 5; 2) $2c=2\sqrt{25-16}=6$; 3) $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$;

4) $F_1(0;-3)$, $F_2(0;3)$; 5) $A_1(-4;0)$, $A_2(4;0)$, $B_1(0;5)$, $B_2(0;-5)$; 6) $y=\pm\frac{25}{3}$; 7) $p=\frac{16}{5}$.

б) Для эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ справедливы формулы из табл. 4.1, стб. 3. Применив их, получим: 1) $a=5$, $b=4$; 2) $2c=2\sqrt{25-16}=6$; 3) $\varepsilon=\frac{3}{5}$; 4) $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$; 5) $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$; 6) $x=\pm\frac{25}{3}$; 7) $p=\frac{16}{5}$. ▲

Пример 4.2. Для гипербол – а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ – найти: 1) полуоси; 2) расстояние между фокусами; 3) эксцентриситет ε; 4) координаты фокусов; 5) координаты вершин; 6) уравнения директрис; 7) фокальный параметр; 8) составить уравнения асимптот.

Δ а) Для гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ справедливы формулы из табл. 4.1, стб. 4. Применив их, получим: 1) $a=3$, $b=4$; 2) $2c=2\sqrt{16+9}=10$; 3) $\varepsilon=\frac{5}{3}$; 4) $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$; 5) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$; 6) $x=\pm\frac{9}{5}$; 7) $p=\frac{16}{3}$; 8) $y=\pm\frac{4}{3}x$.

б) Для гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ справедливы формулы из табл. 4.1, стб. 5. Применив их, получим: 1) $a=3$, $b=4$; 2) $2c=2\sqrt{16+9}=10$; 3) $\varepsilon=\frac{4}{3}$; 4) $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$; 5) $B_1(0;4)$, $B_2(0;-4)$; 6) $y=\pm\frac{16}{5}$; 7) $p=\frac{9}{4}$; 8) $y=\pm\frac{4}{3}x$. ▲

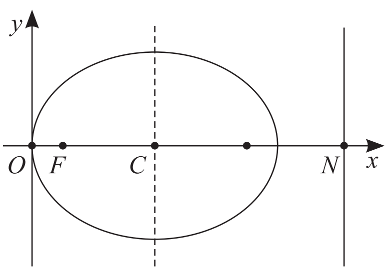


Рис. 4.5

Пример 4.3. Составить уравнение эллипса, вершина которого находится в начале координат, ближайший к ней фокус в точке $F(2;0)$, а одна из директрис эллипса пересекает его фокальную ось в точке $N(12;0)$.

Δ Из условия задачи следует, что фокальной осью является ось абсцисс. Пусть точка C – центр эллипса (рис. 4.5).

Расстояние от центра до директрисы $|CN|=\dfrac{a}{\varepsilon}$, $\varepsilon=\dfrac{c}{a}\Rightarrow|CN|=\dfrac{a^2}{c}.$ Тогда от вершины до директрисы расстояние $|ON|=|OC|+|CN|=a+\dfrac{a^2}{c}=12,$ от вершины до фокуса расстояние $|OF|=a-c=2.$ Чтобы найти полуоси эллипса, составим и решим систему

$$\begin{cases} a+\dfrac{a^2}{c}=12, \\ a-c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3,\ c=1, \\ a=4,\ c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3,\ b=\sqrt{9-1}=\sqrt{8}, \\ a=4,\ b=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}. \end{cases}$$

Условиям задачи удовлетворяют два эллипса. В заданной системе координат уравнения эллипсов не канонические. Совершим параллельный перенос исходной системы координат по формулам

$$\begin{cases} x'=x-a, \\ y'=y \end{cases}$$

и получим уравнения эллипсов в исходной системе

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1 \text{ и } \frac{(x-4)^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1. \ \blacktriangle$$

Пример 4.4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние от фокуса до асимптоты равно 4, а длина перпендикуляра, восстановленного из фокуса до пересечения с асимптотой, составляет $6\dfrac{2}{3}$.

Δ Преобразуем уравнение асимптоты $y=\dfrac{b}{a}x$ к виду $bx-ay=0$. Пусть фокусы гиперболы на оси абсцисс, тогда $L\left(c;6\dfrac{2}{3}\right)$ – точка пересечения перпендикуляра, восстановленного из фокуса до пересечения с асимптотой, подставим ее координаты в уравнение асимптоты:

$$bc-\frac{20}{3}a=0. \qquad (4.5)$$

Применим формулу расстояния от точки до прямой для фокуса $F(c;0)$ и асимптоты. Имеем

$$\frac{|bc-a0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4\Rightarrow\frac{bc}{c}=4\Rightarrow b=4.$$

Подставим в (4.5):

$$4c-\frac{20}{3}a=0\Rightarrow 3c=5a\Rightarrow 3\sqrt{a^2+16}=5a\Rightarrow a^2=9.$$

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Аналогично для гиперболы, у которой фокусы на оси ординат, получим

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1.\ \blacktriangle$$

Определение 4.12. Пусть на плоскости заданы точка F и прямая Δ, не проходящая через эту точку. ***Параболой*** называется множество всех тех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от точки F и *прямой* Δ. Точка F называется ***фокусом*** параболы, а прямая Δ – ***директрисой параболы***.

Число p в канонических уравнениях (расстояние от фокуса до директрисы) называется *параметром* параболы. Оно также является ее фокальным параметром.

Ось симметрии параболы называется ее *осью*, точка пересечения параболы с ее осью – *вершиной* параболы.

З а м е ч а н и е 4.6. Для парабол заданных каноническими уравнениями (табл. 4.2) вершиной является начало координат.

З а м е ч а н и е 4.7. Эксцентриситет параболы по определению считается равным 1.

Пример 4.5. Для параболы $y^2 = 8x$ найти фокус и директрису.

Δ Для заданной параболы справедливы формулы из табл. 4.2, стб. 2. Поскольку $p = 4$, то $F(2;0)$ и $x = -2$. $\blacktriangle$

Таблица 4.2

1	2	3	4	5
Канонические уравнения	$y^2=2px$ (рис. 4.6)	$y^2=-2px$ (рис. 4.7)	$x^2=2py$ (рис. 4.8)	$x^2=-2py$ (рис. 4.9)
Координаты фокуса	$F\left(\frac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$	$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$
Уравнение директрисы	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

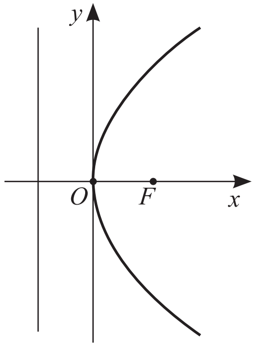


Рис. 4.6

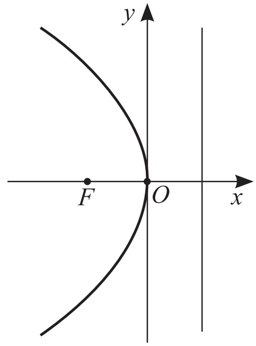


Рис. 4.7

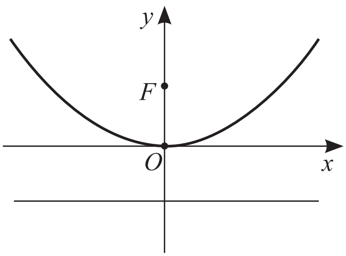


Рис. 4.8

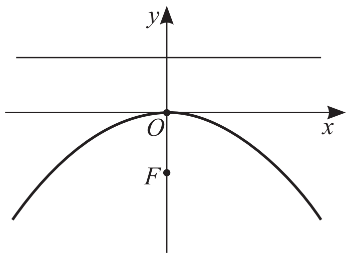


Рис. 4.9

Пример 4.6. На каком расстоянии от вершины находится фокус параболического рефлектора, диаметр которого 15 см, а глубина 10 см?

Δ В сечении параболического рефлектора получается парабола. Выберем систему координат так, чтобы уравнение параболы было каноническим (рис. 4.10): $x^2 = 2py$. Поскольку диаметр 15 см, а глубина 10 см, точка с координатами $\left(\frac{15}{2};10\right)$ принадлежит параболе. Подставим ее в уравнение параболы $\frac{225}{4} = 2\cdot 10p \Rightarrow p = \frac{225}{80}$. Фокус находится от вершины на расстоянии $\frac{p}{2} = \frac{225}{160} \approx 1{,}4$ см. ▲

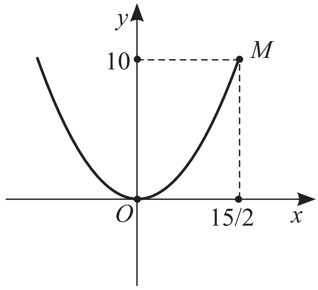


Рис. 4.10

Теорема 4.1. *Отношение расстояния r любой точки эллипса (гиперболы, параболы) от фокуса к ее расстоянию d от соответствующей директрисы есть величина* *постоянная, равная эксцентриситету эллипса (гиперболы, параболы), т. е.* $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

З а м е ч а н и е 4.8. Фокус и директриса эллипса (гиперболы) считаются соответствующими, если они расположены с одной стороны от центра. У параболы только один фокус и одна директриса.

Теорема 4.2. *Пусть на плоскости заданы точка F и прямая* Δ, *не проходящая через F. Множество всех точек плоскости, отношение расстояний которых от точки F и прямой* Δ *есть постоянная величина* ε, *является*: 1) *эллипсом, если* $0 \le \varepsilon < 1$; 2) *гиперболой, если* $\varepsilon > 1$; 3) *параболой, если* $\varepsilon = 1$. *Точка F является фокусом этого эллипса (гиперболы, параболы), прямая* Δ *– его (ее) соответствующей директрисой, а* ε *– эксцентриситетом.*

Пример 4.7. Даны вершина параболы $A(2;1)$ и уравнение директрисы $2x - y + 2 = 0$. Составить уравнение этой параболы.

Δ Найдем уравнение оси параболы. Для этого из уравнения директрисы выпишем ее вектор нормали $\vec{n}_1(2;-1)$. Поскольку ось параболы ортогональна директрисе (рис. 4.11), то вектор нормали для оси $\vec{n}_2(1;2)$ $(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0)$. Кроме того, ось параболы проходит через вершину. Таким образом, по точке A и вектору нормали $\vec{n}_2$ записываем общее уравнение оси: $x + 2y - 4 = 0$. Найдем расстояние от вершины до директрисы, используя формулу расстояния от точки до прямой: $\frac{|2 \cdot 2 - 1 + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$. Это расстояние равно половине параметра параболы, следовательно, сам параметр параболы равен $p = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

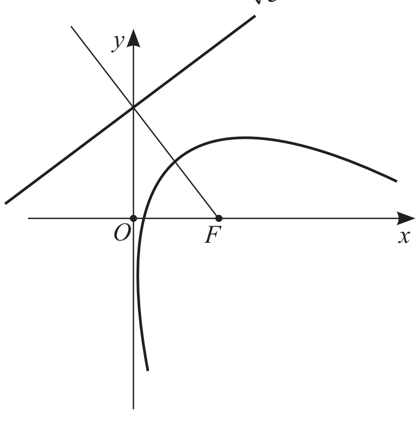


Рис. 4.11

Фокус $F(x_F; y_F)$ принадлежит оси параболы и находится на расстоянии p от директрисы. Составим систему для нахождения его координат:

$$\begin{cases} x_F + 2y_F - 4 = 0, \\ \frac{|2x_F - y_F + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_F = 4,\ y_F = 0, \\ x_F = -4,\ y_F = 4. \end{cases}$$

Фокус и вершина лежат по одну сторону от директрисы, поэтому фокус имеет координаты $F(4;0)$.

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$, по теореме 4.1 для любой точки $M(x; y)$, принадлежащей параболе, имеем

$$\frac{|2x - y + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + 4y^2 + 4xy - 48x + 4y + 76 = 0. \ \blacktriangle$$

Пример 4.8. Фокус линии второго порядка находится в точке $F(-4; -2)$, директриса, соответствующая ему, имеет уравнение $5x + 4 = 0$. Составить уравнение этой линии, зная, что ей принадлежит точка $A(4; 2)$.

Δ Пусть $M(x; y)$ – любая точка линии второго порядка. Расстояние r от точки M до точки F равно

$$r = \left|\overrightarrow{MF}\right| = \sqrt{(x+4)^2 + (y+2)^2}.$$

Расстояние d от точки M до директрисы равно $d = \dfrac{|5x+4|}{5}$.

По теореме 4.1 имеем

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2 + (y+2)^2}}{\dfrac{|5x+4|}{5}} = \varepsilon. \qquad (4.6)$$

Точка $A(4; 2)$ принадлежит гиперболе, следовательно, удовлетворяет уравнению (4.6). Для точки A $r = 4\sqrt{5}$, а $d = \dfrac{24}{5}$, следовательно, $\varepsilon = \dfrac{5\sqrt{5}}{6}$. Поскольку $\varepsilon = \dfrac{5\sqrt{5}}{6} > 0$, по теореме 4.2 искомая линия – гипербола. Ее уравнение, согласно (4.6) и $\varepsilon = \dfrac{5\sqrt{5}}{6}$, имеет вид

$$89x^2 - 36y^2 - 88x - 144y - 64 = 0. \ \blacktriangle$$

Вывод. Найти (вывести) уравнение фигуры можно одним из трех способов.

1. Если известно, что уравнение каноническое (осями фигуры являются оси координат и центр в начале координат), то для эллипса и гиперболы составляют систему из двух уравнений для их полуосей a и b, для параболы необходимо одно уравнение для нахождения параметра p.

2. Для вывода уравнения используют основную теорему о директрисах (теорема 4.1).

3. Уравнение выводят по определению, используя для эллипса (4.3), для гиперболы (4.4).

Пример 4.9. Орбита земного шара – эллипс с полуосью $a = 150 \cdot 10^6$ км и эксцентриситетом ε = 0,017. Зная, что солнце находится в фокусе этого эллипса, найти, на сколько кратчайшее расстояние от Земли до Солнца (в декабре) меньше наибольшего (в июне).

Δ Обозначим через k – кратчайшее, а через n – наибольшее расстояние. Очевидно (рис 4.12), что

$$k = a - c,\ n = a + c \Rightarrow n - k = 2c = 2a\varepsilon = 2 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 0{,}017 = 5{,}1 \cdot 10^6 \text{ км.} \ \blacktriangle$$

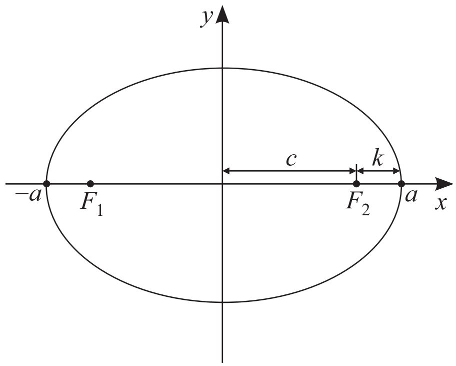


Рис. 4.12

Теорема 4.3. *Для любой фигуры второго порядка в пространстве (на плоскости) существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта фигура задается каноническим уравнением.*

З а м е ч а н и е 4.9. Если в общем уравнении фигуры второго порядка на плоскости (4.1) коэффициент $a_{12} \neq 0$, то существует такой угол α:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}, \tag{4.7}$$

что после поворота системы координат на этот угол по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases} \tag{4.8}$$

уравнение приводится к виду $a'_{11} x'^2 + a'_{22} y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0$.

З а м е ч а н и е 4.10. Если в общем уравнении фигуры второго порядка на плоскости (4.1) коэффициент $a_{12} = 0$, то при помощи параллельного переноса системы координат уравнение приводится к каноническому виду.

Теорема 4.4. *Любая плоская фигура второго порядка является эллипсом, гиперболой, параболой, парой пересекающихся прямых, парой параллельных прямых, прямой, точкой или пустым множеством.*

Пример 4.10. Привести уравнение $5x^2-9y^2-30x+18y-9=0$ к каноническому.

Δ Уравнение не является каноническим, так как наряду с квадратами переменных оно содержит их первые степени (см. определение 4.5). Выделим полные квадраты по обеим переменным, причем коэффициент при квадратах обязательно выносим за скобки:

$$5x^2-9y^2-30x+18y-9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2-6x+9\right)-45-9\left(y^2-2y+1\right)+9-9=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x-3)^2-9(y-1)^2=45 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{5}=1.$$

Уравнение упростится, если перенести начало координат O в точку $O'(3;\,1)$. Для этого определим положение точки на плоскости новыми декартовыми координатами x', y', связав их со старыми координатами x, y соотношениями:

$$x'=x-3,\; y'=y-1. \tag{4.9}$$

Иными словами, преобразование (4.9) есть параллельный перенос системы координат, определяемый радиус-вектором точки $O'(3;1)$ в старой системе координат (рис. 4.13). Таким образом, из исходного уравнения

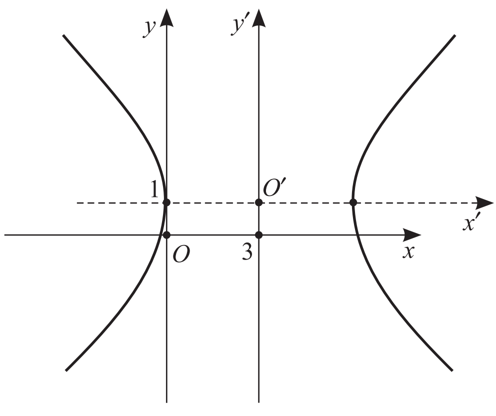


Рис. 4.13

получим каноническое $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{5}=1$. Рассматриваемая линия – гипербола (см. табл. 4.1). ▲

Пример 4.11. Найти координаты вершины параболы, параметр параболы, если парабола задана уравнением

$$y^2+10x+2y=0.$$

Δ Требуемые характеристики легко находятся из канонического уравнения, поэтому приведем исходное уравнение к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат, включающий в себя все слагаемые с переменной *y*:

$$y^2+10x+2y=0 \Leftrightarrow y^2+2y+1-1+10x=0 \Leftrightarrow (y+1)^2=-10\left(x-\frac{1}{10}\right).$$

Применив преобразование параллельного переноса $x'=x-\frac{1}{10}$, $x'=x-\frac{1}{10}$, $y'=y+1$ исходной системы координат Oxy в $O'x'y'$, где $O'\left(\frac{1}{10};-1\right)$, получим каноническое уравнение $y'^2=-10x'$. Из последнего уравнения координаты вершины параболы совпадают с координатами начала новой системы координат вершины O' (рис. 4.14), а параметр параболы $p=5$ (см. табл. 4.1). ▲

Пример 4.12. Привести уравнение $5x^2+4xy+8x^2-32x-56y+80=0$ к каноническому.

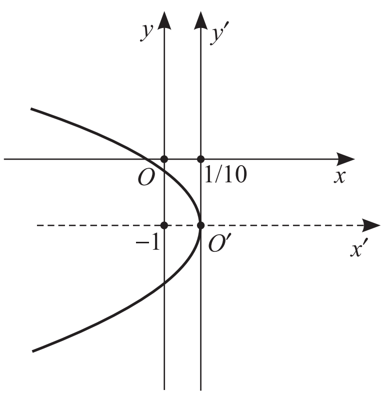


Рис. 4.14

Δ Заданное уравнение содержит произведение переменных и наряду с квадратами переменных их первые степени, поэтому, чтобы привести данное уравнение к каноническому, необходимо сначала применить преобразование поворота координатных осей, а затем параллельный перенос системы координат (см. замечания 4.9, 4.10).

Повернем координатные оси на угол α, определяемый формулой (4.7). Мы получим $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{-3}{4}$. Зная $\operatorname{ctg}2\alpha$, найдем $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{-3}{4} \Rightarrow 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 6\cos\alpha\sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 6\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\operatorname{tg}^2\alpha - 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \left[\begin{array}{l} 2, \\ -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

В качестве искомого угла возьмем острый угол, для которого $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Тогда

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}. \qquad (4.10)$$

Подставив (4.10) в (4.8), формулы поворота примут вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Подставив (4.11) в заданное уравнение и приведя подобные члены, получим

$$9(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0.$$

Чтобы избавиться от слагаемых первой степени, выделим полные квадраты по обеим переменным:

$$9\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 36 = 0 \qquad (4.12)$$

и применим преобразование параллельного переноса:

$$X = x' - \frac{8}{\sqrt{5}}, Y = y' + \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Кроме того, уравнение (4.12) разделим еще на 36 и получим окончательный вид канонического уравнения:

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} = 1,$$

из которого видно, что рассматриваемая линия – эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$ (см. табл. 4.1). ▲

4.2. КАСАТЕЛЬНЫЕ К ЭЛЛИПСУ, ГИПЕРБОЛЕ, ПАРАБОЛЕ. ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Пример 4.13. Гипербола, симметричная относительно координатных осей, касается прямых $5x - 6y - 16 = 0$ и $13x - 10y - 48 = 0$. Составить ее уравнение.

Δ Пусть в точке $(x_1; y_1)$ гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ касается прямой $5x - 6y - 16 = 0$. Запишем уравнение прямой в отрезках $\dfrac{x}{16/5} - \dfrac{6y}{16/5} = 1.$

Уравнение касательной в точке $(x_1; y_1)$ имеет вид $\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$ (табл. 4.3).

Следовательно, $\dfrac{x_1}{a^2} = \dfrac{5}{16}, \dfrac{y_1}{b^2} = \dfrac{6}{16} \Rightarrow x_1 = \dfrac{5a^2}{16}, y_1 = \dfrac{6b^2}{16}.$ Поскольку точка $\left(\dfrac{5a^2}{16}; \dfrac{6b^2}{16}\right)$ принадлежит касательной, то она удовлетворяет ее уравнению: $\dfrac{25a^2}{16^2} - \dfrac{36b^2}{16^2} = 1 \Rightarrow 25a^2 - 36b^2 = 16^2.$

Таблица 4.3

Уравнение линии L	Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Парабола $y^2 = 2px$
Уравнение касательной к линии L в точке $M_0(x_0; y_0) \in L$	$\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$	$\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$	$y_0 y = p(x + x_0)$

Аналогично для прямой $13x - 10y - 48 = 0$. Пусть в точке $(x_2; y_2)$ гипербола касается этой прямой. Запишем уравнение прямой в отрезках $\dfrac{x}{48/13} - \dfrac{y}{48/10} = 1.$ Уравнение касательной в точке $(x_2; y_2)$ имеет вид $\dfrac{x_2 x}{a^2} - \dfrac{y_2 y}{b^2} = 1.$ Следовательно, $\dfrac{x_2}{a^2} = \dfrac{13}{48}, \dfrac{y_2}{b^2} = \dfrac{10}{48} \Rightarrow x_2 = \dfrac{13a^2}{48}, y_2 = \dfrac{10b^2}{48}.$

Имеем $\dfrac{169a^2}{48^2} - \dfrac{100b^2}{48^2} = 1 \Rightarrow 169a^2 - 100b^2 = 48^2.$ Решим систему

$$\begin{cases} 25a^2 - 36b^2 = 16^2, \\ 169a^2 - 100b^2 = 48^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 = 16,\ b^2 = 4.$$

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1.$

Если рассмотреть уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$ тогда уравнение касательной $-\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$ Для точки $(x_1; y_1)$ аналогично получим $x_1 = -\frac{5a^2}{16},\ y_1 = -\frac{6b^2}{16},$ для $(x_2; y_2)$ – $x_2 = -\frac{13a^2}{48},\ y_2 = -\frac{10b^2}{48}.$ Обе точки принадлежат гиперболе, поэтому удовлетворяют ее уравнению, после подстановки их в уравнение получим и решим систему

$$\begin{cases} -25a^2 + 36b^2 = 16^2, \\ -169a^2 + 100b^2 = 48^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 = -4.$$

Система несовместна, поэтому второй гиперболы, удовлетворяющей условию задачи, нет. ▲

Пример 4.14. Доказать, что произведение расстояний от фокуса эллипса до любой касательной к нему равно квадрату малой полуоси.

Δ Пусть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение эллипса, тогда уравнение касательной к нему в произвольной точке $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ (см. табл. 4.3).

Находим расстояние от фокусов $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ до этой касательной: $d_1 = \frac{\left| -\frac{c x_0}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}},\ d_2 = \frac{\left| \frac{c x_0}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$

Отсюда

$$d_1 d_2 = \frac{\left| \frac{c^2 x_0^2}{a^4} - 1 \right|}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\left| \frac{(a^2 - b^2) x_0^2}{a^4} - 1 \right|}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} = \frac{\left| \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{b^2 x_0^2}{a^4} - 1 \right|}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} =$$

$$=\frac{\left|1-\frac{x_0^{\,2}}{a^2}+\frac{b^2x_0^{\,2}}{a^4}\right|}{\frac{x_0^{\,2}}{a^4}+\frac{y_0^{\,2}}{b^4}}=\frac{\left|\frac{y_0^{\,2}}{b^2}+\frac{b^2x_0^{\,2}}{a^4}\right|}{\frac{x_0^{\,2}}{a^4}+\frac{y_0^{\,2}}{b^4}}=b^2\,\frac{\frac{x_0^{\,2}}{a^4}+\frac{y_0^{\,2}}{b^4}}{\frac{x_0^{\,2}}{a^4}+\frac{y_0^{\,2}}{b^4}}=b^2.$$

Что и требовалось доказать. ▲

Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы указаны в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Название линии	Физическая трактовка	Геометрическая трактовка
Эллипс (рис. 4.15)	Лучи света, исходящие из одного фокуса F_1 эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходят через другой его фокус F_2	Прямая, касающаяся эллипса в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит вне угла F_1MF_2
Гипербола (рис. 4.16)	Лучи света, исходящие из одного фокуса F_1 гиперболы, после зеркального отражения от гиперболы кажутся исходящими из другого ее фокуса F_2	Прямая, касающаяся гиперболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит внутри угла F_1MF_2
Парабола (рис. 4.17)	Лучи света, исходящие из фокуса параболы, после зеркального отражения от параболы образуют пучок, параллельный оси параболы	Прямая, касающаяся параболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальным радиусом FM и лучом, который, исходя из точки M, идет параллельно оси параболы в ту сторону, куда парабола бесконечно простирается

Пример 4.15. Луч света выпущен из правого фокуса F эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ под углом α к оси абсцисс таким, что $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{9}{40}$, $\alpha\in(0;\pi)$. Дойдя до эллипса, он от него отразился. Найти точку встречи луча с эллипсом и уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

Δ Найдем координаты фокусов, используя табл. 4.1, стб. 2, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4\Rightarrow F_1(-4;0),\ F_2(4;0)$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{9}{40}$,

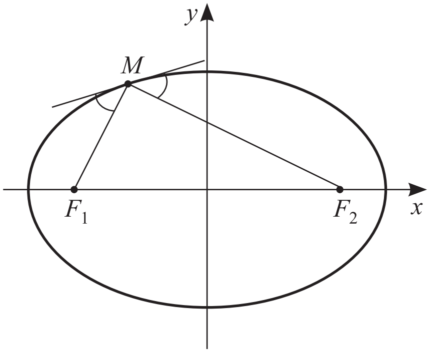


Рис. 4.15

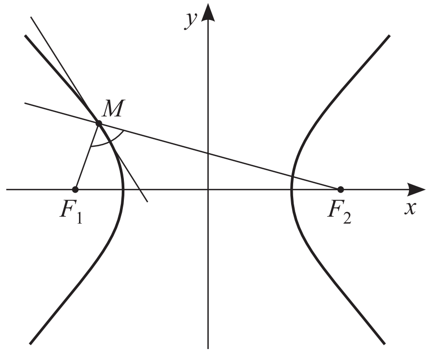


Рис. 4.16

$\alpha \in (0;\pi)$, значит, для прямой MF_2 угловой коэффициент $k = -\dfrac{9}{40}$. Составим уравнение прямой MF_2 по угловому коэффициенту и точке:

$$y = -\frac{9}{40}x + \frac{9}{10}.$$

Найдем точку M (учитывая, что $y_M > 0$ (рис. 4.18)) из системы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ y = -\dfrac{9}{40}x + \dfrac{9}{10} \end{cases} \Rightarrow x = -4,\ y = 1{,}8 \Rightarrow M\left(4; 1{,}8\right).$$

Получим уравнение прямой по двум точкам M и F_1: $x = -4$. ▲

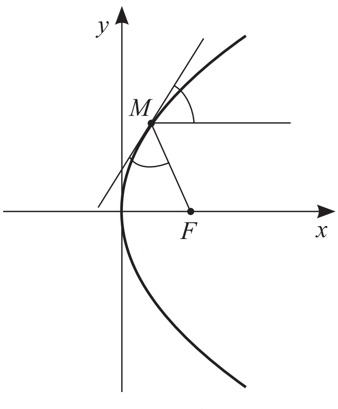


Рис. 4.17

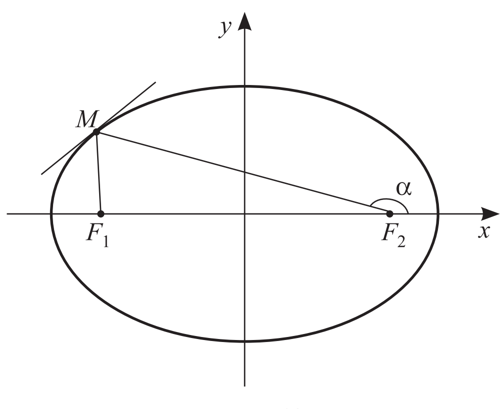


Рис. 4.18

4.3. ПОЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ И ПАРАБОЛЫ

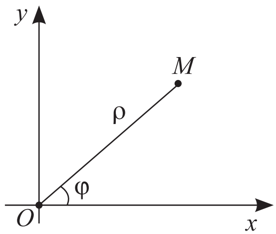


Рис. 4.19

На плоскости введена полярная система координат, если эта плоскость ориентирована, на ней выбрана точка O – полюс, луч Ox, выходящий из точки O, – полярная ось и масштабный отрезок. Каждой точке M плоскости поставим в соответствие упорядоченную пару чисел $(\rho;\ \varphi)$, где ρ – расстояние от точки M до полюса, а φ – угол между полярной осью и радиус-вектором точки M (рис. 4.19). Получим соответствие между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Если $\rho \in (0;+\infty)$, а $\varphi \in [0;2\pi)$ или $\varphi \in [-\pi;\pi)$, то это соответствие будет взаимно однозначным на плоскости с выколотой точкой (полюсом).

Если за полюс полярной системы координат взять один из фокусов эллипса, а за полярную ось – фокальную ось в направлении второго фокуса, то уравнение эллипса имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \tag{4.13}$$

где p – фокальный параметр; ε – эксцентриситет. Точно так же выглядит полярное уравнение параболы, если полюс помещен в ее фокус, а полярная ось – ось параболы в направлении от вершины. Такой же вид имеет и полярное уравнение ветви гиперболы, если полюс помещен в соответствующий этой ветви фокус, а полярная ось – фокальная ось в направлении второго фокуса. Для второй ветви гиперболы в выбранной системе координат полярное уравнение имеет вид

$$\rho = \frac{-p}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{4.14}$$

Пример 4.16. Дана гипербола $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$ Составить полярное уравнение ее левой (правой) ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в правом фокусе.

Δ Найдем фокальный параметр и эксцентриситет (см. табл. 4.1, стб. 4):

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{16}{5}, \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{25+16}}{5}=\frac{\sqrt{41}}{5}.$$

В заданной полярной системе координат уравнение правой ветви гиперболы имеет вид (4.13), подставив найденные значения, получим уравнение $\rho = \dfrac{16}{5 - \sqrt{41}\cos\varphi}$. В этой же системе координат уравнение левой ветви соответствует (4.14), а именно $\rho = \dfrac{-16}{5 + \sqrt{41}\cos\varphi}$. ▲

Пример 4.17. Определить вид линии второго порядка и записать ее каноническое уравнение, если в полярной системе координат эта линия задана уравнением $\rho = \dfrac{25}{13 - 12\cos\varphi}$.

Δ Преобразуем уравнение к виду (4.13)

$$\rho = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi},\ \rho = \frac{\frac{25}{13}}{1 - \frac{12}{13}\cos\varphi} \Rightarrow p = \frac{25}{13},\ \varepsilon = \frac{12}{13}.$$

Поскольку $\varepsilon = \dfrac{12}{13} < 1,$ искомой линей является эллипс. Для того чтобы записать каноническое уравнение эллипса, найдем его полуоси. Для этого составим и решим систему

$$\begin{cases} p = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{25}{13}, \\ \varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \dfrac{12}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \dfrac{25}{13}a, \\ a^2 - 13a = 0\ (a \neq 0) \end{cases} \Rightarrow a = 13,\ b = 5.$$

Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1.$ ▲

4.4. ЦИЛИНДРЫ И КОНУС ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 4.13. ***Цилиндрической поверхностью*** называется поверхность, образованная движением прямой линии, называемой ***образующей***, параллельно самой себе вдоль некоторой линии, называемой ***направляющей***.

Если направляющая лежит в координатной плоскости xOy и задана уравнением $F(x; y) = 0,$ а образующая параллельна координатной оси Oz, то уравнение цилиндра совпадает с уравнением направляющей $F(x; y) = 0.$

Аналогично уравнение $F(x;z)=0$ на плоскости xOz задает некоторую линию, а в пространстве это уравнение задает цилиндр, образующая которого параллельна оси Oy.

З а м е ч а н и е 4.11. Если в уравнении поверхности только две координаты, то эта цилиндрическая поверхность и уравнение направляющей, лежащей в соответствующей координатной плоскости, совпадает с уравнением цилиндра, а образующие параллельны той оси координат, координата которой отсутствует в уравнении.

Цилиндрической поверхностью второго порядка называется поверхность направляющей, которой является плоская фигура второго порядка. В качестве направляющих этих фигур надо брать плоские фигуры второго порядка, перечисленные в теореме 4.4.

В табл. 4.5. приведены цилиндрические поверхности, направляющими которых являются эллипс, гипербола, парабола, заданные каноническими уравнениями и лежащие в плоскости Oxy, а образующие параллельны оси Oz.

Таблица 4.5

Эллиптический цилиндр	Гиперболический цилиндр	Параболический цилиндр
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 4.20)	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 4.21)	$y^2=2px$ (рис. 4.22)

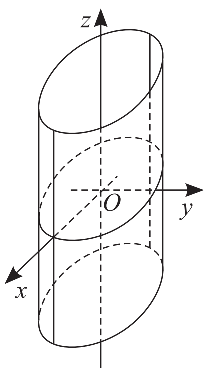


Рис. 4.20

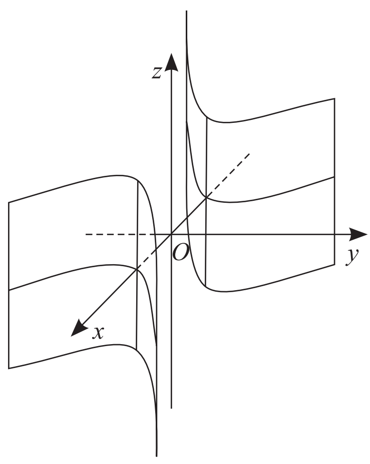


Рис. 4.21

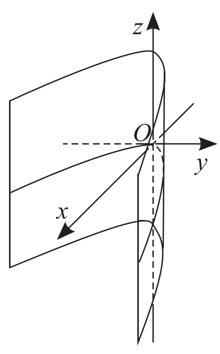


Рис. 4.22

Пример 4.18. Составить уравнение цилиндра, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - y^2 = z,\ x + y + z = 0,$ а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

Δ Упростим уравнение направляющей:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) = z, \\ x + y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)(-z) = z, \\ x + y = -z \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z = 0, \\ x + y = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Направляющая задается парой прямых, пересекающихся в точке $A\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; 0\right)$, с направляющими векторами $\vec{a}_1(-1;1;0)$ и $\vec{a}_2(1;1;-2)$. Находим вектор, перпендикулярный плоскости прямых: $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{n}(1;1;1)$. Через каждую точку указанной пары прямых проводим прямую, параллельную вектору $\vec{n}$, получим пару плоскостей:

$$\left[\begin{array}{l} x + y - 2z = 0, \\ x - y + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Два этих уравнения можно объединить в одно:

$$(x + y - 2z)(x - y + 1) = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0. \ ▲$$

Определение 4.14. ***Конической поверхностью***, или ***конусом***, называется поверхность, образованная множеством прямых (образующими конической поверхности), проходящих через одну точку, называемую вершиной этой поверхности. Если конус имеет ось симметрии, а все его образующие наклонены к ней под одним и тем же углом, то конус называется круговым.

Конусом второго порядка называется поверхность (рис. 4.23), уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где a, b, c – произвольные отличные от нуля числа. Будем считать, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

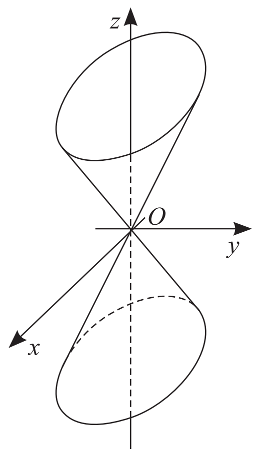


Рис. 4.23

Пример 4.19. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого задана уравнениями:

$$x^2 - 2z + 1 = 0,\ y - z + 1 = 0.$$

Δ Запишем уравнение направляющей в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{t^2 - 1}{2}, \\ z = \dfrac{t^2 + 1}{2}. \end{cases}$$

Для любой точки, принадлежащей направляющей, имеем

$$M\left(t; \frac{t^2 - 1}{2}; \frac{t^2 + 1}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OM}\left(t; \frac{t^2 - 1}{2}; \frac{t^2 + 1}{2}\right),$$

где O – начало координат.

Для любой точки $N(x; y; z)$, принадлежащей прямой OM, следует $\overrightarrow{ON} \parallel \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM}$. Запишем последнее равенство покоординатно:

$$\begin{cases} x = \lambda t, \\ y = \lambda \dfrac{(t^2 - 1)}{2}, \\ z = \lambda \dfrac{(t^2 + 1)}{2}. \end{cases} \tag{4.15}$$

Система (4.15) – параметрические уравнения конуса. Исключим параметр: $\lambda = \dfrac{x}{t}$ подставим в (4.15), имеем:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{t} \dfrac{t^2 - 1}{2}, \\ z = \dfrac{x}{t} \dfrac{t^2 + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 \left(\dfrac{t^2 - 1}{2t}\right)^2, \\ z^2 = x^2 \left(\dfrac{t^2 + 1}{2t}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 - z^2 = -x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 0. \ \blacktriangle$$

4.5. ЭЛЛИПСОИД. ПАРАБОЛОИДЫ И ГИПЕРБОЛОИДЫ

Определение 4.15. ***Эллипсоидом*** (рис. 4.24) называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c – произвольные отличные от нуля числа.

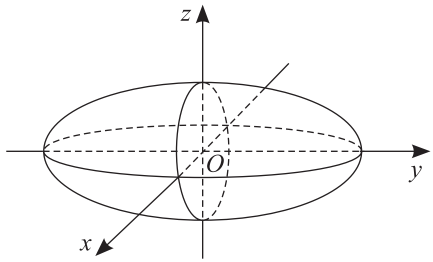


Рис. 4.24

Будем считать, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Величины a, b, c называются *полуосями эллипсоида*. Если они различны, эллипсоид называется *трехосным*. Если какие-либо две из осей равны, в этом случае эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*. Если $a = b = c$, эллипсоид является сферой радиусом a.

Замечание 4.12. Сфера радиусом r с центром в точке $S(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ задается уравнением

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

Эллипсоид симметричен относительно каждой из трех координатных плоскостей, каждой из координатных осей и начала координат (см. рис. 4.24).

Определение 4.16. ***Двуполостным гиперболоидом*** (рис. 4.25) называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

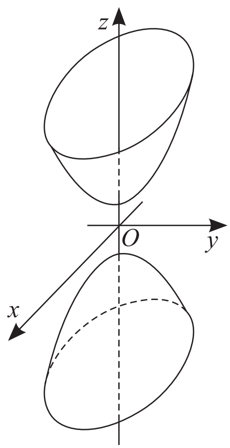


Рис. 4.25

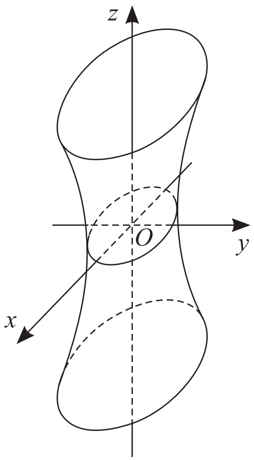


Рис. 4.26

Будем считать, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Двуполостный гиперболоид симметричен относительно каждой из координатных плоскостей, каждой из координатных осей и начала координат (см. рис. 4.25).

Определение 4.17. ***Однополостным гиперболоидом*** (рис. 4.26) называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Будем считать, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Однополостный гиперболоид симметричен относительно каждой из координатных плоскостей, каждой из координатных осей и начала координат (см. рис. 4.26).

Определение 4.18. ***Эллиптическим параболоидом*** (рис. 4.27) называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,$$

где $p > 0$, $q > 0$. Эллиптический параболоид симметричен относительно координатных плоскостей Oxz, Oyz и оси Oz, параболоид расположен по одну сторону от плоскости Oxy (см. рис. 4.27).

Определение 4.19. ***Гиперболическим параболоидом*** (рис. 4.28) называется поверхность, уравнение которой в некоторой специально выбранной прямоугольной системе координат имеет вид

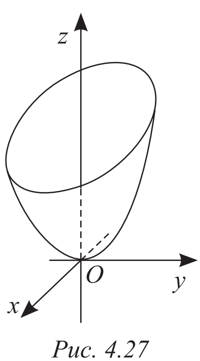


Рис. 4.27

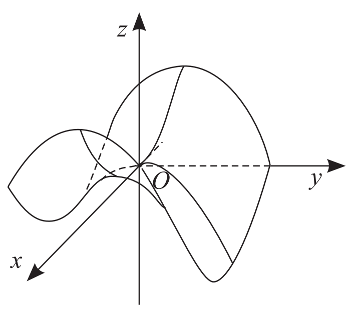


Рис. 4.28

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

где $p > 0$, $q > 0$.

Гиперболический параболоид симметричен относительно координатных плоскостей Oxz, Oyz и оси Oz (см. рис. 4.28).

З а м е ч а н и е 4.13. Для того чтобы определить вид фигуры, заданной каноническим уравнением, используют метод сечений. Однако необходимо помнить, что если в уравнении поверхности нет одной координаты, то это цилиндрическая поверхность. *Метод сечений*: фигуру пересекают параллельными плоскостями, перпендикулярными координатной оси, так, чтобы в сечении получился эллипс, т. е. в уравнении осталась сумма квадратов координат. Затем пересекают другими параллельными плоскостями, ортогональными другой координатной оси. В результате в сечении получают кривые, которыми соединяются эллипсы. Теперь легко определить вид фигуры. Необходимо помнить, что в каноническом уравнении гиперболического параболоида (седло) нет суммы квадратов.

Пример 4.20. Доказать, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

Δ Решим систему

$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

Полуоси полученного эллипса равны 3 и $\sqrt{3}$ соответственно.

Вершины: $(2;3;0), (2;-3;0), \left(2;0;\sqrt{3}\right), \left(2;0;-\sqrt{3}\right)$. ▲

Пример 4.21. Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 49$ в точке $M(5;5;-4)$.

Δ Из уравнения сферы: координаты центра $O(-1;\, 2;\, -2)$ и радиус $R = 7$.

Вектор $\overrightarrow{OM}(6;\, 3;\, -2)$ $\left(\left|\overrightarrow{OM}\right| = R\right)$ ортогонален касательной, т. е. он ее вектор нормали (рис. 4.29). По точке $M(5;5;-4)$, принадлежащей касательной плоскости и вектору $\overrightarrow{OM}$, составим ее уравнение:

$$6(x-5) + 3(y-5) - 2(z+4) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x + 3y - 2z - 53 = 0. \ ▲$$

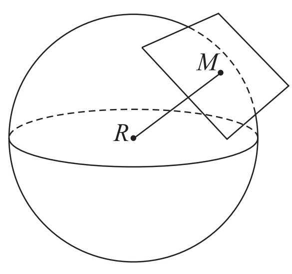


Рис. 4.29

Пример 4.22. Написать уравнение фигуры, для каждой точки которой модуль разности расстояний от двух заданных точек $F_1(0;0;3)$, $F_2(0;0;-3)$ есть величина постоянная, равная 4.

Δ Для любой точки $M(x;y;z)$ фигуры имеем $\left\| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right\| = 4.$ Перепишем в координатной форме и упростим:

$$\left| \sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2} - \sqrt{x^2+y^2+(z+3)^2} \right| = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2+y^2+(z+3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-6z+9 = 16 \pm 8\sqrt{x^2+y^2+(z+3)^2} + x^2+y^2+z^2+6z+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(3z+4) = 2\sqrt{x^2+y^2+(z+3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9z^2+24z+16 = 4x^2+4y^2+4z^2+24z+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+4y^2-5z^2 = -20 \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{4} = -1.$$

Получили каноническое уравнение двуполостного гиперболоида. ▲

Пример 4.23. Найти точки пересечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и прямой $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$.

Δ Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$x = 4t,\ y = -3t,\ z = -2+4t.$$

Решим систему

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1, \\ x=4t, \\ y=-3t, \\ z=-2+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16t^2}{16}+\frac{9t^2}{9}-\frac{(-2+4t)^2}{4}=1, \\ x=4t, \\ y=-3t, \\ z=-2+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-1)^2=0, \\ x=4t, \\ y=-3t, \\ z=-2+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1, \\ x=4, \\ y=-3, \\ z=2. \end{cases}$$

Прямая и поверхность имеют одну общую точку $(4;-3;2)$, следовательно, прямая касается однополостного гиперболоида. ▲

Пример 4.24. Найти уравнение ортогональной проекции линии пересечения эллиптического параболоида $2x^2+z^2=4y$ и плоскости $x-y=0$ на координатную плоскость yOz.

Δ Данная линия задана системой

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 4, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} 2y^2 + z^2 = 4y, \\ x = y. \end{cases}$$

Это цилиндр $2y^2 + z^2 = 4y$ с направляющей $2y^2 + z^2 = 4y$, лежащей в плоскости yOz, пересеченной плоскостью $x - y = 0$, следовательно, уравнение проекции совпадает с уравнением цилиндра.

Преобразуем уравнение ортогональной проекции:

$$2y^2 - 4y + z^2 = 0 \Rightarrow 2(y-1)^2 + z^2 = 2 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Очевидно, получили уравнение эллипса. ▲

З а м е ч а н и е 4.14. Одним из важных типов задач являются задачи, в которых требуется найти проекцию линии пересечения поверхности $F(x; y; z) = 0$ и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ на координатную плоскость. Такая линия задается системой

$$\begin{cases} F(x; y; z) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Если, например, найти проекцию на плоскость xOz, то систему заменяют равносильной системой

$$\begin{cases} F\left(x; -\dfrac{Ax + Cz + D}{B}; z\right) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Теперь поверхность заменилась цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oy, следовательно, уравнение $F\left(x; -\dfrac{Ax + Cz + D}{B}; z\right) = 0$ является как уравнением направляющей, лежащей в плоскости xOz, так и уравнением проекции.

Пример 4.25. Написать уравнение параболоида, вершина которого находится в начале координат, ось совпадает с осью Oy и который содержит точки $A_1(1; -2; 1)$, $A_2(-3; -3; 2)$.

Δ Заданным условиям удовлетворяют два параболоида. Причем их уравнения будут каноническими. Предположим сначала, что искомой поверхностью является эллиптический параболоид. Поскольку ось параболоида совпадает с осью Oy, то его уравнение $\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y.$ Подставим в уравнение точки A_1, A_2.

Получим

$$\begin{cases} \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=-4, \\ \frac{9}{p}+\frac{4}{q}=-6 \end{cases} \Rightarrow p=\frac{1}{2},\, q=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{\frac{1}{6}}=2y \Rightarrow x^2+3z^2=y.$$

Пусть теперь искомой поверхностью является гиперболический параболоид. Поскольку ось совпадает с осью Oy, то его уравнение $\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=\pm 2y.$ Подставим в уравнение $\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y$ точки A_1, A_2.

Получим

$$\begin{cases} \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=-4, \\ \frac{9}{p}-\frac{4}{q}=-6 \end{cases} \Rightarrow p=\frac{1}{2},\, q=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{z^2}{\frac{1}{6}}=2y \Rightarrow x^2-3z^2=y.$$

Аналогично для уравнения $\frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=-2y$ находим $p=-\frac{1}{2},\, q=-\frac{1}{6}$, но это противоречит тому, что у параболоида всегда $p > 0$, $q > 0$, следовательно, пустое множество.

Итак, решением задачи являются два параболоида, заданные уравнениями $x^2+3z^2=y$ и $x^2-3z^2=y$. ▲

Определение 4.20. Если поверхность может быть образована движением прямой линии (т. е. состоит из прямых линий), то эти прямые называются ***прямолинейными образующими***.

Теорема 4.5. *Через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходят две и только две его прямолинейные образующие.*

Пример 4.26. Найти те прямолинейные образующие гиперболического параболоида $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=2z$, которые параллельны прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{0}$.

Δ Вектор $\vec{a}(4;3;0)$ является направляющим вектором заданной прямой. Поэтому уравнение любой прямой, параллельной данной, имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + 4t, \\ y = y_0 + 3t, \\ z = z_0. \end{cases} \tag{4.16}$$

По условию эта прямая лежит на поверхности, т. е. координата любой точки $M\left(x_0+4t;\, y_0+3t;\, z_0\right)$ удовлетворяет уравнению поверхности $\frac{(x_0+4t)^2}{16}-\frac{(y_0+3t)^2}{9}=2z_0$. Преобразуем:

$$\frac{x_0{}^2+8x_0t+16t^2}{16}-\frac{y_0{}^2+6y_0t+9t^2}{9}=2z_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_0}{2}-\frac{2y_0}{3}\right)t+\left(\frac{x_0{}^2}{16}-\frac{y_0{}^2}{9}\right)=2z_0,$$

выполняется при любом t, следовательно,

$$\begin{cases} \frac{x_0}{2}-\frac{2y_0}{3}=0, \\ \frac{x_0{}^2}{16}-\frac{y_0{}^2}{9}=2z_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\frac{4}{3}y_0, \\ z_0=0. \end{cases}$$

Пусть $y_0 = s$, где s – параметр, тогда

$$\begin{cases} x_0 = 4s, \\ y_0 = 3s, \\ z_0 = 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Система (4.17) задает уравнение прямой, лежащей на поверхности. Подставим (4.17) в (4.16), сделаем замену $u = s + t$ и в итоге получим

$$\begin{cases} x = 4u, \\ y = 3u, \\ z = 0, \end{cases} \text{ или } \frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{0}. \ \blacktriangle$$

4.6. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Определение 4.21. ***Поверхностью вращения*** называется поверхность, образованная вращением некоторой линии вокруг прямой, называемой осью вращения.

Теорема 4.6. *Пусть относительно декартовой прямоугольной системы координат Oxz на плоскости задана линия L уравнением* $F(x,z)=0$*. Тогда уравнение поверхности* Π*, образованной вращением линии L вокруг оси Oz в декартовой прямоугольной системе координат Oxyz, будет иметь вид* $F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,;\,z\right)=0$.

З а м е ч а н и е 4.15. Если линия, лежащая в координатной плоскости, вращается вокруг одной из координатных осей, определяющих эту плоскость, то для написания уравнения поверхности вращения в уравнении линии координату той оси, вокруг которой вращают, не меняют, а вторую координату изменяют на алгебраический квадратный корень из суммы квадратов оставшихся координат.

В табл. 4.6 приведены уравнения поверхностей вращения второго порядка, полученных при вращении линии второго порядка, лежащей в плоскости xOz, вокруг оси Oz.

Таблица 4.6

Название	Уравнение
Круговой цилиндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
Круговой конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Эллипсоид вращения	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Параболоид вращения	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z$
Двуполостный гиперболоид вращения	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
Однополостный гиперболоид вращения	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Пример 4.27. Найти уравнение поверхности, полученной вращением прямой $y=x$, лежащей в плоскости xOy, вокруг оси Oy.

Δ Поскольку линия $y = x$ вращается вокруг оси Oy, то в силу замечания 4.12 имеем: $y = \pm\sqrt{x^2 + z^2} \Leftrightarrow y^2 = x^2 + z^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + z^2 = 0$ – круговой конус. ▲

Пример 4.28. Написать уравнение параболоида вращения с параметром $p = 6$, вершина которого находится в первом октанте, зная, что плоскость xOy пересекает параболоид по окружности с радиусом 3, касающейся обоих осей Ox и Oy.

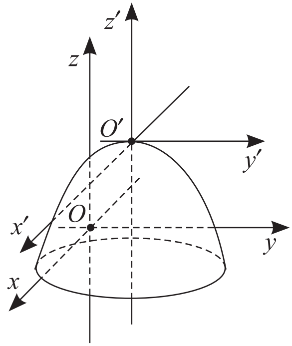


Рис. 4.30

Δ Пусть C – центр окружности, тогда $C(3;3;0)$ (рис. 4.30).

Поскольку ось вращения проходит через центр окружности и перпендикулярна плоскости окружности, то ее уравнение

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 3. \end{cases}$$

Вершина параболоида O' – точка пересечения оси с параболоидом, т. е. $O'(3;3;a)$.

Уравнение параболоида в системе $O'x'y'z'$, полученной из системы $Oxyz$ параллельным переносом:

$$\begin{cases} x = x' + 3, \\ y = y' + 3, \\ z = z' + a, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y - 3, \\ z' = z - a, \end{cases}$$

имеет вид

$$x'^2 + y'^2 = -2pz' \Rightarrow x'^2 + y'^2 = -12z' \Rightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = -12(z-a).$$

И точка пересечения с осью Ox (см. рис. 4.30):

$$A(3;0;0) \Rightarrow (3-3)^2 + (0-3)^2 = -12(0-a) \Rightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Искомое уравнение имеет вид

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = -12\left(z - \frac{3}{4}\right). \ ▲$$

Задачи для самостоятельной работы

4.1. Составить каноническое уравнение эллипса, если директрисами являются прямые $x = \pm 4$, а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси – квадрат.

4.2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой принадлежат оси ординат и симметричны относительно начала координат, если ее асимптоты имеют уравнения $y = \pm\frac{3}{4}x$, а расстояние между директрисами равно 7,2.

4.3. Составить каноническое уравнение параболы, если ветви направлены вверх, а фокальный параметр равен 4.

4.4. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = 1/2$, фокус $F(3;0)$ и уравнение соответствующей этому фокусу директрисы $x + y - 1 = 0$.

4.5. Составить уравнение параболы, если известны ее фокус $F(-2;1)$ и уравнение директрисы $x + y - 1 = 0$.

4.6. Точка $M_0(1;-2)$ принадлежит гиперболе, фокус которой $F(-2;2)$, а соответствующая этому фокусу директриса Δ задана уравнением $2x - y - 1 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

4.7. Найти координаты фокусов и уравнения директрис гиперболы $4x^2 - 5y^2 + 24x + 10y + 11 = 0$.

4.8. Доказать, что уравнение $x^2 - 4x - 4y = 0$ задает параболу. Найти координаты ее фокуса и уравнение директрисы.

4.9. Найти координаты фокусов и уравнения директрис эллипса $9x^2 + 2y^2 + 36x - 16y + 50 = 0$.

4.10. Составить уравнение касательных к окружности $(x-1)^2 + y^2 = 2$, проходящих через точку $A(-1;0)$.

4.11. Вывести условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается параболы $y^2 = 2px$.

4.12. Составить уравнение касательных к гиперболе $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярных к прямой $4x + 3y - 7 = 0$.

4.13. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Дойдя до параболы, луч от нее отразился. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

4.14. Зеркало в разрезе имеет форму половинки эллипса. Диаметр зеркала равен 6 см. На каком расстоянии от вершины следует поместить на оси зеркала источник света, чтобы наиболее освещенной оказалась точка на оси на расстоянии 9 см от вершины?

4.15. Найти фокус, директрису и полярное уравнение параболы $y^2 = 6x$.

4.16. Определить вид линии второго порядка и записать ее каноническое уравнение, если в полярной системе координат эта линия задана уравнением $\rho = \dfrac{40}{3 - 7\cos\varphi}$.

4.17. На эллипсе $\rho = \dfrac{12}{3 - \sqrt{2}\cos\varphi}$ найти точки, полярный радиус которых равен 6.

4.18. Найти уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

4.19. Составить уравнение кругового цилиндра, если известны уравнения его оси $x = 5 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = 3 + 2t$ и одна из точек $A(2;0;1)$.

4.20. Установить вид и расположение поверхности:

а) $9x^2 + 4y^2 - 36z^2 - 18x + 24y + 9 = 0$; б) $x^2 - 4x - 2z + 10 = 1$.

4.21. Найти точки пересечения поверхности $x^2 + y^2 = z$ и прямой $x = 1 + t$, $y = -1 + t$, $z = -6 + 8t$.

4.22. Найти проекцию линии пересечения поверхности S и плоскости α на координатную плоскость β, если:

а) S: $3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 360 = 0$, α: $x - y + z - 1 = 0$, β: Oyz;

б) S: $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$, α: $2x - y + z = 0$, β: Oxz;

в) S: $x^2 - 3y^2 + z^2 - 6xy + 2yz - 3y + z - 1 = 0$, α: $2x - 3y - z + 2 = 0$, β: Oxy.

Ответы и указания

4.1. $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. **4.2.** $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = -1$. **4.3.** $x^2 = 8y$. **4.4.** $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 46x + 2y + 71 = 0$. **4.5.** $x^2 + y^2 - 2xy + 10x - 2y + 9 = 0$. **4.6.** $9x^2 + 16y^2 - 100xy - 136x + 86y - 47 = 0$. **4.7.** $F_1(-6;1)$; $3x + 14 = 0$; $F_2(0;1)$; $3x + 4 = 0$. **4.8.** $F(0;1)$; $y + 2 = 0$. **4.9.** $F_1\left(-2;4-\sqrt{7}\right)$; $y = 4 - \dfrac{9}{\sqrt{7}}$; $F_2\left(-2;4+\sqrt{7}\right)$; $y = 4 + \dfrac{9}{\sqrt{7}}$. **4.10.** $x + y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$. **4.11.** $p = 2bk$. **4.12.** $3x - 4y - 10 = 0$. **4.13.** $y - 18 = 0$. **4.14.** 1 см. **4.15.** $F\left(\dfrac{3}{2};0\right)$; $x = \dfrac{-3}{2}$; $\rho = \dfrac{3}{1-\cos\varphi}$. **4.16.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{40} = 1$. **4.17.** $\left(6;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(6;-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **4.18.** $xy + xz + yz = 0$. **4.19.** $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz - 8xz - 30x - 48y + 6z + 45 = 0$. **4.20.** а) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+3)^2}{9} - z^2 = 1$; б) $(x-2)^2 = 2(z-3)$. **4.21.** $A(3;1;10)$. **4.22.** а) эллипс $3y^2 + 4z^2 + 36y - 96z + 384 = 0$; б) гипербола $25x^2 + 8z^2 + 32xz + 10x - 14y + 5 = 0$; в) пара пересекающихся прямых $5x - 14y + 5 = 0$ и $x + 1 = 0$.

Глава 5
ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

5.1. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если любому натуральному n (номеру) по некоторому правилу поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто *последовательность*)

$$x_1, x_2, x_3, \ldots .$$

Для краткого обозначения последовательности используют символ (x_n).

Иначе говоря, последовательностью называют функцию, заданную на множестве натуральных чисел, причем вместо символа $f(n)$ пользуются индексным обозначением $x_n = f(n)$.

Числа, составляющие последовательность, называют ее *членами* (*элементами*), число x_n – *общим членом* (*элементом*) последовательности (x_n) или *n-м членом* последовательности, а n – *номером члена.* Члены последовательности x_n и x_m при $n \neq m$ считаются отличными как элементы последовательности, хотя не исключено, что $x_n = x_m$.

Последовательность может быть задана формулой общего члена, например $x_n = n^2 + 1$; рекуррентным соотношением, например $x_{n+1} = 2x_n + n$, $x_1 = 1$; другими способами, например x_n есть n-я цифра в десятичной записи числа $\sqrt{2}$.

Пример 5.1. Найти формулу общего члена для последовательности

$$x_{n+1} = x_n(n+1), \quad x_1 = 1.$$

Δ Легко видеть, что

$$x_2 = x_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2!, \quad x_3 = x_2 \cdot 3 = (2!) \cdot 3 = 3!, \quad x_4 = (3!) \cdot 4 = 4!.$$

Предположив $x_n = n!$, методом математической индукции получим

$$x_{n+1} = x_n(n+1) = (n!)(n+1) = (n+1)!.$$

Таким образом, $x_n = n!$. ▲

5.1.1. Понятие предела последовательности

Определение 5.1. Число a называется ***пределом последовательности*** (x_n), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от ε, такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

В краткой символической форме определение записывают следующим образом: *число **a** называют пределом последовательности* (x_n), *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon): \ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Если a − предел последовательности (x_n), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ или } \lim x_n = a, \text{ или } x_n \to a.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, не имеющая предела – *расходящейся.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ то говорят также, что последовательность *сходится к **a*** или *стремится к **a***.

З а м е ч а н и е 5.1. Неравенство (5.1) содержит только члены последовательности с номерами $n > N$, следовательно, отбрасывание (добавление) конечного числа первых членов последовательности не влияет на ее сходимость и не меняет предела. Указанное свойство последовательности мы будем использовать в дальнейшем, не оговаривая это особо.

З а м е ч а н и е 5.2. Доказательство равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ сводится к доказательству существования фигурирующего в определении 5.1 числа $N = N(\varepsilon)$. Если $\forall \varepsilon > 0$ такое число можно указать, то последовательность (x_n) сходится к числу a, если же такое N не существует, то a не может быть пределом (x_n). При этом существенно отметить, что если неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > N_1$, то оно выполняется и для $n > N_2$, где $N_2 > N_1$.

Пример 5.2. Пусть $x_n = a \ \ \forall n.$ Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

Δ Очевидно, что $\forall \varepsilon > 0$ все члены последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon.$ Следовательно, в качестве N можно взять $N = 1$ (или любое положительное число). Таким образом, имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = 1: \ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$

а это означает по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ ▲

Пример 5.3. Доказать, исходя из определения 5.1, что

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q|<1.$$

Δ Выберем любое ε > 0. Поскольку $|x_n - 0| = |q^n - 0| = |q|^n$, то для нахождения всех значений n, удовлетворяющих неравенству $|x_n - 0| < \varepsilon$, достаточно решить относительно n неравенство $|q|^n < \varepsilon$. Логарифмируя последнее соотношение, получим

$$n \lg|q| < \lg\varepsilon, \text{ или } n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$$

(знак неравенства изменился на обратный, поскольку $\lg|q| < 0$).

Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять число $\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$ (или любое большее число). Таким образом,

$$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists N = \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}: \;\forall n>N \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что $\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|} \le 0$ при $\varepsilon \ge 1$, следовательно, неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$ будет выполняться $\forall n$. ▲

Пример 5.4. Доказать, исходя из определения 5.1, что

$$\lim x_n = 1, \text{ если } x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Δ Рассмотрим модуль разности

$$|x_n - 1| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - 1\right| = \left|1 - \frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

В соответствии с определением предела требуется $\forall\varepsilon>0$ найти $N = N(\varepsilon)$ такое, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$. Решив его относительно n, получим $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять число $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ (или любое большее число). Итак:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N=\frac{1}{\varepsilon}-1:\ \forall n>N\Rightarrow\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-1\right|<\varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1.\ \blacktriangle$$

Пример 5.5. Доказать, что $\lim\dfrac{n\cos n}{n^4+3n^2+1}=0,$ пользуясь определением предела последовательности.

Δ Выберем $\forall\varepsilon>0.$ Требуется указать N такое, чтобы $\forall n>N$ выполнялось неравенство $\left|\dfrac{n\cos n}{n^4+3n^2+1}\right|<\varepsilon.$ Поскольку в определении предела последовательности достаточно указать хотя бы одно число N, не обязательно наименьшее, значит, точное решение полученного неравенства не требуется. Очевидно, что

$$\left|\frac{n\cos n}{n^4+3n^2+1}\right|\le\frac{n}{n^4}\le\frac{1}{n}.$$

Если $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ (для этого достаточно взять $n>\varepsilon^{-1}$), то и

$$|x_n-0|=\left|\frac{n\cos n}{n^4+3n^2+1}\right|<\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=\frac{1}{\varepsilon}:\forall n>N\Rightarrow|x_n|<\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$ найдено с «большим запасом». $\blacktriangle$

5.1.2. Практические рекомендации по использованию определения 5.1

Чтобы доказать, исходя из определения предела последовательности, что $\lim x_n=a,$ поступают обычно следующим образом:

1) записывают неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$ и решают его относительно n. Если решение этого неравенства имеет вид $n>f(\varepsilon),$ то в качестве $N=N(\varepsilon)$ можно взять $N=f(\varepsilon)$ или любое большее число (см. решения примеров 5.2–5.4).

2) если неравенство (5.1) трудно или невозможно решить относительно n, то целесообразно найти другую последовательность (y_n), которая, во-первых, начиная с некоторого номера, удовлетворяет условию $|x_n - a| \le y_n$, и, во-вторых, неравенство $y_n < \varepsilon$ просто решается относительно n (см. решение примера 5.5). Отметим дополнительно, что последовательность (y_n) должна быть такой, чтобы неравенство $y_n < \varepsilon$ действительно имело место, начиная с некоторого номера.

5.1.3. Геометрическая интерпретация

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентно двум неравенствам $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, что, в свою очередь, равносильно принадлежности точек x_n ε-окрестности точки a. Следовательно, определению 5.1 можно придать следующий вид.

Определение 5.2. Число a называется ***пределом последовательности*** (x_n), если в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности, начиная с некоторого номера, или, что то же самое, вне любой ε-окрестности точки a находится конечное или пустое множество членов последовательности (x_n).

Часто вместо слов «все члены последовательности, начиная с некоторого номера» или «все, за исключением конечного числа» употребляют фразу «почти все члены последовательности».

5.1.4. Расходящиеся последовательности

Сформулируем отрицание определения 5.1 (определения 5.2).

Определение 5.3. Число a не является пределом последовательности (x_n) $(\lim x_n \ne a)$, если

$$\exists \varepsilon > 0: \ \forall N \ \ \exists n > N: \ \Rightarrow |x_n - a| \ge \varepsilon,$$

или (на языке окрестностей) существует ε-окрестность точки a, вне которой находится бесконечно много членов последовательности.

З а м е ч а н и е 5.3. Если найдется такое число $m > 0$, что $|x_n - a| \ge m$ при всех n, то a не может быть пределом данной последовательности. Действительно, взяв тогда положительное $\varepsilon \le m$, будем иметь неравенство $|x_n - a| \ge \varepsilon$ для всех n.

Как указывалось выше, последовательность называют расходящейся, если она не имеет предела, иными словами, какое число a ни взять, оно не может быть пределом последовательности. Следовательно, последовательность (x_n) является *расходящейся*, если

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0:\ \forall N\ \ \exists n > N: \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

Пример 5.6. Доказать, что $\lim x_n \neq \dfrac{2}{5}$, если $x_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-n+1}$.

Δ Оценим снизу величину $|x_n - a|$. Имеем:

$$\left|x_n - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{3n^2+1}{5n^2-n+1} - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{5}\ \frac{5n^2+2n+3}{5n^2-n+1} > \frac{1}{5}\ \ \forall n,$$

так как $\dfrac{5n^2+2n+3}{5n^2-n+1} > 1$ при всех n.

Следовательно, число $\dfrac{2}{5}$ не может быть пределом последовательности (см. замечание 5.3).

Другое доказательство получится, если воспользоваться определением 5.3 на языке окрестностей. Действительно, для всех n выполняется неравенство $x_n - \dfrac{2}{5} > \dfrac{1}{5}$ $\left(\text{мы сняли модуль в полученной ранее оценке, так как } x_n > \dfrac{2}{5}\ \forall n\right)$ или $x_n > \dfrac{3}{5}\ \ \forall n.$ Иначе говоря, все члены последовательности лежат правее точки $\dfrac{3}{5}$. Следовательно, достаточно взять любое $\varepsilon < \dfrac{1}{5}$, чтобы вне ε-окрестности точки $\dfrac{2}{5}$ находилось бесконечно много членов последовательности (точнее, все члены последовательности будут находиться вне этой окрестности). Что и требовалось доказать. ▲

Пример 5.7. Доказать расходимость последовательности $x_n = (-1)^n$.

Δ *Первый способ.* Очевидно, что расстояние между двумя точками x_n и x_{n+1} равно $|x_{n+1} - x_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right| = 2.$ Нужно доказать, что никакое число a не может быть пределом этой последовательности. В самом деле, для любого a выберем окрестность единичной длины $\left(a - \dfrac{1}{2};\ a + \dfrac{1}{2}\right)$. Очевидно, что точки 1 и −1 не могут одновременно находиться в указанной окрестности при $\forall a$ (ведь расстояние между этими точками равно 2). Таким образом, для любого a существует $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ такое, что вне ε-окрестности точки a находится бесконечно много членов последовательности – это либо все члены с четными, либо с нечетными номерами. Следовательно, (x_n) расходится.

Второй способ. Предположим от противного, что существует $\lim x_n = a$. Тогда по определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists N: \ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| = |(-1)^n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. Поскольку $x_n = (-1)^n$ принимает попеременно значения 1 или -1, значит, начиная с некоторого номера, должно быть

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \text{ и } |(-1) - a| < \frac{1}{2}.$$

А тогда

$$2 = |1 - a + a - (-1)| \le |1 - a| + |(-1) - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Полученное противоречие и доказывает утверждение. ▲

5.1.5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 5.4. Последовательность (α_n) называется ***бесконечно малой***, если $\lim \alpha_n = 0$.

Раскрыв понятие предела «на языке ε–N», получим: последовательность (α_n) является *бесконечно малой*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \ \forall n > N \ \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Очевидно следующее утверждение:

$$\lim x_n = a \ \Leftrightarrow \ x_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n - \text{бесконечно малая.}$$

Определение 5.5. Последовательность (x_n) называется ***бесконечно большой***, если

$$\forall E > 0 \quad \exists N = N(E): \ \forall n > N \ \Rightarrow |x_n| > E.$$

Условимся в следующих обозначениях:

а) если (x_n) – бесконечно большая, то будем писать

$$\lim x_n = \infty, \text{ или } x_n \to \infty;$$

б) если (x_n) – бесконечно большая и $x_n > 0$, начиная с некоторого номера, то будем писать

$$\lim x_n = +\infty, \text{ или } x_n \to +\infty;$$

в) если (x_n) – бесконечно большая и $x_n < 0,$ начиная с некоторого номера, то будем писать

$$\lim x_n = -\infty, \text{ или } x_n \to -\infty.$$

Следует обратить особое внимание на тот факт, что символическая запись $\lim x_n = \infty$ $(+\infty$ или $-\infty)$ означает лишь то, что (x_n) – бесконечно большая последовательность, но вовсе не означает, что она имеет предел. Правда, условились говорить (и это весьма удобно), что бесконечно большая последовательность имеет *бесконечный предел*, или *стремится к бесконечности*. В связи с этим принято предел в ранее определенном смысле (определение 5.1) называть *конечным пределом.*

Укажем простую связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.

Теорема 5.1. *Пусть* $x_n \neq 0$ $\forall n$ и $y_n = \dfrac{1}{x_n}$. *Тогда*:

а) *если* (x_n) *– бесконечно большая последовательность, то* (y_n) *будет бесконечно малой*;

б) *если* (x_n) *– бесконечно малая последовательность, то* (y_n) *будет бесконечно большой.*

Пример 5.8. Доказать, что последовательность $x_n = a^n$ $(|a| > 1)$ является бесконечно большой.

Δ Нужно показать, что (x_n) удовлетворяет определению 5.5:

$$\forall E > 0\ \exists N = N(E) : \forall n > N \Rightarrow |x_n| = |a^n| = |a|^n > E.$$

Решив неравенство $|a|^n > E$ относительно n, получим $n > \log_{|a|} E$. Таким образом,

$$\forall E > 0\ \exists N = \log_{|a|} E :\ \forall n > N\ \Rightarrow |x_n| > E,$$

что и требовалось доказать. ▲

5.2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Укажем некоторые свойства сходящихся последовательностей, базирующиеся на определении предела.

Теорема 5.2 (единственность предела). *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Теорема 5.3 (необходимое условие сходимости последовательности). *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Теорема 5.4 (о предельном переходе в неравенствах). *Если* $x_n \to a$, $y_n \to b$ *и* $x_n \le y_n$ $\forall n$, *то* $a \le b$ (*или* $\lim x_n \le \lim y_n$).

Заметим, что из строгого неравенства $x_n < y_n$ не следует, вообще говоря, неравенство $a < b$.

Теорема 5.5 (о сжатой переменной). *Если* $\lim x_n = \lim y_n = a$ *и* $x_n \le$ $\le z_n \le y_n$ $\forall n$, *то* $\lim z_n = a$.

Теоремы 5.3 и 5.4 наглядно могут быть представлены следующими схемами:

$$\begin{array}{ccc} x_n \le y_n & \qquad x_n < y_n & \qquad x_n \le z_n \le y_n \\ \downarrow \Downarrow \downarrow & \qquad \downarrow \Downarrow \downarrow & \qquad \searrow \Downarrow \swarrow \\ a \le b & \qquad a \le b & \qquad a \end{array}$$

Теорема 5.6. *Если* $\lim x_n = a, \lim y_n = b,$ *то*:

а) $\lim(x_n + y_n) = a + b$;

б) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

в) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \ne 0$ и $y_n \ne 0$ $\forall n)$.

В частном случае, если $x_n = c$ $\forall n$, будем иметь:

$$\lim(c + y_n) = c + b, \lim(c \cdot y_n) = cb.$$

Заметим, что утверждения а) и б) теоремы 5.6 легко распространить методом математической индукции на любое фиксированное число слагаемых и сомножителей.

Приведенные выше свойства сходящихся последовательностей имеют не только теоретическое, но и большое практическое значение. Если с помощью определения 5.1 можно лишь проверить, будет ли заранее угаданное число пределом данной последовательности, то теперь открывается возможность для практического нахождения пределов. Главную роль в этом играют теоремы 5.5 и 5.6.

Пример 5.9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2}$.

Δ Поделив числитель и знаменатель на n^2 и применив теорему 5.6, получим

$$\lim \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2} = \lim \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim 2 - \lim \frac{3}{n} + \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 1 + \lim \frac{2}{n^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0} = 2. \ \blacktriangle$$

Пример 5.10. Пусть $x_n \ge 0$ $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Найти при любом натуральном p $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{1 + x_n}$.

Δ Оценим величину $\sqrt[p]{1+x_n}$ снизу и сверху.

Очевидно, что

$$1 \le \sqrt[p]{1+x_n} \le \left(\sqrt[p]{1+x_n}\right)^p = 1+x_n.$$

Поскольку $\lim 1 = 1$, $\lim(1+x_n) = 1+\lim x_n = 1$, то по теореме 5.5 (о сжатой переменной) получаем $\lim\sqrt[p]{1+x_n} = 1$. ▲

Пример 5.11. Найти предел последовательности (x_n), если

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Δ Для нахождения предела оценим величину x_n снизу и сверху:

$$x_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \text{ и } x_n \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le 1.$$

Следовательно,

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1$$

(мы воспользовались теоремой о сжатой переменной и результатом примера 5.10).

Ошибочным было бы следующее рассуждение: так как предел каждого слагаемого

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 0 \left(\text{это следует из неравенства } 0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{1}{n}\right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0+0+\ldots+0 = 0.$$

Ошибка заключается в том, что мы не имели права применять здесь теорему о пределе суммы последовательностей, поскольку эта теорема справедлива для любого фиксированного числа слагаемых, а у нас их число неограниченно возрастает. ▲

Заметим, что аналогичная ошибка может возникнуть и при некорректном применении теоремы о пределе произведения последовательностей. Например, нельзя поступать следующим образом:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1=1.$$

Ведь для любого n

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1+n\frac{1}{n}=2$$

(мы воспользовались неравенством Бернулли), следовательно, по теореме 5.4

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 2.$$

Указанный предел будет рассмотрен далее (см. раздел 5.4).

Вся трудность в применении теоремы 5.5 для исследования сходимости заданной последовательности (z_n) сводится к нахождению двух последовательностей (x_n) и (y_n), стремящихся к одному и тому же пределу и удовлетворяющих условию $x_n\leq z_n\leq y_n$. Во многих случаях при построении искомых последовательностей (x_n) и (y_n) весьма полезной оказывается формула бинома Ньютона (1.3).

Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 5.12. Доказать, что $\lim\frac{n}{2^n}=0.$

Δ Оценим снизу величину 2^n. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\ldots+1>\frac{n(n-1)}{2}$$

(мы ограничились лишь одним слагаемым в правой части равенства и учли, что все слагаемые в разложении бинома положительны).

Заменяя знаменатель дроби $\frac{n}{2^n}$ на меньшую величину $\frac{n(n-1)}{2}$, получим $\forall n>1$ неравенство $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$.

Осталось применить теорему о сжатой переменной. ▲

Аналогичным образом легко показать, что $\lim\frac{n^2}{2^n}=0,$ поскольку

$$\forall n\ge 3\ \ 0<\frac{n^2}{2^n}<\frac{3!n^2}{n(n-1)(n-2)}=\frac{3!}{(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)}$$

(мы взяли в разложении $(1+1)^n$ по формуле бинома Ньютона лишь одно (четвертое) слагаемое).

Подобным образом доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{2^n}=0\ \ \forall p.$$

Более сильный результат

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0\ \ \forall a>1,\ \forall p$$

можно получить по той же схеме, представив a^n в виде $a^n=(1+\alpha)^n$ $(\alpha>0)$ и воспользовавшись формулой бинома Ньютона.

Последнее утверждение

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n}=0\right)$$

особенно эмоционально воспринимается начинающими при конкретном выборе постоянных a и p. Например, равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1000...0}}{(1{,}000...01)^n}=0,$$

где многоточие заменяет любое количество нулей, всегда вызывает у первокурсников недоумение, поскольку при начальных значениях n члены последовательности возрастают и становятся «очень большими» по величине.

Пример 5.13. Доказать, что $\lim\sqrt[n]{a}=1$ при любом $a>0$.

Δ Рассмотрим сначала случай $a>1$. Тогда $\sqrt[n]{a}>1\ \forall n,$ следовательно, $\exists\alpha_n>0$ такое, что $\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n.$ Возводя обе части последнего равенства в n-ю степень, будем иметь

$$a=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+...+\alpha_n^n>1+n\alpha_n.$$

Из полученного неравенства следует, что $\alpha_n<\frac{a-1}{n}\ \forall n.$ Таким образом,

$$1<\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n<1+\frac{a-1}{n}.$$

Поскольку $\dfrac{a-1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то по теореме о сжатой переменной получаем, что $\sqrt[n]{a} \to 1$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда $\exists b > 1$ такое, что $a = \dfrac{1}{b}$. Следовательно,

$$\lim \sqrt[n]{a} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{b}} = 1,$$

так как $\lim \sqrt[n]{b} = 1$ по доказанному выше. ▲

Может возникнуть вопрос, нельзя ли решение примера 5.13 оформить следующим образом:

$$\lim \sqrt[n]{a} = \lim a^{\frac{1}{n}} = a^{\lim \frac{1}{n}} = a^0 = 1.$$

Такое решение вполне корректно, если предварительно доказать, что символ lim можно перенести в показатель $\lim a^{\frac{1}{n}} = a^{\lim \frac{1}{n}}$. Мы же пока этого не доказывали.

5.3. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПРЕДЕЛОВ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

При рассмотрении пределов суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей (x_n) и (y_n) (теорема 5.6) предполагалось, что обе указанные последовательности сходятся, причем (в случае частного) предел знаменателя отличен от нуля. Остались без внимания ситуации, когда по крайней мере одна из последовательностей, составляющих арифметическую комбинацию, является бесконечно большой или, если речь идет о частном $\dfrac{x_n}{y_n}$, $\lim y_n = 0$. В указанных случаях упомянутая выше теорема 5.6 не применима и вычисление предела комбинаций $(x_n + y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ зачастую представляет собой значительную трудность. Например, если (x_n) и (y_n) являются бесконечно малыми последовательностями, то о пределе их отношения $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ нельзя сделать никакого общего заключения, не зная характера изменения величин x_n и y_n. Отношение двух бесконечно малых последовательностей может быть бесконечно малой, бесконечно большой последовательностью, может иметь пределом число, отличное от нуля, а может и вовсе не иметь предела. В связи с этим говорят, что отношение $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ при $x_n \to 0$ и $y_n \to 0$ представляет собой *неопределенность* вида $\dfrac{0}{0}$. Аналогично определяются неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$. Существуют еще другие неопределенности, связанные с рассмотрением степеней: 0^0, ∞^0, 1^∞. В дальнейшем мы укажем эффективные методы для вычисления соответствующих пределов, иначе говоря, для *раскрытия* таких неопределенностей.

Перечислим в таблице особые случаи вычисления пределов от арифметических комбинаций, которые не вызывают трудностей, хотя теорему 5.6 применить нельзя.

1	2	3
№ п/п	Особые случаи	Символическая запись
1	$x_n \to a, \quad y_n \to \infty \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} \to 0$	$\dfrac{a}{\infty} = 0$
2	$x_n \to \infty, \quad y_n \to a \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$	$\dfrac{\infty}{a} = \infty$
3	$x_n \to \infty, \quad y_n \to 0 \Rightarrow \dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$	$\dfrac{\infty}{0} = \infty$
4	$x_n \to \infty, \quad y_n \to \infty \Rightarrow x_n \cdot y_n \to \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$
5	$x_n \to a \neq 0, \quad y_n \to \infty \Rightarrow x_n \cdot y_n \to \infty$	$a \cdot \infty = \infty$
6	$x_n \to a, \quad y_n \to \infty \Rightarrow (x_n + y_n) \to \infty$	$a + \infty = \infty$
7	$x_n \to +\infty, \quad y_n \to +\infty \Rightarrow (x_n + y_n) \to +\infty$	$+\infty + (+\infty) = +\infty$
8	$x_n \to -\infty, \quad y_n \to -\infty \Rightarrow (x_n + y_n) \to -\infty$	$-\infty + (-\infty) = -\infty$

Подчеркнем важное обстоятельство: выражения, записанные в стб. 3 таблицы, не следует рассматривать как выражения численных равенств (∞ не число); это просто *символические* равенства, под которыми понимают соотношения, указанные в стб. 2.

Рассмотрим на примерах наиболее типичные приемы раскрытия неопределенностей.

Пример 5.14. Найти $\lim x_n$, если x_n равно:

а) $\dfrac{1+n^7+2^n}{n+2^{n+1}}$; б) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$; в) $n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$; г) $\sqrt{(n+1)(n+2)}-n$.

Δ а) $\lim\dfrac{1+n^7+2^n}{n+2^{n+1}}$ является неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия поделим числитель и знаменатель дроби на самое быстро растущее слагаемое 2^{n+1}. Тогда

$$\lim\frac{1+n^7+2^n}{n+2^{n+1}}=\lim\frac{\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{n^7}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{n}{2^{n+1}}+1}=\frac{1}{2}$$

$\left(\text{мы использовали известный предел } \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{a^n}=0\ \ \forall a>1,\ \forall p\right)$.

б) В данном случае $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Перенося иррациональность из числителя в знаменатель, а из знаменателя в числитель, имеем

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

(полученная после преобразования неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ легко раскрывается путем деления числителя и знаменателя на n).

в) $\lim n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$ является неопределенностью вида $0\cdot\infty$. Умножив и разделив x_n на сумму $\sqrt{n^3+3}+n$, мы придем к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается приемом, изложенным в пункте а):

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)=\lim\frac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n}=\lim\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}+1}=\frac{3}{2}.$$

г) В данном случае $\lim\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)$ представляет собой неопределенность вида $\infty-\infty.$ Для раскрытия этой неопределенности поступаем так, как и в пункте в):

$$\lim\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)=\lim\frac{(n+1)(n+2)-n^2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=$$

$$=\lim\frac{3n+2}{\sqrt{(n+1)(n+2)}+n}=\frac{3}{2}.\ \blacktriangle$$

5.4. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность (x_n) называется *невозрастающей* (*неубывающей*), если $x_{n+1}\le x_n$ $(x_{n+1}\ge x_n)$ $\forall n.$ Если $\forall n$ выполняются строгие неравенства $x_{n+1}<x_n$ $(x_{n+1}>x_n),$ то последовательность называют *убывающей* (*возрастающей*).

Все такие последовательности называют *монотонными*, а возрастающие и убывающие − *строго монотонными.*

Теорема 5.7 (Вейерштрасса). *Всякая неубывающая* (*невозрастающая*) *последовательность* (x_n), *ограниченная сверху* (*снизу*), *сходится, причем* $\lim x_n=\sup\{x_n\}$ $(\lim x_n=\inf\{x_n\})$.

Поскольку неубывающая последовательность всегда ограничена снизу (невозрастающая – сверху) своим первым членом, а любая сходящаяся последовательность является ограниченной, значит, теореме Вейерштрасса можно придать следующий вид: *для того чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной.*

Заметим, что ограниченность произвольной последовательности является лишь необходимым условием ее сходимости, но не является достаточным (например, $x_n=(-1)^n$).

Доказано, что последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей и ограниченной сверху $(x_n<3),$ следовательно, существует $\lim x_n$, который по предложению Л. Эйлера принято обозначать буквой e:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}\quad (e=2{,}718\,281\,828\,4...).$$

Отметим следующий интересный факт: в отличие от возрастающей последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ последовательность $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ является убывающей.

Хотя теорема Вейерштрасса и не дает практических рекомендаций для отыскания предела последовательности, однако во многих случаях именно установление факта сходимости последовательности позволяет найти ее предел. Подтвердим сказанное примерами.

Пример 5.15. Доказать сходимость последовательности $x_n = \frac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$ и найти ее предел.

Δ Поскольку

$$x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!}\frac{a}{n+1} = \frac{a}{n+1}x_n,$$

то при $n > a-1$ последовательность (x_n) становится убывающей. Кроме того, она ограничена снизу $(x_n > 0\ \forall n)$, а тогда по теореме Вейерштрасса существует $\lim x_n = c.$ Перейдя к пределу в равенстве $x_{n+1} = \frac{a}{n+1}x_n$, получим $c = 0\cdot c.$ Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0). \ \blacktriangle$$

Аналогичным образом легко показать (мы это продемонстрировали ранее другим способом), что $\forall p \in \mathbb{N}$ и $a > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^p}{a^n} = 0.$

Пример 5.16. Найти предел последовательности (x_n), заданной рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $x_1 = \sqrt{a}$ $(a > 0)$.

Δ Рассматриваемую последовательность можно записать в следующем виде:

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a+\sqrt{a}},\ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots,\ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}},\ \ldots .$$

Очевидно, что (x_n) возрастает. Из условия $x_n < x_{n+1}$ получим:

$$x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+x_{n+1}} \ \text{ или } \ x_{n+1}^2 - x_{n+1} - a < 0.$$

Решив последнее неравенство, найдем, что $\forall n$

$$x_{n+1} < \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right).$$

Таким образом, доказано, что данная последовательность возрастает и ограничена сверху, следовательно, существует $\lim x_n = c$. Для нахождения c перейдем к пределу в рекуррентном соотношении $x^2{}_{n+1} = a + x_n$. Получим $c^2 = a + c$, или $c = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4a}\right)$. Из условия $x_n \geq \sqrt{a}\ \forall n$ следует, что $\lim x_n \geq \sqrt{a}$. Таким образом,

$$\lim x_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4a}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 5.17. Найти $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n+3}$.

Δ Здесь мы воспользуемся известным пределом

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e,$$

или, что то же самое при $n \geq 2$,

$$\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$

Элементарными преобразованиями получим:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n+3} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+3} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-2n-3} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-2n-3} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n+3}}.$$

Найдем предел знаменателя полученной дроби:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{2n+3} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{5}\right] = e\cdot e\cdot 1 = e^2.$$

Следовательно,

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n+3} = e^{-2}. \ \blacktriangle$$

Число e находит широкое применение во многих практических вопросах. В частности, оно принято за основание так называемых *натуральных логарифмов*, которые в силу особых свойств числа e имеют более широкое применение в математическом анализе, чем десятичные логарифмы (обозначение натуральных логарифмов: $\log_e x = \ln x$). Для любого $x > 0$ имеем $\lg x = \ln x \cdot \lg e$, или $\lg x = M \cdot \ln x$, где модуль перехода

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,294\ldots .$$

Пример 5.18. Во сколько раз увеличится население страны за 200 лет, если оно возрастает ежегодно на 1 %?

Δ Пусть A есть первоначальное число жителей. Очевидно, что через год их будет

$$A + A\frac{1}{100} = A\left(1 + \frac{1}{100}\right);$$

через два года

$$A\left(1+\frac{1}{100}\right) + A\left(1+\frac{1}{100}\right)\frac{1}{100} = A\left(1+\frac{1}{100}\right)^2;$$

через три года:

$$A\left(1+\frac{1}{100}\right)^2 + A\left(1+\frac{1}{100}\right)^2\frac{1}{100} = A\left(1+\frac{1}{100}\right)^3 \text{ и т. д.}$$

Легко видеть, что через 200 лет число жителей будет равно $A\left(1+\frac{1}{100}\right)^{200}$, т. е. увеличится в $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{200}$ раз.

Найдем приближенное значение полученной величины.

Поскольку $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$ то при больших значениях n можно записать приближенное равенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx e,$ и, чем больше n, тем точнее становится это равенство. Например, при $n = 10\,000$ величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ совпадает с числом e до четырех десятичных знаков*.

---

*Первые таблицы логарифмов были составлены в XVII в. швейцарским математиком Й. Бюрги, который принял за основание логарифмов число $\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000}$.

В нашем случае (при $n = 100$) будем иметь

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{200} = \left[\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}\right]^2 \approx e^2.$$

Таким образом, за 200 лет население страны увеличится примерно в e^2 раз. ▲

Полным аналогом примера 5.18 является следующая задача на сложные проценты.

Какую сумму x рублей получит за t лет вкладчик, внесший в банк первоначальный взнос A рублей под p % годовых, если при каждом начислении процентов в новом году расчет ведется с нарастающей суммы, т. е. с денег, когда к первоначальному взносу прибавляются p % годовых?

Легко подсчитать, что

$$x = A\left(1+\frac{p}{100}\right)^t = A\left[\left(1+\frac{1}{\frac{100}{p}}\right)^{\frac{100}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}} \approx Ae^{\frac{pt}{100}}.$$

5.5. ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРИНЦИП ВЫБОРА

Если из последовательности (x_n) выбрать бесконечное множество элементов с номерами $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,$ то получим новую последовательность

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots,$$

которую называют *подпоследовательностью* исходной последовательности и обозначают кратко $\left(x_{n_k}\right)$. Порядковый номер члена подпоследовательности определяется числом k.

Теорема 5.8. *Если последовательность* (x_n) *сходится и* $\lim x_n = a$, *то любая ее подпоследовательность* $\left(x_{n_k}\right)$ *будет также сходиться, причем* $\lim x_{n_k} = a$.

Расходящаяся же последовательность может содержать сходящиеся подпоследовательности, а может и не содержать таких подпоследовательностей. Справедлива следующая теорема, называемая *принципом выбора*.

Теорема 5.9 (Больцано – Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Теорему 5.8 весьма удобно использовать для доказательства расходимости последовательностей. Чтобы доказать, что данная последовательность расходится, достаточно построить две ее подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам.

Пример 5.19. Доказать расходимость последовательности

$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \ \dots \ + (-1)^{n+1}\frac{n}{n}.$$

Δ Рассмотрим две подпоследовательности этой последовательности (x_{2n}) и (x_{2n+1}). Легко видеть, что:

а) $x_{2n} = \left(\frac{1}{2n} - \frac{2}{2n}\right) + \left(\frac{3}{2n} - \frac{4}{2n}\right) + \dots + \left(\frac{2n-1}{2n} - \frac{2n}{2n}\right) = -\frac{n}{2n} = -\frac{1}{2};$

б) $x_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} + \frac{3}{2n+1} - \frac{4}{2n+1} + \dots - \frac{2n}{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+1} =$

$$= \frac{1}{2n+1} + \left(\frac{3}{2n+1} - \frac{2}{2n+1}\right) + \left(\frac{5}{2n+1} - \frac{4}{2n+1}\right) + \dots + \left(\frac{2n+1}{2n+1} - \frac{2n}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Очевидно, что $\lim x_{2n} = -\frac{1}{2}$, а $\lim x_{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Из исходной последовательности выделяются две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам, поэтому (x_n) расходится. ▲

Определение 5.6. Число a называют ***частичным пределом*** (***предельной точкой***) последовательности (x_n), если из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к a.

Из теорем 5.8 и 5.9 следует:

а) всякая сходящаяся последовательность имеет только один частичный предел, совпадающий с пределом последовательности;

б) всякая ограниченная последовательность имеет по крайней мере один частичный предел.

Определение 5.7. Наибольший (наименьший) частичный предел ограниченной сверху (снизу) последовательности (x_n) называют ***верхним*** (***нижним***) пределом этой последовательности и обозначают $\overline{\lim}\, x_n$ ($\underline{\lim}\, x_n$).

Если последовательность (x_n) сходится, то $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim x_n$. Если (x_n) не ограничена сверху (снизу), то принято считать $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ $(\underline{\lim}\, x_n = -\infty)$.

Пример 5.20. Найти верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \sin n^0$.

Δ Очевидно, что последовательность состоит только из чисел

$$0,\ \pm\sin 1^0,\ \pm\sin 2^0, \ldots,\ \pm\sin 89^0,\ \pm 1,$$

каждое из которых встречается бесконечно много раз. Поэтому все эти числа (всего их 181) будут частичными пределами (x_n). А тогда

$$\overline{\lim}\, x_n = 1,\ \underline{\lim}\, x_n = -1.$$

Заметим, что мы попутно доказали расходимость последовательности (x_n). ▲

5.6. ПРИНЦИП СХОДИМОСТИ (КРИТЕРИЙ БОЛЬЦАНО – КОШИ)

При изучении последовательности на сходимость можно воспользоваться определением предела. Однако, как указывалось ранее, с помощью определения можно лишь убедиться в том, является ли данное число пределом последовательности или нет. Таким образом, чтобы установить сходимость последовательности по определению предела, нужно сначала его (этот предел) угадать. Возникает вопрос: существуют ли признаки сходимости последовательности, не опирающиеся на знание ее предела? Иначе говоря, можно ли сделать заключение о существовании предела на основании рассмотрения только самой последовательности?

Ранее (теорема 5.7) получен положительный ответ на поставленные вопросы в частном случае, когда последовательность (x_n) монотонна (напомним, что для сходимости монотонной последовательности необходимо и достаточно ее ограниченности). В общем случае ответ на поставленные вопросы дает теорема, установленная Б. Больцано (1817) и О. Л. Коши (1821), которую называют *принципом сходимости.*

Формулировке теоремы предпошлем следующее определение.

Определение 5.8. Последовательность (x_n) называется ***фундаментальной*** или ***удовлетворяющей условию Коши***, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon.$$

В связи со сказанным выше важно подчеркнуть следующее обстоятельство: принципиальная разница между определением сходящейся последовательности и определением фундаментальной последовательности состоит в том, что в первое определение в явном виде входит предел, в то время как во второе определение он явно не входит.

Теорема 5.10 (критерий Больцано – Коши). *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Пример 5.21. Доказать сходимость последовательности (x_n), где

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}.$$

Δ В силу критерия достаточно показать фундаментальность последовательности. Для этого оценим разность $\left|x_{n+p} - x_n\right|$:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|x_{n+p} - x_n\right| < \dfrac{1}{n+1}$. Неравенство $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ выполняется для $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \varepsilon^{-1} : \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ▲

Пример 5.22. Доказать расходимость последовательности (x_n), где

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Δ В силу критерия Больцано – Коши достаточно показать, что последовательность (x_n) не является фундаментальной, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \mathrm{N}\ \exists n > N\ \exists p \in \mathbb{N} : \Rightarrow \left|x_{n+p} - x_n\right| \ge \varepsilon.$$

Для этого оценим снизу разность $\left|x_{n+p} - x_n\right|$:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \ge \frac{p}{n+p} \quad \forall n,\ p \in \mathbb{N}.$$

(чтобы получить неравенство, мы заменили все слагаемые на самое малое).

В частности, при $p = n$ будем иметь

$$\left|x_{2n} - x_n\right| \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \;\; \forall n.$$

Выберем теперь $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$. Тогда $\forall N$ найдутся $n > N$ и $p \in \mathbb{N}$ (мы можем взять любое $n > N$ и $p = n$) такие, что

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_{2n} - x_n\right| \geq \frac{1}{2} > \varepsilon = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, последовательность (x_n) не является фундаментальной. ▲

5.7. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА СХОДИМОСТЬ

Исследование последовательностей на сходимость и нахождение пределов является весьма трудной задачей. Для каждой конкретной последовательности (x_n) стараются найти метод решения, учитывающий характер поведения величин x_n. Выбор оптимального пути во многом определяется опытом, который приобретается в процессе рассмотрения возможно большего числа примеров. В общем случае при исследовании последовательностей на сходимость применяют:

а) определение предела последовательности, предварительно угадав его;

б) арифметические свойства сходящихся последовательностей и теорему о сжатой переменной (см. раздел 5.2);

в) известные приемы раскрытия неопределенностей (см. раздел 5.3). Заметим, что для раскрытия неопределенностей существуют эффективные методы (правило Лопиталя – Бернулли, формула Тейлора), которые будут изложены далее;

г) теорему о сходимости (или расходимости) монотонной последовательности, если исследуемая последовательность монотонна (см. раздел 5.4);

д) для доказательства расходимости последовательности достаточно показать ее неограниченность, в противном случае достаточно построить две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам;

е) если все перечисленные приемы не дают результата, то пробуют применить критерий Больцано – Коши (см. раздел 5.6). Указанный критерий применим к любой последовательности, однако практическое его использование сопряжено со значительными трудностями, ибо оценку $\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$ надо получить для всех p одновременно;

ж) следующие часто встречающиеся сходящиеся последовательности:

1) если $x_n \geq 0\ \forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^p = 0\ \forall p>0$;

2) если $x_n \geq -1\ \forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+x_n} = 1\ \forall p \in \mathbb{N}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\ \forall a>0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0,\ |q|<1$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0\ \ \forall a>1, \forall p$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n^\alpha} = 0\ \ \forall a>1, \forall \alpha>0$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0\ \ \forall a$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$;

11) если $x_n = \dfrac{a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_k}$ $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0)$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{ если } m=k, \\ 0, \text{ если } m<k, \\ \pm\infty, \text{ если } m>k \ \left(\text{знак совпадает со знаком } \dfrac{a_0}{b_0}\right). \end{cases}$$

Замечание 5.4. Последовательности $\log_a n,\ n^p,\ a^n,\ n!$ являются бесконечно большими при $p>0,\ a>1$. Из соотношений 6) – 8) следует, что

$$\log_a n \ll n^p \ll a^n \ll n!,$$

иначе говоря, $\log_a n$ растет медленнее, чем любая степень n^p; любая степень n^p растет медленнее, чем показательная функция a^n; любая показательная функция a^n растет медленнее, чем $n!$.

Задачи для самостоятельной работы

5.1. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом:

а) $x_{m+n} = x_m + x_n + m \cdot n,\ x_1 = 1;$

б) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n.$

5.2. Доказать ограниченность последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i} k;$ б) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}.$

5.3. Доказать неограниченность последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!};$ б) $x_n = \sqrt{n^4 + n^3 - 1} - \sqrt{n^4 - n^3 + 1}.$

5.4. Доказать, что предел сходящейся последовательности не зависит от порядка ее элементов, иначе говоря, если у сходящейся последовательности произвольно переставить члены, то полученная последовательность будет также сходиться и иметь тот же предел, что и исходная последовательность.

5.5. Определить, верны ли следующие утверждения:

а) для того чтобы последовательность (x_n) была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(|x_n|)$ была бесконечно малой;

б) для того чтобы последовательность (x_n) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(|x_n|)$ была сходящейся.

5.6. Зная, что $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0,$ доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i} = 0.$

5.7. Пусть дано m положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_m.$ Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n}$ сходится, и найти ее предел.

5.8. Найти $\lim x_n,$ если:

а) $x_n = \left(32 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{5}};$

б) $x_n = \dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}};$

в) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^2+2n} - n - 1};$

г) $x_n = \sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)} - n;$

д) $x_n = n\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}} - 1\right);$

е) $x_n = \sqrt[2n]{0{,}55};$

ж) $x_n = \sqrt[n]{n^4 + 3n}$; л) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

з) $x_n = \dfrac{n^2 + 3^n}{2n + 3^{n+1}}$; м) $x_n = \left(\dfrac{2^n + 1}{2^n + 3}\right)^n$;

и) $x_n = \dfrac{(-3)^n}{(n+1)!}$; н) $x_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

к) $x_n = \dfrac{n \lg n}{n\sqrt{n} + 1}$; о) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

5.9. Пусть $\nu(n)$ обозначает число различных простых множителей числа n. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\nu(n)}{n} = 0$.

5.10. Доказать сходимость последовательности $x_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k}$ и показать, что $\dfrac{1}{2} \le \lim x_n \le 1$.

5.11. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} \dfrac{1}{k^2} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n + k}} = +\infty$.

5.12. Доказать сходимость следующих последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; б) $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \sin^2 k$; в) $x_n = \dfrac{n}{\ln(n!)}$.

5.13. Доказать, что монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится хотя бы одна ее подпоследовательность.

5.14. Доказать следующее достаточное условие сходимости последовательности (признак Даламбера): если члены последовательности $x_n \ne 0\ \forall n$ и $\lim \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = r$, то $\lim x_n = 0$ при $r < 1$, а при $r > 1$ – $\lim x_n = \infty$. Используя признак Даламбера, доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0$ $\left(|a| > 1, \forall p\right)$.

5.15. С помощью критерия Коши доказать, что если последовательность $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Верно ли обратное утверждение?

5.16. Пользуясь критерием Коши, исследовать сходимость последовательностей:

а) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k!}{2^k}$; б) $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$.

5.17. Указать верхний и нижний пределы последовательности (x_n), а также $\sup\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\}$, если $x_n = \frac{\left((-1)^n - 1\right)n^2 + n + 1}{n}$.

Ответы и указания

5.1. а) $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$; б) $x_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}$. **5.5.** а) да; б) нет. **5.7.** $\lim x_n = \max\{a_1, a_2, ..., a_m\}$. **5.8.** а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) 1; г) 2; д) $\frac{2}{3}$; е) 1; ж) 1; з) $\frac{1}{3}$; и) 0; к) 0; л) 1; м) 1; н) 0; о) 0. **5.15.** нет. **5.17.** $\overline{\lim}\, x_n = 1$; $\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}$; $\underline{\lim}\, x_n = \inf\{x_n\} = -\infty$.

Глава 6
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

6.1. ФУНКЦИИ

Главный объект математического анализа – функции (преобразования, отображения).

Определение 6.1. Пусть даны два множества A и B. Будем говорить, что задана ***функция f*** с ***областью определения A*** (функция на A), если каждому элементу x множества A соответствует единственный элемент y множества B (множество всех таких элементов y из B называют ***множеством значений функции*** или ***образом множества A***). Элемент $x \in A$ называется ***независимой переменной*** (***аргументом***), а $y \in B$ – ***зависимой переменной*** (***значением функции***). Образ множества A обозначают символом $f(A)$ (говорят, что функция преобразует множество A на множество $f(A)$). Обозначения для функции:

$$y = f(x),\ f : A \to B,\ x \mapsto f(x).$$

Определение 6.2. Функция называется ***накрытием*** (***сюръекцией***), если $f(A) = B$. Функция называется ***вложением*** (***инъекцией***), если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Функция $f : A \to B$ называется ***взаимно однозначной*** (***биекцией***), если она одновременно является сюръекцией и инъекцией.

Взаимно однозначные функции удобны во многих отношениях. Например, для таких функций существует *обратная* функция $f^{-1} : B \to A$ такая, что $\forall x \in A(f^{-1}(f(x)) = x)$ и $\forall y \in B(f(f^{-1}(y)) = y)$.

Определение 6.3. Пусть даны две функции $f : A \to B$ и $g : B \to C$ $\big(f(x) = y,\ g(y) = z\big)$. Определим новую функцию $g \circ f : A \to C,$ которую будем называть ***композицией*** (***сложной функцией*** или ***суперпозицией***) функций f и g, где по определению полагаем $(g \circ f)(x) = g(f(x)).$

Нас будут интересовать только числовые функции. Поэтому везде в этой и следующей главах мы придерживаемся обозначений

$$A \subset \mathbb{R};\ f : A \to \mathbb{R};\ \delta > 0, \varepsilon > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел или числовая прямая.

Если

$$A_1 \subset A,\ f_1 : A_1 \to \mathbb{R},\ \forall x \in A_1 \left(f_1(x) = f(x) \right),$$

то функция f_1 называется *сужением функции f* на множество A_1. Функции $f : A \to \mathbb{R}$ называют *действительными* (*вещественными*) функциями *действительного* (*вещественного*) *переменного* (далее просто функции).

Будем предполагать еще, что множество A не имеет изолированных точек (точка множества A называется изолированной, если есть интервал, не содержащий ни одной отличной от нее точки из множества A).

Рассмотрим сужение синуса

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \to [-1;1],\ f(x) = \sin x.$$

Тогда эта функция будет биекцией и обратимой функцией, так как при любых $b \in [-1;1]$ есть единственное решение уравнения $\sin x = b.$ Обратной функцией в этом случае будет

$$f^{-1} : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right],\ f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

Для косинуса принято выбирать обратимое сужение

$$f : [0;\pi] \to [-1;1],\ f(x) = \cos x,$$

и обратной функцией теперь будет

$$f^{-1} : [-1;1] \to [0;\pi],\ f^{-1}(x) = \arccos x.$$

Если рассмотреть сужение тангенса

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x,$$

то эта функция будет обратимой и получится

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right),\ f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Определение 6.4. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется ***строго возрастающей*** на множестве X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

строго убывающей на X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

возрастающей (***неубывающей***) на X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2);$$

убывающей (***невозрастающей***) на X, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2).$$

Любую из указанных функций называют ***монотонной*** на множестве X.

6.2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ. ОКРЕСТНОСТИ

Главный инструмент математического анализа – разные виды предельного перехода.

Определение 6.5. Пусть A – числовое множество и a является точкой на числовой прямой. Точка a называется ***предельной для множества*** A, если найдется последовательность (x_n) такая, что $x_n \to a$, $x_n \ne a$, $x_n \in A$.

Определение 6.6. Рассмотрим два символа $+\infty$ и $-\infty$ (***бесконечно удаленные точки***). Символ $+\infty$ ($-\infty$) называется ***предельной точкой множества A***, если найдется последовательность (x_n) такая, что $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$), $x_n \in A$.

Пример 6.1. Δ Пусть $A = (-1,0) \cup (0,1)$, тогда все предельные точки множества A образуют отрезок [0;1]. Отметим, что некоторые предельные точки не принадлежат множеству A. ▲

Пример 6.2. Δ Если $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, то у множества A единственная предельная точка $+\infty$. ▲

Определение 6.7. Множество $U_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\}$ называется **δ-*окрестностью*** точки a (***окрестность*** точки a). Множество $U_\delta(a) \cap A = U_\delta^A(a)$ называется **δ-окрестностью** точки a в множестве A (***окрестность*** точки a в множестве A).

Определение 6.8. Множество $\dot{U}_\delta(a) = \{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ называется ***проколотой*** **δ-*окрестностью*** точки a (***проколотая окрестность*** точки a). Множество $\dot{U}_\delta(a) \cap A = \dot{U}_\delta^A(a)$ называется ***проколотой*** **δ-*окрестностью*** точки a в множестве A (***проколотая окрестность*** точки a в множестве A).

Определение 6.9. Для бесконечно удаленных точек определим аналогичные окрестности:

$$\dot{U}_\delta(+\infty) = \{x : x > \delta\}; \dot{U}_\delta(-\infty) = \{x : x < -\delta\}; \dot{U}_\delta(\pm\infty) \bigcap A = \dot{U}_\delta^A(\pm\infty).$$

Пример 6.3. Δ Пусть $A = [0;10]$, $a = 0$, $\delta = 1$, тогда $U_\delta^A(a) = [0;1)$. ▲

6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО КОШИ

Сформулируем одно из важнейших понятий математического анализа.

Определение 6.10. Пусть a – предельная точка множества A (возможны также $+\infty$ и $-\infty$). Число α называется ***пределом*** (***по Коши***) ***функции f в точке a***, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x из окрестности $\dot{U}_\delta^A(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ (в этом случае говорят также, что функция f имеет предел α в точке a). Переводя это определение на язык математической логики, получим утверждение:

$$\exists\alpha \in \mathbb{R}\,\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x\left(x \in \dot{U}_\delta^A(a) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon\right). \qquad (6.1)$$

Обозначения: а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$; б) $f(x) \to \alpha$, при $x \to a$.

Если в определении предела ошибочно написать не тот квантор, то получится другое определение нового понятия. Например,

$$\forall\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\forall x\left(x \in \dot{U}_\delta^A(a) \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon\right).$$

Такому определению будут соответствовать только постоянные в любой проколотой окрестности точки a функции $\left(f(x) \equiv \text{const},\ x \neq a\right)$.

З а м е ч а н и е 6.1. При внимательном изучении определения предела для конечной предельной точки можно сделать любопытные выводы. Важны два момента: а) необходимо решить неравенство $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ с положительным параметром ε относительно x; б) множество решений должно содержать объединение двух интервалов $a < x < \delta + a$ и $a - \delta < x < a$.

Назовем число ε *погрешностью* (при вычислении α с помощью $f(x)$), а $\delta = \delta(\varepsilon)$ – *допуском*, задающим границы интервалов, которые обеспечивают нужную погрешность ε. Если для погрешности ε_0 найден допуск δ_0, то для $\varepsilon > \varepsilon_0$ годится уже найденный допуск $\delta = \delta_0$. По этой причине в определении вместо неравенства $\varepsilon > 0$ можно писать неравенство $0 < \varepsilon < 1$ или $0 < \varepsilon < 0{,}01$, и получится равносильное определение.

Пусть M – некоторое положительное число и для всех $\varepsilon > 0$ найден допуск $\delta = \delta(\varepsilon)$. Тогда для погрешности $M\varepsilon$ годится допуск $\delta = \delta(M\varepsilon)$.

Поэтому не будет ошибкой, если в определении вместо неравенства $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$ написать неравенство $|f(x)-\alpha|<M\varepsilon$. Более того, если $|f(x)-\alpha|<g(x)$ и неравенство $g(x)<\varepsilon$ имеет решение, содержащее объединение двух интервалов $(a-\delta;a)\cup(a;\delta+a)$, то это δ и будет нужным допуском. Понятие предела необходимо для описания изменяющегося процесса большой длительности (фактически бесконечного процесса). Здесь важна теоретическая возможность по убывающему числу ε находить число δ! Допустим, вы говорите $\varepsilon=1$, вам отвечают $\delta=0{,}5$. Потом вы называете $\varepsilon=0{,}1$ и слышите в ответ $\delta=0{,}15$. Этот процесс продолжается неограниченно долго (ε уменьшается, но остается положительным, а δ убывает).

Пример 6.4. Доказать, что

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0.$$

Δ Решать неравенство $\left|(x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right|<\varepsilon$ не просто, но легко увидеть, что

$$\left|(x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right|\le|x-1|\left|\sin\frac{1}{x-1}\right|\le|x-1|.$$

Полагаем $\delta=\varepsilon$. Если теперь $|x-1|<\delta=\varepsilon$, то и $\left|(x-1)\sin\frac{1}{x-1}\right|<\varepsilon$. ▲

Предел традиционно понимается как некая преграда (граница) к которой стремятся, но не достигают. С математической точки зрения это не совсем так. В примере 6.4 функция $f(x)=(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$ бесконечно много раз принимает значения больше и меньше нуля, а также значения равные нулю, при стремлении к пределу.

З а м е ч а н и е 6.2. Если функция f имеет предел α в точке a и функция g имеет предел β в точке a, то

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\alpha\pm\beta;\ \lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\alpha\beta;\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta},\ g(x)\ne 0.$$

З а м е ч а н и е 6.3. Запишем отрицание определения 6.10. Для этого надо в формуле (6.1) заменить каждый квантор на дополнительный $(\exists\leftrightarrow\forall)$, а утверждение в скобках – на его отрицание. Получим

$$\forall\alpha\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in\dot{U}_{\delta}^{A}(a):|f(x)-\alpha|\ge\varepsilon.$$

Если функции f и g не имеют предела, то их сумма может иметь предел. Например, функции $\sin^2 \frac{1}{x}$ и $\cos^2 \frac{1}{x}$ не имеют предела в нуле, а их сумма $\sin^2 \frac{1}{x} + \cos^2 \frac{1}{x} = 1$ – постоянная функция.

Определение 6.11. Будем писать $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \left(x \in \dot{U}_\delta^A(a) \Rightarrow f(x) > \varepsilon \right).$$

Пусть аналогично $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, когда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \left(x \in \dot{U}_\delta^A(a) \Rightarrow f(x) < -\varepsilon \right).$$

Пример 6.5. Δ Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \equiv \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -1, \ x < 0 \end{cases} \ A = \mathbb{R}.$$

Тогда эта функция не имеет предела в точке 0. Если $\alpha \geq 0,$ то можно взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $x_n = -\frac{1}{n}$. Тогда

$$\left| f(x_n) - \alpha \right| = \left| -1 - \alpha \right| = 1 + \alpha > \frac{1}{2}.$$

Если $\alpha < 0,$ то можно взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $y_n = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\left| f(y_n) - \alpha \right| = \left| 1 - \alpha \right| = 1 + |\alpha| > \frac{1}{2}.$$

Отметим, что x_n и y_n могут попасть в любую окрестность точки a. Заметим, что

$$\lim_{x\to 2} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to 1} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{sgn} x = 1; \quad \lim_{x\to -\infty} \operatorname{sgn} x = -1. \ \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 6.4. Полезно иметь в виду, что $|x| = x \operatorname{sgn} x$; $x = |x| \operatorname{sgn} x$.

Пример 6.6. Δ $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$, $A = \mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$. Поскольку $\forall x \in \dot{U}_\delta(0)$, $f(x) \equiv 1$. Поэтому можно брать любое δ. $\blacktriangle$

Отметим еще два предела.

Пример 6.7. Δ Из формулы бинома Ньютона следует неравенство $(1+1)^n > 1+n,\ n>1$. Тогда $2^x \ge 2^{[x]} > [x]+1 > x$ при $x > 1$. Значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$. Если $x < -1$, то $0 < 2^x < \dfrac{1}{|x|}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$. ▲

Определение 6.12. Функция f называется ***ограниченной*** на множестве A, если множество $f(A)$ ограничено, т. е. $\exists M > 0\ \forall x \in A : |f(x)| \le M$. Функция f называется ***локально ограниченной***, если она ограничена в некоторой окрестности точки a. Верхнюю (нижнюю) грань множества $f(A)$ называют ***верхней*** (***нижней***) ***гранью функции*** f и обозначают $\sup\limits_A f\,(\inf\limits_A f)$. Число $f(a_0),\ a_0 \in A,$ называется ***наибольшим*** (***наименьшим***) ***значением функции f***, если для всех $x \in A$ выполняется неравенство $f(a_0) \ge f(x)\ \big(f(a_0) \le f(x)\big)$. Соответственно, используются обозначения

$$f(a_0) = \max_A f \quad \Big(f(a_0) = \min_A f\Big).$$

У любой ограниченной функции f всегда существуют числа $\sup\limits_A f \left(\inf\limits_A f\right)$, а наибольших (наименьших) значений может и не быть. Например, у функции $f(x) = \sin x,\ A = \big(0, \pi/2\big)$ нет наибольшего и (наименьшего) значений, но $\sup\limits_A f = 1,\ \inf\limits_A f = 0$. Правда, если есть наибольшее (наименьшее) значение, то

$$\sup_A f = \max_A f,\ \inf_A f = \min_A f.$$

Определение 6.13. Функция f называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, то функцию будем называть ***бесконечно большой*** при $x \to a$.

Замечание 6.5. Полезно знать, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию является бесконечно малой.

Пример 6.8. Δ Пусть $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x},\ A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Поскольку $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| < 1$, то $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$. ▲

6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО ГЕЙНЕ

Определение 6.14. Множество $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\} \bigcup \{-\infty\}$ назовем ***расширенной числовой прямой***. Пусть $a \in \hat{\mathbb{R}}$ – предельная точка множества A. Будем говорить, что $\alpha \in \hat{\mathbb{R}}$ является ***пределом функции f в точке a*** (***по Гейне***), если для любой последовательности $x_n \to a, x_n \in A, x_n \neq a,$ предел последовательности $(f(x_n))$ равен α.

З а м е ч а н и е 6.6. Определение Коши и определение Гейне эквивалентны, т. е. определяют одно и то же понятие.

З а м е ч а н и е 6.7. Определение Гейне удобно использовать, когда надо доказать, что предел не существует. Требуется только найти две последовательности $x_n \to a, y_n \to a,$ чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$.

Пример 6.9. Пусть $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Показать, что предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Δ Возьмем

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ и } y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}.$$

Обе последовательности стремятся к нулю, но $f(x_n) = 0$, а $f(y_n) = 1$. Попутно отметим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \sin t$ не существует. ▲

6.5. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Определение 6.15. Предположим, что $(a-\gamma; a) \subset A$ для некоторого числа $\gamma > 0$. Тогда $\alpha \in \hat{\mathbb{R}}$ называется ***пределом слева*** функции f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, \big(x \in (a-\delta; a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\alpha)\big).$$

Обозначения: а) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \alpha$; б) $f(a-) = \alpha$.

Определение 6.16. Пусть $(a; a+\gamma) \subset A$ для некоторого числа $\gamma > 0$. Тогда $\alpha \in \hat{\mathbb{R}}$ называется ***пределом справа*** функции f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, \big(x \in (a; a+\delta) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\alpha)\big).$$

Обозначения: а) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\alpha$; б) $f(a+)=\alpha$.

Пределы из определений 6.15 и 6.16 называют ***односторонними*** пределами.

Пример 6.10. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$, $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Найти пределы справа и слева указанной функции в нуле.

Δ Если ввести новую переменную $t=\frac{1}{x}\to+\infty$, то из примера 6.7 получаем, что

$$\lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} 2^t = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} 2^t = 0.$$

В дополнение к примеру 6.5 отметим, что

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1; \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1. \ ▲$$

З а м е ч а н и е 6.8. Функция $f:(a-\gamma, a+\gamma)\to\mathbb{R}$ имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда $f(a+)=f(a-)$. При этом

$$f(a+)=f(a-)=\lim_{x\to a} f(x).$$

Задачи для самостоятельного решения

Доказать равенства:

6.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}=1/4.$

6.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+x^2}=1/3.$

6.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{\cos 5x-\cos 9x}=-\dfrac{7}{8}.$

6.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}=-\dfrac{7}{2}.$

6.5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{3}{x\sin 3x}\right)=-\dfrac{4}{3}.$

6.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-1}=1.$

6.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{3}{2}.$

6.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin x}=2.$

6.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} 2x-1}{\cos x-1}=-4.$

6.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5^x-1}=\dfrac{4}{\ln 5}.$

6.11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^{x}=\dfrac{1}{e}.$

6.12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)^{x}=0.$

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1-x}-x\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

6.14. Найти числа α и β, для которых функция $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-$ $-\alpha x-\beta$ будет бесконечно малой при $x\to-\infty$.

Ответы и указания

6.14. $\alpha=-1, \beta=-\dfrac{1}{2}.$

Глава 7
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

7.1. ТОЧКИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ТОЧКИ РАЗРЫВА

В этой главе a – предельная точка множества A.

Определение 7.1. Пусть $a \in A$. Функция $f : A \to \mathbb{R}$ называется ***непрерывной в точке а***, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \Big(x \in U_{\delta}^{A}(a) \Rightarrow \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon \Big).$$

З а м е ч а н и е 7.1. Рассмотрим отрезок $A = [\alpha;\beta]$. Если точка $a = \alpha$, то определение 7.1 равносильно наличию равенства

$$\lim_{x \to \alpha+} f(x) \equiv f(\alpha+) = f(\alpha).$$

В этом случае функцию называют *непрерывной справа* в точке a. Аналогично, непрерывность в точке $a = \beta$ называют *непрерывностью слева* в этой точке $\big(f(\beta-) = f(\beta) \big)$.

Определение 7.2. Функция f называется ***непрерывной на множестве А***, когда она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример 7.1. Δ Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ непрерывна во всех точках, кроме нуля. ▲

Определение 7.3. Если в точке a не выполняются условия определения 1, то будем говорить, что a есть ***точка разрыва*** функции f.

Определение 7.4. Пусть функция определена в проколотой окрестности точки разрыва a и существуют конечные пределы $f(a+)$, $f(a-)$. Точка a называется ***точкой разрыва первого рода*** функции f, если $f(a+) \neq f(a-)$. Когда $f(a+) = f(a-)$, точку a называют ***точкой устранимого разрыва***. Если один из пределов равен бесконечности или не существует, то a – ***точка разрыва второго рода***.

З а м е ч а н и е 7.2. Пусть дана некоторая функция. Будем смотреть на график функции в прямоугольное окно со сторонами, параллельными осям координат, так, чтобы всегда видеть данную точку графика в центре окна. Размер окна вдоль оси абсцисс назовем шириной, а вдоль оси ординат – высотой. Ширину и высоту окна можно менять. Если найдется окно заданной высоты, что при любой его ширине есть некоторая точка графика либо над окном, либо под ним, то данная точка будет точкой разрыва функции (некоторая точка находится над (под) окном, если эта точка вне окна и ее проекция вдоль оси ординат проходит через окно).

Пример 7.2. Δ Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ имеет в точке нуль разрыв первого рода. ▲

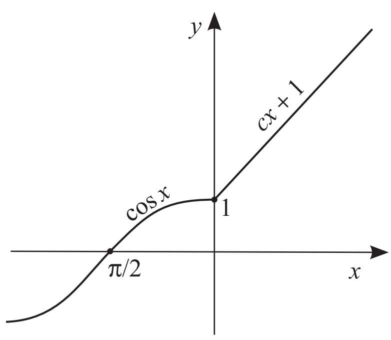
Пример 7.3. Δ Функция $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ имеет в точке нуль устранимый разрыв (см. пример 3.6). Если изменить значение в одной точке $\left(f(0) = 1\right)$, то функция станет непрерывной на числовой прямой (точка разрыва будет устранена). ▲

Пример 7.4. Δ Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ имеет в точке нуль разрыв второго рода (см. пример 3.9). Функция $\operatorname{tg} x$ имеет точки разрыва $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $\lim\limits_{x \to x_{k+}} \operatorname{tg} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_{k-}} \operatorname{tg} x = +\infty$. ▲

Пример 7.5. Δ Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, x \leq 0, \\ cx + d, x > 0. \end{cases}$$

Эта функция будет непрерывной только при d = 1. Поскольку $f(0-) = 1$, $f(0+) = d$ (рисунок). ▲



Пример 7.6. Δ Интересным примером будет функция

$$D(x)=\begin{cases}1, \ x\in\mathbb{Q},\\0, \ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

которая принимает два значения: 1, когда x – рациональное число, и 0, если x – иррациональное число. Эта функция является разрывной в любой точке вещественной прямой, потому что в каждой окрестности любой точки есть как рациональные числа, так и иррациональные. Такую функцию называют функцией Дирихле. Отметим, что функция $xD(x)$ будет непрерывной только в нуле, так как $|xD(x)|\le|x|$. ▲

Укажем на некоторые полезные свойства непрерывных функций.

Свойство 1 (*арифметическое свойство*). Арифметические операции (сложение, вычитание, умножение и деление) над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям. При делении $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ надо добавить (в точке непрерывности x_0) одно естественное ограничение $\big(g(x_0)\ne 0\big)$.

Если функции f и g разрывные на множестве A, то их сумма может быть непрерывной (достаточно взять $g(x)=-f(x)$). Когда одна функция f непрерывная, а другая g разрывная на множестве A, то их сумма будет разрывной, что легко получается, если предположить противное.

Свойство 2 (*непрерывность композиции*). Пусть X, Y, Z – промежутки. Рассмотрим две функции $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$. Допустим, что функция $f: X\to Y$ непрерывна в точке $a\in X$, а функция $g: Y\to Z$ непрерывна в точке $b=f(a)\in Y$. Тогда функция $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ непрерывна в точке a.

Свойство 3 (*сохранение знака непрерывной функции*). Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\ne 0$, то найдется окрестность $U_\delta(x_0)$, что для всех $x\in U_\delta(x_0)$ справедливо равенство

$$\operatorname{sgn} f(x)=\operatorname{sgn} f(x_0).$$

Свойство 4 (*теорема Вейерштрасса об ограниченности*). Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке найдутся точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Свойство 5 (*теорема о промежуточном значении*). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)\ne f(b)$. Тогда функция f принимает любое значение между $f(a)$ и $f(b)$.

З а м е ч а н и е 7.3. Особенно важны два последних свойства. Отметим, что обе теоремы справедливы для *непрерывных* функций на *отрезке*.

Пример функции $\left(f(x)=\dfrac{1}{x},\ A=(0;1]\right)$, непрерывной на полуинтервале дает неограниченную функцию. Если эту функцию доопределить в точке 0, то она будет задана на отрезке, но останется неограниченной, потому что она будет разрывной в нуле.

Напомним, что *промежутком* называют числовое множество на числовой прямой, которое вместе с любой парой своих точек содержит и отрезок, концами которого являются эти точки. Теорема о промежуточном значении утверждает, что образ промежутка непрерывной функции будет промежутком. Теорема Вейерштрасса уточняет это утверждение для отрезка. Из теоремы следует, что образом отрезка непрерывной функции будет отрезок. Простые примеры показывают, что для других промежутков нет аналогичных результатов. Например, функция $f(x)=x^2$ преобразует интервал $(-1;1)$ в полуинтервал $[0;1)$, а функция $g(x)=\sin x$ – интервал $(-\pi;\pi)$ в отрезок $[-1;1]$. Отрезок обладает еще одним хорошим свойством: предел любой сходящейся последовательности точек отрезка принадлежит этому отрезку (если $x_n \to \alpha$ и при любом n выполняется неравенство $a \le x_n \le b$, то и $a \le \alpha \le b$).

Пример 7.7. Из теоремы о промежуточном значении следует, например, что непрерывная функция обращается в нуль, если у нее есть положительное и отрицательное значения. Как это можно использовать? Рассмотрим уравнение $x^5 + x - 1 = 0$. Требуется найти все действительные корни этого уравнения с точностью до 0,1.

Δ Займемся анализом этого уравнения. Если x больше единицы, то $x^5 + x - 1 > 0$. Когда x меньше нуля, тогда $x^5 + x - 1 < 0$. Значит, корни уравнения находятся на интервале от нуля до единицы.

Из основной теоремы алгебры следует, что действительных корней может быть три или один. Поскольку при возрастании переменной x от нуля до единицы сумма $x^5 + x$ возрастет, то наше уравнение имеет единственный корень на интервале (0;1). Вычисляя значения функции $f(x)=x^5+x-1$ с шагом, равным одной десятой, получим, что $f(0,7)<0$; $f(0,8)>0$. Следовательно, корень уравнения удовлетворяет неравенству $0,7<x_0<0,8$. Попробуйте подобным методом решить уравнение $x^4 + x - 1 = 0$. ▲

7.2. ВАЖНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Замечание 7.4. Элементарные функции непрерывны в их области определения.

З а м е ч а н и е 7.5. Необходимо знать следующие важные пределы:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e; \tag{7.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \tag{7.2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{2}; \tag{7.3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \tag{7.4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c^x - 1}{x} = \ln c,\ c>0; \tag{7.5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\gamma}-1}{x} = \gamma,\ \gamma\in\mathbb{R}; \tag{7.6}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\gamma}}{b^x} = 0,\ b>1,\ \gamma\in\mathbb{R}; \tag{7.7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_b x}{x^c} = 0,\ b>1,\ c>0. \tag{7.8}$$

З а м е ч а н и е 7.6. Если какой-то предел невозможно вычислить посредством арифметических операций, то говорят, что имеет место неопределенность. Пусть:

а) $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = 0,\ i = 1,2;$

б) $\lim\limits_{x\to a} g_i(x) = \infty,\ i = 1,2;$

в) $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1.$

Есть три случая стандартных неопределенностей. Первый случай, когда надо вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Это – неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ (см. формулы (7.2)–(7.6)). Во втором случае необходимо вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$. Это – неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ (см. (7.7), (7.8)). Случай вычисления предела $\lim\limits_{x\to a} h(x)^{g_1(x)}$ относят к неопределенности вида 1^{∞} (см. (7.1)). Есть еще несколько неопределенностей: $\infty-\infty$, $\infty\cdot 0$, ∞^0, 0^0, которые обычно преобразуются к какой-то стандартной неопределенности. Нужно отметить, что $\dfrac{\infty}{0}, \infty\cdot\infty, 0^{\infty}$ и т. п. не являются неопределенностями.

Пример 7.8. Рассмотреть

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}.$$

Δ Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Значит, нужны некоторые преобразования (требуется «раскрыть неопределенность»). Разложив многочлены на множители, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+2}=\frac{4}{3}.$$

Предел

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$$

является неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель на старшую степень, получим

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1.$$

Предел

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\infty$$

не является неопределенностью. ▲

7.3. СИМВОЛЫ O, o, ~. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Пусть $f:A\to\mathbb{R}$, $g:A\to\mathbb{R}$ и a – предельная точка множества A.

Определение 7.5. Будем говорить, что функция f ***ограничена*** по сравнению с функцией g при $x \to a$, если

$$\exists c\in\mathbb{R}\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \left(x\in U_\delta^A(a)\Rightarrow |f(x)|\le c|g(x)|\right).$$

Обозначение: $f(x)=O\big(g(x)\big)$, $x\to a$, или, короче, $f=O(g)$, $x\to a$ (читается: «f есть O большое от g при x, стремящемся к a»). Это простейший пример асимптотической формулы. Причем пишут такие формулы, только слева направо (нельзя писать $O(g(x))=f(x)$, $x\to a$).

З а м е ч а н и е 7.7. Если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\in\mathbb{R},$$

то можно писать $f(x)=O\big(g(x)\big),\ x\to a.$

Пример 7.9. Δ Из формулы (7.7) сразу следует, что $x^{10}=O\left(2^x\right),\ x\to+\infty,$ и даже $x^{10}=o\left(2^x\right),\ x\to+\infty.$ Отметим, что $2^x\neq O\left(x^{10}\right),\ x\to+\infty.$ ▲

Пример 7.10. Δ Вычисляя предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(3x+1)=1,$$

получим формулу $3x^2+x=O(x),\ x\to 0.$ Если рассмотреть предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(3+\frac{1}{x}\right)=3,$$

то тогда $3x^2+x=O\left(x^2\right),\ x\to+\infty.$ ▲

З а м е ч а н и е 7.8. Когда справедливы формулы $f(x)=O\big(g(x)\big),\ x\to a$ и $g(x)=O\big(f(x)\big),\ x\to a,$ говорят, что функции f и g сравнимы при $x\to a.$ При этом используют обозначение $f(x)\asymp g(x),\ x\to a.$

Если функция f и степенная функция $g(x)=Cx^m,\ x\to\infty(x\to 0)$ сравнимы, то m называют порядком функции f.

Определение 7.6. Будем говорить, что функция f ***пренебрежима*** по сравнению с функцией g при $x\to a$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ \left(x\in U_\delta^A(a)\Rightarrow\left|f(x)\right|\le\varepsilon\left|g(x)\right|\right).$$

Обозначение: $f(x)=o\big(g(x)\big),\ x\to a$ или, короче, $f=o(g),\ x\to a$ (читается: «f есть o малое от g при x стремящемся к a»).

З а м е ч а н и е 7.9. Если $g(x)\neq 0$, то равенства $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ и $f(x)=$ $=o\big(g(x)\big)$ при $x\to a$ будут равносильными.

Пример 7.11. Δ Если сравнить функцию $f(x)=\sin x,\ x\to 0$ с некоторыми степенными функциями, то получим формулы:

а) $\sin x=o(1),\ x\to 0;$

б) $\sin x\asymp x,\ x\to 0;$

в) $x^2=o(\sin x),\ x\to 0.$ ▲

Пример 7.12. Δ Пусть $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены (нижний индекс является степенью соответствующего многочлена). Если $n < m$, то $P_n(x) = o(Q_m(x))$, $x \to +\infty$, а $P_n(x) \asymp Q_n(x)$, $x \to +\infty$. Например, $3x^2 + x = o\left(x^3\right)$, $x \to +\infty$, а $3x^2 + x \asymp o\left(x^2\right)$ при $x \to +\infty$. Отметим, что $\sqrt{x+\sqrt{x}} \asymp \sqrt[4]{x}$, $x \to 0$, но $\sqrt{x+\sqrt{x}} \asymp \sqrt{x}$, $x \to +\infty$. ▲

Замечание 7.10. Полезно знать следующие асимптотические формулы при $x \to a$:

а) $o(cf(x)) = o(f(x))$;

б) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$;

в) $o(f(x))o(g(x)) = o(g(x)f(x))$;

г) $o(o(f(x))) = o(f(x))$;

д) $o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x))$;

е) $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$;

ж) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;

з) $o(O(f(x))) = o(f(x))$.

Поясним, например, смысл формулы г). Рассмотрим ее левую часть. Внутреннюю скобку в левой части можно понимать так: есть функция $g(x)$, для которой $g(x) = o(f(x))$. Далее, найдется функция $h(x)$, для которой $h(x) = o(g(x))$. Тогда $h(x) = o(f(x))$ и есть содержание формулы г). Доказательство (см. замечание 7.9):

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Замечание 7.11. Нам известен (см. (7.7)) предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{2^x} = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$. Из этого предела можно получить, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{2^{-\frac{1}{t^2}}}{t^n} = 0$. Отсюда следует асимптотическое равенство $2^{-\frac{1}{t^2}} = o\left(t^n\right)$, $t \to 0$, которое справедливо при любом натуральном n.

При обращении с асимптотическими формулами нужна некоторая осмотрительность. Например, равенства

$$o(f)+o(g)=o\big(f(x)+g(x)\big),\ O(f)+O(g)=O\big(f(x)+g(x)\big)$$

могут быть неверными. Нетрудно увидеть, что $o\left(x^n\right)+o\left(x^m\right)=o\left(x^m\right)$, $x\to 0,\ n\geq m.$ Но с разностью $o\left(x^n\right)-o\left(x^n\right)$ надо быть осторожным. Так, $2x\sin x=o(x),\ x\to 0,$ $x\sin 2x=o(x),\ x\to 0,$ но $2x\sin x-x\sin 2x=$ $=2x\sin x(1-\cos x)=o\left(x^3\right),\ x\to 0.$ Сравните $2x\sin x+x\sin 2x=o(x),$ $2x\sin x+x\sin 2x\neq o\left(x^3\right),\ x\to 0.$

Отметим, что когда функция локально ограничена, то пишут $f(x)=O(1).$ Если функция имеет предел, равный нулю (бесконечно малая), тогда можно писать $f(x)=o(1).$

Определение 7.7. Функции f и g называют ***эквивалентными*** (***асимптотически равными***) при $x\to a$, если $f(x)-g(x)=o\big(f(x)\big),\ x\to a.$

Обозначение: $f(x)\sim g(x),\ x\to a,$ или, короче, $f\sim g,\ x\to a.$

З а м е ч а н и е 7.12. Пусть $f(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки a. Тогда эквивалентность $f\sim g,\ x\to a$ будет означать, что

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1.$$

В этом случае эквивалентность симметрична, т. е.

$$f(x)\sim g(x)\Leftrightarrow g(x)\sim f(x).$$

Пример 7.13. Δ По аналогии с примером 7.10 получим:

а) $3x^2+x\sim 3x^2,\ x\to+\infty;$ б) $3x^2+x\sim x,\ x\to 0.$ ▲

Чаще всего встречаются следующие эквивалентности: $f(x)\sim$ $\sim C(x-a)^n,\ x\to a$ и $f(x)\sim Cx^n,\ x\to\pm\infty,\ n\in\mathbb{Z}.$ Много полезных эквивалентностей можно получить из важных пределов (см. раздел 7.2). В таблице мы расположили девять основных эквивалентностей при $x\to 0.$

$\sin x\sim x$	$\operatorname{tg} x\sim x$	$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$
$\arcsin x\sim x$	$\operatorname{sh} x\sim x$	$\operatorname{ch} x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$
$\ln(1+x)\sim x$	$c^x-1\sim x\ln c$	$(1+x)^\gamma-1\sim\gamma x$

Докажем одну из эквивалентностей:

$$\gamma = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\gamma - 1}{x} \Rightarrow 0 = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\gamma - 1 - \gamma x}{x} \Rightarrow (1+x)^\gamma - 1 - \gamma x = o(x) = o(\gamma x).$$

7.4. РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Кроме локального понятия непрерывности, есть и глобальное – равномерная непрерывность.

Определение 7.8. Функция $f: A \to \mathbb{R}$ называется ***равномерно непрерывной на множестве A***, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in A\Big(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\Big).$$

Замечание 7.13. Пусть функция f является равномерно непрерывной на множестве A. Тогда функция f будет непрерывной в любой точке множества A.

Замечание 7.14. Если $A = [a;b]$, то равномерная непрерывность функции f равносильна непрерывности на множестве A (теорема Гейне – Кантора). Поэтому элементарные функции, заданные на отрезке, будут на нем равномерно непрерывны (см. замечание 7.4).

Равномерную непрерывность можно также определить с помощью следующего понятия.

Определение 7.9. ***Модулем непрерывности*** $f: A \to \mathbb{R}$ называется функция

$$\omega(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| \le \delta} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Здесь верхняя грань вычисляется по всем точкам из множества A, расстояние между которыми не больше δ.

Замечание 7.15. Полезно знать, что функция $f: A \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на множестве A тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0.$

Пример 7.14. Δ Рассмотрим функцию $f_1(x) = x,\ A = \mathbb{R}.$ Тогда $\omega(\delta) = \delta.$ Значит, эта функция будет равномерно непрерывной на множестве A. Кстати, функция $f_2(x) = \sin x,\ A = \mathbb{R}$ также равномерно непрерывна, так как $\omega(\delta) \le \delta.$ Но произведение этих функций $f_1(x) f_2(x) = x \sin x$ не будет функцией равномерно непрерывной на действительной прямой. ▲

Пример 7.15. Δ Пусть

$$f(x) = \sin\frac{1}{x},\ A = (0;1).$$

Поскольку на каждом интервале $(0;\delta)$ есть значения функции, равные 1 и -1, то $\omega(\delta) \equiv 2.$ Итак, данная функция не будет равномерно непрерывной на множестве A. ▲

7.5. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

Рассмотрим несколько методов вычисления пределов.

7.5.1. Метод разложения

Если требуется найти предел отношения двух многочленов, то полезно разложить многочлены на множители (мы уже использовали этот метод в примере 7.8).

Пример 7.16. Δ Вычислим предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{3}{x^2+x+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1. \ ▲$$

7.5.2. Метод избавления от иррациональности в числителе или знаменателе

Пример 7.17.

$$\Delta \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{4x+5}-\sqrt{5x+4}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+4}\right)}{\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{5x+4}\right)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+4}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{3x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(3+x)-(3x+1)}{(4x+5)-(5x+4)}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+4}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{2-2x}{1-x}\cdot\left(\frac{3+3}{2+2}\right)=3. \ ▲$$

З а м е ч а н и е 7.16. Полезно знать следующие формулы:

а) $t^2-a^2=(t-a)\left(1+\dfrac{t}{a}\right),\ a\neq 0;$

б) $t^3 - a^3 = (t-a)\left(1 + \dfrac{t}{a} + \left(\dfrac{t}{a}\right)^2\right), a \neq 0;$

в) $t^n - a^n = (t-a)\left(1 + \dfrac{t}{a} + \ldots + \left(\dfrac{t}{a}\right)^{n-1}\right), a \neq 0, n = 4, 5, \ldots .$

Они являются следствием формулы суммы геометрической прогрессии.

7.5.3. Метод введения новой переменной

В следующем примере удобно ввести переменную

$$t = \sqrt[5]{29+x},\ x = t^5 - 29,$$

и воспользоваться формулой в) ($n = 5$) из замечания 7.16.

Пример 7.18.

$$\Delta\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{29+x}-2}{x-3} = \lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^5-32} = \frac{1}{16}\lim_{t\to 2}\frac{1}{1+\dfrac{t}{2}+\left(\dfrac{t}{2}\right)^2+\left(\dfrac{t}{2}\right)^3+\left(\dfrac{t}{2}\right)^4} = \frac{1}{80}.\ \blacktriangle$$

7.5.4. Метод вычисления тригонометрических пределов

Здесь надо вспомнить пределы (7.2) и (7.3).

Пример 7.19.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x} = L.$$

Δ Сначала используем новую переменную $t = x - \pi,\ x = t + \pi.$ Тогда

$$L = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\big(7(t+\pi)\big)}{\operatorname{tg}\big(5(t+\pi)\big)} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin 7t}{\operatorname{tg} 5t} = -\lim_{t\to 0}\frac{(\sin 7t)/7t}{(\sin 5t)/5t}\cos 5t\cdot\frac{7}{5} = -\frac{7}{5}.\ \blacktriangle$$

7.5.5. Метод вычисления степенно-показательных пределов

Воспользуемся следующим общим результатом для предела, когда имеется неопределенность 1^∞:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = L,\ \lim_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Тогда

$$L = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^M,\ M = \lim_{x\to a} g(x)\big(f(x)-1\big).$$

Пример 7.20.

$$\Delta \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^M;$$

$$M = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \big(\operatorname{tg} 2x(\operatorname{tg} x - 1)\big) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}(\operatorname{tg} x - 1)\right) = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right) = -1.$$

Итак,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1} = \frac{1}{e}. \quad \blacktriangle$$

7.5.6. Метод асимптотических равенств

В разделе 7.3 есть много полезных асимптотических равенств, которые могут быть использованы при нахождении пределов.

Пример 7.21.

$$\Delta \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 7x}{\ln\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 - \frac{49x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)}{\ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{49x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{-\frac{9x^2}{2} + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{49x^2}{9x^2} = \frac{49}{9}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^4 - x + 1\right)}{\ln\left(x^{10} + x + 1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln x + \ln\left(1 - x^{-1} + x^{-4}\right)}{10\ln x + \ln\left(1 + x^{-9} + x^{-10}\right)} = \frac{2}{5}. \quad \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 7.17. Комбинирование разных методов и опыт помогут вам при нахождении пределов разной трудности.

7.6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ПРЕДЕЛА И НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ

1. Для доказательства существования предела функции по определению Гейне надо просмотреть все последовательности, которые сходятся к предельной точке. Чтобы доказать, что функция не имеет предела, достаточно найти одну расходящуюся последовательность значений функции.

2. Полезно знать важные пределы, а также пополнять список подобных пределов.

3. Надо научиться находить неопределенности и избавляться от них.

4. Асимптотические равенства – очень полезный инструмент. Они указывают на то, что является важным в данном контексте, а чем можно пренебречь.

5. Знание пределов функций в граничных точках области определения помогает при графическом представлении этих функций.

Задачи для самостоятельной работы

Выяснить, какие функции равномерно непрерывные, непрерывные, разрывные:

7.1. $\sin x,\ A=\mathbb{R}.$

7.2. $\sin\left(x^2\right),\ A=\mathbb{R}.$

7.3. $\cos\frac{1}{x},\ A=(0;1).$

7.4. $x\cos x,\ A=\mathbb{R}.$

7.5. $\frac{\sin x}{x},\ A=(0;1).$

7.6. $\frac{|\sin x|}{x},\ A=(-1;0)\cup(0;1).$

7.7. $|x|,\ A=\mathbb{R}.$

7.8. $x^2,\ A=\mathbb{R}.$

7.9. $\frac{1}{x},\ A=(1;+\infty).$

7.10. $\frac{1}{x},\ A=(0;1).$

7.11. $\operatorname{arctg}\frac{x-0,5}{x^2-0,1x-0,06},\ A=[-1;1].$

7.12. $\{x\},\ A=\mathbb{R}.$

Ответы и указания

7.1. Равномерно непрерывная. **7.2.** Непрерывная. **7.3.** Непрерывная. **7.4.** Непрерывная. **7.5.** Равномерно непрерывная. **7.6.** Непрерывная. **7.7.** Равномерно непрерывная. **7.8.** Непрерывная. **7.9.** Равномерно непрерывная. **7.10.** Непрерывная. **7.11.** Разрывная. **7.12.** Разрывная.

Глава 8
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

8.1. ПРОИЗВОДНАЯ

Определение 8.1. ***Производной*** функции $y = f(x)$ по аргументу x в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к вызвавшему его приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю, если этот предел существует.

Обозначают производную в точке x_0 одним из следующих символов:

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ Df(x_0).$$

Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При этом считают, что функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a;b)$, а $x_0 \in (a;b)$ и $x_0 + \Delta x \in (a;b)$.

Отметим, что так как точка x_0 фиксирована, то величина $\Delta f(x_0)$ зависит только от Δx, а производная функции $y = f(x)$ в точке – число.

Если в любой точке $x \in (a;b)$ существует *производная*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{8.1}$$

то $f'(x)$ – функция аргумента x, определенная на этом интервале $(a;b)$.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Пример 8.1. Исходя из определения производной, найти производную функции

$$y = 3x^2 + 7x - 5.$$

Δ Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy. Имеем

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)^2+7(x+\Delta x)-5.$$

Отсюда

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left(3(x+\Delta x)^2+7(x+\Delta x)-5\right)-\left(3x^2+7x-5\right)=$$
$$=6x\Delta x+3\Delta x^2+7\Delta x.$$

Тогда отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\Delta x+7.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x+7)=6\lim_{\Delta x\to 0}x+3\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}7=6x+7.$$

По определению производной $y'=6x+7$. ▲

Пример 8.2. Исходя из определения производной, найти производную функции $y=\sin x+2\cos x$.

Δ Находим

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left(\sin(x+\Delta x)+2\cos(x+\Delta x)\right)-(\sin x+2\cos x)=$$
$$=\left(\sin(x+\Delta x)-\sin x\right)+2\left(\cos(x+\Delta x)-\cos x\right).$$

Воспользуемся формулами

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Имеем

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)=\cos x-2\sin x.$$

По определению производной $y' = \cos x - 2\sin x$. ▲

При вычислении предела мы использовали первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и линейные свойства пределов.

С помощью формулы (8.1), пользуясь теорией пределов, получают основные правила дифференцирования и таблицу производных.

8.2. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ, СВЯЗАННЫЕ С АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ДЕЙСТВИЯМИ НАД ФУНКЦИЯМИ

Если c – постоянная величина, функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ имеют производные в некоторой точке, то в этой точке справедливы следующие соотношения:

1) $c' = 0$;
2) $x' = 1$;
3) $(cu(x))' = cu'(x)$;
4) $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;
5) $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
6) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x) \neq 0)$.

З а м е ч а н и е 8.1. Правила 4) и 5) распространяются на любое конечное число слагаемых и сомножителей, и для n слагаемых и сомножителей принимают следующий вид:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n';$$

$$(u_1 u_2 \cdot \ldots \cdot u_n)' = u_1' u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 u_2' \cdot \ldots \cdot u_n + \ldots + u_1 u_2 \cdot \ldots \cdot u_n',$$

где функции $u_k = u_k(x)$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$ имеют производные в точке x.

Таблица производных основных элементарных функций по независимой переменной x:

1. $\left(x^{\alpha}\right) = \alpha x^{\alpha - 1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

4. $(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}.$

5. $(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}.$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0.$

7. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0.$

8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$

9. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a},\ a > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 0.$

10. $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}.$

11. $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}.$

12. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,\ x \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1),\ n \in \mathbb{Z}.$

13. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x,\ x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1.$

15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1.$

16. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$

17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$

18. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x,\ x \in \mathbb{R}.$

19. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x,\ x \in \mathbb{R}.$

20. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ x \in \mathbb{R}.$

21. $(\operatorname{cth} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x},\ x \neq 0.$

З а м е ч а н и е 8.2. Таблица производных – это пределы, вычисленные по формуле (8.1) для соответствующих элементарных функций, их использование значительно упрощает процесс нахождения производных.

З а м е ч а н и е 8.3. Правила дифференцирования и таблицу производных простейших элементарных функций необходимо выучить наизусть, так как их используют очень часто.

В следующих примерах, применяя правила дифференцирования и таблицу производных, найдем производные функций.

Пример 8.3. $y = 3x^2 + 7x - 5.$

$$\Delta \quad y' = \left(3x^2 + 7x - 5\right) = \left(3x^2\right) + (7x)' - (5)' = 3 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = 6x + 7. \quad \blacktriangle$$

Пример 8.4. $y = \sin x + 2\cos x.$

Δ Используем правило вычисления производной суммы:

$$y' = \left(\sin x + 2\cos x\right)' = (\sin x)' + (2\cos x)' = (\sin x)' + 2(\cos x)' =$$

$$= \cos x + 2(-\sin x) = \cos x - 2\sin x. \ \blacktriangle$$

(Сравните примеры 8.1 с 8.3 и 8.2 с 8.4.)

Пример 8.5. $y = x^5 e^x.$

Δ Используем правило вычисления производной произведения:

$$y' = \left(x^5 e^x\right)' = \left(x^5\right)' e^x + x^5 \left(e^x\right)' = 5x^4 e^x + x^5 e^x = x^4 e^x (5 + x). \ \blacktriangle$$

Пример 8.6. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}.$

Δ Воспользуемся правилом вычисления производной частного:

$$y' = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg} x)' x - x' \operatorname{arctg} x}{x^2} = \frac{\frac{1}{1+x^2} x - 1 \operatorname{arctg} x}{x^2} =$$

$$= \frac{x - \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x}{\left(1 + x^2\right)x^2}. \ \blacktriangle$$

8.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(t)$ и $t = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов и существует сложная функция $y = f\left(\varphi(x)\right)$, то производная этой функции существует и равна производной функции $y = f(t)$ по промежуточному аргументу t, умноженной на производную промежуточного аргумента t по независимой переменной x, т. е.

$$y' = f'(t)\varphi'(x).$$

Эту же формулу, используя другое обозначение для производных, можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

З а м е ч а н и е 8.4. Правило нахождения производной сложной функции называют правилом цепочки.

Применяя правило дифференцирования сложной функции, найдем производные в следующих примерах.

Пример 8.7. $y = \left(4x^2 + 5\right)^7$.

Δ Обозначим $4x^2 + 5 = t$; имеем $y = t^7$.

Тогда $\dfrac{dt}{dx} = 8x$ и $\dfrac{dy}{dt} = 7t^6$. По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{dy}{dx} = 7t^6 8x = 7\left(4x^2 + 5\right)^6 8x. \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 8.5. Правило вычисления производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций.

Пример 8.8. Вычислить производную функции $y = \ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$.

Δ Применяем правило дифференцирования сложной функции пять раз:

$$y' = \left(\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)\right)' = \frac{1}{\ln^2\left(\ln^3 x\right)}\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)' = \frac{1}{\ln^2\left(\ln^3 x\right)} 2\ln\left(\ln^3 x\right)\left(\ln\left(\ln^3 x\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{\ln^2\left(\ln^3 x\right)} 2\ln\left(\ln^3 x\right)\frac{1}{\left(\ln^3 x\right)}\left(\ln^3 x\right)' = \frac{1}{\ln^2\left(\ln^3 x\right)} 2\ln\left(\ln^3 x\right)\frac{1}{\ln^3 x} 3\ln^2 x(\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln^2\left(\ln^3 x\right)} 2\ln\left(\ln^3 x\right)\frac{1}{\ln^3 x} 3\ln^2 x\frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln x\ln\left(\ln^3 x\right)} = \frac{2}{x\ln x\ln(\ln x)}. \ \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 8.6. Перед тем как вычислять производную в примере 8.8, можно, используя правила логарифмирования, представить заданные функции в более простом виде $y = 2\ln 3 + 2\ln\left(\ln(\ln x)\right)$ и применить правило цепочки не пять, а три раза: $y' = 0 + \dfrac{2}{\ln(\ln x)}\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

Пример 8.9. Вычислить производную функции $y=\sin\left(\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right)$.

Δ Поступая аналогично проделанному в примере 8.8, находим

$$y'=\cos\left(\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right)2\cos\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\left(-\sin\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right)3\operatorname{tg}^2 x\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{-6\cos\left(\cos^2\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\right)\cos\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\sin\left(\operatorname{tg}^3 x\right)\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}. \quad \blacktriangle$$

Пример 8.10. Вычислить производную показательно-степенной функции $y=(\sin x)^{\cos x}$.

Δ У этой функции основание и показатель степени зависят от x.

Есть несколько способов вычисления производной такой функции.

Первый способ. Производную вычисляют по формуле

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)'=u(x)^{v(x)}\left(\ln u(x)v'(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x)\right).$$

Первое слагаемое – производная показательной функции при фиксированном $u(x)$, второе – производная степенной функции при фиксированной $v(x)$. В нашем примере

$$u(x)=\sin x,\ \ v(x)=\cos x,$$

$$y'=\sin x^{\cos x}\ln(\sin x)(-\sin x)+\cos x\sin x^{\cos x-1}\cos x=$$

$$=\sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right).$$

Второй способ. Логарифмируя функцию $y=(\sin x)^{\cos x}$, получим $\ln y=\cos x\ln\sin x$. Дифференцируем обе части последнего равенства по x. Поскольку y является функцией от x, то $\ln y$ есть сложная функция x и $(\ln y)'=\dfrac{1}{y}y'$.

Получаем

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\ln\sin x+\cos\frac{1}{\sin x}\cos x=-\sin x\ln\sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}.$$

Тогда

$$y'=y\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)=\sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$$

(отметим, что производная от логарифма функции называется логарифмической производной функции).

Третий способ. Преобразуем функцию, используя основное логарифмическое тождество $y = \sin x^{\cos x} = e^{\cos x \ln \sin x}$.

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = e^{\cos x \ln \sin x}(\cos x \ln \sin x)' = e^{\cos x \ln \sin x}\left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \frac{1}{\sin x}\cos x\right) =$$

$$= \sin x^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right). \ \blacktriangle$$

8.4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НЕЯВНО

Соотношение между функцией $y = y(x)$ и аргументом x может быть задано в виде уравнения $f(x, y) = 0$. Такое задание функции называют *неявным*, а функцию $y = y(x)$, которая при подстановке в заданное уравнение обращает его в тождество, – *неявной функцией.*

З а м е ч а н и е 8.7. Не всякое уравнение определяет единственную неявную функцию. Оно может не задавать ни одной функции или задавать много неявных функций. Условия, обеспечивающие существование и единственность неявной функции, будут рассмотрены ниже.

Если уравнение $f(x, y) = 0$ однозначно определяет неявную функцию $y = y(x)$, то, дифференцируя по x тождество $f\left(x, y(x)\right) \equiv 0$, получают соотношение, из которого находят y', т. е. производную неявной функции. Уравнение для нахождения производной, которое получается после дифференцирования тождества $f\left(x, y(x)\right) \equiv 0$, всегда линейно относительно y' и поэтому легко решается.

Пример 8.11. Найти производную y' для дифференцируемой функции $y = y(x)$, заданной неявно следующим уравнением: $x^2 + y^2 = 25$, $x \in (-5;5)$, $y > 0$.

Δ Поскольку y зависит от x, то y^2 нужно рассматривать как сложную функцию от x. Поэтому $\left(y^2\right)' = 2yy'$. Продифференцировав по x данное уравнение, получим $2x + 2yy' = 0$. Из последнего равенства имеем

$$y' = -\frac{x}{y}, \ x \in (-5;5), \ y > 0. \ \blacktriangle$$

З а м е ч а н и е 8.8. Выражение производной y' содержит в правой части и x, и y, так как мы не находим явную зависимость $y = y(x)$.

Пример 8.12. Найти производную y' из уравнения

$$x^5 + 3\ln y - x^2 e^y = 0, \quad y > 0.$$

Δ Дифференцируя по x уравнение, получаем

$$5x^4 + 3\frac{1}{y}y' - 2xe^y - x^2 e^y y' = 0.$$

Отсюда находим

$$y' = \frac{2xe^y - 5x^4}{\frac{3}{y} - x^2 e^y} = \frac{y\left(2xe^y - 5x^4\right)}{3 - x^2 ye^y}, \text{ если } 3 - x^2 ye^y \neq 0 \text{ и } y > 0,$$

где $y = y(x)$ определяется исходным уравнением. ▲

8.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если функция $y = f(x)$ задана с помощью параметра t $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы и $\dfrac{dx(t)}{dt} \neq 0$, то функция $y = f(x)$ также имеет производную, которая находится по формуле $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{\frac{dy(t)}{dt}}{\frac{dx(t)}{dt}}$, или в других обозначениях

$$y'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}. \tag{8.2}$$

Пример 8.13. Найти $y' = \dfrac{dy}{dx}$, если $\begin{cases} x = t^5 + 5t + 2, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 2. \end{cases}$

Δ Найдем $\dfrac{dx}{dt} = 5t^4 + 5$ и $\dfrac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2$. Тогда по формуле (8.2) имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{5t^4 + 5} = \frac{3t^2\left(t^2 + 1\right)}{t^4 + 1}. \text{ ▲}$$

Пример 8.14. Вычислить y'_x для функции, заданной в полярных координатах уравнением $r = a\varphi$ (спираль Архимеда).

Δ Перейдем к параметрическому заданию функции. Используя связь между полярными и декартовыми координатами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad \text{получим} \quad \begin{cases} x = a\varphi\cos\varphi, \\ y = a\varphi\sin\varphi. \end{cases}$$

Найдем

$$x'_\varphi = a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi,$$
$$y'_\varphi = a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi.$$

Откуда $y'_x = \dfrac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \dfrac{a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi} = \dfrac{ar\sin\varphi + ra\varphi\cos\varphi}{ar\cos\varphi - ra\varphi\sin\varphi} = \dfrac{ay + rx}{ax - ry}$. ▲

8.6. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна и для нее существует $\dfrac{df(x)}{dx} \neq 0,$ то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную, которая может быть вычислена по формуле

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x)}{dx}}, \text{ или короче } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{8.3}$$

Пример 8.15. Найти производную функции, обратной к функции $y = x + x^5, \quad x \in \mathbb{R}.$

Δ Данная функция непрерывна, строго монотонна, и ее производная $y' = 1 + 5x^4$ не обращается в нуль на $\mathbb{R}$. Тогда по формуле (8.3) $x'_y = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{1 + 5x^4}$. ▲

Пример 8.16. Найти производную функции $x = f^{-1}(y),$ если $y = x + e^x.$

Δ Данная функция непрерывна, строго монотонна, и ее производная $y' = 1 + e^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $x'_y = \dfrac{1}{1 + e^x}$. ▲

8.7. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ и имеет производную в точке с абсциссой x_0, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол, образованный касательной к кривой в точке с абсциссой x_0 с положительным направлением оси Ox.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ задается уравнением $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

Уравнение нормали к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Отметим, что если $f'(x_0) = 0$, то касательная к графику функции в точке $M_0(x_0; y_0)$ параллельна оси абсцисс (горизонтальна) и задается уравнением $y = y_0$, а нормаль параллельна оси ординат (вертикальна), и ее уравнение имеет вид $x = x_0$.

Пример 8.17. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 3x + 5$, проведенная в точке $M_0(2;3)$? Написать уравнение касательной и нормали к этой параболе в точке $M_0(2;3)$.

Δ Находим производную

$$y' = 2x - 3; \text{ при } x = 2,\ y' = 1, \text{ т. е. } \operatorname{tg}\alpha = 1, \text{ тогда } \alpha = \operatorname{arctg} 1° = \frac{\pi}{4}.$$

Уравнение касательной имеет вид $y = 3 + 1(x - 2)$, или $y = x + 1$. Уравнение нормали – $y = 3 - 1(x - 2)$, или $y = -x + 5$. ▲

Углом между двумя кривыми, заданными уравнениями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$ называют угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находят по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}\right|,\ 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Если $1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0) = 0$, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Пример 8.18. Найти угол между кривой $y = x - x^3$ и прямой $y = 5x$.

Δ Найдем точку пересечения, решив систему уравнений $\begin{cases} y = x - x^3, \\ y = 5x. \end{cases}$

Получаем одну точку $M_0(0;0)$. Продифференцируем уравнения:

1) $y' = 1 - 3x^2$; 2) $y' = 5$.

Значения производных в точке $M_0(0;0)$ равны $f_1'(0)=1,\ f_2'(0)=5.$

Тогда $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{5-1}{1+5\cdot 1}\right|=\dfrac{2}{3},$ а $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}.$ ▲

Пример 8.19. Найти угол между кривыми $y=\sqrt{2}\sin x$ и $y=\sqrt{2}\cos x.$

Δ Точки пересечения кривых найдем из системы $\begin{cases} y=\sqrt{2}\sin x, \\ y=\sqrt{2}\cos x. \end{cases}$

Абсциссами точек пересечения кривых являются $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$ Продифференцировав уравнения кривых, получим:

1) $y'=\sqrt{2}\cos x;$ 2) $y'=-\sqrt{2}\sin x.$

Значения производных в точках равны:

$$f_1'\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)=\begin{cases} 1, \text{ если } k=2n, \\ -1, \text{ если } k=2n+1; \end{cases}$$

$$f_2'\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)=\begin{cases} -1, \text{ если } k=2n, \\ 1, \text{ если } k=2n+1. \end{cases}$$

Тогда при любых $k\in\mathbb{Z}$ $1+f_1'\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right)f_2'\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right)=0.$ Значит, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ для всех точек пересечения кривых. ▲

Определение 8.2. Односторонние пределы:

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

называют ***правосторонней*** и ***левосторонней производными функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $x=x_0$ соответственно и обозначают $f_+'(x_0)$ и $f_-'(x_0).$

Теорема 8.1. *Функция* $f(x)$ *имеет производную в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда у этой функции при* $x=x_0$ *существуют равные односторонние производные.*

Функция $y=f(x),$ обладающая односторонними производными при $x=x_0,$ имеет односторонние касательные к графику в точке $(x_0;y_0).$

Если $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty,$ то график функции в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вертикальную касательную, которая задается уравнением $x=x_0.$

Пример 8.20. Найти $f_+'(0)$ и $f_-'(0),$ если $f(x)=|\sin x|$ и определить угол между правосторонней и левосторонней касательными в точке $M(0;0).$

$$\Delta\ f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\sin(0+\Delta x)|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1;$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\sin(0+\Delta x)|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Уравнение правосторонней касательной имеет вид $y = x$, а левосторонней – $y = -x$.

Угол между касательными равен $\frac{\pi}{2}$. ▲

Пример 8.21. Написать уравнения касательных к графику кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3, \end{cases}$ в точках при $t = 0$ и $t = 1$. Найти угол между этими касательными.

Δ Найдем производную y'_x по формуле (8.2).

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4t-3t^2}{2(1-t)}.$$

Если $t = 0$, то $y'_x = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Получаем при $t = 0$ уравнение горизонтальной касательной $y = 0$.

При $t = 1$ $x_0 = 1$, $y_0 = 1$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(1+\Delta t)-y(1)}{x(1+\Delta t)-x(1)}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(1+\Delta t)^2-(1+\Delta t)^3-1}{2(1+\Delta t)-(1+\Delta t)^2-1}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t^3+\Delta t^2-\Delta t}{\Delta t^2}=\infty.$$

Касательная при $t = 1$ будет вертикальной и задается уравнением $x = 1$. Очевидно, что угол между касательными в точках при $t = 0$ и $t = 1$ равен $\frac{\pi}{2}$. ▲

Отношение $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ задает среднюю скорость изменения функции на отрезке $[x; x+\Delta x]$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ – мгновенную скорость изменения функции $f(x)$ в точке x. Другими словами, производная функции $f(x)$ в точке x_0 – скорость изменения функции в этой точке.

Такая интерпретация производной $f'(x)$ позволяет применять ее при изучении различных физических процессов.

Если при движении точки задан закон движения $s = s(t)$, то скорость движения в момент t_0 – производная пути по времени, т. е. $v = s'(t_0)$.

Пример 8.22. Зависимость пути от времени задана уравнением $s = t\ln(t+1)$ (t измеряется в секундах, s – в метрах). Найти скорость движения в конце второй секунды.

Δ Находим производную пути по времени $s' = \ln(t+1) + \dfrac{t}{t+1}$. При $t = 2$ имеем $s' = \ln 3 + \dfrac{2}{3} \approx 1{,}76$ м/с. ▲

Пример 8.23. По кубической параболе $y = x^3$ движется точка так, что ее ордината изменяется в зависимости от времени t по закону $y = at^3$. Какова скорость изменения абсциссы в зависимости от времени (t измеряется в секундах, x – в метрах)?

Δ Найдем закон изменения абсциссы: $x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{at^3} = \sqrt[3]{a} \cdot t$.

Абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = \sqrt[3]{a} \cdot t$. Скорость изменения абсциссы определяется производной от абсциссы по времени: $x' = \sqrt[3]{a}$. Получили, что скорость изменения абсциссы постоянна, т. е. $v = \sqrt[3]{a}$ м/с. ▲

Пример 8.24. Неоднородный стержень AB имеет длину 12 см. Масса его части AK растет пропорционально квадрату расстояния текущей точки K от конца A и равна 10 г при $AK = 2$ см. Найти массу всего стержня AB и линейную плотность в любой его точке K. Чему равна линейная плотность стержня в точках A и B?

Δ Выберем систему координат так, чтобы ось Ox проходила вдоль стержня, а точка O совпадала с его левым концом A. Функция $M(x) = kx^2$ выражает массу части стержня от точки O до точки x. Из условия задачи следует, что $k = \dfrac{5}{2}$, так как $M(2) = k \cdot 2^2 = 10$.

Окончательно масса стержня изменяется по закону $M(x) = \dfrac{5}{2}x^2$. Массу всего стержня AB получим, если возьмем $x = 12$. Итак, $M = \dfrac{5}{2}12^2 =$ $= 360$ г.

Плотность стержня в точке выразится значением производной от $M(x)$ по x в этой точке:

$$\rho(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \left(\frac{5}{2}x^2\right)' = 5x\ \frac{\text{г}}{\text{см}}.$$

Плотность в точке A – $\rho(0) = 0\ \frac{\text{г}}{\text{см}}$.

Плотность в точке B – $\rho(12) = 60\ \frac{\text{г}}{\text{см}}$. ▲

Пример 8.25. Количество электричества q (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника, изменяется по закону $q = 5t^3 + 7t$. Найти силу тока в конце второй секунды.

Δ Сила тока i в момент времени t равна мгновенной скорости изменения количества электричества, протекающего через поперечное сечение проводника. Значит, $i(t) = q'(t) = 15t^2 + 7$.

Тогда сила тока в конце второй секунды – $i(2) = 15 \cdot 2^2 + 7 = 67$ А. ▲

Пример 8.26. Количество тепла Q, необходимого для нагревания 1 кг воды от 0 до t °С, определяется формулой $Q = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3$. Найти теплоемкость воды при $t = 100$ °С.

Δ Теплоемкостью C вещества называется физическая величина, численно равная скорости изменения количества теплоты. Поэтому $C = \frac{dQ}{dt} = 1 + 4 \cdot 10^{-5} t + 9 \cdot 10^{-7} t^2$. При $t = 100$ °С, имеем $C = 1{,}013\ \frac{\text{Дж}}{°\text{С}}$. ▲

8.8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Определение 8.3. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если ее приращение Δy в точке x_0 можно представить в виде $\Delta y\big|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $A(x_0)$ не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Определение 8.4. Линейная относительно Δx часть приращения Δy называется ***дифференциалом*** функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$ или $dy\big|_{x=x_0}$.

Таким образом, $dy\big|_{x=x_0} = A(x_0)\Delta x$. *Дифференциалом dx* независимой переменной x называется ее приращение Δx, т. е. $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции $y = f(x)$ с геометрической точки зрения представляет собой приращение ординаты касательной к графику данной функции в точке x, когда аргумент получает приращение Δx. С физической точки зрения дифференциал пути $S(t)$ равен приращению пути, полученному в предположении, что начиная с данного момента времени точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.

Теорема 8.2. *Для дифференцируемости функции в точке* x_0 *необходимо и достаточно существование в этой точке конечной производной* $f'(x_0)$. *При этом* $A(x_0) = f'(x_0)$, *а* $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала $(a;b)$, то $dy = f'(x)dx$ для всех $x \in (a;b)$. Эта формула дает возможность вычислять дифференциал функции, если известна ее производная.

Приближенное значение функции в точке $x_0 + \Delta x$ при малых Δx вычисляют по формуле

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy(x_0).$$

При этом, чем меньше Δx, тем меньше погрешность. Эта погрешность при $\Delta x \to 0$ бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Пример 8.27. Найти дифференциал функции $y = x - 3x^2 + 5$ в точке $x = 1$.

Δ *Первый способ*. Найдем приращение функции в точке $x = 1$:

$$\Delta y\big|_{x=1} = y(1+\Delta x) - y(1) = 1 + \Delta x - 3(1+\Delta x)^2 + 5 - 1 + 3 - 5 = -5\Delta x - 3\Delta x^2.$$

Получим $A(1) = -5$, $\alpha(\Delta x) = -3\Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, $dy\big|_{x=1} = -5dx$.

Второй способ. Вычислим производную функции в точке $x = 1$:

$$y'(x) = 1 - 6x,\ y'(1) = -5,\ dy\big|_{x=1} = y'(1)dx = -5dx. \ \blacktriangle$$

Пример 8.28. Сравнить приращение и дифференциал функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 7.$$

Δ Находим

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^3 + 3(x+\Delta x)^2 - 7 - x^3 - 3x^2 + 7 =$$
$$= \left(3x^2 + 6x\right)\Delta x + (3x+3)\Delta x^2 + \Delta x^3,\ dy = \left(3x^2 + 6x\right)dx.$$

Разность между приращением Δy и дифференциалом dy есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с Δx, равная

$$(3x+3)\Delta x^2 + \Delta x^3,\ \ \alpha(\Delta x) = (3x+3)\Delta x + \Delta x^2 \to 0, \text{ если } \Delta x \to 0. \ \blacktriangle$$

Пример 8.29. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{1{,}02}$.

Δ Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$. Найдем ее производную:

$$y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Полагая $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, имеем $y'(1) = \dfrac{1}{3}$ и

$$\sqrt[3]{1{,}02} = \sqrt[3]{1 + 0{,}02} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \cdot 0{,}02 = 1 + \frac{0{,}02}{3} \approx 1{,}006. \ \blacktriangle$$

Пример 8.30. Найти приближенное значение sin 29°.

Δ Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Полагая $x = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\dfrac{\pi}{180}$ и применяя формулу $\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + (\sin x)'\Delta x = \sin x + \cos x \cdot \Delta x$, получаем

$$\sin 29° = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \simeq \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}484. \ \blacktriangle$$

Пример 8.31. Найти дифференциал функции $y = \sin\left(3x^2\right)$.

Δ Поскольку $dy = f'(x)dx$, имеем $dy = \left(\sin\left(3x^2\right)\right)' dx = 6x\cos\left(3x^2\right)dx$. $\blacktriangle$

8.9. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Дифференциал функции обладает свойствами, аналогичными свойствам производной:

1. $dC = 0$, если C – const.

2. Для любых дифференцируемых функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ справедливы равенства:

а) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

б) $d(Cu) = Cdu$;

в) $d(uv) = udv + vdu$;

г) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

3. Дифференциал функции $y = f(x)$ обладает инвариантной формой, т. е. сохраняет вид $dy = f'(x)dx$ и в том случае, если x является не независимой переменной, а функцией $x = \varphi(t)$, где t – независимая переменная. Однако следует иметь в виду, что если x – независимая переменная, то $dx = \Delta x$, а если $x = \varphi(t)$, то $dx \neq \Delta x$, так как в этом случае $\Delta x = dx + \alpha(\Delta t)\Delta t$.

При вычислении дифференциалов применяются свойства 1–3 и таблица дифференциалов:

1. $dx^{\alpha} = x^{\alpha - 1}dx$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $d\sqrt{x} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

3. $d\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x^2}$, $x \neq 0$.

4. $de^x = e^x dx$, $x \in \mathbb{R}$.

5. $da^x = a^x \ln a\, dx$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

6. $d\ln x = \frac{dx}{x}$, $x > 0$.

7. $d\ln|x| = \frac{dx}{x}$, $x \neq 0$.

8. $d\log_a x = \frac{dx}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

9. $d\log_a |x| = \frac{dx}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \neq 0$.

10. $d\sin x = \cos x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

11. $d\cos x = -\sin x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

12. $d\,\mathrm{tg}\, x = \frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x\, dx$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

13. $d\,\mathrm{ctg}\, x = -\frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x\, dx$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

14. $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

15. $d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

16. $d\,\mathrm{arctg}\, x = \frac{dx}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

17. $d\,\mathrm{arcctg}\, x = -\frac{dx}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

18. $d\,\mathrm{sh}\, x = \mathrm{ch}\, x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

19. $d\,\mathrm{ch}\, x = \mathrm{sh}\, x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

20. $d\,\mathrm{th}\, x = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

21. $d\,\mathrm{cth}\, x = -\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}$, $x \neq 0$.

Пример 8.32. Вычислить дифференциал функции

$$y = x^3 \arccos\left(\frac{x}{3}\right) + x^2\sqrt{9-x^2},$$

используя его свойства.

$$\Delta\ dy = d\left(x^3 \arccos\left(\frac{x}{3}\right) + x^2\sqrt{9-x^2}\right) = d\left(x^3 \arccos\left(\frac{x}{3}\right)\right) + d\left(x^2\sqrt{9-x^2}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{x}{3}\right)dx^3 + x^3 d\arccos\left(\frac{x}{3}\right) + \sqrt{9-x^2}\,dx^2 + x^2 d\sqrt{9-x^2} =$$

$$= \arccos\left(\frac{x}{3}\right)3x^2dx + x^3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{3}\right)dx + \sqrt{9-x^2}\cdot 2xdx +$$

$$+ x^2\frac{(-2x)}{2\sqrt{9-x^2}}dx = \left(3x^2\arccos\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{18x-4x^3}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx,\ |x|<3.\ \blacktriangle$$

Пример 8.33. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции и их дифференциалы du и dv известны. Найти dy, если $y = u^v$.

Δ Используя свойства дифференциала, имеем

$$dy = d(u^v) = d(e^{v\ln u}) = e^{v\ln u}d(v\ln u) =$$

$$= u^v(\ln u\,dv + vd\ln u) = u^v\left(\ln u\,dv + \frac{v}{u}du\right).\ \blacktriangle$$

8.10. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, то производную $f'(x)$ называют *производной первого порядка* или первой производной функции $f(x)$. Если функция $f'(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, то ее производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* функции $f(x)$. Обозначают производную второго порядка

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = D^2 f(x).$$

Аналогично, если функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз, *производной n-го порядка* от функции $y = f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка. Обозначают производную n-го порядка

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = D^n f(x), \text{ т. е. } f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

При этом считают, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Пример 8.34. Найти производную второго порядка функции

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right).$$

$$\Delta \ f'(x) = \left(\ln\left(1 + x^2\right)\right)' = \frac{2x}{1 + x^2},$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)' = \frac{2\left(1 + x^2\right) - (2x)^2}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{2\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}. \ \blacktriangle$$

Пример 8.35. Найти y', y'', y''', если $y = f(e^x)$, а $f(x)$ – трижды дифференцируемая функция.

Δ Применяя правило дифференцирования сложной функции, последовательно вычисляем производные и получаем

$$y' = \left(f(e^x)\right)' = e^x f'(e^x), \quad y'' = \left(e^x f'(e^x)\right)' = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x),$$

$$y''' = \left(e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)\right)' =$$

$$= e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x) + 2e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x) =$$

$$= e^x f'(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^{3x} f'''(e^x),$$

где штрихи у функции $f(e^x)$ означают взятие производных указанного порядка по своему аргументу e^x. ▲

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы n раз, а α и β – постоянные, то:

1) $(\alpha u + \beta v)^{(n)} = \alpha u^{(n)} + \beta v^{(n)}$;

2) $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1$.

Формулу для нахождения $(uv)^{(n)}$ называют формулой Лейбница.

При вычислении производных порядка n часто используют следующие формулы:

1) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, если $0 < a \neq 1$;

4) $(e^x)^{(n)} = e^x$;

5) $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$;

6) $\left((ax+b)^\alpha\right)^{(n)} = a^n\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n}$.

Пример 8.36. Найти $y^{(20)}$, если $y = x^2e^{2x}$.

Δ Воспользуемся формулой Лейбница. Обозначим $u = x^2$, $v = e^{2x}$.

Вычислим производные. Имеем: $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = u^{(4)} = \ldots = u^{(20)} = 0$ и $v' = 2e^{2x}$, $v'' = 2^2e^{2x}, \ldots, v^{(20)} = 2^{20}e^{2x}$.

Найденные производные подставим в формулу Лейбница. Получим

$$\left(x^2e^{2x}\right)^{(20)} = C_{20}^0u^{(0)}v^{(20)} + C_{20}^1u'v^{(19)} + C_{20}^2u''v^{(18)} =$$

$$= x^2\cdot 2^{20}e^{2x} + 20\cdot 2x\cdot 2^{19}e^{2x} + \frac{20\cdot 19}{2}\cdot 2\cdot 2^{18}e^{2x} = 2^{20}\left(x^2+20x+95\right)e^{2x}. \ \blacktriangle$$

Пример 8.37. Найти производную порядка n функции $y = \frac{2}{x^2-1}$.

Δ Представим функцию в виде

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Применив правило дифференцирования разности, имеем

$$\left(\frac{2}{x^2-1}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}.$$

В формуле для вычисления производной $\left((ax+b)^\alpha\right)^{(n)}$, положив $\alpha = -1$, $a = 1$, $b = \pm 1$, получим

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-1-n+1)(x+1)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-1-n+1)(x-1)^{-1-n} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{2}{x^2-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right). \ \blacktriangle$$

Если функция $y=f(x)$ задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in(a;b)$, то производные вычисляют по формулам:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\ \ y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\ \ y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} \text{ и т. д.}$$

Производную второго порядка также находят используя формулу

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Пример 8.38. Найти y'_x и y''_{xx}, если функция $y=f(x)$ задана параметрически $x=a(\sin t-t\cos t)$, $y=a(\cos t+t\sin t)$, $t\in(0;\pi)$.

Δ Находим

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(a(\cos t+t\sin t)\right)'_t}{\left(a(\sin t-t\cos t)\right)'_t}=\frac{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}=\frac{\cos t}{\sin t}=\operatorname{ctg} t.$$

И затем получаем

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{(\operatorname{ctg} t)'_t}{\left(a(\sin t-t\cos t)\right)'_t}=\frac{-\dfrac{1}{\sin^2 t}}{at\sin t}=-\frac{1}{at\sin^3 t}. \ \blacktriangle$$

Пример 8.39. Функция $y=f(x)$ дифференцируема достаточное число раз. Найти производные x', x'' обратной функции $x=f^{-1}(y)$, предполагая, что эти производные существуют.

Δ Применяя правило вычисления производной от обратной функции, получаем

$$x'_y=\frac{1}{y'_x},\ \ x''_{yy}=(x'_y)'_y=\left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y=\frac{-1}{\left(y'_x\right)^2}y''_{xx}x'_y=\frac{-y''_{xx}}{\left(y'_x\right)^2}\left(\frac{1}{y'_x}\right)=\frac{-y''_{xx}}{\left(y'_x\right)^3}. \ \blacktriangle$$

Если функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)=0$, то для нахождения $y^{(n)}(x)$ дифференцируют тождество $F\left(x,f(x)\right)\equiv 0$ по x, применяя к левой части правило вычисления производной сложной функции n раз. Из полученных соотношений определяют производные функции $f(x)$.

Пример 8.40. Найти y'_x, y''_{x^2} от функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 + y^2 = 9$, если $y > 0$ и $|x| < 3$.

Δ *Первый способ.* Дифференцируя тождество $x^2 + y^2(x) - 9 \equiv 0$ два раза, получаем $\begin{cases} 2x + 2yy' \equiv 0, \\ 2 + 2(y')^2 + 2yy'' \equiv 0. \end{cases}$ Из первого уравнения находим $y' = -\dfrac{x}{y}$. Из второго уравнения имеем

$$y'' = \frac{-1-(y')^2}{y} = \frac{-1-\left(\dfrac{-x}{y}\right)^2}{y} = -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{9}{y^3}.$$

Второй способ. Дифференцируя тождество $x^2 + y^2(x) - 9 \equiv 0$, получаем $2x + 2yy' \equiv 0$. Откуда $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Далее используем правило вычисления старших производных с учетом найденного y':

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = \frac{-y + x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{9}{y^3}. \ \blacktriangle$$

Дифференциалы высших порядков определяют, как и производные высших порядков, рекуррентно:

$$d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right),\ d^1 f(x) = df(x),\ d^0 f(x) = f(x).$$

Если x независима, то $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n$, где $dx^n = (dx)^n$.

Дифференциал n-го порядка независимой переменной x при $n > 1$ считают равным нулю, т. е. $d^n x = 0$ при $n > 1$. В случае если x является не независимой переменной, а функцией $\varphi(t)$ какой-то переменной t, то форма дифференциала при $n > 1$ не сохраняется. Уже при $n = 2$ имеем $d^2 f(x) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. Для дифференциалов n-го порядка справедливы формулы, аналогичные формулам для n-й производной.

Если для функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференциалы $d^n u$ и $d^n v$ существуют, а α и β – постоянные, то:

1) $d^n(\alpha u + \beta v) = \alpha d^n u + \beta d^n v$;

2) $d^n(uv) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} u d^k v$.

Пример 8.41. Найти второй дифференциал функции $y = e^{x^2}$, считая x независимой переменной.

Δ *Первый способ*. По определению второго дифференциала находим

$$d^2y = d(dy) = d\left(de^{x^2}\right) = d\left(\left(e^{x^2}\right)' dx\right) = d\left(e^{x^2} \cdot 2x\,dx\right) =$$

$$= 2xdxd\left(e^{x^2}\right) + d(2x)e^{x^2}dx = e^{x^2} \cdot 4x^2dx^2 + 2e^{x^2}dx^2 = 2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)dx^2.$$

Второй способ. Вычисляем вторую производную

$$y'' = \left(e^{x^2}\right)'' = \left(e^{x^2}2x\right)' = e^{x^2} \cdot 4x^2 + 2e^{x^2} = 2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)$$

и по формуле $d^2y = y''dx^2$ находим $d^2y = 2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)dx^2$. ▲

Пример 8.42. Найти второй дифференциал функции $y = \sin(3x)$, если:

а) x – независимая переменная;

б) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – дважды дифференцируемая функция независимой переменной t.

Δ а) Поскольку x – независимая переменная, то $d^2y = y''(x)dx^2$. Находим $y''(x)$:

$$y''(x) = (\sin(3x))'' = (3\cos(3x))' = -9\sin(3x).$$

Тогда $d^2y = -9\sin(3x)dx^2$.

б) По определению второго дифференциала

$$d^2y = d\left(dy(x)\right) = d\left(y'(x)dx\right) = d\left(y'(x)\right)dx + y'(x)d^2x =$$

$$= y''(x)dx^2 + y'(x)d^2x =$$

$$= -9\sin\left(3\varphi(t)\right)\left(\varphi'(t)dt\right)^2 + 3\cos\left(3\varphi(t)\right)\varphi''(t)dt^2 =$$

$$= \left(3\cos\left(3\varphi(t)\right)\varphi''(t) - 9\sin\left(3\varphi(t)\right)\left(\varphi'(t)\right)^2\right)dt^2. \ \blacktriangle$$

Пример 8.43. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ дважды дифференцируемые функции. Найти d^2y, если $y = uv^2$.

Δ Используя инвариантность формы первого дифференциала, получаем

$$dy = d\left(uv^2\right) = v^2du + 2uvdv;\ d^2y + d(dy) = d\left(v^2du + 2uvdv\right) =$$

$$= 2vdvdu + v^2d^2u + 2vdudv + 2udv^2 + 2uvd^2v =$$

$$= 4vdudv + v^2d^2u + 2udv^2 + 2uvd^2v. \ \blacktriangle$$

Пример 8.44. Найти $d^{100}y$, если $y = x\operatorname{sh}x$, а x – независимая переменная.

Δ Поскольку x – независимая переменная $d^{100}y = y^{(100)}dx^{100}$.

Для вычисления $y^{(100)}$ применим формулу Лейбница, обозначив $u = x$, $v = \operatorname{sh}x$:

$$y^{(100)} = C_{100}^{0}x\operatorname{sh}x + C_{100}^{1}\operatorname{ch}x = x\operatorname{sh}x + 100\operatorname{ch}x.$$

Окончательно получаем

$$d^{100}y = (x\operatorname{sh}x + 100\operatorname{ch}x)dx^{100}. \blacktriangle$$

Если $s = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\dfrac{ds(t)}{dt^2}$ есть ускорение этого движения.

Пример 8.45. Точка движется по закону $s(t) = 2t^2 + \dfrac{5}{3}t^3$ (s измеряется в метрах, t – в секундах). Найти ее ускорение через 5 с после начала движения.

Δ Исходя из физического смысла второй производной, получаем

$$a = s''(t) = \left(2t^2 + \frac{5}{3}t^3\right)'' = \left(4t + 5t^2\right)' = 4 + 10t \text{ м/с}^2.$$

В конце 5-й с ускорение равно $a(5) = 54$ м/с^2.$\blacktriangle$

Пример 8.46. Доказать, что при движении тела по закону $s(t) = be^t + ce^{-t}$ (b и c – постоянные) его ускорение численно равно пройденному пути.

Δ Ускорение $a = s''(t) = \left(be^t + ce^{-t}\right)'' = \left(be^t - ce^{-t}\right)' = be^t + ce^{-t} = s(t)$. $\blacktriangle$

8.11. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема 8.3. *Если:* 1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в окрестности точки* $x = a$, *за исключением, быть может, самой точки* a, *где* a – *число или символ* ∞, *причем* $g'(x) \neq 0$ *в этой окрестности;* 2) *обе функции одновременно либо бесконечно малые, либо бесконечно большие при* $x \to a$; 3) *существует конечный* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема остается справедливой, если $a \to +\infty$, $a \to -\infty$, $a \to a+0$, $x \to a-0$. Отметим, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ может существовать при отсутствии $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример 8.47. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ не может быть найден по правилу Лопиталя.

Δ Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$ не существует, то правило Лопиталя нельзя применить. Тем не менее

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 8.48. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{8x-\sin(7x)}$.

Δ При $x=0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для функций $f(x)=\sin(5x)$ и $g(x)=x-\sin(7x)$ выполнены все условия правила Лопиталя в окрестности точки $x=0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{8x-\sin(7x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(5x))'}{(8x-\sin(7x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cos(5x)}{8-7\cos(7x)} = \frac{5}{8-7} = 5. \ \blacktriangle$$

Пример 8.49. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(2x)}{x}$.

Δ При $x \to +\infty$ числитель и знаменатель неограниченно возрастают. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, применим правило Лопиталя. Получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(2x))'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0. \ \blacktriangle$$

Иногда при вычислении пределов правило Лопиталя нужно применять несколько раз.

Пример 8.50. Найти $a = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

Δ Имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталя, получаем

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}.$$

Снова имеем дело с неопределенностью того же типа $\frac{\infty}{\infty}$, поэтому применим правило Лопиталя еще раз:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{2x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0. \quad \blacktriangle$$

Правило Лопиталя иногда выгодно применять в сочетании с другими приемами нахождения пределов функций. В частности, используют замечательные пределы, замену переменной и асимптотические равенства вида $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $\operatorname{sh} x\sim x$, $\operatorname{arctg} x\sim x$, $\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$.

Пример 8.51. Найти $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x^{20}}$.

Δ Если применить правило Лопиталя непосредственно к заданной неопределенности $\frac{0}{0}$, то функция, от которой находим предел, ухудшится. Поэтому для вычисления предела предварительно сделаем замену переменной $\frac{1}{x^4}=t$. При этом имеем $a=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^5}{e^t}$. Применив правило Лопиталя пять раз, получаем $a=5!\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}=0$. $\blacktriangle$

Пример 8.52. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\operatorname{tg}^3 x}$.

ΔПоскольку $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\operatorname{tg}^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$.

Применяя правило Лопиталя к неопределенности $\frac{0}{0}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)'}{\left(x^3\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, искомый предел равен $\frac{1}{3}$. ▲

Пример 8.53. Найти $a = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6(2x)}$.

Δ Раскрывая неопределенность вида $\frac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, находим

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^3} - 1 - x^3\right)'}{\left(\sin^6(2x)\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} 3x^2 - 3x^2}{12\sin^5(2x)\cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(e^{x^3} - 1\right)}{4\sin^5(2x)\cos(2x)}.$$

Поскольку неопределенность $\frac{0}{0}$ сохранилась, можно снова применять правило Лопиталя, но при этом функция, от которой находится предел, только ухудшается. Поэтому, так как $e^{x^3} - 1 \sim x^3$ и $\sin(2x) \sim 2x$ при $x \to 0$, перепишем предел в виде

$$a = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x^3}{4(2x)^5 \cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{128\cos(2x)} = \frac{1}{128}. \ ▲$$

З а м е ч а н и е 8.9. Следует помнить, что заменять на эквивалентные величины можно выражения, стоящие в числителе или знаменателе дроби как сомножители. Если же в числителе или знаменателе стоит сумма, то отдельные слагаемые нельзя заменять эквивалентными величинами, поскольку такая замена может привести к ошибке. Так, нельзя использовать соотношение $e^{x^3} - 1 \sim x^3$ при $x \to 0$ в выражении $e^{x^3} - 1 - x^3$, стоящем в числителе примера 8.53.

Неопределенности вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ можно с помощью тождественных преобразований свести к основным $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и затем применять правило Лопиталя.

Для раскрытия неопределенности вида $0 \cdot \infty$ преобразуют соответствующее произведение $f(x) \cdot g(x)$, где $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$, в частное $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ $\left(\text{вид } \frac{0}{0}\right)$ или $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ $\left(\text{вид } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

В случае неопределенности вида $\infty-\infty$ преобразуют соответствующую разность $f(x)-g(x)$ при условии $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ при $x\to a$ к дроби

$$\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}} \quad \left(\text{вид } \frac{0}{0}\right).$$

Неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞ раскрывают используя основное логарифмическое тождество $(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$. Иногда применяют предварительное логарифмирование. При этом неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞ сводятся к неопределенности $0\cdot\infty$.

Замечание 8.10. Выражения вида 0^∞ и ∞^∞ не являются неопределенностями.

Пример 8.54. Найти $a=\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Δ Преобразуя неопределенность вида $\infty-\infty$ к виду $\dfrac{0}{0}$, получаем

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}.$$

Поскольку при $x\to 0$ $x\sim\sin x$, то

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

По правилу Лопиталя имеем

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0. \quad \blacktriangle$$

Пример 8.55. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

Δ Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Перейдем к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ и применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}x=0. \quad \blacktriangle$$

Пример 8.56. Найти $a=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}(2x)}$.

Δ *Первый способ*. Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Используя основное логарифмическое тождество и непрерывность показательной функции, получаем

$$a=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}(2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\operatorname{tg}(2x)\ln\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}(2x)\ln\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}(2x)}}=e^{\beta}.$$

Применим правило Лопиталя к пределу, который находится в показателе и представляет неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Имеем

$$\beta=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}(2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\ln\operatorname{tg}x)'}{\left(\operatorname{ctg}(2x)\right)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\sin^2(2x)}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2(2x)}{\operatorname{tg}x\cos^2 x}=-1.$$

Тогда $a=e^{-1}$.

Второй способ. Обозначим функцию, предел которой находим, через y, т. е. $y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}(2x)}$ и прологарифмируем ее. Следовательно,

$$\ln y=\ln(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}(2x)}=\operatorname{tg}(2x)\ln\operatorname{tg}x.$$

Вычислим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}(2x)\ln\operatorname{tg}x$$

по правилу Лопиталя, преобразовав неопределенность вида $0\cdot\infty$ к $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}x\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}(2x)}=-1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}y=e^{-1}$. ▲

Пример 8.57. Найти $a=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

Δ Налицо неопределенность вида ∞^0. Применяя формулу $u^v = e^{v \ln n}$ $(u > 0,\ v > 0)$ и пользуясь возможностью перехода к пределу в показателе функции e^x, получаем

$$a = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 2\cos x \ln \operatorname{tg} x}.$$

Преобразуя в показателе функции неопределенность вида $0 \cdot \infty$ к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ и применяя правило Лопиталя, имеем

$$a = e^{2\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}} = e^{2\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}} = e^{2\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1(-\sin x)}{\cos^2 x}}} = e^{2\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}} = e^0 = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 8.58. Найти $\lim\limits_{x \to +0} (\operatorname{tg} x)^x$.

Δ Здесь необходимо раскрыть неопределенность вида 0^0. Обозначим функцию, находящуюся под пределом, через y, т. е. $y = (\operatorname{tg} x)^x$, и прологарифмируем ее. Получим

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^x = x \ln \operatorname{tg} x.$$

Имеем неопределенность $0 \cdot \infty$, которую сводим к неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$, т. е. записываем $\ln y$ в виде $\ln y = \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{x}}$ и применяем правило Лопиталя

$$\lim_{x \to +0} \ln y = \lim_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -\lim_{x \to +0} \left(\frac{x}{\sin x} x \frac{1}{\cos x} \right) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to +0} y = e^0 = 1$. $\blacktriangle$

З а м е ч а н и е 8.11. С помощью правила Лопиталя легко получить часто применяемые на практике пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} x^x = 1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=p;$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}=0\ \ (p>0);$

5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^p}{a^x}=0\ \ (p>0,\ a>1);$

6) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^p\ln x=0\ \ (p>0);$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k.$

8.12. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

1. Выучить основные правила и формулы дифференцирования элементарных функций.

2. Если функция сложная, то выяснить, композицию каких элементарных функций она представляет. Определить количество этих функций, чтобы знать, сколько раз применять правило цепочки.

3. При дифференцировании, если удобно, вводить промежуточные аргументы.

4. Использовать логарифмическую производную для функций, имеющих вид, удобный для логарифмирования.

5. Использовать основное логарифмическое тождество при вычислении производной и дифференциала от показательно степенной функции.

6. Прежде чем применять правило Лопиталя, не забывать проверять, что отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

7. Правило Лопиталя сочетать с другими приемами нахождения предела функции. В частности, использовать замечательные пределы и асимптотические равенства.

Задачи для самостоятельной работы

Исходя из определения производной, найти производные следующих функций:

8.1. $y = \dfrac{2}{x^2}$, $x \neq 0$. **8.2.** $y = 3\sin x + \cos x$. **8.3.** $y = \sqrt{x}$, $x > 0$. **8.4.** $y = 2^x$.

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

8.5. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

8.6. $y = \arcsin x + \arccos x$.

8.7. $y = x \operatorname{tg} x$.

8.8. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

8.9. $y = x^2 7^{2x}$.

8.10. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

8.11. $y = \dfrac{1}{35} \ln^5 (7x + 3)$.

8.12. $y = \dfrac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$.

8.13. $y = (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x)^p$.

8.14. $y = \ln^3 (\sin x)$.

8.15. $y = \sqrt{1 + \ln^2 (3x)}$.

8.16. $y = \sin\left(3^x\right)$.

8.17. $y = 2^{\sin x}$.

8.18. $y = e^{\operatorname{sh}^2 x}$.

8.19. $y = \operatorname{th}\left(\ln(9x)\right)$.

8.20. $y = x^{\ln x}$.

8.21. $y = \sqrt[x]{x}$.

Найти производные y'_x от следующих функций, заданных в неявном виде:

8.22. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **8.23.** $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. **8.24.** $y^2 - 2xy + a^2 = 0$.

Найти производные y'_x для функций y, заданных параметрически:

8.25. $x = b\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

8.26. $x = \dfrac{t+1}{2t}$, $y = \dfrac{t-1}{2t}$.

8.27. $x = t(1 - \sin t)$, $y = t\cos t$.

8.28. $x = b\left(1 - t^2\right)$, $y = b\left(t - t^3\right)$.

Найти производную x'_y, если:

8.29. $y = 3x + x^3$. **8.30.** $y = x - \dfrac{1}{3}\sin x$. **8.31.** $y = x + e^{\frac{x}{2}}$.

8.32. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \dfrac{2}{3}x^5 - \dfrac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

8.33. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1; -1)$.

8.34. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \dfrac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\dfrac{1}{2}$.

8.35. Выяснить, в каких точках и под каким углом пересекаются параболы $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

8.36. Показать, что гиперболы $xy = b$ и $x^2 - y^2 = a$ пересекаются под прямым углом.

8.37. Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$, если $f(x) = |x|$, и определить угол между правосторонней и левосторонней касательными в точке $M(0; 0)$. Написать уравнения правосторонней и левосторонней касательных.

8.38. Написать уравнения касательных к кривой, заданной параметрически $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ в точке при $t = \dfrac{\pi}{4}$ и в начале координат.

8.39. Написать уравнения касательной и нормали в точке $(2; 2)$ к кривой, заданной параметрически $x = \dfrac{1+t}{t^3}$, $y = \dfrac{3+t}{2t^2}$.

8.40. Тело массой 3 кг движется по закону $s = 1 + t + t^2$ (s измеряется в сантиметрах, t – в секундах). Определить кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения.

8.41. Количество электричества, протекшее через проводник начиная с момента времени $t = 0$, дается формулой $q = 2t^2 + 3t + 1$ (кулонов). Найти силу тока в конце 5-й с.

Найти дифференциалы функций:

8.42. $y = \ln \operatorname{ch} \dfrac{x}{2}$. **8.43.** $y = \cos^3 \dfrac{x}{3}$. **8.44.** $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2} \right)^2$.

Найти приближенные значения:

8.45. $\arcsin 0{,}51$. **8.46.** $\operatorname{arctg} 1{,}05$. **8.47.** $\operatorname{tg} 46^\circ$.

8.48. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен 3,02 м.

8.49. Найти y'', если $y = \sin^2 x$.

8.50. Найти $y^{(5)}$, если $y = \ln(1 + x)$.

8.51. Найти $y^{(6)}$, если $y = \sin 2x$.

8.52. Найти $y^{(n)}$ от $y = 3^x$.

8.53. Найти $y^{(n)}$ от $y = xe^x$.

8.54. Найти y'', если $x = \ln t$, $y = t^2$.

8.55. Найти y'', если $x = \arcsin t$, $y = \sqrt{1-t^2}$.

8.56. Найти $y^{(3)}$, если $x = e^{-t}$, $y = t^3$.

8.57. Найти y'' из уравнения $y = x + \operatorname{arctg} y$.

8.58. Найти y'' и x'' из уравнения $y = x + \ln y$.

8.59. Найти dy, d^2y, d^3y, если $y = x(\ln x - 1)$ и x – независимая переменная.

Найти пределы следующих функций:

8.60. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

8.61. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

8.62. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

8.63. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x)\operatorname{ctg} x$.

8.64. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6}\right)$.

8.65. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$.

8.66. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

8.67. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$.

Ответы и указания

8.1. $y' = -\dfrac{4}{x^3}$. **8.2.** $y' = 3\cos x - \sin x$. **8.3.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **8.4.** $y' = 2^x \ln 2$. **8.5.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **8.6.** $y' = 0$. **8.7.** $y' = \operatorname{tg} x + \dfrac{x}{\cos^2 x}$. **8.8.** $y' = \dfrac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$.

8.9. $y' = 2x \cdot 7^{2x}(1 + x\ln 7)$. **8.10.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. **8.11.** $y' = \dfrac{\ln^4(7x+3)}{7x+3}$.

8.12. $y' = \operatorname{tg}^4 x \cdot \sec^2 x$. **8.13.** $y' = 0$. **8.14.** $y' = 3\ln^2(\sin x)\operatorname{ctg} x$. **8.15.** $y' = \dfrac{\ln(3x)}{x\sqrt{1+\ln^2(3x)}}$.

8.16. $y' = 3^x \ln 3 \cos\left(3^x\right)$. **8.17.** $y' = 2^{\sin x}\cos x \cdot \ln 2$. **8.18.** $y' = e^{\operatorname{sh}^2 x}\operatorname{sh}(2x)$.

8.19. $y' = \dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2\left(\ln(9x)\right)}$. **8.20.** $y' = 2x^{\ln x - 1}\ln x$. **8.21.** $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$.

8.22. $y'_x = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$. **8.23.** $y'_x = \dfrac{x\left(y^2 - 2x^2\right)}{y\left(2y^2 - x^2\right)}$. **8.24.** $y'_x = \dfrac{y}{y-x}$. **8.25.** $y'_x = -\dfrac{a}{b}\operatorname{tg} t$.

8.26. $y'_x=-1$. **8.27.** $y'_x=\dfrac{\cos t-t\sin t}{1-\sin t-t\cos t}$. **8.28.** $y'_x=\dfrac{3t^2-1}{2t}$. **8.29.** $x'_y=\dfrac{1}{3\left(1+x^2\right)}$.
8.30. $x'_y=\dfrac{3}{3-\cos x}$. **8.31.** $x'_y=\dfrac{2}{2+e^{\frac{x}{2}}}$. **8.32.** $\alpha=\operatorname{arctg}3$. **8.33.** $x-4y-5=0, 4x+y-3=0$.
8.34. $y+4x+4=0$, $8y-2x+15=0$. **8.35.** $A_1(2;4)$, $\varphi_1=\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{8}{15}\right)$, $A_2(-2;4)$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{8}{15}\right)$. **8.36.** $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. **8.37.** $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $y=x$, $y=-x$.
8.38. $(\pi+4)x+(\pi-4)y=\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{4}$, $y=0$. **8.39.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$.
8.40. $181{,}5\cdot10^3$. **8.41.** 23 А. **8.42.** $dy=\dfrac{1}{2}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}dx$. **8.43.** $dy=-\cos^2\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}dx$.
8.44. $dy=-\cos x dx$. **8.45.** 0,513. **8.46.** 0,811. **8.47.** 1,035. **8.48.** 28,66 м^2.
8.49. $y''=2\cos 2x$. **8.50.** $y^{(5)}=\dfrac{24}{(x+1)^5}$. **8.51.** $y^{(6)}=-64\sin 2x$. **8.52.** $y^{(n)}=3^x\ln^n 3$.
8.53. $y^{(n)}=xe^x+ne^x$. **8.54.** $y''=9t^3$. **8.55.** $y''=-\sqrt{1-t^2}$. **8.56.** $y^{(3)}=-6e^{3t}\left(1+3t+t^2\right)$.
8.57. $y''=-\dfrac{2y^2+2}{y^5}$. **8.58.** $y''=\dfrac{y}{(1-y)^3}$, $x''=\dfrac{1}{y^2}$. **8.59.** $dy=\ln x dx$, $d^2y=\dfrac{dx^2}{x}$, $d^3y=-\dfrac{dx^3}{x^2}$. **8.60.** $\dfrac{1}{2}$. **8.61.** ∞. **8.62.** 0. **8.63.** 0. **8.64.** $\dfrac{1}{5}$. **8.65.** 1. **8.66.** 1. **8.67.** 1.

Глава 9
ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

9.1. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$ имеет производные до n-го порядка включительно. Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора порядка n* для функции $f(x)$ в точке x_0 и обладает следующим свойством:

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\ k = 0, \ldots, n.$$

Обозначим отклонение значений функции $f(x)$ от значений построенного для нее многочлена Тейлора $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Формулу

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \qquad (9.1)$$

называют *формулой Тейлора* для функции $f(x)$ с центром в точке x_0, а $R_n(x)$ – *n-м остатком или n-м остаточным членом формулы Тейлора*. В частном случае при $x_0 = 0$ формулу (9.1) называют формулой Маклорена. В этом случае она принимает вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x).$$

Для тех значений x, для которых величина $R_n(x)$ достаточно мала, формула Тейлора позволяет заменить функцию на некотором интервале ее многочленом Тейлора. Вносимая при этом погрешность определяется путем оценки остаточного члена.

При указанных выше условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, остаточный член формулы Тейлора может быть представлен в виде

$$R_n(x) = o\Big((x-x_0)^n\Big).$$

В этом случае его называют *остаточным членом в форме Пеано*. Такое выражение $R_n(x)$ в основном используют при выделении главной части функции в окрестности точки x_0.

Пример 9.1. Разложить функцию $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

Δ Найдем значения $f(x)$ и ее производных в точке $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1;\ f'(1) = \Big(9x^2 - 4\Big)\Big|_{x=1} = 5;\ f''(1) = 18x\,|_{x=1} = 18;$$

$$f'''(1) = 18;\ f^{(k)}(1) = 0$$

при $k \geq 4$. Согласно формуле Тейлора (9.1)

$$f(x) = 1 + 5(x-1) + \frac{18}{2!}(x-1)^2 + \frac{18}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= 1 + 5(x-1) + 9(x-1)^2 + 3(x-1)^3.\ \blacktriangle$$

Пример 9.2. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right).$$

Δ Заметим, что

$$\left(\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right)\right)^{(k)}\Bigg|_{x=0} = 3^k \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k\right).$$

Тогда искомое разложение имеет вид

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).\ \blacktriangle$$

Теорема 9.1. *Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и при $x \to x_0$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right). \qquad (9.2)$$

Тогда $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Единственным многочленом, допускающим представление функции по формуле (9.2), является ее многочлен Тейлора. Этот факт часто используется на практике: если удалось получить представление функции в виде (9.2) каким-то другим путем, без вычисления производных, то, как утверждает теорема, это и есть разложение функции по формуле Тейлора.

Пример 9.3. Выполнить разложение функции, указанной в примере 9.1, другим способом.

Δ Обозначим $t = x - 1$. Тогда

$$3x^3 - 4x + 2 = 3(t+1)^3 - 4(t+1) + 2 =$$

$$= 3t^3 + 9t^2 + 9t + 3 - 4t - 4 + 2 = 3t^3 + 9t^2 + 5t + 1.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$f(x) = 1 + 5(x-1) + 9(x-1)^2 + 3(x-1)^3. \ \blacktriangle$$

Пример 9.4. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \frac{1}{8x - 4}.$$

Δ Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии:

$$1 + t + t^2 + \ldots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}.$$

Откуда получаем $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... + t^n + \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.

При $|t| < 1$ выражение $\dfrac{t^{n+1}}{1-t} = o(t^n)$.

Приведем функцию к виду $\dfrac{1}{8x-4} = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{1-2x}$.

Полагая в окрестности $|x|<\frac{1}{2}$ точки $x=0$ $t=2x$, получим

$$\frac{1}{8x-4}=-\sum_{k=0}^{n}2^{k-2}x^{k}+o\left(x^{n}\right). \ ▲$$

Потребуем существование в окрестности точки x_0 всех производных до $(n+1)$-го порядка включительно. В этом случае остаточный член может быть представлен в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Это выражение напоминает очередное $(n+1)$-е слагаемое в формуле Тейлора, с той лишь разницей, что производная $(n+1)$-го порядка вычисляется не в точке x_0, а в некоторой точке из ее окрестности. Такое представление остаточного члена удобно использовать при вычислении погрешности, получаемой в результате замены функции ее многочленом Тейлора на некотором интервале.

З а м е ч а н и е 9.1. Известно, что производная нечетной функции есть функция четная, а производная четной функции – нечетная. А так как любая непрерывная нечетная функция при $x=0$ обращается в нуль, то у нечетной функции $f^{(2k)}(0)=0$, а у четной $f^{(2k+1)}(0)=0$, $k\in\mathbb{N}$.

Следовательно, формула Маклорена для нечетной функции имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right),$$

а для четной функции

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

Пример 9.5. Вычислить приближенно $\arcsin\frac{1}{3}$.

Δ Применим формулу Маклорена для нечетной функции $\arcsin x$ при $x=\frac{1}{3}$:

$$\arcsin\frac{1}{3}=(\arcsin x)'|_{x=0}\,\frac{1}{3}+\frac{(\arcsin x)^{(3)}|_{x=0}}{3!}\,\frac{1}{27}+R_4\left(\frac{1}{3}\right)=$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{27\cdot 3} + R_4\left(\frac{1}{3}\right) \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{81} \approx 0{,}3395.$$

Оценим погрешность приближенного вычисления:

$$\left|R_4\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{\arcsin^{(5)}(c)}{5!}\right| \frac{1}{3^5} = \frac{3\left(8c^4 + 24c^2 + 3\right)}{120\sqrt{\left(1-c^2\right)^9}\cdot 243} \le 0{,}001,$$

где $0 < c < \dfrac{1}{3}$. ▲

Замечание 9.2. Пусть $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x = 0$. В формуле Маклорена для $f(x)$ возьмем $k = \overline{0, n+1}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{n+1}\right).$$

Соответствующее разложение для $f'(x)$ имеет вид

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o\left(x^n\right), \tag{9.3}$$

где $c_k = \dfrac{f^{(k+1)}(0)}{k!}$. Покажем, что, зная коэффициенты разложения (9.3), можно построить разложение $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{n+1}\right) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0) x^{k+1}}{(k+1)k!} +$$

$$+ o\left(x^{n+1}\right) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right). \tag{9.4}$$

9.1.1. Формулы Маклорена для основных элементарных функций

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$

2. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$

4. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$

5. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

7. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n).$

9.1.2. Разложение функции по формуле Тейлора

Пример 9.6. Разложить функцию $y = \operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до $o\left(x^5\right)$.

Δ Для решения задачи используем *метод неопределенных коэффициентов*. Поскольку $\operatorname{tg} x$ – нечетная функция, то в ее разложении не будет четных степеней x:

$$\operatorname{tg} x = ax + bx^3 + cx^5 + o\left(x^6\right).$$

Коэффициенты a, b, c ищем из равенства

$$\sin x = \left(ax + bx^3 + cx^5 + o\left(x^6\right)\right)\cos x.$$

Далее используем разложения 2 и 3:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^6\right) = \left(ax + bx^3 + cx^5 + o\left(x^6\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x в левой и правой частях уравнения, находим $a = 1;\ b = \frac{1}{3};\ \ c = \frac{2}{15}.$ Итак,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o\left(x^6\right). \ \blacktriangle$$

Пример 9.7. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ следующие функции:

а) $f(x) = \ln\frac{5+3x}{4-2x}$; б) $f(x) = e^{2x}\operatorname{sh} 3x.$

Δ а) При $|x| < \frac{5}{3}$

$$\ln\frac{5+3x}{4-2x} = \ln\frac{5}{4} + \ln\left(1 + \frac{3}{5}x\right) - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Используем разложение 7:

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{t^k}{k} + o\left(t^n\right).$$

При $t = \frac{3x}{5}$ и $t = -\frac{x}{2}$

$$\ln\left(\frac{5+3x}{4-2x}\right) = \ln\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{3^k x^k}{5^k k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{2^k k} + o\left(x^n\right) =$$

$$= \ln\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\left(\frac{(-1)^{k-1}\cdot 3^k}{5^k} + \frac{1}{2^k}\right) + o\left(x^n\right).$$

б) Здесь проще привести функцию к виду

$$e^{2x}\operatorname{sh} 3x = \frac{e^{5x} - e^{-x}}{2}.$$

Используем разложение 1:

$$e^t = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + o(t^n).$$

Тогда

$$e^{2x}\operatorname{sh} 3x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(5^k + (-1)^{k+1}\right)\frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right). \ \blacktriangle$$

Пример 9.8. Разложить по формуле Маклорена функцию

$$f(x)=\operatorname{ch}(\sin x) \text{ до } o\left(x^5\right).$$

Δ При разложении сложной функции $\operatorname{ch}(\sin x)$ будем использовать известные разложения 2 и 5. Для обеспечения заданной точности в разложении функции $y=\operatorname{ch} t$ (при $t=\sin x$) достаточно взять $n=2$:

$$\operatorname{ch} t=1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+o\left(t^5\right),$$

где $t=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^6\right)=x\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^5\right)\right)$. Тогда

$$\operatorname{ch}(\sin x)=1+\frac{1}{2}x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^5)\right)+$$

$$+\frac{1}{24}x^4\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^5\right)\right)^4+o\left(x^5\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{24}x^4+o\left(x^5\right)=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^5\right). \blacktriangle$$

Пример 9.9. Разложить функцию $f(x)=(4x-1)\left(5+4x+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ в окрестности точки $x=-2$ до $o\left((x+2)^5\right)$.

Δ Введем замену $t=x+2$. Поскольку

$$f(x)=(4x-1)\left(5+4x+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(4(t-2)-1\right)\left(5+4(t-2)+(t-2)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(4t-9)\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=F(t),$$

то далее задача сводится к разложению $F(t)$ по формуле Маклорена до $o(t^5)$.

Используем формулу 6:

$$(4t-9)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}=(4t-9)\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{3t^4}{4\cdot 2}+o(t^5)\right)=$$

$$=-9+4t+\frac{9}{2}t^2-2t^3-\frac{27}{8}t^4+\frac{3}{2}t^5+o\left(t^5\right).$$

Соответственно, для $f(x)$ получим разложение

$$(4x-1)\left(5+4x+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -9+4(x+2)+\frac{9}{2}(x+2)^2-2(x+2)^3-$$

$$-\frac{27}{8}(x+2)^4+\frac{3}{2}(x+2)^5+o\left((x+2)^5\right). \ \blacktriangle$$

Пример 9.10. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ следующие функции:

а) $y=\operatorname{arctg} x$; б) $y=\arccos x$.

Δ При решении задачи будем использовать разложения производных данных функций и формулу (9.4).

а) $(\operatorname{arctg} x)'=\left(1+x^2\right)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right)$. Откуда согласно (9.4)

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right).$$

б) $\left(\arccos x\right)'=-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k}+o\left(x^{2n+1}\right).$

По формуле (9.4)

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+2}\right). \ \blacktriangle$$

9.1.3. Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора

Пример 9.11. Оценить абсолютную погрешность формулы

$$\sin x \simeq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!} \text{ при } |x|\le 0{,}1.$$

Δ Для получения абсолютной погрешности формулы оценим остаточный член в форме Лагранжа:

$$|R_6(x)|=\left|\frac{\sin^{(7)}(0{,}1\theta)}{7!}x^7\right|\le\frac{(0{,}1)^7}{7!}\simeq 2\cdot 10^{-10},\ 0<|\theta|<1. \ \blacktriangle$$

Пример 9.12. Вычислить приближенно $\cos 12°$.

Δ Пользуясь разложением 3, получаем:

$$\cos 12° = \cos\frac{\pi}{15} = 1 - \frac{\pi^2}{15^2 \cdot 2} + \frac{\pi^4}{15^4 \cdot 4!} + R_5(\pi/15) \approx$$

$$\approx 1 - \frac{\pi^2}{450} + \frac{\pi^4}{50\,625 \cdot 24} \approx 0{,}978\,148.$$

При этом точность полученного приближения

$$\left|R_5\left(\frac{\pi}{15}\right)\right| = \frac{|\cos^{(6)}(c)|}{6!}\frac{\pi^6}{15^6} \le \frac{\pi^6}{6! \cdot 15^6} \approx 10^{-6}. \ \blacktriangle$$

Пример 9.13. Вычислить $\sqrt{10}$ с точностью до 10^{-5}.

Δ Разложим функцию $\sqrt{x}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 9$:

$$\sqrt{x} = 3 + \frac{1}{2 \cdot 3}(x-9) - \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 3^3}(x-9)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n! \cdot 3^{2n-1}}(x-9)^n + R_n(x), \ n = 2, 3, \ldots,$$

где $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n (2n-1)!! \cdot (x-9)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)! \cdot \left(9 + \theta(x-9)\right)^{n+\frac{1}{2}}}, \ 0 < \theta < 1.$

При $x = 10$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 2 \cdot 3^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n! \cdot 3^{2n-1}} + R_n(10).$$

Для обеспечения заданной точности приближенного вычисления $\sqrt{10}$ оценим остаточный член:

$$|R_n(10)| = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)! \cdot (9+\theta)^{n+1/2}} < 10^{-5}.$$

Неравенство справедливо при $n \ge 4$. Следовательно,

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2^2 \cdot 2 \cdot 3^3} + \frac{3!!}{2^3 \cdot 3! \cdot 3^5} - \frac{5!!}{2^4 \cdot 4! \cdot 3^7} \approx 3{,}162\,28. \ \blacktriangle$$

9.1.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Пусть требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to x_0$. Для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ используют метод выделения главной части функции при $x\to x_0$. С этой целью, если возможно, применяют разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано. При этом в разложениях можно ограничиться лишь первыми членами, отличными от нуля: $f(x)=a_k(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^k\right)$, $g(x)=b_m(x-x_0)^m+o\left((x-x_0)^m\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_m}, & k=m,\\ 0, & k>m,\\ \infty, & k<m.\end{cases}$$

Неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, а также 0^0, ∞^0, 1^∞ после несложных преобразований приводятся к виду $\dfrac{0}{0}$.

Пример 9.14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-2x}-\cos 2x}{\ln(1-x)}$.

Δ Функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, являются бесконечно малыми при $x\to 0$. Выделим главные части этих функций в окрестности точки $x=0$. Поскольку

$$(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+o\left(t^3\right),$$

то при $t=-2x$ и $\alpha=\dfrac{1}{3}$ имеем $\sqrt[3]{1-2x}=1-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{9}x^2+o\left(x^2\right)$.

Далее

$$\sqrt[3]{1-2x}-\cos 2x=1-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}x^2+o\left(x^2\right)-1-\frac{4x^2}{2}+o\left(x^2\right)=-\frac{2}{3}x+o(x),$$

$$\ln(1-x)=-x+o(x).$$

Очевидно, определяющую роль в разложениях играют члены первого порядка относительно x. Искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x+o(x)}{-x+o(x)}=\frac{2}{3}.\ \blacktriangle$$

Пример 9.15. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-\sqrt[3]{1+3\sin x}}{x^2\cos x}$.

Δ В окрестности нуля

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^4\right)\ \text{(см. пример 9.6)}.$$

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+o\left(t^4\right).$$

При $t=\operatorname{tg}x$

$$e^{\operatorname{tg}x}=1+\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right),\ (1+t)^{1/3}=1+\frac{t}{3}-\frac{t^2}{3^2}+\frac{5t^3}{3^4}+o\left(t^3\right).$$

При $t=3\sin x$

$$\sqrt[3]{1+3\sin x}=1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{5}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$=1+x-x^2+\frac{3}{2}x^3+o\left(x^3\right),$$

$$x^2\cos x=x^2\left(1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)\right)=x^2+o\left(x^3\right).$$

Тогда выражение $\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-\sqrt[3]{1+3\sin x}}{x^2\cos x}$ можно записать в виде $\dfrac{\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}$.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}=\dfrac{3}{2}$. ▲

Пример 9.16. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Δ Преобразуем исходное выражение

$$\frac{1}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{\left(e^x-1\right)\cos x-\sin x}{\sin x\left(e^x-1\right)}.$$

Найдем разложение знаменателя дроби с помощью формул 1, 2:

$$\sin x\left(e^x-1\right)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)-1\right)=x^2+o\left(x^2\right).$$

Числитель дроби целесообразно разложить до $o\left(x^2\right)$:

$$\left(e^x-1\right)\cos x-\sin x=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-1\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)-$$

$$-x+o\left(x^2\right)=x+\frac{x^2}{2}-x+o\left(x^2\right)=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right).$$

Искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}=\frac{1}{2}.\ ▲$$

Пример 9.17. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{ch}\sin x-1}}$.

Δ Поскольку $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{ch}\sin x-1}}=e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\operatorname{ch}\sin x-1}}$, то далее будем искать

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\operatorname{ch}\sin x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{\operatorname{ch}\sin x-1},$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right),\ \ \frac{\sin x-x}{x}=-\frac{x^2}{3!}+o\left(x^3\right).$$

Поскольку $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$, то при $t = \frac{\sin x - x}{x}$ имеем

$$\ln\left(1 + \frac{\sin x - x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right),$$

$$\operatorname{ch}(\sin x) - 1 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right) - 1 = \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1 + \frac{\sin x - x}{x}\right)}{\operatorname{ch}\sin x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)} = -\frac{1}{3}$$

и искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{ch}\sin x - 1}} = e^{-\frac{1}{3}}$. ▲

Пример 9.18. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt[3]{5-x} + \sin^2(x-4) - e^{x^2-2x-8}}{x^3 - 8x^2 + 16x}\right)$.

Δ Сделаем замену $t = x - 4$:

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{(1-t)^{\frac{1}{3}} + \sin^2 t - e^{t^2+6t}}{t^3 + 4t^2}\right).$$

$$(1-t)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2} - e^{t^2+6t} = 1 - \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} - \frac{5}{81}t^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4t^2}{2} + o(t^3)\right) -$$

$$-1 - (t^2 + 6t) - \frac{(t^2+6t)^2}{2} - \frac{(t^2+6t)^3}{6} + o(t^3) = 1 - \frac{t}{3} - \frac{t^2}{9} - \frac{5t^3}{81} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} +$$

$$+ t^2 - 1 - t^2 - 6t - 18t^2 - 42t^3 + o(t^3) = -\frac{19}{3}t + o(t).$$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{19}{3}t + o(t)}{t^3 + 4t^2} = \infty$. Следовательно, искомый предел равен ∞. ▲

9.2. УСЛОВИЯ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИЙ. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Напомним определения монотонных функций, данные в главе 6.

Определение 9.1. Функция $y = f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале $(a; b)$, если для любых точек x_1, x_2 из этого интервала, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) \le f(x_2) \ \big(f(x_1) \ge f(x_2)\big). \tag{9.5}$$

В случае строгого неравенства в (9.5) говорят, что функция возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$.

9.2.1. Условия монотонности функций

Теорема 9.2. *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a; b)$.

1. *Для того чтобы* $f(x)$ *не убывала* (*не возрастала*) *на* $(a; b)$, *необходимо и достаточно, чтобы всюду на интервале функция имела неотрицательную* (*неположительную*) *производную:* $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$.

2. *Для возрастания* (*убывания*) *функции* $f(x)$ *на интервале* $(a; b)$ *достаточно, чтобы всюду на интервале производная* $f'(x)$ *была бы положительной* (*отрицательной*): $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

Заметим, что условие $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ не является необходимым условием возрастания (убывания) функции. Действительно, функция $y = x^3$ возрастает на всей числовой оси: $x_1^3 < x_2^3$ при $x_1 < x_2$. Однако при $x = 0$ производная $(x^3)' = 3x^2$ обращается в нуль.

9.2.2. Локальный экстремум функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 9.2. Говорят, что ***функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум*** (***минимум***), если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех x выполняется неравенство

$$f(x) \le f(x_0) \ \big(f(x) \ge f(x_0)\big). \tag{9.6}$$

В случае строгого неравенства в (9.6) говорят о строгом локальном максимуме (минимуме) функции. Для краткости далее слово «локальный» будем опускать.

Точки максимума и минимума функции объединяют одним общим названием «точки экстремума функции».

Теорема 9.3 (необходимое условие экстремума). *Если функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* x_0 *экстремум, то производная* $f'(x)$ *в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

Точки, в которых функция определена, а производная либо равна нулю, либо не существует, называются *критическими точками функции*. Именно в этих точках следует искать экстремум функции.

Теорема 9.4 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $y = f(x)$ *дифференцируема в некоторой окрестности точки* x_0 *за исключением, быть может, самой этой точки. Если при переходе через точку* x_0 *производная функции меняет знак с плюса на минус* (*с минуса на плюс*)*, то в точке* x_0 *функция имеет максимум* (*минимум*)*. Если же знак производной не меняется, то в этой точке нет экстремума.*

Теорема 9.5 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $y = f(x)$ *n раз дифференцируема в точке* x_0 $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда если* $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *а* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *то при четном n в точке* x_0 *есть экстремум, причем при* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *– максимум, при* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *– минимум. Если же n – нечетное число, то экстремума в точке* x_0 *нет.*

Отметим частный случай теоремы 9.5 при $n = 2$.

Если $f'(x_0) = 0$, *а* $f''(x_0) \neq 0$, *то при* $f'(x_0) < 0$ *в точке* x_0 *максимум, а при* $f''(x_0) > 0$ *– минимум.*

9.2.3. Отыскание наибольшего и наименьшего значения функции

Согласно теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

В задачах на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ отыскивают ее критические точки x_k, $a \leq x_k \leq b$, и если таковые имеются, то наибольшее и наименьшее значения функции на $[a;b]$ выбирают среди чисел $f(a)$, $f(b)$, $f(x_k)$.

Пример 9.19. Камень брошен с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком значении угла α дальность полета камня будет наибольшей.

Δ Как известно, дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту с заданной начальной скоростью, описывается формулой $l(\alpha) = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ $(0 < \alpha < \pi/2)$. Определяем $l'(\alpha) = 2v_0^2 \cos 2\alpha / g$. Уравнение $l'(\alpha) = 0$ на интервале $(0; \pi/2)$ имеет единственное решение $\alpha_0 = \pi/4$. При переходе через это значение производная $l'(\alpha)$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, точка $\alpha_0 = \pi/4$ – точка максимума функции $l(\alpha)$. Максимальная дальность полета камня $l = v_0^2/g$. ▲

Пример 9.20. Найти цилиндр заданного объема V с наименьшей площадью полной поверхности.

Δ Пусть r, h – радиус основания и высота цилиндра соответственно. Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$. Площадь полной поверхности равна $S = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + 2V/r$. Найдем критические точки функции $S(r)$, решая уравнение $S'(r) = 2\pi r - 2V/r^2 = 0$. Откуда получаем единственное решение $r_0 = \sqrt[3]{V/\pi}$. Поскольку $S''(r) = 2\pi + 4V/r^2 > 0$, то точка r_0 является точкой минимума для $S(r)$. При значении радиуса основания $r = r_0$ цилиндр заданного объема V имеет наименьшую площадь полной поверхности $S = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$. ▲

Пример 9.21. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону

$$P(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2}.$$

Здесь t выражается в часах. Определить максимальный размер этой популяции.

Δ Найдем первую и вторую производные:

$$P'(t) = \frac{1000\left(100 - t^2\right)}{\left(100 + t^2\right)^2}, \quad P''(t) = -2000t\frac{300 - t^2}{\left(100 + t^2\right)^3}.$$

Очевидно, $P'(10) = 0$ и $P''(10) < 0$. Следовательно, максимальный размер популяции равен $P(10) = 1050$, причем достигается по прошествии 10 ч роста. ▲

Пример 9.22. Газовая смесь состоит из окиси азота (NO) и кислорода (O_2). Найти концентрацию O_2, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с наибольшей скоростью.

Δ При условиях практической необратимости скорость v реакции

$$2NO + O_2 = 2NO_2$$

выражается формулой $v = kx^2 y$, где x – концентрация NO в каждый момент времени; y – концентрация O_2; k – константа скорости реакции, зависящая только от температуры и не зависящая от концентрации реагирующих компонентов.

Пусть концентрация газов выражена в объемных процентах. Тогда $y = 100 - x$ и $v = kx^2(100 - x)$, причем $0 < x < 100$. Производная

$v'_x = k\left(200x - 3x^2\right)$ в интервале $0 < x < 100$ имеет корень $x = x_1 = 66{,}67$ %. Вторая производная $v'' = k\left(200x - 3x^2\right)$ и $v''(x_1) < 0$. Следовательно, в точке x_1 максимум. И скорость v реакции наибольшая, когда $x = 66{,}67$ %. ▲

Пример 9.23. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровеносного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса и других физиологических показателей.

Пусть x – доза назначенного лекарства; $y = f(x) = x^2(a - x)$ – степень реакции, $a = \text{const} > 0$. При каком значении x реакция максимальна?

Δ Вычислим первую и вторую производные $f'(x) = 2ax - 3x^2$, $f''(x) = 2a - 6x$. Найдем корень уравнения $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$. В силу того, что $f''\left(\frac{2}{3}a\right) = -2a < 0$, $x = \frac{2}{3}a$ – уровень дозы, который дает максимальную реакцию. ▲

9.3. ВЫПУКЛОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть функция $y = f(x)$ в каждой точке $(a;b)$ имеет конечную производную. Тогда график функции в каждой точке $\left(x, f(x)\right)$, $x \in (a;b)$ имеет касательную, непараллельную оси Oy.

Определение 9.3. Говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет на $(a;b)$ выпуклость, направленную вверх (вниз), если график функции в пределах интервала $(a;b)$ лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

Теорема 9.6 (достаточное условие выпуклости функции). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$. Если при этом $f''(x) \le 0$ $\left(f''(x) \ge 0\right)$ всюду на интервале, то график функции имеет на $(a;b)$ выпуклость, направленную вверх* (*вниз*).

Действительно, если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a;b)$, то в окрестности любой точки x_0 из этого интервала, согласно формуле Тейлора, функция представима в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right),$$

т. е. график функции при $x \to x_0$ мало чем отличается от параболы. При этом, если старший коэффициент параболы $\frac{f''(x_0)}{2!}$ положителен, то парабола выпукла вниз, если этот коэффициент отрицателен, выпукла вверх. Таким образом, направление выпуклости графика функции полностью характеризуется значением второй производной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную (в точке $(x_0; f(x_0))$ график функции имеет касательную).

Определение 9.4. Точка $M\left(x_0; f(x_0)\right)$ графика функции $f(x)$ называется ***точкой перегиба*** этого графика, если существует такая окрестность точки x_0, в пределах которой слева и справа от x_0 график функции имеет разные направления выпуклости.

Геометрический смысл точки перегиба графика функции заключается в следующем: график функции в точке $M\left(x_0; f(x_0)\right)$ переходит с одной стороны касательной на другую. Точку x_0 при этом называют *точкой перегиба функции* $f(x)$.

Теорема 9.7 (необходимое условие точки перегиба). *Если точка x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$ и в этой точке существует вторая производная, то $f''(x_0) = 0$.*

З а м е ч а н и е 9.3. При отыскании точек перегиба функции следует рассматривать те точки, в которых вторая производная либо равна нулю, либо не существует, т. е. исследовать критические точки производной функции.

Теорема 9.8 (первое достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.*

Теорема 9.9 (второе достаточное условие точки перегиба). *Пусть $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$.*

Пример 9.24. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

Δ Функция определена при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Находим:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^4}}, \quad f''(x) = \frac{2x\left(9 - x^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^7}}.$$

Уравнение $f''(x) = 0$ имеет три корня в области определения функции: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. В этих точках существуют конечные производные и график функции имеет касательные, непараллельные оси Oy. Поскольку $f''(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -3)$, $(-1; 0)$, $(1; 3)$, то график функции на этих интервалах имеет выпуклость, направленную вниз. На интервалах $(-3; -1)$, $(0; 1)$, $(3; +\infty)$ $f''(x) < 0$ и график функции имеет выпуклость, направленную вверх. Очевидно, при переходе через точки x_1, x_2, x_3 вторая производная меняет знак. Следовательно, указанные точки есть точки перегиба графика функции. ▲

Пример 9.25. Найти точки перегиба графика функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями

$$x(t) = te^t, \ y(t) = te^{-t}, \ t > 0.$$

Δ Функции $x(t)$, $y(t)$ бесконечно дифференцируемы, причем производная $x'(t) = e^t(t+1)$ положительна. Следовательно, параметрические уравнения при $t > 0$ определяют функцию $y = f(x)$, производные которой можно найти по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \ y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

В нашем случае

$$y'_x = \frac{e^{-2t}(1-t)}{(1+t)}, \ y''_{xx} = -2e^{-3t}\frac{\left(2-t^2\right)}{(1+t)^3}.$$

Уравнение $y''_{xx} = 0$ имеет при $t > 0$ единственный корень $t = \sqrt{2}$. При этом значении t функция $y = f(x)$ имеет конечную производную y'_x, а при переходе через точку $t = \sqrt{2}$ вторая производная y''_{xx} меняет знак. Следовательно, при этом значении параметра t график функции $y = f(x)$ имеет точку перегиба. Значению $t = \sqrt{2}$ соответствует точка $\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; \ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}\right)$ графика, в которой график функции имеет перегиб. ▲

9.4. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Определение 9.5. Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \infty.$$

Пример 9.26. График функции $y = \dfrac{1}{(x+1)\left(x^2+9\right)}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, так как

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{1}{(x+1)\left(x^2+9\right)} = +\infty, \quad \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{(x+1)\left(x^2+9\right)} = -\infty.$$

Пусть функция определена для всех $x > a$ ($x < a$).

Определение 9.6. Если существуют такие числа k и b, что при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$

$$\lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \left(f(x) - (kx+b)\right) = 0,$$

то прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Геометрически можно так истолковать наличие наклонной асимптоты: при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ функция немногим отличается от линейной функции $y = kx + b$.

В частном случае, если $k = 0$, асимптота называется *горизонтальной*.

Теорема 9.10. *Для того чтобы график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \ \text{ и } \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x\to -\infty)}} \left(f(x) - kx\right) = b. \tag{9.7}$$

Пример 9.27. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$.

Δ Заданная функция непрерывна на всей числовой оси, поэтому вертикальных асимптот не имеет. Найдем наклонные асимптоты графика функции:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-1}{\left(x^2+1\right)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-1}{x^2+1} = 0.$$

Очевидно, $y = x$ – наклонная асимптота графика функции как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$. ▲

9.4.1. Рекомендации по исследованию функций и построению графиков

При исследовании поведения функции и построении графика будем придерживаться следующей схемы:

1. Определить область существования и область непрерывности функции, точки разрыва. Исследовать поведение функции в граничных точках.

2. Исследовать функцию на периодичность, четность, нечетность.

3. Найти асимптоты графика функции.

4. Найти производную, промежутки возрастания и убывания функции. Определить критические точки и исследовать функцию в этих точках на экстремум.

5. Найти вторую производную, промежутки выпуклости функции, точки перегиба.

6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

7. Результаты исследований занести в таблицу, нарисовать график.

9.4.2. Примеры построения графиков

Пример 9.28. Построить график функции $y=(x-2)\sqrt[3]{(x+4)^2}$.

Δ 1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси $x\in(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва нет.

Исследуем поведение функции на границе области определения:

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)}(x-2)\sqrt[3]{(x+4)^2}=+\infty(-\infty).$$

2. Данная функция не является периодической, не обладает четностью и нечетностью.

3. Поскольку функция непрерывна всюду, то у ее графика нет вертикальных асимптот. Отсутствуют также и наклонные асимптоты, так как

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)\sqrt[3]{(x+4)^2}}{x}=\infty.$$

4. Вычислим производную функции:

$$f'(x)=\sqrt[3]{(x+4)^2}+(x-2)\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}=\frac{5x+8}{3\sqrt[3]{x+4}}\ \ (x\neq-4).$$

В точке $x=-4$

$$f'(-4+0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(-4+\Delta x)-f(-4)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(-6+\Delta x)\sqrt[5]{\Delta x^2}}{\Delta x}=-\infty;$$

$$f'(-4-0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{(-6+\Delta x)\sqrt[5]{\Delta x^2}}{\Delta x}=+\infty.$$

Уравнение $f'(x)=0$ имеет единственное решение $x=-1{,}6.$ Таким образом, в качестве критических точек функции будем рассматривать точки $x=-1{,}6$ и $x=-4$. Составим таблицу значений функции и ее производной с целью определения промежутков монотонности функции и точек экстремумов (табл. 9.1).

Таблица 9.1

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1{,}6)$	$-1{,}6$	$(-1{,}6;+\infty)$
$f'(x)$	+	$\nexists$	–	0	+
$f(x)$	Возрастает	0	Убывает	$\approx -6{,}45$	Возрастает

Функция возрастает на множестве $(-\infty;-4)\bigcup(-1{,}6;+\infty)$ и убывает на $(-4;-1{,}6)$. Согласно первому достаточному условию (теорема 9.4) в точке $x=-4$ функция имеет локальный максимум $y_{\max}=0,$ а в точке $x=-1{,}6$ – локальный минимум $y_{\min}=-\dfrac{36\sqrt[3]{90}}{25}\approx-6{,}45.$

5. Найдем вторую производную, интервалы выпуклости и точки перегиба:

$$f''(x)=\frac{2\left(5x+26\right)}{9\sqrt[3]{(x+4)^4}}.$$

Уравнение $f''(x)=0$ меет единственный корень $x=-5{,}2.$ Составим аналогичную таблицу значений функции и второй производной (табл. 9.2).

Таблица 9.2

x	$(-\infty;-5{,}2)$	$-5{,}2$	$(-5{,}2;-4)$	-4	$(-4;+\infty)$
y''	–	0	+	$\nexists$	+
y	Выпуклая вверх	$\approx -8{,}13$	Выпуклая вниз	0	Выпуклая вниз

График функции имеет выпуклость, направленную вверх на интервале $(-\infty;-5{,}2)$ и вниз на интервале $(-5{,}2;+\infty)$. На основании первого достаточного условия точки перегиба (теорема 9.8) точка $x=-5{,}2$ есть точка перегиба функции.

6. Найдем точки пересечения функции с осями координат:

$$\text{при } x=0 \quad y=-2\sqrt[3]{16}\approx -5{,}04;$$

$$\text{при } y=0 \quad x_1=-4,\ x_2=2.$$

По полученным данным построим график функции (рис. 9.1). ▲

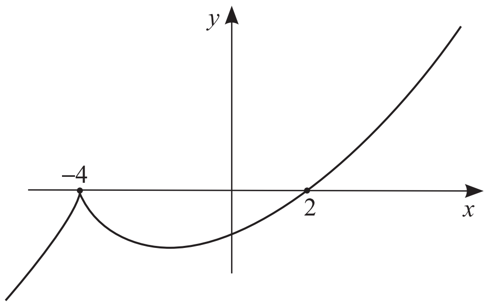


Рис. 9.1

Пример 9.29. Построить график функции $y=\dfrac{(x+4)^3}{(x+1)^2}$.

Δ 1. Функция определена и непрерывна на множестве $x\in(-\infty;-1)\cup\cup(-1;+\infty)$. Исследуем поведение функций на границе области определения:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^3}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}=\pm\infty.$$

В точке $x = 1$ разрыв второго рода. Отметим, что $x=-1$ – вертикальная асимптота графика функции.

2. Функция не является периодической, четной, нечетной.

3. Определим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+4)^3}{(x+1)^2x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+4)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=10.$$

Следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 10$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

4. $f'(x) = \dfrac{3(x+4)^2}{(x+1)^2} - \dfrac{2(x+4)^3}{(x+1)^3} = \dfrac{(x+4)^2(x-5)}{(x+1)^3}$ при $x \neq -1$.

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет два корня: $x = -4$ и $x = 5$.

Составим таблицу значений функции и ее производной (табл. 9.3).

Таблица 9.3

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1)$	-1	$(-1;5)$	5	$(5;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	$\nexists$	–	0	+
$f(x)$	Возрастает	0	Возрастает	$\nexists$	Убывает	20,25	Возрастает

Функция возрастает на множестве $x \in (-\infty;-1) \cup (5;+\infty)$ и убывает при $x \in (-1;5)$. При переходе через точку $x = 5$ производная меняет знак, следовательно, на основании первого достаточного условия (см. теорему 9.4) в точке $x = 5$ функция имеет локальный минимум $y_{\min} = 20{,}25$.

5. $f''(x) = \dfrac{54(x+4)}{(x+1)^4}$. При $x = -4$ $f''(x) = 0$.

Составим таблицу значений функции и второй производной (табл. 9.4).

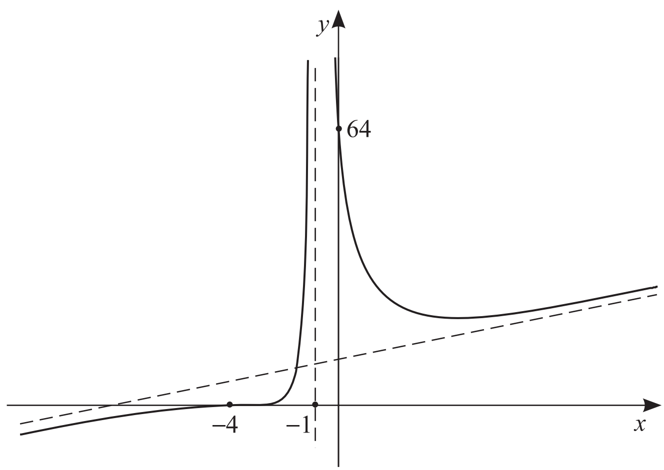


Рис. 9.2

Таблица 9.4

x	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
$f''(x)$	–	0	+	$\nexists$	+
$f(x)$	Выпуклость вверх	0	Выпуклость вниз	$\nexists$	Выпуклость вниз

График функции имеет выпуклость, направленную вверх при $x \in (-\infty;-4)$, и выпуклость, направленную вниз при $x \in (-4;-1) \bigcup (-1;+\infty)$. Очевидно, при переходе через точку $x = -4$ вторая производная меняет знак и по первому достаточному условию точка $x = -4$ есть точка перегиба функции.

6. Найдем точки пересечения с осями координат:

при $x = 0$ $y = 64$;
при $y = 0$ $x = -4$.

По полученным данным построим график функции (рис. 9.2). ▲

9.5. ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть кривая задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; t \in T. \qquad (9.8)$$

При исследовании такой кривой и построении графика целесообразно придерживаться следующей схемы:

1. В случае если множество T изменения параметра t не задано, найти его как общую часть областей определения функций $x(t)$, $y(t)$.

2. Проверить, обладает ли кривая симметрией. При этом следует учитывать, что если при любом $t \in T$ выполняется:

а) $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то кривая симметрична относительно оси Ox;

б) $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$, то кривая симметрична относительно оси Oy;

в) $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то кривая симметрична относительно начала координат.

Отметим также случай наложения: $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = y(t)$.

3. Проверить наличие асимптот. Следует учесть, что если при $t \to t_0 + 0$ $(t \to t_0 - 0)$:

а) $x(t) \to x_0$, а $y(t) \to \infty$, то $x = x_0$ – вертикальная асимптота;

б) $x(t) \to \infty$, а $y(t) \to y_0$, то $y = y_0$ – горизонтальная асимптота;

в) $x(t) \to \infty$ и $y(t) \to \infty$, то возможна наклонная асимптота $y = kx + b$, где k и b находятся по формулам (9.7).

4. Определить нули функций $x(t)$, $y(t)$, указать промежутки изменения параметра, на которых эти функции сохраняют знак.

5. Найти производные $x'(t)$, $y'(t)$, их нули, точки разрыва, отметить промежутки знакопостоянства. Если на каком-то промежутке $(t_k; t_{k+1})$ $x'(t)$ сохраняет знак, то $x(t)$ на этом промежутке строго монотонна и уравнения (9.8) на $(t_k; t_{k+1})$ задают параметрически функцию $y = f(x)$. Тогда $f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, $f''(x) = \dfrac{\left(f'(x)\right)'_t}{x'_t}$. Часть кривой, которая соответствует промежутку строгой монотонности $x(t)$, называется *ветвью функции* $y = f(x)$. Совокупность таких ветвей есть график функции $y = f(x)$.

6. Для определения направления выпуклости графика функции найти точки, в которых $f''(x) = 0$.

7. Составить таблицу значений функций $x(t)$, $y(t)$ и знаков $f'(x)$, $f''(x)$.

8. Используя таблицу и проведенные исследования, построить график кривой.

З а м е ч а н и е 9.4. При построении кривой, заданной параметрически, полезно предварительно построить графики функций $x(t)$, $y(t)$.

Пример 9.30. Построить кривую, заданную параметрически уравнениями:

$$x(t) = \frac{4t}{1-t^2}, \quad y(t) = \frac{t\left(1-4t^2\right)}{1-t^2}.$$

Δ 1. Параметрическое представление имеет смысл при $t \in (-\infty; -1) \cup$ $\cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Поскольку $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то кривая обладает симметрией относительно точки $O(0; 0)$, и далее достаточно исследовать поведение кривой на множестве $T = [0; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Проверим наличие асимптот: $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$. Следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота графика функции. Поскольку

$$\lim_{\substack{t \to 1+0 \\ (t \to 1-0)}} x(t) = -\infty(+\infty), \quad \lim_{\substack{t \to 1+0 \\ (t \to 1-0)}} y(t) = +\infty(-\infty),$$

значит, возможна наклонная асимптота. Находим

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to 1}\frac{1-4t^2}{4} = -\frac{3}{4},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t\left(1-4t^2\right)}{1-t^2}+\frac{3t}{1-t^2}\right) = 4.$$

Итак, кривая обладает вертикальной асимптотой $x = 0$ и наклонной –

$$y = -\frac{3}{4}x + 4.$$

4. На множестве T имеем

$x(t) = 0$ при $t = 0$ и $y(t) = 0$ при $t = 0$ и $t = \dfrac{1}{2}$;

$x(t) > 0$ при $t \in (0;1)$, $x(t) < 0$ при $t \in (1;+\infty)$;

$y(t) > 0$ при $t \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right) \bigcup (1;+\infty)$, $y(t) < 0$ при $t \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

5. $x'(t) = \dfrac{4\left(t^2+1\right)}{\left(1-t^2\right)^2}$, $y'(t) = \dfrac{4t^4-11t^2+1}{\left(1-t^2\right)^2}$.

На рассматриваемом множестве T $x'(t) > 0$ и $x(t)$ строго монотонно возрастает. Уравнение $y'(t) = 0$ имеет корни $t_1 = \dfrac{\sqrt{2\left(11-\sqrt{105}\right)}}{4} \approx 0{,}307$ и $t_2 = \dfrac{\sqrt{2\left(11+\sqrt{105}\right)}}{4} \approx 1{,}630$. Функция $y(t)$ монотонно возрастает на множестве $(0;t_1)\bigcup(t_2;+\infty)$ и монотонно убывает на множестве $(t_1;1)\bigcup(1;t_2)$. На каждом из указанных интервалов функция $x(t)$ строго монотонно возрастает и параметрические уравнения кривой на каждом интервале задают функцию $y = f(x)$. Найдем производные этой функции:

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t^4-11t^2+1}{4\left(t^2+1\right)}, \quad f''(x) = \frac{\left(f'(x)\right)'_t}{x'_t} = \frac{t\left(t^2+3\right)\left(t^2-1\right)^3}{2\left(t^2+1\right)^3}.$$

6. Уравнение $f''(x) = 0$ на множестве T имеет корни $t = 0$ и $t = 1$. При $t \in (0;1)$ $(x \in (0;+\infty))$ график функции имеет выпуклость вверх, а при $t \in (1;+\infty)$ $(x \in (-\infty;0))$ – выпуклость вниз. При $t = 0$ график функции имеет точку перегиба $(0;\,0)$.

7. Составим таблицу значений $x(t)$, $y(t)$ и знаков $f'(x), f''(x)$ (табл. 9.5).

Таблица 9.5

t	$(0;0{,}307)$	$(0{,}307;1)$	$(1;1{,}630)$	$(1{,}630;+\infty)$
$x(t)$	$(0;1{,}349)$	$(1{,}349;+\infty)$	$(-\infty;-3{,}937)$	$(-3{,}937;0)$
$y(t)$	$(0;0{,}211)$	$(0{,}211;-\infty)$	$(+\infty;9{,}471)$	$(9{,}471;+\infty)$
$f'(x)$	+	–	–	+
$f''(x)$	–	–	+	+

Из табл. 9.5 следует, что интервалу $(0;1)$ изменения переменной t соответствует ветвь кривой, которая является графиком функции $y=y_1(x)$ с направлением выпуклости вверх. При $t\in(0;0{,}307)$ функция $y_1(x)$ возрастает, при $t\in(0{,}307;1)$ – убывает, причем значению $t\approx 0{,}307$ соответствует точка максимума $x_0\approx 1{,}349$ и $y_1(x_0)\approx 0{,}211$.

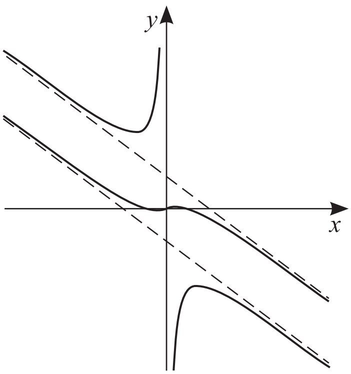


Рис. 9.3

Интервалу $(1;+\infty)$ соответствует график функции $y=y_2(x)$ с направлением выпуклости вниз. При $t\in(1;1{,}630)$ функция $y_2(x)$ убывает, при $t\in(1{,}630;+\infty)$ – возрастает, причем значению $t\approx 1{,}630$ соответствует точка минимума $x_1\approx -3{,}937$ и $y_2(x_1)\approx 9{,}471$.

8. Построим график кривой, используя при этом симметрию кривой относительно начала координат (рис. 9.3). ▲

Задачи для самостоятельной работы

Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до $o\left((x-x_0)^n\right)$:

9.1. $f(x)=\ln\left(x^2+4x-3\right),\ x_0=3.$

9.2. $f(x)=(2x-1)\sqrt{2-x},\ \ x_0=1.$

9.3. $f(x)=\ln\dfrac{2x+9}{-x-3},\ x_0=-4.$

9.4. $f(x)=\dfrac{x^2-6x+4}{x^2-8x+12},\ x_0=5.$

9.5. $f(x)=(x+3)\left(4+\ln(x+5)+x\right),\ x_0=-4.$

9.6. $f(x)=\log_3\sqrt[3]{3x-\dfrac{1}{3}},\ x_0=3.$

9.7. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4.$ **9.8.** $f(x)=xe^{2x},\ x_0=-1.$

Разложить по формуле Маклорена до члена указанного порядка:

9.9. $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}-x\sin x$ до $o\left(x^4\right)$.

9.10. $f(x)=e^{\sin x}$ до $o\left(x^6\right)$.

9.11. $f(x)=\ln\cos x$ до $o\left(x^4\right)$.

9.12. $f(x)=\sin^3 x\cos x$ до $o\left(x^6\right)$.

9.13. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ до $o\left(x^5\right)$.

9.14. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{3x}}$ до $o\left(x^7\right)$.

С помощью формулы Тейлора найти приближенные значения:

9.15. $\sqrt{37}$ с точностью до 10^{-4}. **9.17.** $\lg 10{,}25$ с точностью до 10^{-3}.

9.16. $\cos 3^\circ$ с точностью до 10^{-4}. **9.18.** e с точностью до 10^{-5}.

Найти пределы, используя разложения элементарных функций:

9.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}\right)$.

9.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

9.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x}+e^{\operatorname{tg} x}-2}{\dfrac{\sin x}{x}-\cos x-\dfrac{x^2}{3}}$.

9.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-e^{\frac{x^2}{3}}}{\ln\left(1+3x^2\right)-3x^2\cos x}$.

9.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

9.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e\cdot\sqrt[3]{1-4x^2}}{\dfrac{1}{x}\arcsin 2x-2\operatorname{ch} x^2}$.

Исследовать функции и построить их графики:

9.25. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$.

9.26. $y=(x-1)^2e^{-(x-1)^2}$.

9.27. $y=(x+2)\ln^{\frac{2}{3}}(x+2)$.

9.28. $y=2x+4\operatorname{arcctg} x$.

9.29. $y=2+\sqrt{\dfrac{(x+4)^3}{x-2}}$.

9.30. $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2}{3x}}$.

9.31. $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{x}{2}$.

9.32. $y=x^2e^{-x}$.

9.33. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

9.34. $y=\dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Исследовать функции и построить кривые, заданные параметрически:

9.35. $x(t)=\dfrac{t^3}{t^3+1},\ \ y(t)=\dfrac{t^3}{t+1}.$

9.36. $x(t)=t^3+3t+1,\ \ y(t)=t^3-3t+1.$

9.37. $x(t)=\dfrac{\ln t}{t^2},\ \ y(t)=t^2\ln t.$

9.38. $x(t)=\dfrac{t}{3-t^2},\ \ y(t)=\dfrac{t\left(2-t^2\right)}{3-t^2}.$

9.39. $x(t)=\dfrac{e^t}{t},\ \ y(t)=(t-1)^2e^t.$

9.40. $x(t)=t-\sin t,\ \ y(t)=t-\cos t.$

Ответы и указания

9.1. $\ln 24+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\dfrac{1}{6^k}+\dfrac{1}{4^k}\right)(x-3)^k+o\left((x-3)^n\right).$

9.2. $1+\dfrac{3}{2}(x-1)-\dfrac{9}{8}(x-1)^2-\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{3(2k-1)(2k-5)!!}{2^k\cdot k!}(x-1)^k+o\left((x-1)^n\right).$

9.3. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\left((-1)^{k-1}\cdot 2^k+1\right)}{k}(x+4)^k+o\left((x+4)^n\right).$

9.4. $\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{(-1)^k}{3^{k+1}}-1\right)(x-5)^k+o\left((x-5)^n\right).$

9.5. $\dfrac{5}{2}(x+4)^2-2(x+4)+\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{(-1)^k(2k-1)}{k(k-1)}(x+4)^k+o\left((x+4)^n\right).$

9.6. $\dfrac{\ln\frac{26}{3}}{3\ln 3}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(3\ln 3)k}\left(\dfrac{9}{26}\right)^k(x-3)^k+o\left((x-3)^n\right).$

9.7. $2+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{k!(k-1)!2^{4k-2}}(x-4)^k+o\left((x-4)^n\right).$

9.8. $-e^{-2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{-2}2^{k-1}(k-2)}{k!}(x+1)^k+o\left((x+1)^n\right).$

9.9. $1-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{x^4}{18}+o\left(x^4\right).$ **9.10.** $1+x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^5}{15}-\dfrac{x^6}{40}+o\left(x^6\right).$

9.11. $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)$. **9.12.** $x^3-x^5+o\left(x^6\right)$.

9.13. $-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3-\frac{11}{32}x^4+\frac{21}{64}x^5+o\left(x^5\right)$.

9.14. $x^2-3x^3+\frac{9}{2}x^4-\frac{9}{2}x^5+\frac{27}{8}x^6-\frac{81}{40}x^7+o\left(x^7\right)$.

9.15. 6,082 8. **9.16.** 0,998 6. **9.17.** 1,011. **9.18.** 2,718 28. **9.19.** 2. **9.20.** 0. **9.21.** ∞. **9.22.** $\frac{1}{18}$. **9.23.** $\frac{5}{24}$. **9.24.** $\frac{15}{24}e$.

9.25. Точки разрыва $x=\pm 1$. Нуль функции $x = 0$. Минимум $y = 0$ при $x = 0$. Функция четная. Асимптоты $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$. Точка перегиба графика функции $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

9.26. Нуль функции $x = 1$. Минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y=\frac{1}{e}$ при $x = 0$ и $x = 2$. Асимптота $y = 0$.

9.27. $x > -2$. Нуль функции $x = -1$. Минимум $y = 0$ при $x = -1$. Максимум $y=e^{-\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ при $x=e^{\frac{2}{3}}-2$. Точка перегиба графика функции $\left(e^{\frac{1}{3}}-2; e^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

9.28. Асимптота $y = 2x$ при $x\to\infty$, $y=2x+4\pi$ при $x\to-\infty$. Максимум $y=3\pi-2$ при $x = -1$, минимум $y=\pi+2$ при $x = 1$. Точка перегиба графика функции $(0; 2\pi)$.

9.29. Асимптота $y = -x - 5$ при $x\to-\infty$, $y = x + 9$ при $x\to\infty$. Минимум $y=2+9\sqrt{3}$ при $x = 5$, краевой минимум $y = 2$ при $x = -4$.

9.30. Нуль функции $x=\sqrt[3]{2}$. Асимптоты $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ при $x\to+\infty$ и $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ при $x\to-\infty$. Вертикальная асимптота $x = 0$ при $x\to 0-0$. Минимум $y = 1$ при $x=-1$.

9.31. Нуль функции $x = 0$. Асимптоты $y=-\frac{x+8}{2}$ при $x\to-\infty$ и $y=-\frac{x-8}{2}$ при $x\to+\infty$. Минимум $y=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x=\sqrt{3}$. Точка перегиба графика функции $(0; 0)$.

9.32. Нуль функции $x = 0$. Асимптота $y = 0$ при $x\to\infty$. Минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y=4e^{-2}$ при $x = 2$. Точки перегиба графика функции $x_1=\sqrt{3}-1$, $x_1=\sqrt{3}+1$; $y\left(x_1\right)\approx 0{,}3$, $y\left(x_2\right)\approx 0{,}47$.

9.33. Нуль функции $x = 1$. Асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. Минимум $y = 0$ при $x = 1$, максимум $y = 4e^{-2}$ при $x = e^2$. Точка перегиба функции $x=e^{\frac{\left(3\pm\sqrt{5}\right)}{2}}$.

9.34. Нуль функции $x = 1$. Точка разрыва $x = 2$. Асимптоты $y = x + 1$, $x = 2$. Минимум $y = \dfrac{27}{4}$ при $x = 4$. Точка перегиба графика функции $(1; 0)$.

9.35. Кривая состоит из четырех ветвей. Первая: $x \le 0$, $-\dfrac{1}{2} < y \le 0$, $y(0) = 0$; асимптота $y = -\dfrac{1}{2}$; возрастает; выпукла вниз. Вторая: $x \le 0$, $y \le 0$, $y(0) = 0$; асимптота $y = 2x + \dfrac{1}{2}$; возрастает; выпукла вверх. Третья: $x > 1$, $y > 0$; асимптоты $x = 1$, $y = 2x + \dfrac{1}{2}$; минимум $y = 4$ при $x = \dfrac{4}{3}$; выпукла вниз. Четвертая: $x > 1$, $y < 0$; асимптоты $x = 1$, $y = -\dfrac{1}{2}$; возрастает; выпукла вверх. Точка $(0; 0)$ − точка возврата кривой.

9.36. Область определения: $x \in R$. Максимум $y = 3$ при $x = -3$; минимум $y = -1$ при $x = 5$. Точка перегиба графика функции $(1; 1)$.

9.37. Кривая симметрична относительно прямой $y = -x$. На промежутке $(-\infty; 0)$ – минимум $y = -\dfrac{1}{2e}$ при $x = -\dfrac{e}{2}$. Асимптота $y = 0$. Точка перегиба графика функции $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}};\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}}\right)$.

9.38. Кривая состоит из трех ветвей. Первая: $y(-x) = -y(x)$, $y = 0$ при $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$; минимум $y = -\dfrac{1}{2}$ при $x = -\dfrac{1}{2}$; максимум $y = \dfrac{1}{2}$ при $x = \dfrac{1}{2}$; асимптоты $y = -x + \sqrt{3}$ при $x \to +\infty$, $y = -x - \sqrt{3}$ при $x \to -\infty$; точка $(0; 0)$ − точка перегиба графика функции. Вторая: $x > 0$; асимптоты $x = 0$, $y = -x - \sqrt{3}$; максимум $y = -\dfrac{4}{\sqrt{2/3}}$ при $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Третья: симметрична со второй ветвью относительно начала координат.

9.39. Асимптота $y = 1$. Точка возврата $(e; 0)$. Точка перегиба графика функции $\left(-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}};\ \dfrac{25}{9}e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

9.40. $x \in R$. Функция периодическая с периодом 2π. Прямые $x = \pi n$ $n \in Z$ − оси симметрии. На $[0; 2\pi)$ минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = 2$ при $x = \pi$. Выпукла вверх.

Глава 10
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10.1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X (на отрезке, в конечном или бесконечном интервале или полуинтервале).

Определение 10.1. Функцию $F(x)$ называют ***первообразной*** функции $f(x)$ в промежутке X, если $F(x)$ дифференцируема в этом промежутке и справедливо равенство

$$F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in X. \tag{10.1}$$

Если $X = [a;b]$, то под дифференцируемостью функции в граничных точках $x = a$, $x = b$ отрезка понимают существование конечных правосторонней и левосторонней производных соответственно.

Пример 10.1. Δ Функция $F(x) = x^2$ является первообразной функции $f(x) = 2x$ на всей числовой прямой R, так как $F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x \ \ \forall x \in R$.

Поскольку $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ для $x \neq 0$, то функция $F(x) = \dfrac{1}{x}$ является первообразной функции $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

В более общем случае первообразной для функции $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \neq -1$, будет функция $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, поскольку $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$. ▲

Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то эта первообразная не единственна. Так, для функции $f(x) = 3x^2$ первообразными будут функции x^3, $x^3 + 1$, $x^3 - 2$ и вообще $x^3 + C$, где C – произвольное постоянное число, поскольку $\left(x^3 + C\right)' = 3x^2$.

Теорема 10.1. *Дифференцируемые в промежутке X функции* $F(x)$ *и* $\Phi(x)$ *являются в этом промежутке первообразными функции* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in X \quad F(x) - \Phi(x) = C = \text{const}.$$

Из теоремы 10.1 следует, что для заданной функции $f(x)$ достаточно найти в рассматриваемом промежутке какую-либо одну первообразную $F(x)$, чтобы знать все первообразные функции $f(x)$ в этом промежутке.

Определение 10.2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ в некотором промежутке называют ***неопределенным интегралом*** от этой функции в данном промежутке и обозначают $\int f(x)dx.$ При этом символ $\int$ называют ***знаком интеграла***, $f(x)$ – ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, а x – ***переменной интегрирования***.

По определению

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C\}, \tag{10.2}$$

где $F(x)$ – какая-либо первообразная функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке, а C – произвольная постоянная величина, называемая *постоянной интегрирования*. Правая часть (10.2) определяет бесконечное множество, состоящее из элементов $F(x) + C$. Формулу (10.2) принято записывать без фигурных скобок, опуская обозначение множества

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Пример 10.2. Для функции $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ найти такую первообразную $y = F(x)$ в интервале $(0;\infty)$, график которой проходит через точку $M(1;2)$.

Как было замечено в примере (10.1), одной из первообразных для $f(x)$ является функция $F(x) = \dfrac{1}{x}$. Искомая первообразная будет иметь вид $F(x) = \dfrac{1}{x} + C$, где постоянную C определим из условия $1 + C = 2$. Отсюда $C = 1$ и в итоге

$$F(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad x \in (0;\infty). \quad \blacktriangle$$

10.2. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке X и в этом промежутке существует первообразная $F(x)$. Нахождение неопределенного интеграла от заданной функции называют ее *интегрированием*. Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x),$$

или, что то же самое, дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Поскольку для функции $F'(x) = f(x)$ одной из первообразных является сама функция $F(x)$, то в силу (10.1)

$$\int F'(x)dx = F(x)+C, \quad \int dF(x) = F(x)+C.$$

Таким образом, интегрирование и дифференцирование являются взаимнообратными операциями. Для проверки правильности интегрирования достаточно продифференцировать найденную первообразную $F(x)$ и убедиться, что $F'(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x)$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в промежутке X первообразные $F(x)$ и $G(x)$ соответственно, то в этом промежутке функция $\alpha f(x)+\beta g(x)$, где $\alpha, \beta \in R$, $\alpha^2+\beta^2>0$, также имеет первообразную, причем

$$\int (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$$

Пример 10.3. Вычислить интеграл $\int\left(\sqrt{x}+1\right)^3 dx.$

Δ Преобразуем подынтегральную функцию

$$(\sqrt{x}+1)^3 = x^{\frac{3}{2}} + 3x + 3\sqrt{x} + 1.$$

Далее, учитывая свойство 3 и то, что $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$, получим

$$\int\left(\sqrt{x}+1\right)^3 dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + x + C. \ \blacktriangle$$

4. Пусть в промежутке X определена сложная функция $f\left(g(x)\right)$, а функция $t = g(x)$ дифференцируема в этом промежутке. Если функция $f(t)$ имеет в промежутке $T \supseteq g(X)$ первообразную $F(t)$, то справедливо свойство *инвариантности неопределенного интеграла*

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x) dx = \int f\left(g(x)\right) dg(x) = F\left(g(x)\right) + C. \qquad (10.3)$$

Нахождение неопределенного интеграла, основанное на свойстве инвариантности, называется *интегрированием подведением под знак дифференциала*.

Пример 10.4. Вычислить интеграл от функции $5x^4 \sin\left(x^5 + 1\right)$.

Δ Используем свойство инвариантности неопределенного интеграла и подведем множитель $5x^4 = \left(x^5 + 1\right)'$ под знак дифференциала. С учетом (10.3) и того, что $\int \sin t dt = -\cos t + C$, получим

$$\int 5x^4 \sin\left(x^5 + 1\right) dx = \int \sin\left(x^5 + 1\right) d\left(x^5 + 1\right) = -\cos\left(x^5 + 1\right) + C. \ \blacktriangle$$

10.3. ОСНОВНЫЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим основные неопределенные интегралы от элементарных функций. Такие неопределенные интегралы будем называть *табличными интегралами*. Каждая из формул справедлива в каждом промежутке из области определения соответствующей подынтегральной функции.

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \ \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C, \ a > 0, \ a \neq 1.$

4. $\int e^u du = e^u + C.$

5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

6. $\int \cos u du = \sin u + C.$

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C.$

8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

9. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$

10. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$

11. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$

12. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C_1,\ a \neq 0.$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C,\ a \neq 0.$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C_1,\ a \neq 0.$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + A} \right| + C,\ A \neq 0.$

Отметим, что в силу свойства инвариантности неопределенного интеграла u может быть как независимой переменной, так и значением некоторой дифференцируемой функции независимой переменной x. Так, например, полагая в табличном интеграле 9 $u = x^2$, получим неопределенный интеграл для функции $2x \operatorname{sh}\left(x^2\right)$:

$$\int \operatorname{sh}\left(x^2\right) d\left(x^2\right) = \int 2x \operatorname{sh}\left(x^2\right) dx = \operatorname{ch}\left(x^2\right) + C.$$

Пример 10.5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 (x+3)}$.

Δ Очевидно, что $d(x+b) = dx$, тогда, учитывая свойство 4 инвариантности неопределенного интеграла и используя табличный интеграл 8, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^2 (x+3)} = -\operatorname{ctg}(x+3) + C. \ \blacktriangle$$

Пример 10.6. Найти интеграл $\int \operatorname{ch}(5x) dx$.

Δ Этот интеграл можно свести к табличному, если под знаком дифференциала записать выражение $5x$, которое является аргументом подынтегральной функции. В таком случае получим

$$\int \operatorname{ch}(5x)dx = \frac{1}{5}\int \operatorname{ch}(5x)d(5x) = \frac{1}{5}\operatorname{sh}(5x) + C. \ \blacktriangle$$

10.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ И ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть на некотором промежутке определена сложная функция $f(\varphi(x))$ и функция $t = \varphi(x)$ непрерывна на этом промежутке и дифференцируема во всех его внутренних точках, тогда если интеграл $\int f(t)dt$ существует, то интеграл $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ также существует, причем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \left(\int f(t)dt\right)_{t=\varphi(x)}. \qquad (10.4)$$

Чтобы найти неопределенный интеграл в левой части (10.4), под знак дифференциала подводят $\varphi'(x)$, обозначают $\varphi(x)$ через t и, подставляя в подынтегральное выражение t вместо $\varphi(x)$, находят неопределенный интеграл от более простой функции $f(t)$. Затем, полагая $t = \varphi(x)$, возвращаются к первоначальному аргументу x. Формулу (10.4) называют формулой *интегрирования подстановкой*.

Пример 10.7. Найти интеграл

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x + 2}.$$

Δ Подынтегральное выражение в интеграле преобразуем к виду

$$\frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x + 2} = \frac{d\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2 + 2e^x + 1 + 1} = \frac{d\left(e^x + 1\right)}{\left(e^x + 1\right)^2 + 1}.$$

Обозначая $e^x + 1$ через t, приходим к табличному интегралу 13 относительно переменного t:

$$\int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{\left(e^x + 1\right)^2 + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\left(e^x + 1\right) + C. \ \blacktriangle$$

В предыдущем примере при нахождении неопределенного интеграла мы использовали подстановку вида $\varphi(x) = t$. Рассмотрим теперь *интегрирование заменой переменного*, т. е. метод, основанный на замене вида $x = \psi(t)$.

Теорема 10.2. *Пусть функция* $x = \psi(t)$ *непрерывно дифференцируема в промежутке T, а функция* $y = f(x)$ *непрерывна в промежутке* $X \supseteq \psi(T)$. *Пусть, кроме того, для функции* $\psi(t)$ *выполнены условия*:

1) *производная* $\psi'(t)$ *отлична от нуля* $\forall t \in T$;

2) *функция* $\psi(t)$ *имеет обратную функцию* $t = \psi^{-1}(x)$.

Тогда справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f\left(\psi(t)\right)\psi'(t)dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}.$$

Пример 10.8. Вычислить неопределенный интеграл от функции $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, используя замену переменной $x = \dfrac{1}{t}$.

Δ Поскольку $dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$ и $t = \dfrac{1}{x}$, то исходный неопределенный интеграл можно привести к табличному вида 15:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{1/t^2-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C = \arccos\frac{1}{x} + C. \ \blacktriangle$$

Пример 10.9. Вычислить неопределенный интеграл от функции $\dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ с помощью замены переменной $x = a\,\mathrm{tg}\,t$.

Δ При такой замене $dx = \dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $t = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$, $\left(x^2+a^2\right)^2 = \dfrac{a^4}{\cos^4 t}$. Подставляя под знак интеграла, получим

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \int \frac{a\cos^4 t\,dt}{\cos^2 t\cdot a^4} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{a^2+x^2} + C.$$

Для упрощения выражения интеграла мы использовали следующее:

$$\sin t\cdot\cos t = \frac{\sin t\cdot\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \frac{\mathrm{tg}\,t}{1+\mathrm{tg}^2 t} = \frac{\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{x^2}{a^2}} = \frac{xa}{a^2+x^2}. \ \blacktriangle$$

10.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 10.3. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы в некотором промежутке X, то справедлива формула интегрирования по частям*:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x), \; x \in X. \qquad (10.5)$$

Рассмотрим основные типы подынтегральных функций, для которых целесообразно применять формулу (10.5).

1. Если подынтегральная функция является произведением многочлена $P_m(x)$ и одной из функций $\sin(\alpha \cdot x)$, $\cos(\alpha \cdot x)$, $e^{\alpha x}$, то в (10.5) следует выбрать $u(x) = P_m(x)$.

2. Если под знак исходного интеграла входит обратная тригонометрическая функция ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) или логарифмическая функция $\ln x$, умноженная на многочлен $P_m(x)$, то в качестве $dv(x)$ следует выбрать $P_m(x)dx$.

Пример 10.10. Найти интеграл $\int \arcsin(2x)dx$.

Δ Будем использовать формулу интегрирования по частям. Учитывая вышесказанное, обозначим $u(x) = \arcsin(2x)$ и запишем

$$\int \arcsin(2x)dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin(2x), du = 2dx / \sqrt{1-(2x)^2} \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x\arcsin(2x) - \int \frac{2xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = x\arcsin(2x) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-4x^2\right)}{2\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= x\arcsin(2x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C. \; \blacktriangle$$

Пример 10.11. Найти интеграл $\int \left(3x^2+4x-3\right)\ln x\,dx$.

Δ С учетом п. 2 рекомендации получим

$$\int \left(3x^2+4x-3\right)\ln x\,dx = \int \ln x\,d\left(x^3+2x^2-3x\right) = \left(x^3+2x^2-3x\right)\ln x -$$

$$-\int \left(x^3+2x^2-3x\right)\frac{dx}{x} = \left(x^3+2x^2-3x\right)\ln x - \int \left(x^2+2x-3\right)dx =$$

$$= \left(x^3+2x^2-3x\right)\ln x - \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C. \; \blacktriangle$$

В некоторых случаях интегрированием по частям можно получить в правой части выражение, содержащее исходный неопределенный интеграл I, т. е. прийти к уравнению с неопределенным интегралом I в качестве неизвестного.

Пример 10.12. Найти неопределенный интеграл $I = \int e^{ax} \cos bx\, dx.$

Δ Здесь в качестве u можно выбрать как показательную, так и тригонометрическую функции. Полагая в качестве $u = e^{ax}$, получим

$$I = \int e^{ax} d\left(\frac{\sin bx}{b}\right) = e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int \frac{\sin bx}{b} d\left(e^{ax}\right) =$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Еще раз применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} e\int^{ax} d\left(-\frac{\cos bx}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx\, dx - \frac{a^2}{b^2} I.$$

Откуда следует

$$I = \int e^{ax} \cos bx\, dx = e^{ax}\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Аналогично можно найти интеграл

$$J = \int e^{ax} \sin bx\, dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + C. \quad \blacktriangle$$

Пример 10.13. Найти неопределенный интеграл

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n},\ n \in N,\ a \neq 0.$$

Δ При $n = 1$ получаем табличный интеграл 13:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$I_n = \begin{vmatrix} u = 1/\left(x^2 + a^2\right)^n,\ du = -2nxdx/\left(x^2 + a^2\right)^{n+1} \\ dv = dx,\ v = x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} - \int x \frac{-2nx\,dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{\left(x^2+a^2\right)-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

Отсюда получим рекуррентное соотношение

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + (2n-1)I_n\right), \qquad (10.6)$$

из которого последовательно найдем $I_2, I_3, \ldots, I_{n+1}$. ▲

10.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Как известно, производная элементарной функции также является элементарной функцией и находится по достаточно простым общим правилам.

Неопределенный интеграл от элементарной функции, однако, может и не выражаться через элементарные функции. Такими являются, например, интегралы:

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \cos\left(x^2\right)dx.$$

Общие правила интегрирования существуют лишь для некоторых видов элементарных функций. Наиболее важными из них являются дробно-рациональные функции (или рациональные дроби). К интегрированию рациональных дробей приводят многие рассматриваемые далее варианты замены переменного.

Напомним, что дробно-рациональной (см. гл. 1) называют функцию вида

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x),\ Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Как известно, неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. В свою очередь, правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей. Таким образом, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена и простейших дробей.

Рассмотрим теперь интегрирование простейших дробей:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\quad 2)\ \frac{B}{(x-a)^k};\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad 4)\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

где $k > 1$ – целое, а квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, т. е. $D = p^2 - 4q < 0$.

Два первых интеграла вычисляются довольно просто:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{Bdx}{(x-a)^k} = B\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) =$$

$$= B\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{B}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

Дробь третьего типа сначала преобразуем, выделив полный квадрат в знаменателе:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{Mx+N}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4}.$$

Обозначим $q - p^2/4 = a^2$, это можно сделать поскольку $q - p^2/4 > 0$. Обозначив также $x + p/2 = t$ $(x = t - p/2,\ dx = dt)$, преобразуем знаменатель к виду $x^2 + px + q = t^2 + a^2$ и запишем интеграл от дроби третьего типа в форме

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4}dx =$$

$$= \int \frac{M(t-p/2)+N}{t^2+a^2}dt = \int \frac{Mt + N - pM/2}{t^2+a^2}dt =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{pM}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \frac{2N-pM}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \frac{2N-pM}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Осталось сделать обратную подстановку $t = x + p/2$, чтобы получить выражение для искомого интеграла.

Пример 10.14. Найти интеграл $\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx.$

$$\Delta \int \frac{x-2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{(x-2)dx}{(x+1)^2+1} = \begin{vmatrix} t = x+1,\ x = t-1, \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{t-3}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} - 3\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - 3\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2+1\right) - \operatorname{arctg}(x+1) + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right) - \operatorname{arctg}(x+1) + C. \ \blacktriangle$$

Рассмотрим теперь интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k > 1$. Преобразуем его таким же образом, как и для случая $k = 1$:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = M\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Для вычисления первого из интегралов справа используем интегрирование подведением под знак дифференциала и табличный интеграл 1:

$$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-k} d\left(t^2+a^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2(-k+1)}\left(t^2+a^2\right)^{-k+1} + C = -\frac{1}{2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + C.$$

Для нахождения интеграла $I_k = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$ воспользуемся рекуррентной формулой (10.6). Согласно этой формуле

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)a^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + (2k-3)I_{k-1}\right). \qquad (10.7)$$

Используя табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

можно найти I_2, затем по I_2 найти I_3 и т. д. вплоть до искомого интеграла I_k. Возвращаясь к переменной x, таким образом, найдем интеграл от простейшей дроби четвертого типа.

Пример 10.15. Найти неопределенный интеграл от функции

$$f(x) = \frac{x-2}{\left(x^2+2x+2\right)^3}.$$

Δ Данная функция является простейшей рациональной дробью четвертого типа.

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$f(x) = \frac{x-2}{\left((x+1)^2+1\right)^3}$$

и сделаем замену переменной $x+1=t.$ Учитывая линейность неопределенного интеграла и то, что $dx=dt,$ получим

$$\int f(x)dx = \int \frac{x+1-3}{\left((x+1)^2+1\right)^3}dx = \int \frac{t-3}{\left(t^2+1\right)^2}dt =$$
$$= \int \frac{t\,dt}{\left(t^2+1\right)^3} - 3\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3}. \tag{10.8}$$

Первый интеграл справа вычислим подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+1\right)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^3} = -\frac{1}{4\left(t^2+1\right)^2} + C_1. \tag{10.9}$$

Для второго интеграла, согласно (10.7), получим

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3} = \frac{1}{4}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1}{4}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2} +$$
$$+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1}\right) = \frac{1}{4}\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg} t + C_2. \tag{10.10}$$

Подставляя (10.9) и (10.10) в (10.8) и возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{4\left((x+1)^2+1\right)^2} - \frac{3}{4}\frac{x+1}{\left((x+1)^2+1\right)^2} - \frac{9}{8}\frac{x+1}{(x+1)^2+1} -$$
$$-\frac{9}{4}\operatorname{arctg}(x+1) + C = \frac{1}{4}\frac{-3x-4}{\left(x^2+2x+2\right)^2} - \frac{9}{8}\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{9}{4}\operatorname{arctg}(x+1) + C. \ \blacktriangle$$

Пример 10.16. Найти интеграл от неправильной рациональной дроби

$$\frac{x^5 - x^2 + 2x}{x^3 - 1}.$$

Δ Целую часть выделим следующим образом:

$$\frac{x^5 - x^2 + 2x}{x^3 - 1} = \frac{x^2\left(x^3 - 1\right) + 2x}{x^3 - 1} = x^2 + \frac{2x}{x^3 - 1}.$$

Рассмотрим второе слагаемое – это правильная рациональная дробь, и ее разложение на простейшие дроби будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{2x}{x^3 - 1} = \frac{2x}{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

После приведения правой части данного равенства к общему знаменателю получим

$$2x = A\left(x^2 + x + 1\right) + (Bx + C)(x - 1).$$

Если $x = 1$, то $2 = 3A$, откуда $A = 2/3$. При $x = 0$ имеем $A - C = 0$, откуда $C = A = 2/3$. Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $A + B = 0$, или $B = -A = -2/3$. Таким образом, рациональная дробь примет вид

$$\frac{x^5 - x^2 + 2x}{x^3 - 1} = x^2 + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{2}{3}\frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

В этом случае

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 2x}{x^3 - 1}dx = \int x^2 dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3}\int \frac{x-1}{x^2 + x + 1}dx.$$

Два первых интеграла найдем с помощью табличных 1 и 2. В третьем интеграле выделим в знаменателе полный квадрат и сделаем замену переменной:

$$\int \frac{x-1}{x^2 + x + 1}dx = \int \frac{x + 1/2 - 3/2}{(x + 1/2)^2 + 3/4}dx = \begin{vmatrix} t = x + 1/2, dt = dx \\ x = t - 1/2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2 + 3/4\right)}{t^2 + 3/4} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 3/4} = \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + \frac{3}{4}\right| - \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + x + 1\right| - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

И окончательно

$$\int \frac{x^5 - x^2 + 2x}{x^3 - 1} dx = \int x^2 dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangle$$

10.7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И РАЦИОНАЛЬНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Многочленом степени n двух переменных u и v будем называть выражение вида

$$P_n(u,v) = \sum_{i+j=0}^{n} a_{i,j} u^i v^j = a_{0,0} + a_{1,0}u + a_{0,1}v +$$

$$+ a_{2,0}u^2 + a_{1,1}uv + a_{0,2}v^2 + \ldots + a_{n,0}u^n + a_{n-1,1}u^{n-1}v + \ldots + a_{0,n}v^n,$$

в котором не все коэффициенты одновременно равны нулю.

Рациональной функцией двух переменных u и v будем называть выражение вида

$$R(u,v) = \frac{P_m(u,v)}{Q_n(u,v)},$$

где P_m и Q_n – многочлены двух переменных u и v.

Аналогично можно определить рациональную функцию трех и более переменных. Так, например, рациональной функцией трех переменных является функция

$$R(u,v,w) = \frac{u+v^2}{w}.$$

Функция вида $y = R(\sin x, \cos x)$, где $R(u,v)$ – рациональная функция двух переменных, называется *рационально-тригонометрической*.

Покажем, что рационально-тригонометрическую функцию всегда можно привести к дробно-рациональной заменой переменной $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$, часто называемой *универсальной подстановкой*. В самом деле, полагая $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, получим:

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (10.11)$$

Следовательно,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 10.17. Используя универсальную подстановку, найти следующий интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Δ Учитывая формулы (10.11), получим

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{2 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}} + C. \ ▲$$

Подстановка $\mathrm{tg}(x/2)$, являясь универсальной, часто приводит к громоздким выкладкам. В некоторых частных случаях рационализовать интеграл можно более простым путем.

Пусть рациональная функция $R(u, v)$ не изменяет своего значения при изменении знака переменной u, т. е. $R(-u, v) = R(u, v)$. Будем называть такую функцию четной по отношению к u. Ее можно привести к некоторой рациональной функции $R_1(u^2, v)$, зависящей от v и лишь от четных степеней u.

Пусть теперь при изменении знака u функция $R(u, v)$ сохраняет значение по модулю, но изменяет знак, т. е. $R(-u, v) = -R(u, v)$ ($R(u, v)$ – нечетная функция по отношению к u). Тогда она представима функцией $R_2(u^2, v)u$, что вытекает из четности функции $\frac{R(u, v)}{u}$.

Пусть, наконец, функция $R(u,v)$ не изменяет значения при одновременном изменении знаков u и v, т. е. $R(-u,-v)=R(u,v)$. Такая функция является четной по совокупности аргументов u и v. В этом случае можно записать

$$R(u,v)=R\left(\frac{u}{v}v,v\right)=R_3\left(\frac{u}{v},v\right)=R_3\left(\frac{u}{v},-v\right)=R_4\left(\frac{u}{v},v^2\right),$$

Из сказанного следует, что рационально-тригонометрическую функцию $R(\sin x,\cos x)$, нечетную по отношению к $\sin x$, можно привести к виду $R_1\left(\sin^2 x,\cos x\right)\sin x=-R_1\left(1-\cos^2 x,\cos x\right)(\cos x)'$, а интеграл от такой функции можно рационализировать с помощью замены переменной $t=\cos x$:

$$\int R_1\left(\sin^2 x,\cos x\right)\sin x dx=-\int R_1\left(1-\cos^2 x,\cos x\right)d(\cos x)=$$

$$=\ |t=\cos x|\ =-\int R_1\left(1-t^2,t\right)dt=\int \tilde{R}_1(t)\,dt,$$

где $\widetilde{R}_1$ – рациональная функция переменной t.

Пример 10.18. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos 2x}$.

Δ Подынтегральная функция $\frac{1}{\sin x\cdot\cos 2x}=\frac{1}{\sin x\cdot\left(2\cos^2 x-1\right)}$ является нечетной относительно $\sin x$, а следовательно, можно применить подстановку $\cos x=t$. В таком случае

$$\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos 2x}=\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x\left(2\cos^2 x-1\right)}=-\int\frac{d\cos x}{\left(1-\cos^2 x\right)\left(2\cos^2 x-1\right)}=$$

$$=\left|\cos x=t\right|=-\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)\left(2t^2-1\right)}=\int\frac{dt}{\left(t^2-1\right)\left(2t^2-1\right)}=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{2}{2t^2-1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C.\ \blacktriangle$$

Функцию, нечетную по отношению к косинусу, можно привести к виду $R_2(\sin x, \cos^2 x)\cos x = R_2(\sin x, 1-\sin^2 x)(\sin x)'$, а интеграл от такой функции рационализируем с помощью замены $\sin x = t$:

$$\int R_2(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx = \int R_2(\sin x, 1-\sin^2 x)d(\sin x) =$$

$$= |t = \sin x| = \int R_2\left(t, 1-t^2\right)dt = \tilde{R}_2(t)dt,$$

где $\tilde{R}_2$ – рациональная функция переменной t.

Пример 10.19. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}$.

Δ Подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$. Применим подстановку $\sin x = t$, предварительно преобразовав подынтегральную функцию. В таком случае получим

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)} = |\sin x = t| = \int \frac{dt}{t^2\left(1-t^2\right)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов найдем разложение рациональной функции $\frac{1}{t^2\left(1-t^2\right)}$ в сумму простейших дробей

$$\frac{1}{t^2\left(1-t^2\right)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$I = \int \frac{dt}{t^2\left(1-t^2\right)} = \int \frac{dt}{t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t-1)}{t-1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(t+1)}{t+1} =$$

$$= -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1| + C = -\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\frac{|\sin x + 1|}{|\sin x - 1|} + C.$$

Наконец, функцию, четную по совокупности $\sin x$ и $\cos x$, приводим к виду $R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right)$, а интеграл с помощью подстановки $t = x$:

$$\int R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right)dx = \int R_3\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)dx =$$

$$= |t = \operatorname{tg} x| = \int R_3\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int \tilde{R}_3(t)dt,$$

где $\tilde{R}_3$ – рациональная функция переменной t. ▲

Пример 10.20. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x}$.

Δ Поскольку подынтегральная функция четная по совокупности $\sin x$ и $\cos x$, применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$. С учетом того, что $\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$, а $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{dt\left(1+t^2\right)^2}{t^4} = \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^4}dt = \int\left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)dt =$$

$$= t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \left|t = \operatorname{tg} x\right| = \operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C. \ ▲$$

Функцию вида $y = R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ будем называть *рационально-гиперболической*, если $R(u,v)$ рациональная функция двух переменных.

Из определения гиперболических функций легко выводятся следующие формулы:

$$\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{th}(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)}, \ \operatorname{ch} x = \frac{1+\operatorname{th}^2(x/2)}{1-\operatorname{th}^2(x/2)}. \qquad (10.12)$$

Интеграл вида $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)$ можно преобразовать аналогично интегралам от рационально-тригонометрических функций. Так, например, его можно рационализировать подстановкой $t = \operatorname{th}(x/2)$.

Учитывая формулы (10.12) и то, что $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$, получим

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{dt}{1-t^2}.$$

Пример 10.21. Найти интеграл $\frac{dx}{1+\operatorname{ch} x}$, применяя подстановку $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

Δ Учитывая формулы (10.12), получим

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{ch} x} = \int \frac{\frac{2}{1-t^2}dt}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \int dt = t + C = \operatorname{th}\frac{x}{2} + C. \ ▲$$

В конкретных случаях вместо универсальной подстановки часто быстрее к цели можно прийти при помощи замен $t = \operatorname{ch} x$, $t = \operatorname{sh} x$ и $t = \operatorname{th} x$. Первые две из них удобны, если подынтегральная функция нечетна относительно $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ соответственно, а последняя – если подынтегральная функция четна по совокупности аргументов $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

Пример 10.22. Найти интеграл $\int \operatorname{ch}^3 x \cdot \operatorname{sh}^8 x\, dx$.

Δ Поскольку подынтегральная функция является нечетной относительно $\operatorname{ch} x$, то удобно применить подстановку $t = \operatorname{sh} x$. Немного преобразовав подынтегральную функцию, получим

$$\int \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^8 x (\operatorname{ch} x\, dx) = \int \left(1 + \operatorname{sh}^2 x\right) \operatorname{sh}^8 x\, d \operatorname{sh} x = | \operatorname{sh} x = t | =$$

$$= \int \left(1 + t^2\right) t^8 dt = \int \left(t^8 + t^{10}\right) dt = \frac{t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\operatorname{sh}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{sh}^{11} x}{11} + C. \;\blacktriangle$$

Пример 10.23. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}$.

Δ Поскольку подынтегральная функция четная по совокупности $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, то можно воспользоваться подстановкой $t = \operatorname{th} x$:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} d(\operatorname{th} x) = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} d(\operatorname{th} x) =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} - 1\right) d(\operatorname{th} x) = | t = \operatorname{th} x | = \int \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{t} + t + C = -\frac{1}{\operatorname{th} x} + \operatorname{th} x + C = \operatorname{th} x - \operatorname{cth} x + C. \;\blacktriangle$$

В том случае, когда возникает необходимость вычислить интегралы вида:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx\, dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx\, dx,$$

удобно пользоваться следующими формулами:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right);$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right);$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right).$$

10.8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Под *иррациональным* понимают выражение, в котором независимое переменное x или многочлен $P_n(x)$ некоторой степени $n \in N$ входит под знак *радикала*, т. е. возводится в дробную степень.

Ранее мы изложили правила интегрирования рациональных функций. Некоторые классы иррациональных относительно x подынтегральных выражений заменой переменного удается свести к рациональным выражениям относительно нового переменного. Будем рассматривать случаи, когда возможно такое преобразование.

10.8.1. Интегрирование дробно-линейной иррациональности

Функцию вида

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

где $R(u,v)$ – рациональная функция двух переменных, $a,b,c,d \in R$, $ad - bc \neq 0$, будем называть *дробно-линейной иррациональностью*.

Нетрудно убедиться, что интеграл от такой функции можно рационализировать с помощью подстановки

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

В самом деле,

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \;\; x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \;\; dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{\left(a - ct^n\right)^2} dt.$$

Таким образом,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{\left(a - ct^n\right)^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция переменного t.

Пример 10.24. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$.

Δ Преобразуем подынтегральную функцию таким образом, чтобы можно было применить дробно-линейную подстановку:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{1}{(2-x)^2}.$$

Полагая $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=t$ и учитывая то, что $x=2\frac{1-t^3}{1+t^3}$, $dx=-\frac{12t^2dt}{\left(1+t^3\right)^2}$, $\frac{1}{2-x}=\frac{1+t^3}{4t^3}$, получим

$$\int\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{1}{(2-x)^2}dx=-12\int\frac{\left(t^3+1\right)^2t^3dt}{16t^6\left(t^3+1\right)^2}=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C. \ \blacktriangle$$

Если подынтегральная функция имеет вид

$$R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right),$$

где r_1, r_2, ..., r_n – рациональные числа; R – рациональная функция $n+1$ переменного, то интеграл от такой функции можно рационализировать подстановкой $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где n – наименьший общий знаменатель дробей r_1, r_2, ..., r_n.

Пример 10.25. Найти интеграл $\int\frac{x+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

Δ Учитывая вышесказанное, понятно, что рационализировать этот интеграл можно с помощью замены $t=\sqrt[6]{x}$ или $x=t^6$. В таком случае $dx=6x^5dt$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, а сам интеграл примет вид

$$6\int\frac{\left(t^6+t^4+t\right)t^5dt}{t^6\left(1+t^2\right)}=6\int\frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt=6\int t^3dt+$$

$$+6\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C. \ \blacktriangle$$

10.8.2. Подстановки Эйлера

Неопределенный интеграл

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\ a,b,c\in R,\ a\neq 0,\ b^2\neq 4ac, \qquad (10.13)$$

можно свести к интегралу от рациональной функции переменного t при помощи одной из следующих замен переменного, называемых *подстановками Эйлера*.

Первая подстановка Эйлера. Если в (10.13) $a > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t.$$

Выберем для определенности перед $\sqrt{a}$ знак «+» и после возведения обеих частей в квадрат получим

$$ax^2+bx+c=ax^2+2xt\sqrt{a}+t^2,$$

откуда

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\ dx=2\frac{-t^2\sqrt{a}+bt-c\sqrt{a}}{\left(b-2t\sqrt{a}\right)^2}dt.$$

Кроме того,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\sqrt{a}+t.$$

После замены переменного получим интеграл от рациональной функции

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=2\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}}\sqrt{a}+t\right)\frac{-t^2\sqrt{a}+bt-c\sqrt{a}}{\left(b-2t\sqrt{a}\right)^2}dt=\int R_1(t)dt.$$

Пример 10.26. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$, применяя первую подстановку Эйлера.

Δ В таком случае

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x,\ x^2+x+1=t^2-2tx+x^2,\ x=\frac{t^2-1}{1+2t},$$

$$dx = \frac{2t(1+2t)-\left(t^2-1\right)2}{(1+2t)^2}dt = \frac{2t+4t^2-2t^2+2}{(1+2t)^2}dt = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt,$$

и интеграл примет вид

$$2\int \frac{t^2+t+1}{\frac{t^2-1}{1+2t}+t-\frac{t^2-1}{1+2t}}dt = 2\int \frac{t^2+t+1}{t}dt = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t|\right)+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$I = 2\left(\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right|\right)+C =$$

$$= 2x^2+2(x+1)\sqrt{x^2+x+1}+3x+2\ln|x+\sqrt{x^2+x+1}|+C_1. \quad \blacktriangle$$

Вторая подстановка Эйлера. Если в (10.13) $c > 0$, то полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Выберем для определенности перед $\sqrt{c}$ знак «+». Тогда после возведения обеих частей в квадрат будем иметь

$$ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c,$$

$$x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \quad dx = 2\frac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt$$

и, кроме того,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c} = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}t+\sqrt{c}.$$

Подставляя эти выражения в (10.13), получаем:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$$

$$= 2\int R\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}t+\sqrt{c}\right)\frac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt = \int R_2(t)dt,$$

т. е. подынтегральная функция будет некоторой рациональной функцией $R_2(t)$ переменного t.

Пример 10.27. Найти интеграл из предыдущего примера, используя вторую подстановку Эйлера.

Δ Будем полагать $\sqrt{x^2+x+1}=xt-1,$ в таком случае

$$x^2+x+1=x^2t^2-2xt+1,\ \ x=\frac{2t+1}{t^2-1},$$

$$dx=\frac{2\left(t^2-1\right)-(2t+1)2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-2\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)^2}dt.$$

После замены интеграл примет вид

$$I=-2\int\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)^2\left(\frac{2t+1}{t^2-1}+\frac{2t+1}{t^2-1}t-1\right)}dt=-2\int\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+3t+2\right)}dt=$$

$$=-2\int\frac{t^2-t+1}{(t-1)(t+1)^2(t+2)}dt.$$

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь, а ее разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{t^2-t+1}{(t-1)(t+1)^2(t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}+\frac{D}{t+2}.$$

Приравнивая числители

$$t^2-t+1=$$

$$=A(t+1)^2(t+2)+B(t+1)(t-1)(t+2)+C(t-1)(t+2)+D(t-1)(t+1)^2$$

и полагая t равным -2, -1, 1, 0, последовательно найдем

$$A=\frac{1}{12},\ \ B=\frac{9}{4},\ \ C=-\frac{3}{2},\ \ D=-\frac{7}{3}.$$

Таким образом,

$$I=-2\int\frac{t^2-t+1}{(t-1)(t+1)^2(t+2)}dt=$$

$$=-2\int\left(\frac{1}{12(t-1)}+\frac{9}{4(t+1)}-\frac{3}{2}\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{7}{3}\frac{1}{t+2}\right)dt=$$

$$= -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}\right| - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+x+1}+x}{x}\right| -$$

$$-\frac{3x}{1+\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{7}{3}\ln\left|\frac{1+2x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C. \ \blacktriangle$$

Как видим, в зависимости от выбранного метода, получаются различные выражения для интеграла.

З а м е ч а н и е 10.1. Отметим, что если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные нули $\alpha, \beta \in R$, то интеграл от функции $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ можно рационализировать, используя дробно-линейную подстановку, поскольку эту функцию в таком случае можно представить следующим образом:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}.$$

10.8.3. Тригонометрические и гиперболические подстановки

Рассмотренные в 10.8.2 способы интегрирования функций вида $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ часто связаны с достаточно сложными выкладками. Иногда такие интегралы можно найти более простым способом.

Выделим в квадратном трехчлене полный квадрат

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}$$

и сделаем замену переменного $t = x + b/(2a)$.

В таком случае в зависимости от a интеграл от функции $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ сводится к одному из интегралов:

$$\int R_1\left(t, \sqrt{A^2-t^2}\right)dt, \int R_2\left(t, \sqrt{t^2-A^2}\right)dt \text{ или } R_3\left(t, \sqrt{t^2+A^2}\right)dt.$$

Первый из этих интегралов подстановками $t = A\cos\varphi$ или $t = A\sin\varphi$ сводится к интегралам от рационально-тригонометрических функций, если же применить гиперболическую подстановку $t = A\,\mathrm{th}\,\varphi$, то можно его свести к интегралу от рационально-гиперболической функции.

Пример 10.28. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx,$ используя тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$.

Δ В таком случае

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = a\sin t,\ dx = a\cos t\,dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, t = \arcsin\dfrac{x}{a} \end{array} \right| = \int a^2 \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int \left(1 + \cos(2t)\right)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Для упрощения выражения интеграла мы использовали следующее преобразование:

$$\sin t \cdot \cos t = \sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sin\arcsin\frac{x}{a}\sqrt{1 - \sin^2\arcsin\frac{x}{a}} = \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \ \blacktriangle$$

У функции $R_2\left(t, \sqrt{t^2 - A^2}\right)$ избавиться от радикала можно с помощью одной из замен $t = A \cdot \mathrm{ch}\,\varphi$, $t = A/\cos\varphi$ или $t = A/\sin\varphi$.

Функцию $R_3\left(t, \sqrt{t^2 + A^2}\right)$ можно упростить заменой переменного $t = A\,\mathrm{sh}\,\varphi$ или $t = A\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

Пример 10.29. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx$, используя подстановку $x = a\,\mathrm{sh}\,t$.

Δ Получим в таком случае

$$I = \int \sqrt{a^2 + x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = a\,\mathrm{sh}\,t,\ dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt \\ \sqrt{a^2 + x^2} = a\,\mathrm{ch}\,t, t = \mathrm{Arsh}\dfrac{x}{a} \end{array} \right| = \int a^2\,\mathrm{ch}^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int \left(1 + \mathrm{ch}(2t)\right)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t\right) + C.$$

Возвращаясь к переменной x и учитывая то, что

$$\mathrm{Arsh}\,u = \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right),\ \mathrm{sh}\,2t = 2\,\mathrm{sh}\,t \cdot \mathrm{ch}\,t = 2\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}},$$

окончательно получим

$$I = \frac{a^2}{2}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + C = \frac{a^2}{2}\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + C. \ \blacktriangle$$

10.8.4. Вычисление интеграла вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

При решении прикладных задач часто возникает необходимость вычислять неопределенные интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен. Простейшим из них является неопределенный интеграл вида

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

В этом интеграле преобразуем числитель, выделив производную выражения под корнем в знаменателе:

$$mx+n = m\frac{2ax+b}{2a}+n-\frac{mb}{2a},$$

и разложим исходный интеграл на два:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первый интеграл в правой части этого равенства сведем к табличному интегралу 1, подведя $2ax + b$ под знак дифференциала, а второй – к одному из табличных интегралов 15 или 16, выделив в знаменателе под корнем полный квадрат:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{m}{2a}\int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+$$
$$+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x+b/(2a)\right)^2+c-b^2/(4a)}}.$$

Пример 10.30. Найти интеграл $\int \frac{x+3}{\sqrt{3x^2+6x+9}}dx.$

Δ Преобразовывая подынтегральную функцию, получим

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{3x^2+6x+9}}dx = \int \frac{(6x+6)/6-1+3}{\sqrt{3x^2+6x+9}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{(6x+6)dx}{\sqrt{3x^2+6x+9}}+$$
$$+\int \frac{2dx}{\sqrt{3(x+1)^2-3+9}} = \frac{1}{6}\int \frac{d\left(3x^2+6x+9\right)}{\sqrt{3x^2+6x+9}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+2}}.$$

Используя табличные интегралы 1 и 16, в итоге получим

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{3x^2+6x+9}}dx = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+6x+9} +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+6x+9} + \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C. \ \blacktriangle$$

Отметим, что подынтегральное выражение можно немного упростить, если сразу после выделения под корнем полного квадрата сделать замену $x + 1 = t$, $x = t - 1$. После замены получим интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{t+2}{\sqrt{t^2+2}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{t}{\sqrt{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}dt + \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}dt.$$

Первый интеграл можно вычислить подведением t под дифференциал $\left(t\,dt = \frac{1}{2}d\left(t^2+2\right)\right)$, а второй является табличным.

Рассмотрим теперь интеграл более общего вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Можно доказать, что интеграл такого вида единственным образом представляется в виде

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (10.14)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени не выше $n - 1$, а $\lambda \in R$.

Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и λ найдем, дифференцируя обе части равенства (10.14) и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Пример 10.31. Найти интеграл $I = \int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx.$

Δ Воспользовавшись представлением (10.14), запишем

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}=A\sqrt{x^2-2x+5}+(Ax+B)\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Откуда после умножения на $\sqrt{x^2-2x+5}$:

$$2x^2-3x=A\left(x^2-2x+5\right)+(Ax+B)(x-1)+\lambda=$$

$$=2Ax^2+(-2A-A+B)x+(5A-B+\lambda).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему, из которой и найдем A, B, λ:

$$\begin{array}{r|c} x^2 & 2=2A,\ A=1, \\ x & -3=-2A-A+B,\ B=0, \\ x^0 & 0=5A-B+\lambda,\ \lambda=-5A=-5. \end{array}$$

Таким образом,

$$I=x\sqrt{x^2-2x+5}-5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=x\sqrt{x^2-2x+5}-5\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$$

$$=x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.\ \blacktriangle$$

10.9. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БИНОМА

Рассмотрим неопределенный интеграл следующего вида:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,\ a\neq 0,\ b\neq 0. \qquad (10.15)$$

Подынтегральное выражение называют *биномиальным дифференциалом*, но чаще – *дифференциальным биномом*. Если $m,n,p\in\mathbb{Z}$, то подынтегральная функция является рациональной.

Рассмотрим неопределенный интеграл от дифференциального бинома при $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Ясно, что в частных случаях при $n=0$ или $p=0$ переходит в табличный интеграл 1 или 2. Такие случаи в дальшем рассматривать не будем.

Можно указать три случая, когда (10.15) удается свести к интегралу от рациональной дроби.

Первый случай. Если $p\in\mathbb{Z}$, то подстановка $x=t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

Пример 10.32. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{x}}$.

Δ В данном случае $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=-3\in\mathbb{Z}$, и можно воспользоваться первой подстановкой Чебышева:

$$x=t^4,\ dx=4t^3dt.$$

В этом случае интеграл будет равен

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{x}}=\int \frac{4t^3dt}{t^2(1+t)^3}=4\int \frac{t+1-1}{(1+t)^3}dt=4\int\left(\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{(t+1)^3}\right)dt=$$

$$=4\left(\frac{-1}{t+1}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right)=\frac{-4}{\sqrt[4]{x}+1}+\frac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}+C.\ \blacktriangle$$

Второй случай. Если $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, то подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 10.33. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Δ В данном случае $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}$. Воспользуемся второй подстановкой Чебышева:

$$1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,\ x=\left(t^3-1\right)^4,\ dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt.$$

Интеграл примет вид

$$12\int \frac{t^3\left(t^3-1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^2}dt=12\int t^3\left(t^3-1\right)dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=12\frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}}{7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C.\ \blacktriangle$$

Третий случай. Если $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, то подстановка $a+bx^n=x^nt^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример 10.34. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx.$$

Δ В данном случае $m = 0, n = 4,\ p = -\frac{1}{4},\ \frac{m+1}{n} + p = 0,$ а следовательно, нужно воспользоваться третьей подстановкой Чебышева:

$$\frac{1}{x^4} + 1 = t^4,\ \ x = \frac{1}{(t^4 - 1)^{\frac{1}{4}}},\ \ dx = -\frac{t^3 dt}{(t^4 - 1)^{\frac{5}{4}}}.$$

Получим в таком случае

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^4} + 1\right)^{-\frac{1}{4}} dx = -\int \left(t^4 - 1\right)^{\frac{1}{4}} t^{-1} \frac{t^3 dt}{\left(t^4 - 1\right)^{\frac{5}{4}}} =$$

$$= -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t^2 - 1} + \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}} - 1}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}} + 1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}} + C. \ \blacktriangle$$

Российский математик П. Л. Чебышев доказал, что ни в каком ином случае интеграл от биномиального дифференциала не выражается через элементарные функции.

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить неопределенный интеграл, используя его свойства и таблицу неопределенных интегралов:

10.1. $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx.$

10.2. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx.$

10.3. $\int \sqrt[3]{1 - 3x} dx.$

10.4. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$

10.5. $\int \sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\, dx.$

10.6. $\int \frac{3dx}{4x^2 - 9}.$

10.7. $\int \frac{3dx}{4x^2 + 9}.$

10.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}}.$

10.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}.$

10.10. $\int \sin^2(3x) dx.$

10.11. $\int \sin^4(3x) dx.$

10.12. $\int \sin(2x) \cdot \cos(4x) dx.$

10.13. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$ **10.14.** $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

Вычислить интеграл, используя соответствующую замену переменной:

10.15. $\int \frac{dx}{4+5\cos^2 x}.$ **10.18.** $\int \frac{dx}{1+e^{3x}}.$ **10.21.** $\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}dx.$

10.16. $\int \frac{x^9}{\sqrt{1-x^{20}}}dx.$ **10.19.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$ **10.22.** $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x}dx.$

10.17. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx.$ **10.20.** $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+1}dx.$

Вычислить, используя формулу интегрирования по частям:

10.23. $\int x\operatorname{tg}^2 4x\,dx.$ **10.28.** $\int 5^x x^2 dx.$

10.24. $\int \ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)dx.$ **10.29.** $\int \left(2x^2+x\right)\operatorname{sh} x\,dx.$

10.25. $\int \sin x \ln \operatorname{tg} x\,dx.$ **10.30.** $\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

10.26. $\int \arcsin(3x+4)dx.$ **10.31.** $\int \sin \ln x\,dx.$

10.27. $\int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx.$ **10.32.** $\int x^2 e^{\sqrt{x}}dx.$

Вычислить интеграл от дробно-рациональной функции:

10.33. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx.$ **10.37.** $\int \frac{4x^2+3x+9}{(x+1)\left(x^2+4\right)}dx.$

10.34. $\int \frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+6}dx.$ **10.38.** $\int \frac{x^4+3x^2+2x+2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2}dx.$

10.35. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx.$ **10.39.** $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx.$

10.36. $\int \frac{2x^2+11x+11}{\left(x^2+3x+2\right)(x+2)}dx.$

Вычислить интеграл от рационально-тригонометрической функции:

10.40. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}.$ **10.42.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$ **10.44.** $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx.$

10.41. $\int \frac{dx}{1+4\cos x}.$ **10.43.** $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx.$

Вычислить интеграл от рационально-гиперболической функции:

10.45. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x\, dx}{1+\operatorname{sh}^4 x}$.

10.46. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}$.

10.47. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x + 3\operatorname{ch} x}$.

10.48. $\int \frac{dx}{1+10\operatorname{ch} x}$.

Вычислить, используя дробно-линейную подстановку:

10.49. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

10.50. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

10.51. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$.

10.52. $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\, dx$.

Вычислить, используя подстановку Эйлера:

10.53. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, $x > -1$.

10.54. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Вычислить, используя подходящую гиперболическую или тригонометрическую подстановку:

10.55. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

10.56. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx$.

10.57. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

10.58. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

10.59. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$.

10.60. $\int x^4\sqrt{4-x^2}\, dx$.

Вычислить интеграл вида $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$:

10.61. $\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

10.62. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\, dx$.

10.63. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+2x+2x^2}}$.

10.64. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\, dx$.

Вычислить, используя чебышевскую подстановку:

10.65. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

10.66. $\int \sqrt[3]{x-x^3}\, dx$.

10.67. $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

10.68. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

10.69. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

Ответы и указания

10.1. $2\sqrt{x}-\frac{2x^{3/2}}{3}+\frac{2x^{5/2}}{5}$. **10.2.** $e^{\sin x}$. **10.3.** $-\frac{1}{4}(1-3x)^{4/3}$. **10.4.** $-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+$ $+\frac{1}{5\ln 2}2^{-x}$. **10.5.** $\frac{24x^{25/24}}{25}$. **10.6.** $\frac{3}{12}\ln\frac{2x-3}{2x+3}$. **10.7.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}$. **10.8.** $\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-9}|$. **10.9.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}$. **10.10.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{12}\sin(6x)$. **10.11.** $\frac{3x}{8}-\frac{1}{12}\sin(6x)+\frac{1}{96}\sin(12x)$. **10.12.** $\frac{1}{4}\cos(2x)-\frac{1}{12}\cos(6x)$. **10.13.** $-x-\operatorname{ctg}x$. **10.14.** $x-\operatorname{cth}x$. **10.15.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{3}$. **10.16.** $\frac{1}{10}\arcsin\left(x^{10}\right)$. **10.17.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\left(-\frac{4}{15}-\frac{2x^2}{15}+\frac{2x^4}{5}\right)$. **10.18.** $x-\frac{1}{3}\ln(1+e^{3x})$. **10.19.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$. **10.20.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(e^{2x})$. **10.21.** $\ln x+(\ln(2x)-\ln(4x))\ln(\ln(4x))$. **10.22.** $\frac{1}{4}(\ln(\operatorname{tg}x))^2$. **10.23.** $-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{16}\ln\cos(4x)+\frac{1}{4}x\operatorname{tg}(4x)$. **10.24.** $-\sqrt{9+x^2}+$ $+x\ln(x+\sqrt{9+x^2})$. **10.25.** $\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\cos x\ln(\operatorname{tg}x)$. **10.26.** $\frac{1}{3}\sqrt{1-(4+3x)^2}+$ $+\frac{4}{3}\arcsin(4+3x)+x\arcsin(4+3x)$. **10.27.** $\frac{x}{4}-\frac{x^2}{12}-\frac{\operatorname{arctg}x}{4}+\frac{x^4}{4}\operatorname{arctg}x$. **10.28.** $5^x\left(\frac{2}{\ln^3 5}-\frac{2x}{\ln^2 5}+\frac{x^2}{\ln 5}\right)$. **10.29.** $(4+x+2x^2)\operatorname{ch}x-(1+4x)\operatorname{sh}x$. **10.30.** $2x-$ $-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **10.31.** $-\frac{1}{2}x\cos\ln x+\frac{1}{2}x\sin\ln x$. **10.32.** $e^{\sqrt{x}}\left(-240+240\sqrt{x}-120x+40x^{3/2}-10x^2+2x^{5/2}\right)$. **10.33.** $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$. **10.34.** $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{3}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|$. **10.35.** $x+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x}\right)+\frac{\operatorname{arctg}x}{3}$. **10.36.** $-\frac{3}{2+x}+2\ln(1+x)$. **10.37.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+2\ln(1+x)+\ln(4+x^2)$. **10.38.** $-\frac{1}{1+x}+$ $+\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. **10.39.** $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x+1|$. **10.40.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}x+1|-\frac{1}{6}\ln|1-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x|$. **10.41.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right|$. **10.42.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}x}{\cos x}$. **10.43.** $-\cos x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x}+$ $+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|$. **10.44.** $-\frac{1}{4}(\operatorname{ctg}x)^4$. **10.45.** $-\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$. **10.46.** $-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{cth}x}{\operatorname{sh}x}+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right|-$

$-\frac{1}{\operatorname{ch} x}$. **10.47.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{\operatorname{sh} x}+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\operatorname{th}\frac{x}{2}$. **10.48.** $\frac{2}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{11}}$.

10.49. $-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2t}{\sqrt{3}}\right)-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(1+t+t^2)$, $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$. **10.50.** $\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}t^2+t^3+$ $+\frac{3}{8}\ln|2t-1|$, $t=\sqrt[6]{x}$. **10.51.** $-6\sqrt{\frac{x-5}{x-7}}$. **10.52.** $-\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|$, $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. **10.53.** $-\ln|\sqrt{x^2+x+1}-x|-\ln|\sqrt{x^2+x+1}-x-2|$. **10.54.** $-2\operatorname{arctg}t+$ $+\ln|t-1|-\ln|t|$, $t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}$. **10.55.** $\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}$.

10.56. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$. **10.57.** $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\right|$.

10.58. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3x^3}$. **10.59.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right|$. **10.60.** $4t-\sin(4t)-$ $-\frac{4}{3}(\sin(2t))^3$, где $t=\arcsin\frac{x}{2}$. **10.61.** $\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\frac{x^9}{10}\right)\times$ $\times\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. **10.62.** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+4x+3}\right|$. **10.63.** $\frac{1}{3x}\left(2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{2x^2+2x+1}-\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}\right)$.

10.64. $\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)$. **10.65.** $\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t$, где $t=\sqrt{1+x^{2/3}}$. **10.66.** $\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln|1+t|+\frac{1}{12}\ln(1-t+t^2)$, где $t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$. **10.67.** $\frac{3}{5}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{5}{2}}-\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$. **10.68.** $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}$, где $z=\sqrt{1-x^2}$.

10.69. $-\frac{5}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{9}{5}}+\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}$.

Глава 11
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

11.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a;b]$ точками $\{x_i\}_{i=0}^{n}$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. Число $h = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$ будем называть *диаметром разбиения* отрезка $[a;b]$. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$ произвольным образом выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$ и составим сумму, которую будем называть *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$:

$$S(f,\xi,T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{11.1}$$

Очевидно, значение интегральной суммы зависит от выбора разбиения отрезка $[a;b]$ и точек $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$.

Определение 11.1. Если существует конечный предел интегральных сумм вида (11.1) при $h \to 0$, не зависящий от выбора разбиения отрезка $[a;b]$ и точек ξ_i, то его называют ***определенным интегралом*** (***интегралом Римана***) от функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Концы отрезка интегрирования будем называть *пределами интегрирования* (левый конец отрезка – нижним пределом интегрирования, а правый конец – верхним пределом интегрирования).

Пример 11.1. Δ Рассмотрим постоянную функцию $f(x)=c=\text{const}$, $x\in[a;b]$. Составим для этой функции интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} c(x_i-x_{i-1})=c(b-a).$$

Как видим, интегральная сумма не зависит ни от выбора разбиения, ни от выбора точек ξ_i. Тогда согласно определению

$$\int_a^b c\,dx=c(b-a). \quad \blacktriangle$$

Необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ устанавливает следующая теорема.

Теорема 11.1. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Ограниченность функции на отрезке является необходимым, но не достаточным условием ее интегрируемости на отрезке. Рассмотрим функцию Дирихле, которая хотя и ограничена, однако не интегрируема на любом отрезке $[a;b]$.

Пример 11.2. Δ Функция Дирихле определяется следующим образом:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in R\setminus Q.\end{cases}$$

Покажем, что для этой функции не существует предела интегральной суммы.

В самом деле, если на каждом частичном отрезке выбирать $\xi_i\in Q$, то получим

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i=b-a\neq 0.$$

Если же выбирать $\xi_i\in R\setminus Q$, то

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0.$$

Таким образом, для функции Дирихле не существует предела интегральных сумм. ▲

Рассмотрим теперь теоремы, устанавливающие достаточные условия интегрируемости функции на отрезке $[a;b]$.

Теорема 11.2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Пример 11.3. Δ Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$ на отрезке $[0;1]$. Поскольку $f(x)$ непрерывна на заданном отрезке, то она интегрируема на этом отрезке, и ее интеграл можно найти как предел некоторой интегральной суммы.

Выберем следующее разбиение отрезка $[a;b]$: $0=x_0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<$ $<\frac{n-1}{n}<x_n=1$, а точки $\xi_i=\frac{i}{n}$. При таком разбиении

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

При вычислении предела мы использовали известное равенство

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \ ▲$$

Определение 11.2. Функцию $f(x)$ называют ***кусочно-непрерывной*** на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых функция имеет разрывы первого рода.

Теорема 11.3. *Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывная на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 11.4. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a;b]$ различаются лишь в конечном числе точек, то интегрируемость одной из них равносильна интегрируемости другой, причем*

$$\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

Из этой теоремы следует, что интеграл не изменится, если функцию изменить в конечном числе точек.

Теорема 11.5. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 11.6. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то их произведение $f(x)g(x)$ также интегрируемо на этом отрезке.*

Теорема 11.7. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $|g(x)|>c>0,\ x\in[a;b]$, то на отрезке $[a;b]$ интегрируемо и частное $f(x)/g(x)$.*

11.2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на любом меньшем отрезке $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$.

3. Если функция интегрируема на отрезке $[a;b]$, а $c \in [a;b]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Это свойство называют *аддитивностью определенного интеграла*.

Пример 11.4. Найти интеграл от функции $f(x) = [x]$ по отрезку $[0;10]$, где $[x]$ означает целую часть числа x.

Δ Данная функция является кусочно-непрерывной на этом отрезке, а на каждом промежутке $[i;i+1)$, $i = \overline{0,n-1}$, постоянна, причем $[x] = i$, $x \in [i;i+1)$. Следовательно, эта функция интегрируема на отрезке $[0;10]$ и, учитывая свойство аддитивности, получим

$$\int_0^{10} [x]dx = \sum_{k=0}^{9} \int_k^{k+1} k\,dx = \sum_{k=0}^{9} k = \frac{0+9}{2} \cdot 10 = 45. \ \blacktriangle$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то их линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Это свойство называют *линейностью определенного интеграла*.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, а также $m \le f(x) \le M$ и $g(x) \ge 0$, $x \in [a;b]$. Тогда

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx.$$

В частности, если $g(x)=1$, получим

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,\ a<b.$$

11.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Чтобы вычислить определенный интеграл, можно использовать его представление через предел интегральных сумм. Но этот путь обычно приводит к громоздким выкладкам. Существует более удобный универсальный способ вычисления определенного интеграла.

Теорема 11.8. *Если* $\Phi(x)$ *– первообразная для непрерывной на отрезке* $[a;b]$ *функции* $f(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b. \qquad (11.2)$$

Формула (11.2) называется *формулой Ньютона – Лейбница*.

Пример 11.5. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx.$

Δ Одной из первообразных для функции $f(x)$ является функция $\Phi(x)=\dfrac{\sin 2x}{2}$. В таком случае согласно формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

Пример 11.6. Найти интеграл $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Δ Пользуясь формулой Ньютона – Лейбница, получим

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}. \ \blacktriangle$$

Пример 11.7. Найти интеграл $I = \int\limits_{\operatorname{sh}1}^{\operatorname{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+t^2}}$.

Δ Пользуясь таблицей неопределенных интегралов, получим

$$I = \int\limits_{\operatorname{sh}1}^{\operatorname{sh}2} \frac{dx}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{\operatorname{sh}1}^{\operatorname{sh}2} = \ln \frac{\operatorname{sh}2 + \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 2}}{\operatorname{sh}1 + \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 1}}.$$

Далее, учитывая соотношения $1+\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$, $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, окончательно получим

$$I = \ln \frac{e^2}{e} = \ln e = 1. \ \blacktriangle$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет установить правило замены переменного под знаком определенного интеграла, а также правило интегрирования по частям.

Теорема 11.9. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *а функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\alpha;\beta]$, *причем* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *и* $\varphi(t) \in [a;b]$ *при* $t \in [\alpha;\beta]$, *то справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt. \tag{11.3}$$

Вычисление определенного интеграла с помощью формулы (11.3) называется методом замены переменной интегрирования. Отметим, что в определенном интеграле при замене переменной x на t нет необходимости возвращаться к «старой» переменной, как в неопределенном интеграле, однако необходимо помнить, что нужно менять пределы интегрирования.

Пример 11.8. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$$

Δ Воспользуемся дробно-линейной подстановкой $\sqrt{1+x}=t$. В таком случае $x=t^2-1,\ dx=2t\,dt,$ а новые пределы $\alpha=\sqrt{1+3}=2,\ \beta=\sqrt{1+8}=3.$ Переходя к новой переменной в интеграле, получим

$$I=\int_2^3\frac{\left(t^2-1\right)2t}{t}dt=2\int_2^3\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=2(9-3)-2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{32}{3}.\ \blacktriangle$$

Пример 11.9. Найти интеграл $I=\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Δ В данном случае можно воспользоваться тригонометрической подстановкой $x=a\sin t$, в таком случае $dx=a\cos t\,dt,$ а новые пределы интегрирования $\alpha=\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{x=0}=0,\ \beta=\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{x=a}=\frac{\pi}{2}.$ Следовательно,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2x}\cdot a\cdot\cos x\,dx=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{4}.\ \blacktriangle$$

Пример 11.10. Найти интеграл $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos x+3}.$

Δ Данный интеграл можно рационализировать, применив универсальную тригонометрическую подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$ В таком случае

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

а новые пределы интегрирования будут равны $\alpha=\operatorname{tg}0=0,\ \beta=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$ Следовательно,

$$I=\int_0^1\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)}=2\int_0^1\frac{dt}{t^2+5}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt5}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt5}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt5}-\operatorname{arctg}0^\circ\right)=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt5}.\ \blacktriangle$$

Теорема 11.10. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a;b]$, *то справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Отметим, что при выборе в подынтегральном выражении множителей $u(x)$ и $dv(x)$ нужно руководствоваться теми же соображениями, что и для неопределенного интеграла.

Пример 11.11. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\pi} x\cos x\,dx$, применяя формулу интегрирования по частям.

Δ Полагая $x = u$, $dx = du$, $dv = \cos x dx$, $v = \sin x$, получим

$$I = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1. \ \blacktriangle$$

Пример 11.12. Найти интеграл $\int_1^2 \ln x\,dx$.

Δ Данный интеграл также вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям. Для этого полагаем

$$u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x},\ dv = dx,\ v = x.$$

Подставив в формулу, получим

$$I = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - \ln 1 - \int_1^2 dx =$$

$$= 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - (2-1) = 2\ln 2 - 1. \ \blacktriangle$$

Зачастую приходится применять формулу интегрирования по частям несколько раз.

Пример 11.13. Найти интеграл $I = \int_1^e x\ln^2 x\,dx$.

Δ Воспользуемся формулой интегрирования по частям, полагая

$$u = \ln^2 x,\ du = 2\ln x\frac{1}{x}dx,\ dv = xdx,\ v = \frac{x^2}{2}.$$

Получим в таком случае

$$I = \int_1^e x\ln^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}2\ln x\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\ln x\,dx.$$

Для второго интеграла опять применим формулу, полагая $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = xdx$, $v = \frac{x^2}{2}$. Окончательно

$$I = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2} \ln x \bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \int_1^e x\,dx = \frac{1}{4} x^2 \bigg|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right). \ \blacktriangle$$

11.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

11.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$, $a < b$, и осью абсцисс. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*. Найдем ее площадь. Для этого разобьем отрезок $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{i+1}; x_i]$ точками $\{x_i\}_{i=0}^n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Рассмотрим опять интегральную сумму, построенную при определении интеграла:

$$S(f, \xi, T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Каждое слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ в этой сумме представляет собой площадь частичного прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$, а сумма всех таких слагаемых равна площади ступенчатой фигуры, образованной из всех частичных прямоугольников. Площадь ступенчатой фигуры приближенно равна площади криволинейной трапеции, причем точность приближения тем выше, чем меньше $\{\Delta x_i\}_{i=0}^n$ или диаметр разбиения h. Поэтому естественно в качестве точного значения площади S криволинейной трапеции положить

$$S = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \qquad (11.4)$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

Пример 11.14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 - 2x$, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и осью Ox.

Δ Рассматриваемая фигура состоит из двух частей, одна из которых ограничена графиком $y = x^2 - 2x$, осью Ox и прямыми $x = -1$, $x = 0$, вторая ограничена также графиком $y = x^2 - 2x$, осью Ox и прямыми $x = 0$, $x = 1$. Для нахождения площади S_1 первой фигуры воспользуемся формулой (11.4), поскольку подынтегральная функция в этом случае будет положительной, т. е.

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 \Bigg|_{-1}^{0} = \frac{4}{3}.$$

Для нахождения площади S_2 второй фигуры также воспользуемся формулой (11.4), однако подынтегральную функцию $y = x^2 - 2x$ возьмем со знаком «–», поскольку она на отрезке $[0;1]$ отрицательна. Таким образом,

$$S_2 = -\int_{0}^{1} \left(x^2 - 2x\right) dx = -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3}. \ \blacktriangle$$

Рассмотрим теперь фигуру, ограниченную графиками непрерывных на $[a;b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$. Площадь такой фигуры можно вычислить по формуле

$$S = \int_{a}^{b} \left(f(x) - g(x)\right) dx. \qquad (11.5)$$

Пример 11.15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$.

Δ Найдем сначала координаты точек пересечения прямой и параболы. Для этого нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$$

Из системы найдем, что кривые пересекаются в точках $O(0;0)$ и $A(3;-3)$. Кроме того, парабола ограничивает фигуру сверху, а прямая снизу. Применяя формулу (11.5), найдем

$$S = \int_{0}^{3} \left(\left(2x - x^2\right) - (-x)\right) dx = \int_{0}^{3} \left(3x - x^2\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3} =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 27 \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5. \ \blacktriangle$$

Формула (11.4) может быть использована и в том случае, если кривая, ограничивающая трапецию, задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha; \beta].$$

Производя замену переменной в интеграле (11.4), получим (в предположении, что $x = a$ при $t = \alpha$ и $x = b$ при $t = \beta$):

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} yx'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (11.6)$$

Пример 11.16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Δ Воспользуемся для этого формулой (11.6), записав уравнение эллипса в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Учитывая симметричность эллипса относительно координатных осей, вычислим площадь фигуры в первом квадранте и умножим результат на 4, т. е.

$$S = 4\int_0^a y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \ \blacktriangle$$

В том случае, когда плоская фигура имеет более сложную форму, ее нужно разбивать прямыми, параллельными оси ординат, на части, площади которых можно вычислить по уже известным формулам.

С помощью определенного интеграла можно вычислять площадь *криволинейного сектора*, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной кривой $r = r(\varphi)$, заданной в полярных координатах, и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$, где r, φ – полярные координаты. Для этого будем пользоваться формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (11.7)$$

Пример 11.17. Вычислить площадь фигуры, заключенной между первым и вторым витками спирали Архимеда $r = a\varphi$.

Δ Искомую площадь найдем вычитая из площади S_1 фигуры, ограниченной спиралью $r = a\varphi$, лучами $\varphi = 2\pi$, $\varphi = 4\pi$ (площадь второго витка), площадь S_2 фигуры, ограниченной спиралью $r = a\varphi$, лучами $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ (площадь первого витка). Каждую из площадей S_1 и S_2 найдем по формуле (11.7). Получим в таком случае

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} a^2\varphi^2 d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\left.\frac{\varphi^3}{3}\right|_{2\pi}^{4\pi} - \left.\frac{\varphi^3}{3}\right|_{0}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{64\pi^3}{3} - \frac{8\pi^3}{3} - \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{48}{3}\pi^3\right) = 8a^2\pi^3. \ \blacktriangle$$

11.4.2. Вычисление длин дуг кривых

Рассмотрим на плоскости кривую l с началом в точке A и концом в точке B.

Разобьем эту кривую на частичные дуги точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots,$ $M_n = B$ и рассмотрим длину ломаной $M_0M_1\ldots M_n$, вписанной в эту кривую. Если существует предел длины ломаной линии, когда число звеньев ломаной неограниченно растет, а длина наибольшего звена стремится к нулю, то кривую называют *спрямляемой*, а предел – *длиной кривой l*.

Если кривая является графиком непрерывно дифференцируемой на $[a;b]$ функции $y = f(x)$, то она спрямляема, а ее длину можно найти по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{11.8}$$

Пример 11.18. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ между точками, абсциссы которых равны $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$ соответственно.

Δ Применяя формулу (11.8) и учитывая, что

$$y' = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},$$

найдем

$$L = \int_3^8 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_3^8 \sqrt{1+x}\, dx = \left.\frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_3^8 = \frac{2}{3}(27 - 8) = \frac{38}{3}. \ \blacktriangle$$

Пусть теперь пространственная кривая l задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \; t \in [\alpha;\beta], \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha;\beta]$ функции. Тогда кривая l спрямляема, а ее длина находится по формуле

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 + \left(\chi'(t)\right)^2}\, dt.$$

В том случае, когда кривая задана параметрически и является плоской (лежит в плоскости Oxy), формула несколько упрощается, поскольку $z = 0$:

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt. \qquad (11.9)$$

Отметим также, что формула (11.8) получается из формулы (11.9), поскольку кривую, заданную явно, можно задать параметрически, если положить

$$x = t,\; y = f(t),\; t \in [a;b].$$

Пример 11.19. Вычислить длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases} y = a(1 - \cos t), \\ x = a(t - \sin t). \end{cases}$$

Δ Воспользовавшись формулой (11.9), получим

$$L = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt =$$

$$= 2a\int\limits_{0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a. \;\blacktriangle$$

Пусть теперь кривая l задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha;\beta],$ где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta].$ Тогда ее можно задать параметрически, поскольку

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \varphi \in [\alpha;\beta],$$

где в роли параметра выступает полярный угол.

Подставляя выражения $x(\varphi)$, $y(\varphi)$ в формулу (11.9) получим формулу для вычисления длины кривой, заданной в полярных координатах:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi. \qquad (11.10)$$

Пример 11.20. Найти длину дуги кардиоиды $r = a(1 - \cos\varphi)$.

Δ Учитывая симметричность кривой относительно полярной оси, длину всей кривой найдем умножив длину половины (когда полярный угол меняется от 0° до π) на 2. Применяя формулу (11.10), найдем в таком случае

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a. \ \blacktriangle$$

11.4.3. Вычисление объемов тел. Объем тела вращения

Рассмотрим некоторое тело в пространстве. Пусть известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: $S = S(x)$, $a \le x \le b$, тогда его объем V можно найти по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \qquad (11.11)$$

Пример 11.21. Найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \dfrac{c}{a}x$, $z = 0$.

Δ Будем рассматривать сечения тела плоскостями, перпендикулярными оси Oy (параллельными плоскости Oxz). В сечении получим прямоугольный треугольник. Пусть $M(x; y; z)$ – вершина такого треугольника, лежащая на пересечении поверхностей $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $z = \dfrac{c}{a}x$. Катеты треугольника в таком случае равны x и z. Из уравнения эллипса имеем

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Учитывая то, что M принадлежит поверхности $z = \frac{c}{a}x$, найдем площадь треугольника:

$$S(y) = \frac{xz}{2} = \frac{cx^2}{2a} = \frac{c}{2a}a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{ac}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Применяя формулу (11.11), найдем объем

$$V = \int_{-b}^{b} \frac{ac}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\int_{0}^{b} \frac{ac}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy =$$

$$= ca\left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b = ca\left(b - \frac{b}{3}\right) = \frac{2}{3}abc. \ \blacktriangle$$

Пусть теперь вокруг оси Ox вращается график непрерывной на $[a;b]$ функции $y = f(x) \geq 0$. Тело, ограниченное поверхностью вращения и плоскостями $x = a$, $x = b$, называется *телом вращения*. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку с абсциссой $x \in [a;b]$, представляет собой круг радиусом $f(x)$, т. е. $S(x) = \pi f^2(x)$.

С учетом формулы (11.11) объем тела вращения найдем по формуле

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx. \tag{11.12}$$

Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, вокруг оси Oy, выражается формулой

$$V = 2\pi\int_a^b xy\,dx. \tag{11.13}$$

Объем тела, полученного при вращении сектора, образованного дугой кривой $r = f(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси, может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi\, d\varphi. \tag{11.14}$$

Этой же формулой удобно пользоваться при отыскании объема, полученного вращением вокруг полярной оси некоторой замкнутой кривой, заданной в полярных координатах.

Пример 11.22. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} t \in [0; 2\pi],$$

и осью Ox: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy.

Δ В первом случае воспользуемся формулой (11.12)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - \cos^3 t \right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(t - 3\sin t + \frac{3}{2} t + \frac{3}{4} \sin 2t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \pi a^3 \left(\frac{5}{2} 2\pi \right) = 5\pi^2 a^3.$$

В случае б) по формуле (11.13) получим

$$V = 2\pi \int_a^b xy\, dx = 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(t - \sin t - 2t\cos t + \sin 2t + t\cos^2 t - \sin t \cdot \cos^2 t \right) dt =$$

$$= 2\pi a^3 \left(\frac{t^2}{2} + \cos t - 2(t \sin t + \cos t) - \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{t + t\cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2\pi a^3 \left(2\pi^2 + \frac{t^2}{4} \Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{t \sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} \right) = 2\pi a^3 \left(2\pi^2 + \pi^2 \right) = 6\pi^3 a^3. \ \blacktriangle$$

Пример 11.23. Найти объем тела, ограниченного вращением вокруг полярной оси кривой, заданной уравнением $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Δ Воспользовавшись формулой (11.14), получим

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^3 d(1 + \cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3 \frac{(1 + \cos\varphi)^4}{4} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi a^3}{12} 2^4 = \frac{8\pi a^3}{3}. \ \blacktriangle$$

11.4.4. Вычисление площади поверхности вращения

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную вместе со своей производной на отрезке $[a;b]$.

Площадь поверхности, образованной вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx. \qquad (11.15)$$

Пример 11.24. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги параболы $y^2 = 2x+1$, заключенной между точками с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$.

Δ Применяя формулу (11.15), получим

$$S = 2\pi\int_1^7 \sqrt{2x+1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_1^7 \sqrt{2x+2}\,dx =$$

$$= 2\pi\frac{1}{2}\int_1^7 (2x+2)^{\frac{1}{2}}\,d(2x+2) = \pi\frac{2(2x+2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^7 = \frac{2\pi}{3}\left(16^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(4^3 - 2^3\right) = \frac{2\pi}{3}(64-8) = \frac{112\pi}{3}. \quad \blacktriangle$$

11.4.5. Некоторые приложения определенного интеграла в физике

Если материальная точка перемещается вдоль оси Ox из положения $x = a$ в положение $x = b$ под действием переменной силы $F = F(x)$, направленной вдоль этой оси, то работа, произведенная силой F, находится по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Пример 11.25. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удаления ее на 1 см необходимо приложить силу в 1 кН.

Δ Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину, пропорциональна ее растяжению, т. е. $F = kx$, где x – растяжение пружины (в метрах); k – коэффициент пропорциональности. По условию $x = 0{,}01$ м, а сила $F = 1$ кН, и из равенства $1 = 0{,}01k$ получим $k = 100$, т. е. $F = 100x$. Следовательно,

$$A = \int_0^{0,1} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0,1} = 0{,}5 \text{ кДж. } \blacktriangle$$

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v(t)$, тогда путь, пройденный ею за промежуток времени от $t = \alpha$ до $t = \beta$ найдем по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta v(t)dt. \tag{11.16}$$

Пример 11.26. Материальная точка двигается прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0;3]$.

Δ Применяя формулу (11.16), получим

$$S = \int_0^3 \left(3t^2 + 2t + 1\right)dt = \left(t^3 + t^2 + t\right)\Big|_0^3 = 39 \text{ м. } \blacktriangle$$

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат и в точке $A(x; y)$ сконцентрирована масса m.

Статическими моментами M_x и M_y материальной точки A относительно осей Ox и Oy называются произведения

$$M_x = my, \; M_y = mx.$$

Рассмотрим теперь систему материальных точек $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), \ldots,$ $A_n(x_n; y_n)$, с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно.

Статическими моментами M_x и M_y этой системы соответственно относительно оси Ox и Oy будем называть суммы

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \; M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Центром масс (*центром тяжести*) системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют точку $C(x_c; y_c)$, обладающую следующим свойством: если в ней сконцентрировать всю массу системы $m = \sum_{i=1}^n m_i$, то статические моменты точки C относительно каждой оси будут равны статическим моментам системы. Таким образом,

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i = my_c, \; M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i = mx_c,$$

откуда получим формулы для нахождения координат центра масс системы материальных точек:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Пусть $y = f(x),\ x \in [a;b],$ – уравнение однородной материальной кривой с постоянной линейной плотностью ρ, тогда статические моменты этой кривой можно найти по формулам:

$$M_x = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \quad M_y = \rho \int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx,$$

а координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}.$$

Пример 11.27. Найти координаты центра масс однородной дуги окружности радиусом R с центральным углом 2α.

Δ Выберем систему координат так, чтобы центр окружности совпадал с началом координат, а ось абсцисс была бы для дуги осью симметрии. Тогда, вследствие однородности и симметричности кривой относительно оси абсцисс $y_c = 0,$ а

$$x_c = \frac{\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy}{\int_{-a}^{a} \sqrt{1+\left(x'_y\right)^2}\,dy}.$$

Запишем уравнение окружности в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$$

В таком случае

$$x'_t = \frac{x'}{y'_t} = \frac{-R\sin t}{R\cos t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t, \ \sqrt{1+(x')^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\cos t}.$$

Следовательно,

$$x_c = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\cos t \frac{1}{\cos t} R\cos t\, dt}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\cos t} R\cos t\, dt} = \frac{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos t\, dt}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R\, dt} = R\frac{\sin t\big|_{-\alpha}^{\alpha}}{t\big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{R\cdot 2\sin\alpha}{2\alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \ \blacktriangle$$

Рассмотрим теперь материальную плоскую фигуру (пластинку), ограниченную графиком функции $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Пусть поверхностная плотность пластинки равна $\rho = \text{const}$. Тогда статические моменты пластинки находятся по формуле

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx, \ M_y = \rho\int\limits_a^b xf(x)dx,$$

а координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b xf(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}, \ y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx}{\int\limits_a^b f(x)dx}. \tag{11.17}$$

Пример 11.28. Вычислить координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = 6 - x^2$, $y = 2$.

Δ Из однородности и симметричности данной фигуры относительно оси Oy следует, что $x_c = 0$. Применяя формулы (11.17), найдем

$$y_c = \frac{1}{2}\frac{\int\limits_{-2}^{2}\left(\left(6-x^2\right)^2 - 2^2\right)dx}{\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx} = \frac{1}{2}\frac{2\int\limits_0^2\left(32-12x^2+x^4\right)dx}{2\int\limits_0^2\left(4-x^2\right)dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(32x - \frac{12x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2}{\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{192}{5}}{\frac{16}{3}} = \frac{36}{10} = 3{,}6. \ \blacktriangle$$

Если фигура ограничена снизу линией $y = f_1(x)$, сверху $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, а сбоку прямыми $x = a$, $x = b$ и ее поверхностная плотность определяется функцией $\rho(x)$, то координаты $(x_c; y_c)$ ее центра масс находят по формулам:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\rho(x)\big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b x\rho(x)\Big(f_2^2(x) - f_1^2(x)\Big)dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx}.$$

11.4.6. Некоторые приложения определенного интеграла в биологии

Ограничимся лишь тремя примерами. Будем считать число особей в популяции, численность популяции и биомассу популяции непрерывными функциями времени.

Численность популяции. Пусть условия существования популяции благоприятны и численность популяции меняется со временем. В этом случае общее число особей в популяции растет со временем, поскольку рождаемость превышает смертность.

Прирост числа особей в единицу времени называют скоростью роста популяции. Обозначим ее через функцию $v(t)$. Отметим, что в «старых» (давно обитающих в данной местности), установившихся популяциях $v(t)$ мала и медленно стремится к нулю. Если же популяция молода, $v(t)$ может значительно колебаться (уменьшаться или увеличиваться), поскольку взаимоотношения с другими популяциями еще не установились или есть внешние причины, влияющие на взаимоотношения (например, сознательное вмешательство человека). Пусть скорость прироста $v(t)$ известна. Подсчитаем прирост численности за промежуток времени от t_0 до t_1.

Из определения скорости $v(t)$ следует, что она является производной от численности $N(t)$ в момент времени t. Следовательно, численность является первообразной для $v(t)$:

$$N(t_1) - N(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)dt. \tag{11.18}$$

Как известно, в условиях неограниченных ресурсов питания, популяция как бы «не стареет» в силу того, что скорость роста многих популяций экспоненциальная:

$$v(t) = ae^{kt}. \tag{11.19}$$

Например, такие условия создают для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. Воспользуемся формулой (11.18), учитывая (11.19), получим

$$N(t_1) = N(t_0) + a\int_{t_0}^{t_1} e^{kt}dt = N(t_0) + \frac{a}{k}e^{kt}\Big|_{t_0}^{t_1} = N(t_0) + \frac{a}{k}\left(e^{kt_1} - e^{kt_0}\right). \quad (11.20)$$

Формулу (11.20) применяют также для подсчета численности культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин.

Биомасса популяции. Пусть в популяции вес особи заметно меняется в течение жизни. Найдем общую массу популяции. Обозначим через τ возраст популяции; $N(\tau)$ – число особей популяции, возраст которых равен τ; $P(\tau)$ – средний вес особи возраста τ; $M(\tau)$ – биомасса всех особей в возрасте от 0 до τ.

Отметим, что произведение $N(\tau)P(\tau)$ равно биомассе всех особей возраста τ. Разность $M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)$, равная биомассе всех особей в возрасте от τ до $\tau+\Delta\tau$, удовлетворяет неравенствам

$$N(\breve{\tau})P(\breve{\tau}) \le M(\tau+\Delta\tau) - M(\tau) \le N(\hat{\tau})P(\hat{\tau}),$$

здесь $N(\breve{\tau})P(\breve{\tau})$ и $N(\hat{\tau})P(\hat{\tau})$ – наименьшее и наибольшее значения функции $N(\tau)P(\tau)$ в промежутке от τ до $\tau+\Delta\tau$ соответственно.

Из непрерывности $N(\tau)P(\tau)$, которая следует из непрерывности $N(\tau)$ и $P(\tau)$, вытекает, что

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} N(\breve{\tau})P(\breve{\tau}) = \lim_{\Delta\tau\to 0} \le N(\hat{\tau})P(\hat{\tau}) = N(\tau)P(\tau).$$

Тогда по теореме о двух милиционерах* имеем

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} = N(\tau)P(\tau),$$

или, иначе,

$$\frac{dM(\tau)}{d\tau} = N(\tau)P(\tau).$$

Таким образом, если T – максимальный возраст особи в данной популяции, то

$$M(T) - M(0) = \int_0^T N(\tau)P(\tau)d\tau.$$

---

*Если в некоторой окрестности точки a $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) =$ $= \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Принимая во внимание, что $M(0) = 0$, окончательно получаем

$$M = M(T) = \int_0^T N(\tau)P(\tau)d\tau.$$

Средняя длина пробега. Определим среднюю длину пути (пробега) при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Пусть участком будет круг радиусом R (рис. 11.1).

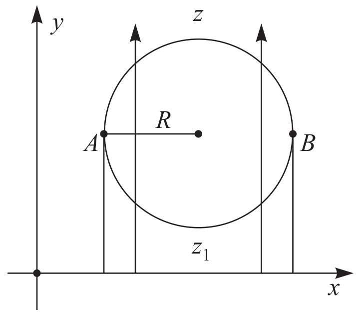


Рис. 11.1

Расчет проведем для птиц. Положим, что R не слишком велико, т. е. такое, что большинство птиц определенного вида пересекает круг по прямой. Причем птица может пересечь окружность под любым углом в любой точке. Тогда очевидно, что в зависимости от этого длина ее пролета над кругом принимает значения от 0 до $2R$.

Мы вычисляем среднюю длину пробега. Обозначим ее через l. Ограничимся лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, например, как указано на рис. 11.1 (в направлении, параллельном оси Oy). Это не ограничивает общности, так как круг симметричен относительно любого своего диаметра. При наших предположениях средняя длина пролета – среднее расстояние между дугами AzB и Az_1B, т. е. среднее значение функции $f_1(x) - f_2(x)$. Причем $f_1(x)$ – уравнение верхней дуги AzB; $f_2(x)$ – уравнение нижней дуги Az_1B. Таким образом,

$$l = \frac{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx}{b-a} = \frac{\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx}{b-a}. \qquad (11.21)$$

Известно, что $\int_a^b f_1(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции $aAzBb$, а $\int_a^b f_2(x)dx$ – площади aAz_1Bb. Таким образом, разность в численности (11.21) равна площади круга πR^2, а $b - a = 2R$. Из (11.21) имеем

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi R}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда участком будет квадрат со стороной α. Вычислим среднюю длину прямолинейного пролета птиц через данный участок (рис. 11.2).

Вначале выделим тех птиц, которые летят под углом φ к нижней стороне квадрата. На некотором расстоянии от квадрата проведем прямую CD, перпендикулярную направлению полета. Чтобы повторить рассуждения, проведенные для круга, повернем чертеж так, чтобы CD стала горизонтальной прямой, и выберем ее в качестве оси Ox (рис. 11.3).

Тогда средняя длина пролета птиц $l(\varphi)$, летящих под углом φ к z_1B, равна отношению площади квадрата к длине отрезка $[a;b]$:

$$l(\varphi)=\frac{\alpha^2}{b-a}. \tag{11.22}$$

Из чертежа видно, что

$$b-a=\alpha\cos\varphi+\alpha\sin\varphi=\alpha(\cos\varphi+\sin\varphi)=$$
$$=\alpha\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right).$$

Подставим в (11.22):

$$l(\varphi)=\frac{\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

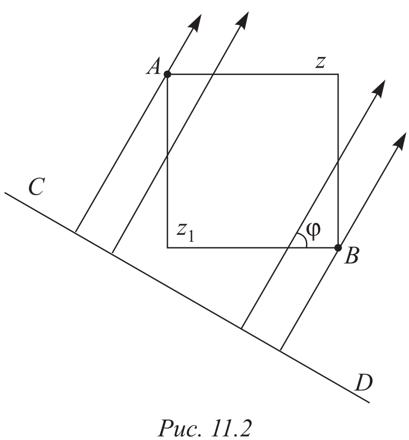


Рис. 11.2

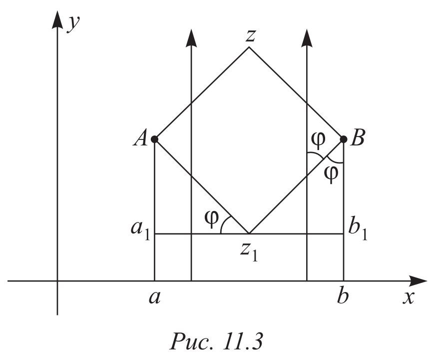


Рис. 11.3

Осталось найти среднее значение функции $l(\varphi)$. При этом учтем, что угол φ достаточно менять от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$l=\left(1\Big/\frac{\pi}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}} l(\varphi)d\varphi=\frac{4\alpha}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{4\alpha}{\pi\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=-\frac{4\alpha}{\pi\sqrt{2}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{4\alpha}{\pi\sqrt{2}}\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Задачи для самостоятельной работы

Вычислить определенный интеграл:

11.1. $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt[3]{\sin x}\,dx.$

11.2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 x+x^2\sin x\right)dx.$

11.3. $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx.$

11.4. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

11.5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi.$

11.6. $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

11.7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2-\sin x}.$

11.8. $\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4 x\,dx.$

11.9. $\int_1^2 x^2\ln x\,dx.$

11.10. $\int_0^1\arcsin\sqrt{x}\,dx.$

11.11. $\int_{1/e}^{e}|\ln x|dx.$

11.12. $\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

11.13. $\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}dx,\ a\neq 0.$

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

11.14. $y = \sin^2 x,\ y = x\sin x,\ 0 \le x \le \pi.$

11.15. $y = \ln(1+x),\ y = -xe^{-x},\ x = 1.$

11.16. $y = x - x^2,\ y = x\sqrt{1-x}.$

Найти площадь фигуры, ограниченной петлей заданной кривой:

11.17. $x = at - t^2,\ y = at^2 - t^3,\ a > 0.$

11.18. $x = t^2 - a^2,\ y = t^3 - a^2 t,\ a > 0.$

11.19. $x = a\sin 2t,\ y = a\sin t,\ a > 0.$

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

11.20. $r = a(1+\cos\varphi)$ (кардиоида).

11.21. $r = a\sin(2\varphi)$ (найти площадь одного лепестка).

11.22. $r = 2 - \cos\varphi,\ r = \cos\varphi.$

11.23. $r^2 = a^2\cos(4\varphi).$

Найти длину дуги кривой:

11.24. $y = \dfrac{4}{5}x^{5/4},\ 0 \le x \le 9.$

11.25. $y = \operatorname{ch} x,\ 0 \le x \le a.$

11.26. $y = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right),\ 1 < a \le x \le b.$

11.27. $y = \ln \operatorname{th}(x/2),\ 0 < a \le x \le b.$

11.28. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

11.29. $x = \operatorname{ch}^3 t,\ y = \operatorname{sh}^3 t,\ 0 \le t \le t_0.$

11.30. $x = a(\operatorname{sh} t - t),\ y = a(\operatorname{ch} t - 1),\ 0 \le y \le 7a,\ x \ge 0.$

11.31. $r = 2(1+\cos\varphi),\ r \le 1.$

11.32. $r = a(1-\sin\varphi),\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{6}.$

11.33. $r = a\cos^3(\varphi/3).$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

11.34. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид).

11.35. $x^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2.$

11.36. $x + y + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной данными кривыми:

11.37. $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $y = 0$, $x = a$.

11.38. $y = \sin\sqrt{x}$ $(0 \le x \le \pi^2)$, $y = 0$.

11.39. $y = \sin^2 x$, $y = x\sin x$, $0 \le x \le \pi$.

Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Oy фигуры, ограниченной данными кривыми:

11.40. $y = e^{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. **11.41.** $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$.

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

11.42. $y = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ $(0 \le x \le a)$ вокруг оси Ox.

11.43. $y = \operatorname{tg} x$ $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right)$ вокруг оси Ox.

11.44. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ вокруг оси Ox и Oy.

11.45. $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Найти статические моменты M_x и M_y кривой:

11.46. $y = a\operatorname{ch}(x/a)$, $0 \le x \le a$.

11.47. $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$.

11.48. $r = 2a\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Найти координаты центра масс кривой:

11.49. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

11.50. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

11.51. $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной кривыми:

11.52. $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y = 1/2$.

11.53. $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, $y \ge 0$, $x \ge 0$.

11.54. Найти координаты центра масс фигуры, ограниченной правой петлей лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Ответы и указания

11.1. 0. **11.2.** $\frac{\pi}{2}$. **11.3.** $\frac{100}{3}$. **11.4.** $\frac{\pi}{16}$. **11.5.** $\frac{2}{3}$. **11.6.** $2(-1+\sqrt{2})$. **11.7.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
11.8. $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\ln 2)+\frac{1}{32}\operatorname{sh}(4\ln 2)$. **11.9.** $-\frac{7}{9}+\frac{24}{9}\ln 2$. **11.10.** $\frac{\pi}{4}$. **11.11.** $2-\frac{2}{e}$.
11.12. $-\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$. **11.13.** $\frac{\sqrt{3}\,|a|}{8a^3}$. **11.14.** $\frac{\pi}{2}$. **11.15.** $\ln 4-2e^{-1}$. **11.16.** 0,1. **11.17.** $\frac{a^5}{60}$.
11.18. $\frac{8a^5}{15}$. **11.19.** $\frac{4a^2}{3}$. **11.20.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **11.21.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **11.22.** $\frac{17\pi}{4}$. **11.23.** a^2.
11.24. $\frac{232}{15}$. **11.25.** $\operatorname{sh} a$. **11.26.** $\sqrt{b^2-1}-\sqrt{a^2-1}$. **11.27.** $\ln\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} a}$. **11.28.** $6a$.
11.29. $\frac{1}{2}\left((\operatorname{ch} 2t_0)^{3/2}-1\right)$. **11.30.** $10-\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$. **11.31.** $8(2-\sqrt{3})$. **11.32.** $2a$.
11.33. $\frac{3\pi a}{2}$. **11.34.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **11.35.** $\frac{16}{3}a^3$. **11.36.** $\frac{4}{15}$. **11.37.** $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a}(1+2a)\right)$.
11.38. $\frac{\pi^3}{2}$. **11.39.** $\frac{\pi^2(4\pi^2-15)}{24}$. **11.40.** $\pi(e-1)$. **11.41.** $3\pi(2\ln 3-1)\ln 3$. **11.42.** $\frac{\pi a^3}{4}$.
11.43. $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}-2}\right)$. **11.44.** $\frac{64\pi a^2}{3}$; $16\pi^2 a^2$. **11.45.** $\frac{32\pi a^2}{5}$.
11.46. $M_x=\frac{a^2}{4}(\operatorname{sh}2+2)$, $M_y=a^2(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1)$. **11.47.** $M_x=M_y=\frac{3}{5}a^2$.
11.48. $M_x=2a^2$, $M_y=\pi a^2$. **11.49.** $x_c=y_c=\frac{2a}{5}$. **11.50.** $x_c=\pi a$, $y_c=\frac{4a}{3}$.
11.51. $x_c=y_c=\frac{4a}{5}$. **11.52.** $x_c=0$, $y_c=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-\pi)}$. **11.53.** $x_c=\frac{4a}{3\pi}$, $y_c=\frac{4(a+b)}{3\pi}$.
11.54. $x_c=\frac{\pi a\sqrt{2}}{8}$, $y_c=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аналитическая геометрия в примерах и задачах / Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.]. Минск, 2008.

Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. М., 1980.

Беклемишева, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. М., 1987.

Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу : в 2 ч. / Ю. С. Богданов. Минск, 1974. Ч. 2.

Бохан, К. А. Курс математического анализа : в 2 т. / К. А. Бохан, Н. А. Егорова, К. В. Лащенов. М., 1972. Т. 1.

Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. М., 1988.

Бурдун, А. А. Сборник задач по алгебре и геометрии / А. А. Бурдун, Е. А. Мурашко, А. С. Феденко. Минск, 1999.

Валле-Пуссен, Ш.-Ж. Курс анализа бесконечно малых : в 2 т. / Ш.-Ж. Валле-Пуссен. Л. ; М., 1933. Т. 1.

Вышэйшая матэматыка ў прыкладах і задачах : у 2 ч. / Н. Р. Абрашына-Жадаева [і інш.]. Мінск, 2007. Ч. 1.

Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. М., 1995.

Зорич, В. А. Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. М., 1981. Т. 1.

Ильин, В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М., 1971.

Ильин, В. А. Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М., 1971. Т. 2.

Канатников, А. Н. Аналитическая геометрия / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. М., 2000.

Канатников, А. Н. Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. М., 2001.

Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетник. М., 1986.

Коши, О. Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении / Л. О. Коши. СПб., 1831.

Курант, Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. М., 1970. Т. 1.

Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя, аналіз функцый адной зменнай / В. Русак [і інш.]. Мінск, 1994.

Математический анализ в вопросах и задачах / В. Ф. Бутузов [и др.]. М., 1958.

Ландау, Э. Основы анализа / Э. Ландау. М., 1947.

Лузин, Н. Н. Дифференциальное исчисление / Н. Н. Лузин. М., 1960.

Лунгу, К. Н. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры, задачи и контрольные работы / К. Н. Лунгу. М., 1989.

Моденов, П. С. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие / П. С. Моденов, А. С. Пархоменко. М., 1976.

Немыцкий, В. В. Курс математического анализа : в 2 т. / В. В. Немыцкий, М. И. Слудская, А. Н. Черкасов. М., 1957. Т. 1.

Никифоровский, В. А. Путь к интегралу / В. А. Никифоровский. М., 1985.

Новоселов, С. И. Алгебра и элементарные функции / С. И. Новоселов. М., 1950.

Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра / Г. П. Размыслович, М. М. Феденя, В. М. Ширяев. Минск, 1987.

Рудин, У. Основы математического анализа / У. Рудин. М., 1976.

Садовничий, Ю. В. Аналитическая геометрия. Курс лекций с задачами / Ю. В. Садовничий, В. В. Федорчук. М., 2009.

Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / под ред. А. С. Феденко. Минск, 1997.

Тышкевич, Р. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. Минск, 1976.

Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. М., 1955. Т. 2.

Цубербиллер, Щ. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии : учеб. пособие / Щ. Н. Цубербиллер. М., 1970.

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.] ; под ред. В. Т. Воднева. Минск, 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Ахраменко Виктор Корнеевич
Берёзкина Лариса Лукинична
Ильинкова Наталья Ивановна и др.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. СБОРНИК ЗАДАЧ

Учебное пособие

В трех частях

Часть 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Редактор *А. Г. Терехова*
Дизайн обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*
Корректор *М. А. Подголина*

Подписано в печать 28.06.2013. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 20,92.
Уч.-изд. л. 21,9. Тираж 150 экз. Заказ 434.

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.