А.А. Гусак
Г.М. Гусак
Е.А. Бричикова

# СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

МИНСК
ТетраСистемс
1999

УДК 51(035)
ББК 22.1 я2
Г 96

**Авторы:**
*кандидат физико-математических наук, профессор* А.А.Гусак;
*кандидат физико-математических наук, доцент* Г.М.Гусак;
*старший преподаватель* Е.А.Бричикова

**Научный редактор:**
*доктор физико-математических наук, профессор* П.И.Монастырный

**Рецензенты:**
*доктор физико-математических наук, профессор* М.Д.Мартыненко;
*кандидат физико-математических наук, профессор* А.А.Дадаян

**Гусак А.А.** и др.
Г 96 Справочник по высшей математике / А.А.Гусак, Г.М.Гусак, Е.А.Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс. 1999. – 640 с.
ISBN 985-6317-51-7

Справочник содержит теоретические сведения по многим разделам математики: аналитической геометрии, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, численным методам, теории вероятностей и ее приложениям, теории функций комплексной переменной, операционному исчислению. Включает примеры применения теории к решению задач, иллюстрации, соответствующие исторические сведения.

Рассчитан на студентов, аспирантов и преподавателей вузов, а также на инженерно-технических и научных работников.

УДК 51(035)
ББК 22.1 я 2

ISBN 985-6317-51-7

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочник включает следующие разделы высшей математики: аналитическая геометрия (на плоскости и в пространстве), алгебра (матрицы и определители, линейные пространства, линейные операторы, квадратичные формы, группы), дифференциальное исчисление и интегральное исчисление (функций одной переменной и функций нескольких переменных), ряды (числовые и функциональные, в том числе ряды Фурье), дифференциальные уравнения (обыкновенные и с частными производными), численные методы (решения алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений; интегрирования и интерполирования функций), элементы теории вероятностей и математической статистики (с математической обработкой результатов измерений), элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления (с приложением последнего к решению дифференциальных уравнений и их систем), начала векторного и тензорного анализа.

Справочник содержит теоретический материал без доказательств: определения соответствующих понятий, формулы, уравнения; формулировки теорем, основных задач, признаков; изложение математических методов; свойства математический понятий, их смысл и приложения.

Во многих случаях указано, кто и когда предложил соответствующий термин, символ для его обозначения, отмечено происхождение математического термина.

В каждом параграфе имеются примеры применения теории к решению практических задач. Наличие многочисленных примеров с подробными решениями может оказать существенную помощь студентам, занимающимся по заочной форме обучения, при самостоятельном выполнении ими контрольных работ, а также студентам дневных отделений при выполнении домашних заданий и подготовке к зачетам и экзаменам.

Справочник снабжен иллюстративным материалом; в нем имеются рисунки, поясняющие математические понятия, идеи методов, формулы, уравнения, условия задач и примеров, а также чертежи кривых и поверхностей, графики функций, таблицы.

Справочник включает два приложения: некоторые оригиналы и их изображения, некоторые математические знаки и даты их возникновения.

Приложен также биографический словарь, содержащий краткие сведения о жизни и деятельности математиков, имена которых встречаются в справочнике.

Авторы

# I
# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

*Глава 1*

## КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ, НА ПЛОСКОСТИ, В ПРОСТРАНСТВЕ

### 1.1. Координаты на прямой

На прямой зафиксируем одно из двух определяемых ею направлений и назовем его положительным, другое – отрицательным. Прямую, на которой указано положительное направление, называют осью.

Отрезок, ограниченный точками $A$ и $B$, называют направленным отрезком или вектором, если указано, какая из данных точек является началом, какая – концом. Направленный отрезок с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ обозначают $\mathbf{AB}$.

Величиной направленного отрезка $\mathbf{AB}$ некоторой оси называют его длину, взятую со знаком плюс, когда направление этого отрезка совпадает с положительным направлением данной оси, и со знаком минус, когда оно совпадает с отрицательным направлением оси. Величину направленного отрезка $\mathbf{AB}$ обозначают $AB$.

Координатной осью называют прямую, на которой зафиксированы начало отсчета, положительное направление и выбран масштаб для измерения длин.

Координатой точки $M$ координатной оси (рис. 1.1) называют величину $OM$ направленного отрезка $\mathbf{OM}$, где $O$ – начало координат. Если обозначить координату точки $M$ через $x$, то по определению $x = OM$.

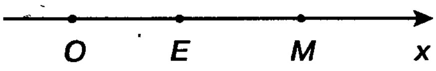


Рис. 1.1

Запись $M(x)$ означает, что точка $M$ имеет координату $x$.

Если даны две точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, то величина направленного отрезка $\mathbf{M_1M_2}$ вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = x_2 - x_1, \tag{1.1}$$

а расстояние между ними – по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \tag{1.2}$$

Простым отношением трех различных точек $M_1, M_2, M$, лежащих на одной прямой и взятых в указанном порядке, называют число

$$l = \frac{M_1M}{MM_2}, \tag{1.3}$$

где $M_1M$ и $MM_2$ – величины направленных отрезков $\mathbf{M_1M}$ и $\mathbf{MM_2}$.

Если точка $M$ принадлежит отрезку $\mathbf{M_1M_2}$, простое отношение положительно $(l > 0)$, так как числитель и знаменатель в последней формуле одного знака. В этом случае говорят, что точка $M$ делит отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ внутренним образом. Если точка $M$ лежит вне отрезка $\mathbf{M_1M_2}$, то $l < 0$ (числитель и знаменатель в формуле имеют противоположные знаки); точка $M$ делит отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ внешним образом. Если точки $M_1$ и $M$ совпадают, то $l = 0$.

Пусть $M_1(x_1), M_2(x_2), M(x)$ – точки координатной оси $Ox$, тогда

$$l = \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \tag{1.4}$$

откуда

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1 + l}. \tag{1.5}$$

Эта формула определяет координату точки $M$, делящей направленный отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ в данном отношении $l$.

Если точка $M$ совпадает с серединой отрезка $\mathbf{M_1M_2}$, то $l = 1$, поэтому ее координата определяется формулой

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{1.6}$$

Пример 1.1. Даны две точки $M_1(4), M_2(-3)$. Найти величину направленного отрезка $\mathbf{M_1M_2}$ и расстояние между точками.

В данном случае $x_1 = 4, x_2 = -3$; по формулам (1.1) и (1.2) находим $M_1M_2 = -3 - 4 = -7$, $\rho(M_1, M_2) = |-3 - 4| = 7$.

## 1.2. Координаты на плоскости

Прямоугольными декартовыми координатами точки $M$ называют числа, определяемые формулами

$$x = OM_x,\ y = OM_y,$$

где $OM_x$ – величина отрезка $\mathbf{OM_x}$ оси $Ox$, $OM_y$ – величина направленного отрезка $\mathbf{OM_y}$ оси $Oy$ (рис. 1.2).

Полярная система координат на плоскости определяется точкой $O$ (полюс), исходящим из нее лучом $OP$ (полярная ось), масштабным отрезком $e$ и направлением отсчета углов (рис. 1.3).

Полярными координатами точки $M$, не совпадающей с полюсом, называют расстояние $\rho = |OM|$ (полярный радиус) от точки $M$ до полюса $O$ и величину угла $\varphi$ (полярный угол) между полярной осью $OP$ и лучом $OM$. Для полюса считают $\rho = 0$ ($\varphi$ не определен). Полярный угол имеет бесконечное множество значений, главным значением его называют значение, удовлетворяющее условию $0 \le \varphi < 2\pi$.

При соответствующем выборе прямоугольной декартовой и полярной систем координат (рис. 1.4) связь между декартовыми координатами $x$ и $y$ точки $M$ и ее полярными координатами $\rho$ и $\varphi$ выражается формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi; \tag{1.7}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.8}$$

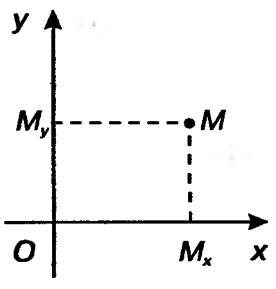


Рис. 1.2

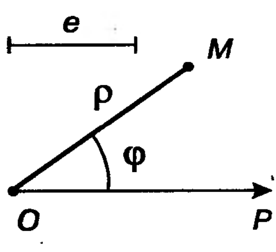


Рис. 1.3

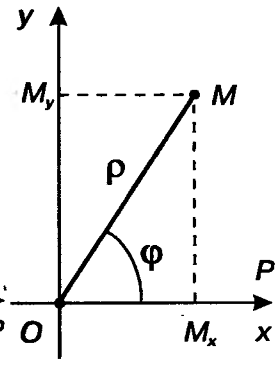


Рис. 1.4

П р и м е р 1.2. Найти прямоугольные декартовы координаты точек $A(2, \pi/4)$, $B(4, \pi/4)$ в системе, для которой полюс совпадает с началом координат, полярная ось – с положительной полуосью $Ox$.

Применяя формулы (1.7), находим координаты точки $A$:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ A(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Аналогично находим координаты точки $B$: $x = 2\sqrt{2},\ y = 2\sqrt{2}$.

## 1.3. Расстояние между двумя точками на плоскости

В прямоугольной декартовой системе координат расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.9}$$

В частном случае, когда одна из точек, например $M_1$, совпадает с началом координат, формула (1.9) принимает вид

$$\rho(O, M_2)=\sqrt{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.10}$$

Пример 1.3. Вычислить расстояние между точками $M_1(6,-3)$, $M_2(9,-7)$ и расстояние от точки $M_2$ до начала координат.

По формулам (1.9) и (1.10) получаем

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(9-6)^2+((-7)-(-3))^2}=5,\ \rho(O, M_2)=\sqrt{9^2+(-7)^2}=\sqrt{130}.$$

Пример 1.4. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $A(-1,-3)$, $B(2,-3)$, $C(2,1)$.

По формуле (1.9) находим

$$a=\rho(B,C)=\sqrt{(2-2)^2+(1-(-3))^2}=4,$$

$$b=\rho(A,C)=\sqrt{(2-(-1))^2+(1-(-3))^2}=5,$$

$$c=\rho(A,B)=\sqrt{(2-(-1))^2+(-3-(-3))^2}=3.$$

Следовательно, $P=a+b+c=12$.

## 1.4. Деление отрезка в данном отношении

Отношением, в котором точка $M$, лежащая на прямой, проходящей через точки $M_1$ и $M_2$, делит отрезок $\mathrm{M_1M_2}$, называют число $l$, определяемое формулой (1.3).

Если даны точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, то координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок $\mathrm{M_1M_2}$ в отношении $l$, определяются формулами

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l},\ y=\frac{y_1+ly_2}{1+l}. \tag{1.11}$$

Когда точка $M$ является серединой отрезка $\mathrm{M_1M_2}$, то ее координаты вычисляют по формулам

$$x=(x_1+x_2)/2,\ y=(y_1+y_2)/2. \tag{1.12}$$

П р и м е р 1.5. Даны две точки $M_1(-1,-2)$, $M_2(3,4)$. На прямой $M_1M_2$ найти точку $M$, которая в три раза ближе к $M_1$, чем к $M_2$, и находится вне отрезка $M_1M_2$. Найти середину этого отрезка.

Искомая точка $M$ делит отрезок $M_1M_2$ в отношении $l=-1/3$. По формулам (1.11), считая в них $x_1=-1$, $y_1=-2$, $x_2=3$, $y_2=4$, находим

$$x=\frac{-1+(-1/3)\,3}{1+(-1/3)}=-3,\ y=\frac{-2+(-1/3)\,4}{1+(-1/3)}=-5;\ M\,(-3,-5).$$

С помощью формул (1.12) находим точку $N=(1,1)$ – середину отрезка $M_1M_2$.

П р и м е р 1.6. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в точках $A\,(x_1,y_1)$, $B\,(x_2,y_2)$, $C\,(x_3,y_3)$.

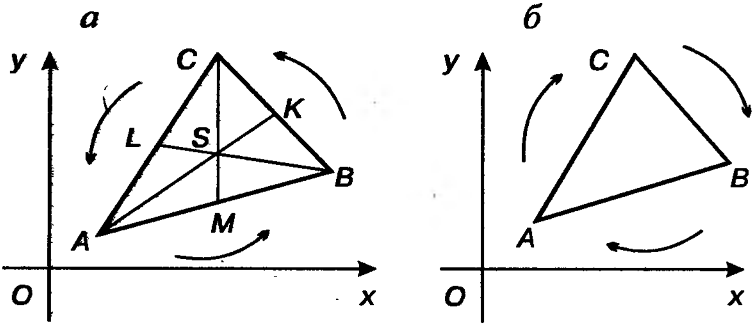


Рис. 1.5

Пусть $S\,(x,y)$ – точка пересечения медиан $AK$, $BL$, $CM$ треугольника $ABC$ (рис. 1.5, а). Так как точка $L$ – середина отрезка $AC$, то она имеет координаты $x_l=(x_1+x_3)/2$, $y_l=(y_1+y_3)/2$. Отрезок $BL$ точкой $S$ делится в отношении $l=2/1=2$. Считая точку $B$ первой, точку $L$ второй, по формулам (1.11) находим

$$x=\frac{x_2+2(x_1+x_3)/2}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_2+2(y_1+y_3)/2}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Следовательно, координаты точки пересечения медиан треугольника по координатам его вершин определяются формулами

$$x=(x_1+x_2+x_3)/3,\ y=(y_1+y_2+y_3)/3. \qquad (1.13)$$

## 1.5. Центр тяжести системы масс

Дана система масс $m_1, m_2, \cdots, m_n$, помещенных соответственно в точках $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \cdots, M_n(x_n, y_n)$ некоторой плоскости. Формулы, выражающие координаты центра тяжести этой системы масс, имеют вид

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \quad y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \cdots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

или

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \quad y = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}, \tag{1.14}$$

где знаком $\Sigma$ обозначена сумма однотипных слагаемых.

Пример 1.7. В вершинах $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ треугольника $ABC$ сосредоточены равные массы $m$. Найти центр тяжести этой материальной системы.

Формулы (1.14) при $n = 3$ принимают вид

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Используя условие $m_1 = m_2 = m_3$, получаем

$$x = \frac{x_1 m + x_2 m + x_3 m}{m + m + m} = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y = \frac{y_1 m + y_2 m + y_3 m}{m + m + m} = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Замечание. Из последнего примера и формул (1.13) следует, что центр тяжести данной системы находится в точке пересечения медиан треугольника.

## 1.6. Площадь треугольника

Каковы бы ни были три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, площадь $S$ треугольника $ABC$ вычисляется по формуле

$$\pm S = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \tag{1.15}$$

Правая часть формулы равна $+S$ в том случае, когда кратчайший поворот отрезка $AB$ к отрезку $AC$ положителен (рис. 1.5, а), и $-S$, когда указанный поворот отрицателен (рис. 1.5, б).

В формуле (1.15) берут знак плюс, когда выражение в квадратных скобках положительно, и минус, когда оно отрицательно.

Пример 1.8. Даны две точки $A(3,5)$, $B(6,-2)$. На оси $Oy$ найти такую точку $C$, чтобы площадь треугольника $ABC$ равнялась 15 квадратным единицам.

Пусть $C(0, y)$ – искомая точка ($x=0$, так как точка лежит на оси $Oy$). В формулу (1.15) подставим значения $S=15$, $x_1=3$, $y_1=5$, $x_2=6$, $y_2=-2$, $x_3=0$, $y_3=y$ и найдем y:

$$\pm 15=\frac{1}{2}[(6-3)(y-5)-(0-3)(-2-5)]=\frac{1}{2}[3(y-5)-21],$$

$$\pm 15=\frac{1}{2}(3y-36),\ \pm 30=3y-36,\ y_1=2,\ y_2=22.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют координаты точек $C_1(0,2)$, $C_2(0,22)$.

## 1.7. Уравнение линии в декартовых координатах

Уравнением линии относительно фиксированной системы координат называют такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на данной линии.

Уравнение линии в декартовых координатах в общем виде записывается так:

$$F(x, y)=0,$$

где $F(x, y)$ – функция переменных $x$ и $y$.

Пример 1.9. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-4,3)$ и $M_2(2,5)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данного геометрического места. По условию $|M_1M|=|M_2M|$. По формуле (1.9) получаем

$$|M_1M|=\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2},\ |M_2M|=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство $|M_1M|=|M_2M|$, находим уравнение данного множества точек:

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Упростим это уравнение. Возведем в квадрат обе части уравнения и раскроем скобки в подкоренных выражениях:

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9=x^2-4x+4+y^2-10y+25.$$

Произведя преобразования, получим $3x+y-1=0$. Это уравнение прямой линии.

Пример 1.10. Составить уравнение окружности радиуса $R$ с центром в точке $C(a,b)$.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данной окружности. По определению окружности (как множества точек, равноудаленных от данной точки) для любой ее точки имеем $|MC| = R$. Выражая расстояние между точками $M$ и $C$ по формуле $|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ и подставляя его в левую часть данного равенства, получим уравнение $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$, которое можно записать так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) является уравнением окружности радиуса $R$ с центром в точке $C(a, b)$.

Если точка $C$ совпадает с началом координат, то уравнение (1.16) принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{1.17}$$

Замечание. Если точка $N(x, y)$ лежит внутри круга радиуса $R$ с центром в начале координат, то ее координаты удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < R^2$; если вне указанного круга, то неравенству $x^2 + y^2 > R^2$.

Пример 1.11. Точка $M$ движется так, что в любой момент времени ее расстояние до точки $A(4, 0)$ вдвое больше расстояния до точки $B(1, 0)$. Найти уравнение траектории движения точки $M$.

Текущие координаты точки $M$ в прямоугольной декартовой системе координат обозначим через $x$, $y$. По условию $|MA| = 2|MB|$. Выразим длины отрезков $MA$ и $MB$ через координаты соответствующих точек с помощью формулы (1.9):

$$|MA| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}, \quad |MB| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство $|MA| = 2|MB|$, получаем уравнение траектории движения точки $M$: $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Упростим это уравнение, для чего возведем в квадрат обе части и приведем подобные члены

$$(x-4)^2 + y^2 = 4((x-1)^2 + y^2), \quad x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2),$$

$$12 = 3x^2 + 3y^2, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Итак, траекторией движения точки $M$ является окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

## 1.8. Пересечение линий

Координаты точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F(x, y) = 0$, $\Phi(x, y) = 0$, находят из системы этих уравнений

$$F(x, y) = 0, \ \Phi(x, y) = 0. \tag{1.18}$$

Число действительных решений равно числу точек пересечения. Если система (1.18) не имеет действительных решений, то данные линии не пересекаются.

Пример 1.12. Найти точки пересечения линий $x^2 + y^2 = 10$, $x + y - 4 = 0$.

Из последнего уравнения выражаем $y = -x + 4$ и подставляем в первое уравнение: $x^2+(-x+4)^2=10$, $2x^2-8x+6=0$, $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$. Подставим эти значения в уравнение $y=-x+4$ и найдем $y_1=3$, $y_2=1$. Следовательно, получены две точки пересечения $M\,(1,3)$, $N\,(3,1)$.

Пример 1.13. Найти точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-5)^2+(y-6)^2=25$, $(x+2)^2+(y-6)^2=32$.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем систему уравнений

$$x^2+y^2-10x-12y+36=0,$$
$$x^2+y^2+4x-12y+8=0.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем $-14x+28=0$, откуда $x=2$. Второе уравнение системы при $x=2$ сводится к квадратному относительно $y$: $y^2-12y+20=0$. Решив его, найдем $y_1=2$, $y_2=10$. Следовательно, данные окружности пересекаются в точках $M_1(2,2)$, $M_2(2,10)$.

## 1.9. Уравнение линии в полярных координатах

Уравнение линии на плоскости в полярных координатах в общем виде можно записать так:

$$F(\rho,\varphi)=0,$$

где $F(\rho,\varphi)$ – функция переменных $\rho$ и $\varphi$ ($\rho$, $\varphi$ – полярные координаты). Если это уравнение разрешимо относительно $\rho$, то его можно представить в виде $\rho=\rho\,(\varphi)$.

Пример 1.14. Составить уравнение прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей от нее отрезок, длина которого равна $a$.

Обозначим буквой $A$ точку пересечения данной прямой с полярной осью $OP$ (рис. 1.6). Пусть $M\,(\rho,\varphi)$ – произвольная точка данной прямой. Из прямоугольного треугольника $OAM$ находим, что $\rho\cos\varphi=a$. Полученное уравнение является искомым; ему удовлетворяют координаты любой точки данной прямой и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей этой прямой.

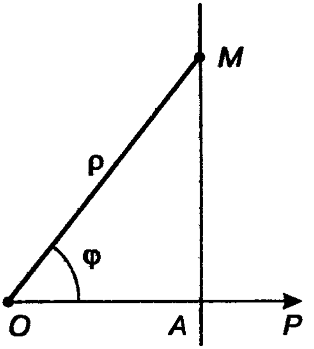


Рис. 1.6

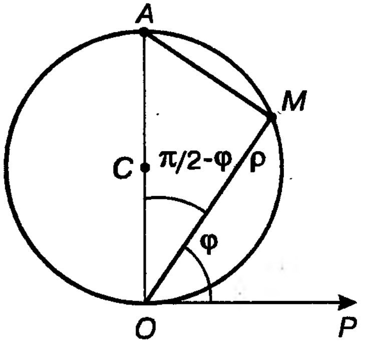


Рис. 1.7

Пример 1.15. Составить уравнение окружности радиуса $a$, касающейся полярной оси в полюсе, центр которой расположен выше полярной оси (рис. 1.7).

Пусть $M(\rho, \varphi)$ – произвольная точка окружности, $OA$ – диаметр окружности, равный $2a$. Так как в треугольнике $OAM$ угол при вершине $M$ прямой, угол при вершине $O$ равен $\pi/2-\varphi$, то $2a\cos(\pi/2-\varphi)=\rho$, или $\rho=2a\sin\varphi$. Это искомое уравнение данной окружности.

## 1.10. Параметрические уравнения линии

Уравнения вида

$$x=f(t),\ y=\varphi(t) \tag{1.19}$$

называются параметрическими уравнениями линии, если при изменении $t$ в некотором промежутке формулы (1.19) дают координаты любой точки данной линии и *только таких точек.*

Если линия задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ в полярных координатах, то ее параметрические уравнения можно записать так:

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi. \tag{1.20}$$

В уравнениях (1.20) роль параметра играет полярный угол $\varphi$.

Пример 1.16. Составить параметрические уравнения окружности радиуса $R$ с центром в начале координат.

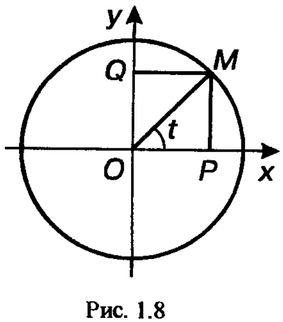


Рис. 1.8

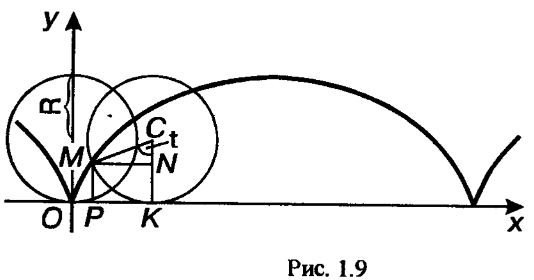


Рис. 1.9

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка данной окружности, $t$ – величина угла, образуемого отрезком $OM$ и осью абсцисс, $P$ и $Q$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $M$ на координатные оси (рис. 1.8). Так как по определению $x=OP$, $y=OQ$ и $OP=R\cos t$, $OQ=R\sin t$, то $x=R\cos t$, $y=R\sin t$.

Следовательно, параметрические уравнения данной окружности имеют вид $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, где $0\le t<2\pi$.

Исключив из этих уравнений параметр $t$ (для чего возведем в квадрат оба равенства и почленно сложим), получим уравнение $x^2+y^2=R^2$ (см. уравнение (1.17)).

Пример 1.17. Составить параметрические уравнения циклоиды. Циклоидой называют линию, являющуюся траекторией фиксированной точки окружности радиуса $R$, катящейся по прямой.

Указанную прямую примем за ось $Ox$ декартовой прямоугольной системы координат (рис. 1.9). Предположим, что фиксированная точка при начальном положении окружности находилась в начале координат, а после того как окружность повернулась на угол $t$, заняла положение $M$.

Поскольку $x = OP = OK - PK$, $y = MP = CK - CN$ и $OK = \overset{\frown}{MK} = Rt$, $PK = MN = R\sin t$, $CK = R$, $CN = R\cos t$, то $x = Rt - R\sin t$, $y = R - R\cos t$, или

$$x = R(t - \sin t),\ y = R(1 - \cos t). \tag{1.21}$$

Уравнения (1.21) называются параметрическими уравнениями циклоиды.

## 1.11. Преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости

Одна и та же точка имеет различные координаты в разных системах декартовых координат. Существует связь между координатами точки в разных системах координат.

**Параллельный перенос.** Пусть даны две системы декартовых прямоугольных координат с общим масштабным отрезком: $Oxy$ (старая) и $O_1XY$ (новая), соответствующие оси которых параллельны (рис. 1.10). Положительные полуоси имеют

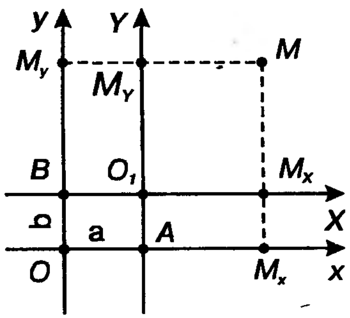

Рис. 1.10

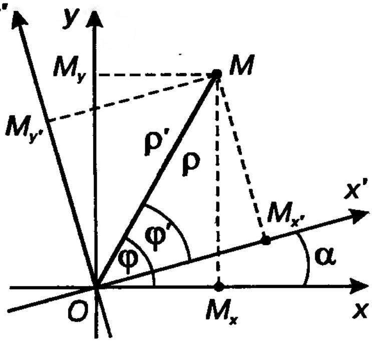

Рис. 1.11

одинаковые направления, начало новой системы находится в точке $O_1(a, b)$, старые координаты которой $x = a$, $y = b$ (новые координаты ее равны нулю). Относительно таких систем говорят, что одна получена из другой путем параллельного переноса.

Старые координаты $x$, $y$ точки $M$ через ее новые координаты $X$, $Y$ и старые координаты $a$, $b$ нового начала $O_1$ выражаются формулами

$$x = X + a,\ y = Y + b, \tag{1.22}$$

откуда

$$X = x - a,\ Y = y - b. \tag{1.23}$$

**Поворот координатных осей.** Новая система $Ox'y'$ получена путем поворота старой на угол $\alpha$ вокруг точки $O$ (рис. 1.11). Старые декартовы прямоугольные $x$, $y$

точки $M$ через ее новые координаты $x'$, $y'$ выражаются формулами

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha. \qquad (1.24)$$

Чтобы выразить $x'$, $y'$ через $x$, $y$, необходимо разрешить систему (1.24) относительно $x'$, $y'$. Можно сделать проще: считать систему $Ox'y'$ старой, тогда переход к новой системе $Oxy$ совершается поворотом на угол $(-\alpha)$, поэтому в формулах (1.24) достаточно поменять местами $x$ и $x'$, $y$ и $y'$, записать $(-\alpha)$ вместо $\alpha$.

В общем случае, когда даны две системы $Oxy$ и $Ox'y'$ (рис. 1.12), вводя промежуточную систему $O'x''y''$ и применяя последовательно формулы (1.22) и (1.24), получаем

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{aligned} \qquad (1.25)$$

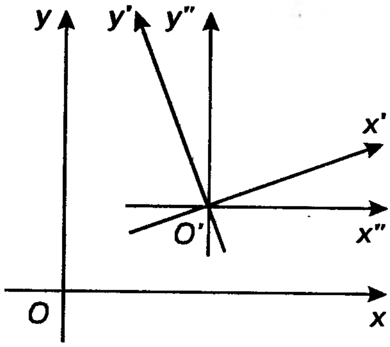


Рис. 1.12

З а м е ч а н и е. Система координат $Oxy$, в которой кратчайший поворот положительной полуоси $Ox$ до совпадения с положительной полуосью $Oy$ совершается против часовой стрелки, называется правой; если указанный поворот совершается по часовой стрелке, система называется левой. Формулы (1.25) остаются прежними, если обе системы координат являются левыми. Если одна система правая, другая левая, то в формулах (1.25) изменится знак перед $y'$, так как в случае простейшего преобразования координат разноименных систем формулы имеют вид $x = x'$, $y = -y'$.

## 1.12. Прямоугольные декартовы координаты в пространстве

Прямоугольная декартова система координат в пространстве определяется заданием масштаба (отрезка для измерения длин) и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в определенном порядке.

Точка пересечения осей называется началом координат, сами оси – координатными осями, первая из них – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Обозначим начало координат буквой $O$; координатные оси будем обозначать соответственно через $Ox$, $Oy$, $Oz$ (рис. 1.13).

Пусть $M$ – произвольная точка пространства; проведем через нее три плоскости, перпендикулярные координатным осям, и точки пересечения с осями обозначим соответственно через $M_x$, $M_y$, $M_z$. Прямоугольными декартовыми координатами точки $M$ называются числа, определяемые формулами

$$x = OM_x,\ y = OM_y,\ z = OM_z,$$

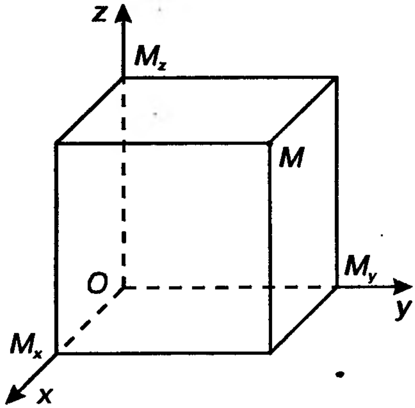

Рис. 1.13

где $OM_x$, $OM_y$, $OM_z$ – величины направленных отрезков $\mathbf{OM_x}$, $\mathbf{OM_y}$, $\mathbf{OM_z}$ соответствующих координатных осей. Число $x$ называется первой координатой или абсциссой, число $y$ – второй координатой или ординатой, число $z$ – третьей координатой или аппликатой точки $M$.

Координатные плоскости $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$ делят все точки пространства, не принадлежащие этим плоскостям, на восемь частей, называемых октантами.

Таблица 1.1

| Координата | Октант | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
| $x$ | + | – | – | + | + | – | – | + |
| $y$ | + | + | – | – | + | + | – | – |
| $z$ | + | + | + | + | – | – | – | – |

Начиная с I октанта, в котором все координаты положительны, пронумеруем октанты I, II, III, IV верхнего полупространства ($z > 0$) против часовой стрелки (для наблюдателя со стороны положительной оси $Oz$). В нижнем полупространстве ($z < 0$) проведем соответствующую нумерацию октантов V, VI, VII, VIII так, чтобы V находился под I, VI – под II, VII – под III, VIII – под IV. Знаки координат точек в различных октантах приведены в табл. 1.1.

Очевидно, знаки координат однозначно определяют октант пространства.

## 1.13. Расстояние между двумя точками в пространстве

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – две любые точки пространства, то расстояние между ними определяется формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (1.26)$$

В частном случае, когда точка $M_1$ совпадает с началом координат ($x_1 = y_1 = z_1 = 0$), то формула (1.26) принимает вид

$$\rho(O, M_2) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}. \qquad (1.27)$$

Пример 1.18. Вычислить расстояние между точками $M_1(1,-2,2)$ и $M_2(3,-1,4)$, а также расстояние от точки $M_2$ до начала координат.

По формулам (1.26) и (1.27) соответственно получаем

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2+(4-2)^2}=3,$$

$$\rho(O, M_2)=\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{26}.$$

Замечание. Формулы (1.26) и (1.27) упрощаются, когда точки $M_1$ и $M_2$ лежат в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, или в самой этой плоскости. В этом случае получаем формулы (1.9) и (1.10).

## 1.14. Цилиндрические и сферические координаты

В плоскости П фиксируем точку $O$ и исходящий из нее луч $OP$ (рис. 1.14). Через точку $O$ проведем прямую, перпендикулярную плоскости П, и укажем на ней положительное направление; полученную ось обозначим $Oz$. Выберем масштаб для измерения длин. Пусть $M$ – произвольная точка пространства, $N$ – ее проекция на плоскость П, $M_z$ – проекция на ось $Oz$. Обозначим через $\rho$ и $\varphi$ полярные координаты точки $N$ в плоскости П относительно полюса $O$ и полярной оси $OP$. Цилиндрическими координатами точки $M$ называются числа $\rho$, $\varphi$, $z$, где $\rho$, $\varphi$ – полярные координаты точки $N$ $(\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi)$, $z = OM_z$ – величина направленного отрезка $\mathbf{OM_z}$ оси $Oz$. Запись $M(\rho, \varphi, z)$ обозначает, что точка $M$ имеет цилиндрические координаты $\rho$, $\varphi$, $z$. Наименование «цилиндрические координаты»

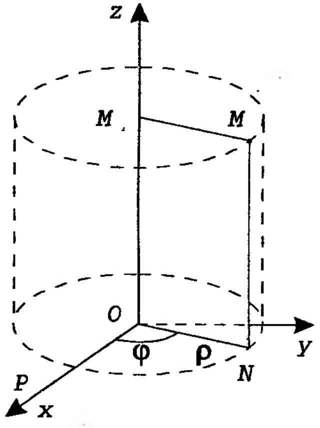


Рис. 1.14

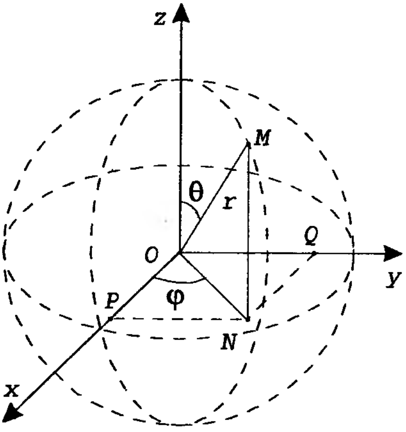


Рис. 1.15

объясняется тем, что координатная поверхность $\rho = \text{const}$ (т. е. множество точек, имеющих одну и ту же первую координату $\rho$) является цилиндром (на рис. 1.14 он изображен штрихами).

Если выбрать систему прямоугольных декартовых координат так, как показано на рис. 1.14, то декартовы координаты $x$, $y$, $z$ точки $M$ будут связаны с ее цилиндрическими координатами $\rho$, $\varphi$, $z$ формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z. \tag{1.28}$$

Сферические координаты вводят следующим образом. Выберем масштаб для измерения длин отрезков, фиксируем плоскость П с точкой $O$ и полуосью $Ox$, ось $Oz$, перпендикулярную плоскости П (рис. 1.15). Пусть $M$ – произвольная точка пространства (отличная от $O$), $N$ – проекция ее на плоскость П, $r$ – расстояние точки $M$ до начала координат, $\theta$ – угол, образуемый отрезком **ОМ** с осью $Oz$, $\varphi$ – угол, на который нужно повернуть ось $Ox$ против часовой стрелки (если смотреть со стороны положительного направления оси $Oz$), чтобы она совпала с лучом $ON$; $\theta$ называется широтой, $\varphi$ – долготой.

Сферическими координатами точки $M$ называются три числа $r$, $\theta$, $\varphi$, определенные выше. Если точка $M$ имеет сферические координаты $r$, $\theta$, $\varphi$, то пишут $M(r, \theta, \varphi)$.

Наименование «сферические координаты» связано с тем, что координатная поверхность $r = \text{const}$ (т.е. множество точек, имеющих одну и ту же координату $r$) является сферой (на рис. 1.15 одна из таких сфер изображена штрихами); фиксировав другое значение $r$, получим другую сферу.

Для того чтобы соответствие между точками пространства и тройками сферических координат $r$, $\theta$, $\varphi$ было взаимно однозначным, обычно считают, что $r$, $\theta$, $\varphi$ изменяются в следующих границах: $0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Если выбрать оси прямоугольной декартовой системы координат так, как указано на рис. 1.15, то декартовы координаты $x$, $y$, $z$ точки $M$ связаны с ее сферическими координатами $r$, $\theta$, $\varphi$ формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta. \tag{1.29}$$

*Глава 2*

# ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Алгебраической линией (кривой) *n*-го порядка называют линию, определяемую алгебраическим уравнением *n*-й степени относительно декартовых координат. Линии первого порядка определяются уравнением $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$, а линии второго порядка – уравнением $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \quad + Dx + Ey + F = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Линии первого порядка – прямые. К линиям второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола, парабола.

## 2.1. Прямая на плоскости

Прямую линию на плоскости относительно системы декартовых прямоугольных координат можно задать различными способами. Прямая однозначно определяется углом, образуемым ею с осью $Ox$, и величиной направленного отрезка, отсекаемого на оси $Oy$, координатами двух точек и т. п.

**Различные виды уравнения прямой на плоскости.** Прямая, параллельная оси $Oy$ прямоугольной декартовой системы координат (рис. 2.1), пересекающая ось $Ox$ в точке $A(a, 0)$, имеет уравнение

$$x = a. \tag{2.1}$$

Угловым коэффициентом прямой называют тангенс угла $\alpha$ наклона ее к положительной полуоси $Ox$ прямоугольной декартовой системы координат

$$k = \operatorname{tg}\alpha \quad (0 \leq \alpha < \pi).$$

Угловой коэффициент прямой через координаты двух ее различных точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ определяется формулой

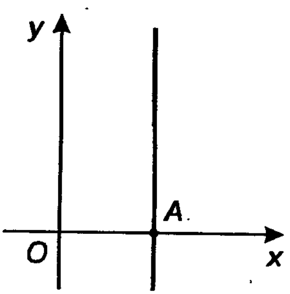


Рис. 2.1

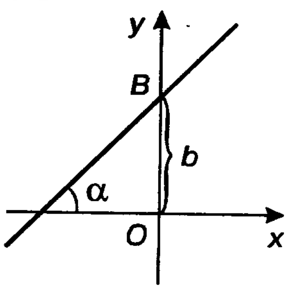


Рис. 2.2

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{2.2}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y=kx+b, \tag{2.3}$$

где $k$ – угловой коэффициент, $b=OD$ – величина направленного отрезка **OB**, отсекаемого на оси $Oy$ (рис. 2.2).

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k$ и проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, записывается так:

$$y-y_0=k\,(x-x_0). \tag{2.4}$$

Уравнение прямой проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ (x_2\neq x_1,\ y_2\neq y_1). \tag{2.5}$$

Параметрические уравнения прямой проходящей через эти точки:

$$x=x_1+(x_2-x_1)\,t,\quad y=y_1+(y_2-y_1)\,t, \tag{2.6}$$

где $t$ принимает все действительные значения.

Уравнением прямой в отрезках называют уравнение

$$x/a+y/b=1, \tag{2.7}$$

где $a=OA$, $b=OB$ – величины направленных отрезков, отсекаемых соответственно на оси $Ox$ и оси $Oy$.

Общим уравнением прямой называют уравнение

$$Ax+By+C=0, \tag{2.8}$$

в котором $A$ и $B$ одновременно в нуль не обращаются, т.е. $A^2+B^2\neq 0$.

Пример 2.1. Составить параметрические уравнения сторон треугольника, вершины которого находятся в точках $A\,(2,3)$, $B\,(4,7)$, $C\,(6,9)$.

Составим сначала уравнения прямых, на которых лежат стороны $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно. Используя уравнение (2.5), получаем

$$\frac{y-3}{7-3}=\frac{x-2}{4-2},\ \frac{y-3}{4}=\frac{x-2}{2},\ \frac{y-3}{2}=\frac{x-2}{1};$$

$$\frac{y-7}{9-7}=\frac{x-4}{6-4},\ \frac{y-7}{2}=\frac{x-4}{2},\ y-7=x-4;$$

$$\frac{y-3}{9-3}=\frac{x-2}{6-2},\ \frac{y-3}{6}=\frac{x-2}{4},\ \frac{y-3}{3}=\frac{x-2}{2}.$$

Обозначим буквой $t$ равные отношения, получим параметрические уравнения этих прямых: $x=2+t$, $y=3+2t\,(AB)$; $x=4+t$, $y=7+t\,(BC)$; $x=2+2t$, $y=3+3t\,(AC)$.

Введя ограничения на изменение параметра $t$, получим уравнения соответствующих сторон треугольника $AB$, $BC$, $AC$: $x=2+t$, $y=3+2t$ $(0\le t\le 1)$; $x=4+t$, $y=7+t$ $(0\le t\le 1)$; $x=2+2t$, $y=3+3t$ $(0\le t\le 1)$.

Пример 2.2. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой, заданной уравнением $7x-3y-21=0$.

Разделив это уравнение почленно на 21, получим

$$x/3-y/7-1=0, \text{ или } x/3+y/(-7)=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.7), заключаем, что $a=3$, $b - 7$.

**Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.** Тангенс угла между двумя прямыми (рис. 2.3)

$$y=k_1x+b_1,\ y=k_2x+b_2 \tag{2.9}$$

вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{2.10}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых, заданных уравнениями вида (2.9), выражается равенством $k_1=k_2$, а условие их перпендикулярности – равенством

$$k_1=-\frac{1}{k_2}. \tag{2.11}$$

Если прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{2.12}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2.13}$$

то тангенс угла между ними определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \tag{2.14}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности прямых, заданных уравнениями (2.12) и (2.13), выражается равенством

$$A_1/A_2=B_1/B_2, \tag{2.15}$$

или

$$A_1=lA_2,\ B_1=lB_2, \tag{2.16}$$

а условие их перпендикулярности – равенством

$$-A_1/B_1=B_2/A_2, \text{ или } A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{2.17}$$

Отметим, что прямые $Ax+By+C=0$, $Bx-Ay+C=0$ перпендикулярны в силу условия (2.17).

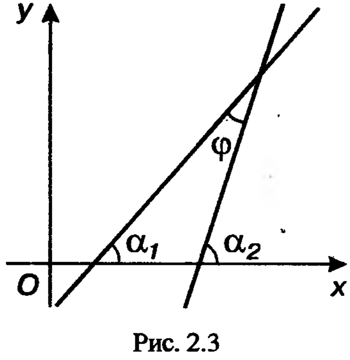


Рис. 2.3

**Пример 2.3.** Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x+3y+15=0$, $x+4y-7=0$.

Применяем формулу (2.14). Так как в данном случае $A_1=5$, $B_1=3$, $A_2=1$, $B_2=4$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{5\cdot 4-1\cdot 3}{5\cdot 1+3\cdot 4}=1,\ \varphi=45^\circ.$$

**Замечание.** При другой нумерации прямых ($A_1=1$, $B_1=4$, $A_2=5$, $B_2=3$) получаем $\operatorname{tg}\varphi'=-1$, $\varphi'=135^\circ$. Очевидно, $\varphi+\varphi'=180^\circ$.

**Пример 2.4.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4,-5)$ и параллельной прямой $3x+4y+12=0$.

Искомое уравнение имеет вид $3x+4y+C=0$, где $C$ пока не определено. Вид уравнения следует из условия (2.16) при $l=1$ (считаем соответствующие коэффициенты равными). Чтобы найти значение $C$, необходимо подставить координаты точки $M$ в искомое уравнение (точка $M$ лежит на прямой, поэтому ее координаты должны удовлетворять уравнению этой прямой). Подставляя координаты $x=4$, $y=-5$ в уравнение $3x+4y+C=0$, получаем $3\cdot 4+4\cdot(-5)+C=0$, откуда $C=8$. Таким образом, уравнение прямой имеет вид $3x+4y+8=0$.

**Пример 2.5** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3,2)$ и перпендикулярной прямой $4x+5y-7=0$.

Искомое уравнение имеет вид $5x-4y+C=0$. Действительно, для прямых выполнено условие (2.17): $4\cdot 5+5\cdot(-4)=0$. Точка $M(-3,2)$ лежит на прямой $5x-4y+C=0$, поэтому ее координаты должны удовлетворять этому уравнению: $5(-3)-4\cdot 2+C=0$. Отсюда находим, что $C=23$. Итак, уравнение прямой принимает вид $5x-4y+23=0$.

**Пример 2.6.** Вершины треугольника находятся в точках $A(3,4)$, $B(-2,1)$, $C(-3,-5)$. Составить уравнение прямой, на которой лежит высота, опущенная из вершины $B$ на сторону $AC$.

Найдем сначала угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A$ и $C$. Считая точку $A$ первой, точку $C$ второй, т.е. полагая $x_1=3$, $y_1=4$, $x_2=-3$, $y_2=-5$, по формуле (2.2) получаем $k_1=(-5-4)/(-3-3)=3/2$. Прямая, на которой лежит высота, опущенная из точки $B$ на сторону $AC$, будет перпендикулярна прямой, проходящей через точки $A$ и $C$. Угловой коэффициент этой прямой обозначим через $k_2$. Используя условие перпендикулярности двух прямых, заданное формулой (2.11), находим $k_2=1/k_1$, $k_2=-2/3$.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $B(-2,1)$ и имеющей заданный угловой коэффициент $k_2$. Подставляя значения $x_0=-2$, $y_0=1$, $k=-2/3$ в уравнение (2.4), получаем $y-1=(-2/3)(x-(-2))$, $3(y-1)+2(x+2)=0$, $2x+3y+1=0$.

**Расстояние от точки до прямой. Уравнения биссектрис углов между двумя прямыми.** Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляют по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.18}$$

Уравнения биссектрис углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют вид

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{2.19}$$

Пример 2.7. Найти расстояние от точки $M_0(-7, 4)$ до прямой, заданной уравнением $4x-3y-15=0$.

Воспользуемся формулой (2.18). Так как в данном случае $x_0=-7$, $y_0=4$, $A=4$, $B=-3$, $C=-15$, то

$$d=\frac{|4\cdot(-7)-3\cdot 4-15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=11.$$

Пример 2.8. Дан треугольник с вершинами $P(2,-1)$, $Q(6,-4)$, $R(10,3)$. Найти длину высоты, опущенной из точки $R$.

Задача сводится к вычислению расстояния от точки $R$ до прямой $PQ$. Запишем уравнение этой прямой. На основании уравнения (2.5) имеем $\frac{y+1}{-4+1}=\frac{x-2}{6-2}$, или $3x+4y-2=0$. Расстояние точки $R(10,3)$ до этой прямой вычислим по формуле (2.18)

$$d=\frac{|3\cdot 10+4\cdot 3-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=8.$$

Следовательно, длина высоты равна $8$.

Замечание. Эту задачу можно решить и другими способами. Например, длину искомой высоты можно вычислить, зная площадь треугольника $PQR$ и длину основания $PQ$. Эта же длина равна расстоянию между двумя точками $R$ и $M$ ($M$ – основание высоты, опущенной из точки $R$ на $PQ$). В свою очередь координаты точки $M$ находятся в результате решения системы уравнений стороны $PQ$ и высоты $RM$.

Пример 2.9. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x-4y-7=0$, $8x+6y-1=0$.

В соответствии с формулой (2.19) получаем

$$\frac{3x-4y-7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\pm\frac{8x+6y-1}{\sqrt{8^2+6^2}}.$$

Преобразуя эти уравнения, находим

$$\frac{3x-4y-7}{5}=\pm\frac{8x+6y-1}{10},\ 2(3x-4y-7)=\pm(8x+6y-1).$$

Отсюда получаем уравнения биссектрис $2x+14y+13=0$, $14x-2y-15=0$.

**Задачи, относящиеся к прямым.** Рассмотрим примеры решения задач, в условиях которых даны уравнения прямых.

Пример 2.10. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$ и уравнение одной из диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

Решая систему уравнений $x+2y+2=0$, $x+y-4=0$, находим точку $A(10,-6)$ – одну из вершин параллелограмма. Две другие вершины найдем как точки пересечения данной диагонали со сторонами, т. е. определим их координаты из систем уравнений $x+2y+2=0$, $x-2=0$; $x+y-4=0$, $x-2=0$. Это будут точки $B(2,2)$ и $D(2,-2)$. Середина диагонали $BD$ находится в точке $S(2,0)$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то четвертая вершина $C(x,y)$ может быть найдена как конец отрезка $AC$ по известному концу $A$ и середине $S$: $(x+10)/2=2$, $(y+(-6))/2=0$. Отсюда получаем $x=-6$, $y=6$, т. е. точку $C(-6,6)$ – четвертую вершину параллелограмма $ABCD$.

Пример 2.11. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой до точки $A(2,0)$ относится к ее расстоянию до прямой $5x+8=0$ как $5:4$.

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка данной линии, $N$ – основание перпендикуляра, проведенного через точку $M$ к прямой $5x+8=0$, или $x=-8/5$. Расстояния точки $M$ до точки $A$ и до прямой $x=-8/5$ определяются соответственно формулами $|MA|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$, $|MN|=|x-(-8/5)|=|x+8/5|$ (последнее равенство следует также из формулы (2.18)). По условию задачи $\sqrt{(x-2)^2+y^2}:|x+8/5|=5:4$, откуда $4\sqrt{(x-2)^2+y^2}=5|x+8/5|$. Преобразуем это уравнение:

$$16(x^2-4x+4+y^2)=25(x^2+(16/5)x+64/25),$$

$$16x^2-64x+64+16y^2=25x^2+80x+64,\ 9x^2-16y^2+144x=0.$$

Выделим полные квадраты в левой части полученного уравнения:

$$9(x^2+16x+64)-16y^2-9\cdot 64=0,\ 9(x+8)^2-16y^2=9\cdot 64.$$

Последнее уравнение примет вид $9X^2-16Y^2=9\cdot 64$, или $X^2/64-Y^2/36=1$, если перейти к новым координатам $X=x+8$, $Y=y$.

Полученное уравнение определяет гиперболу с полуосями $a=8$, $b=6$ (см. уравнение (2.25)).

## 2.2. Окружность

Каноническим уравнением окружности радиуса $R$ с центром в точке $C(a, b)$ называют уравнение

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2.20)$$

Когда центр окружности находится в начале координат, уравнение принимает вид $x^2+y^2=R^2$.

Если уравнение второй степени, не содержащее члена с произведением координат и имеющее равные коэффициенты при $x^2$ и $y^2$, т.е. уравнение $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$, определяет некоторую линию, то эта линия – окружность.

Пример 2.12. Найти координаты центра и радиус окружности, определяемой уравнением $4x^2+4y^2-8x+12y-3=0$.

Разделив обе части уравнения на 4 и выделив полные квадраты, получим

$$(x^2-2x+1)+y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}-1-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=0,$$

$$\text{или} \quad (x-1)^2+(y+3/2)^2=4.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.20), заключаем, что $a=1$, $b=-3/2$, $R=2$.

Пример 2.13. Какое множество точек плоскости определяет уравнение $x^2+y^2-4x+10y+29=0$?

Так как это уравнение сводится к уравнению $(x-2)^2+(y+5)^2=0$, которому удовлетворяют лишь координаты $x=2$, $y=-5$, то оно определяет единственную точку $C(2,-5)$.

## 2.3. Эллипс

Эллипсом называют геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть постоянная величина.

Каноническое уравнение эллипса

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1, \qquad (2.21)$$

где $a=OA$ – большая, $b=OB$ – малая полуоси (рис. 2.4).

Координаты фокусов эллипса, определяемого уравнением (2.21): $x_1=-c$, $y_1=0$; $x_2=c$, $y_2=0$, т. е. $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где

$$c=\sqrt{a^2-b^2}. \qquad (2.22)$$

Эксцентриситетом эллипса $\varepsilon$ называют отношение фокусного расстояния $2c$ к длине большой оси $2a$:

$$\varepsilon=c/a, \quad \varepsilon=\sqrt{1-(b/a)^2}. \qquad (2.23)$$

Фокальными радиусами точки $M$ эллипса называют отрезки прямых, соединяющих эту точку с фокусами $F_1$ и $F_2$. Их длины $r_1$ и $r_2$ можно вычислить по формулам

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{2.24}$$

Директрисами эллипса (2.21) называют прямые, определяемые уравнениями

$$x = -a/\varepsilon, \quad x = a/\varepsilon.$$

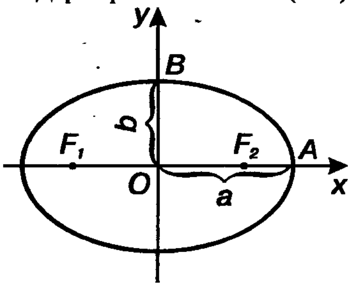

Рис. 2.4

Пример 2.14. Какую линию определяет уравнение $3x^2 + 4y^2 = 12$?

Разделим это уравнение почленно на 12: $x^2/4 + y^2/3 = 1$. Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.21), заключаем, что оно определяет эллипс с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{3}$.

Найдем фокусы этого эллипса. Из формулы (2.22) следует, что $c^2 = a^2 - b^2$; поскольку в данном случае $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, $c^2 = 4 - 3 = 1$, $c = 1$. Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$.

Пример 2.15. В прямоугольной декартовой системе координат построить линию, определяемую уравнением $y = (-2/3)\sqrt{9 - x^2}$.

Преобразуем это уравнение, возводя в квадрат обе его части:

$$y^2 = \frac{4}{9}(9 - x^2), \quad \frac{y^2}{4} = \frac{9 - x^2}{9}, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$. Если решить это уравнение относительно $y$, получим

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}, \; y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

В условии задачи дано второе из этих уравнений. Оно определяет не весь эллипс, а только ту его часть, для точек которой $y \le 0$, т. е. половину эллипса, расположенную ниже оси $Ox$.

Пример 2.16. Записать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\,(3, 2)$, $N\,(3\sqrt{3/2}, \sqrt{2})$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Так как точки $M$ и $N$ лежат на эллипсе, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(3\sqrt{3/2})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \quad \frac{27}{2a^2} + \frac{2}{b^2} = 1.$$

Решая полученную систему уравнений, находим, что $a^2 = 18$, $b^2 = 8$.

Таким образом, получено каноническое уравнение эллипса $x^2/18 + y^2/8 = 1$.

## 2.4. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \qquad (2.25)$$

где $a = OA$ – действительная, $b = OB$ – мнимая полуоси (рис. 2.5).

Координаты фокусов гиперболы (2.25): $x_1 = -c$, $y_1 = 0$; $x_2 = c$, $y_2 = 0$, т. е. $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (2.26)$$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния $2c$ к длине действительной оси $2a$:

$$\varepsilon = c/a. \qquad (2.27)$$

Асимптотами гиперболы называют прямые, определяемые уравнениями

$$y = \frac{b}{a}x, \; y = -\frac{b}{a}x. \qquad (2.28)$$

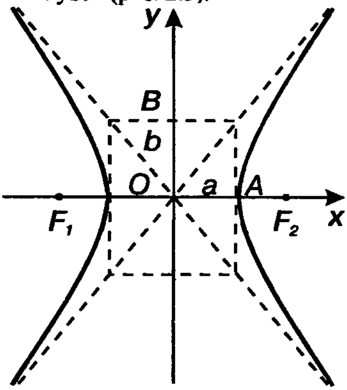

Рис. 2.5

Директрисами гиперболы называются прямые, определяемые уравнениями

$$x = -a/\varepsilon, \; x = a/\varepsilon. \qquad (2.29)$$

Гипербола с равными полуосями ($b = a$) называется равносторонней, ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (2.30)$$

Фокальные радиусы точки правой ветви гиперболы вычисляется по формулам

$$r_1 = \varepsilon x + a, \; r_2 = \varepsilon x - a; \qquad (2.31)$$

фокальные радиусы точки левой ветви – по формулам

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \; r_2 = -\varepsilon x + a; \qquad (2.32)$$

Пример 2.17. Какую линию определяет уравнение $9x^2 - 4y^2 = 36$?

Разделив обе части уравнения на 36, получим $x^2/4 - y^2/9 = 1$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.25), заключаем, что оно определяет гиперболу с действительной полуосью $a = 2$ и мнимой полуосью $b = 3$.

Пример 2.18. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением $5x^2 - 4y^2 = 20$. Вычислить длины фокальных радиусов точки $M(-4, \sqrt{15})$.

Разделив обе части уравнения на 20, получим $x^2/4 - y^2/5 = 1$. Сравнивая это уравнение с уравнением (2.25), заключаем, что $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, т. е. $a = 2$, $b = \sqrt{5}$. Из формулы (2.26) следует, что $c^2 = a^2 + b^2$, $c = 3$, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$. По формуле (2.27) находим $\varepsilon = c/a = 3/2$. Поскольку точка $M$ лежит на левой ветви гиперболы, то при вычислении $r_1$ и $r_2$ необходимо пользоваться формулами (2.32) $r_1 = (-3/2)(-4) - 2 = 4$, $r_2 = (-3/2)(-4) + 2 = 8$. Отметим, что $r_2 - r_1 = 8 - 4 = 4 = 2a$.

Пример 2.19. Записать уравнения асимптот и директрис гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Приводя уравнение гиперболы к каноническому виду (2.25), заключаем, что $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, т.е. $a = 3$, $b = 2$. В соответствии с (2.28) записываем уравнения асимптот $y = (2/3)x$, $y = -(2/3)x$. По формуле (2.26) находим $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, а по формуле (2.27) – эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{13}/3$. Согласно (2.29), получаем уравнения директрис $x = -9/\sqrt{13}$, $x = 9/\sqrt{13}$.

## 2.5. Парабола

**Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы), лежащих в той же плоскости.**

Уравнение параболы, симметричной относительно оси $Ox$ и проходящей через начало координат (рис. 2.6), имеет вид

$$y^2 = 2px, \tag{2.33}$$

уравнение ее директрисы

$$x = -p/2. \tag{2.34}$$

Парабола, определяемая уравнением (2.33), имеет фокус $F(p/2, 0)$, фокаль-

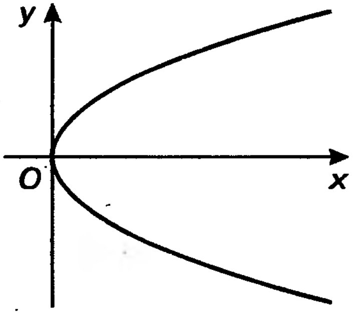


Рис. 2.6

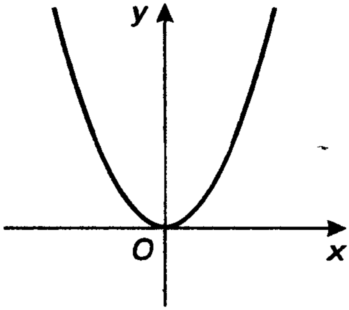


Рис. 2.7

ный радиус ее точки $M(x, y)$ вычисляется по формуле

$$r = x + p/2. \qquad (2.35)$$

Парабола, симметричная относительно оси $Oy$ и проходящая через начало координат (рис. 2.7), определяется уравнением

$$x^2 = 2qy. \qquad (2.36)$$

Фокус этой параболы находится в точке $F(0, q/2)$, уравнение директрисы имеет вид $y = -q/2$. Фокальный радиус ее точки $M(x, y)$ выражается формулой $r = y + q/2$.

Замечание. Каждое из уравнений $y^2 = -2px$, $x^2 = -2qy$ определяет параболу.

Пример 2.20. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 8x$. Вычислить расстояние точки $M(2, 4)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $y^2 = 8x$ с уравнением (2.33), находим, что $2p = 8$, откуда $p = 4$, $p/2 = 2$. В соответствие с формулой (2.34) получаем уравнение $x = -2$ директрисы параболы, фокус параболы находится в точке $F(2, 0)$. Точка $M(2, 4)$ лежит на параболе, так как ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2 = 8x$. По формуле (2.35) находим фокальный радиус точки $M$: $r = 2 + 2 = 4$.

Пример 2.21. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2 = 4y$. Вычислить расстояние точки $M(6, 9)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $x^2 = 4y$ с уравнением (2.36), получаем $2q = 4$, откуда $q = 2$, $q/2 = 1$. Следовательно, фокус параболы находится в точке $F(0, 1)$, уравнение директрисы имеет вид $y = -1$, а фокальный радиус точки $M$: $r = 9 + 1 = 10$.

Пример 2.22. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси $Ox$ и проходящей через точки $M(5, 4)$, $N(15, -6)$.

Так как парабола симметрична относительно оси $Ox$, то в ее уравнение $y$ входит только во второй степени. Уравнение этой параболы имеет вид $y^2 = 2px + c$, где $p$ и $c$ – некоторые постоянные. Найдем $p$ и $c$, использовав условия задачи. Поскольку точки $M$ и $N$ лежат на параболе, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению $4^2 = 2p \cdot 5 + c$, $(-6)^2 = 2p \cdot 15 + c$. Из уравнений $16 = 10p + c$, $36 = 30p + c$ находим $p = 1$, $c = 6$.

Таким образом, данная парабола определяется уравнением $y^2 = 2x + 6$.

## 2.6. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы

Пусть $\gamma$ – дуга эллипса, гиперболы или параболы (рис. 2.8). Проведем через фокус $F$ прямую, перпендикулярную директрисе $\Delta$, точку их пересечения обозначим через $A$, проекцию точки $M$ на эту прямую – буквой $N$. В точке $F$ проведем перпендикуляр к прямой $AN$ (оси линии $\gamma$), обозначим буквой $P$ точку ее пересечения с дугой $\gamma$, а длину отрезка $FP$ – буквой $p$, т. е. $|FP| = p$, и назовем ее фокальным параметром линии $\gamma$.

Пусть $\rho$ и $\varphi$ – полярные координаты точки $M$ в системе координат с полюсом в точке $F$ и полярной осью $FN$, тогда

$$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \tag{2.37}$$

Уравнение (2.37) называется полярным уравнением эллипса, гиперболы, параболы (это уравнение определяет одну из двух ветвей гиперболы).

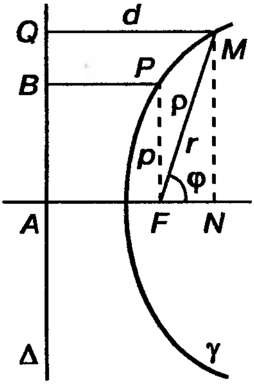


Рис. 2.8

Отметим, что для параболы фокальный параметр совпадает с параметром $p$, входящим в уравнение (2.33), для эллипса и гиперболы, заданных соответственно уравнениями (2.21) и (2.25), он выражается формулой

$$p = b^2/a. \tag{2.38}$$

Пример 2.23. Какую линию определяет уравнение $\rho = \dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$ в полярных координатах?

Разделим на 5 числитель и знаменатель правой части уравнения:

$$\rho = \frac{16/5}{1-(3/5)\cos\varphi}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2.37) и учитывая формулу (2.38), получаем $p = b^2/a = 16/5$, $\varepsilon = c/a = 3/5$, откуда $a$=5, $b$=4, $c$=3. Поскольку $0 < \varepsilon < 1$, то данное уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 5$, $b = 4$.

Пример 2.24. Какую линию определяет уравнение $\rho = \dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$ в полярных координатах?

Разделив числитель и знаменатель правой части на 4, приведем это уравнение к виду (2.37):

$$\rho = \frac{9/4}{1-(5/4)\cos\varphi}.$$

Следовательно, $p = b^2/a = 9/4$, $\varepsilon = c/a = 5/4 > 1$. Данное уравнение определяет гиперболу с полуосями $a = 4$, $b = 3$.

## 2.7. Некоторые другие виды уравнений линий второго порядка

Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ приводится к виду $X^2 = 2qY$ и определяет параболу с осью, параллельной оси $O_1Y$.

Уравнение $x = Ay^2 + By + C$ приводится к виду $Y^2 = 2pX$ и определяет параболу с осью, параллельной оси $O_1X$.

Равносторонняя гипербола имеет уравнение (2.30), а в системе координат, осями которой являются ее асимптоты, определяется уравнением

$$XY = C\,(C \neq 0). \qquad (2.39)$$

Уравнение

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}\,(ad - bc \neq 0,\, c \neq 0)$$

приводится к виду (2.39) и определяет гиперболу.

Параметрические уравнения эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ имеют вид

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Параметрические уравнения гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ имеют вид

$$x = a\,(t + (1/4t)), \quad y = b\,(t - (1/4t)),$$

а также

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t,$$

где $\mathrm{ch}\,t$, $\mathrm{sh}\,t$ – гиперболические функции аргумента $t$ (см. п. 13.11).

Параметрические уравнения параболы $x^2 = 2qy$ можно записать так:

$$x = t, \quad y = t^2/2q.$$

Уравнение

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2 \qquad (2.40)$$

определяет эллипс при $0 < \varepsilon < 1$, гиперболу при $\varepsilon > 1$, параболу при $\varepsilon = 1$. В случае $0 < \varepsilon < 1$ это уравнение принимает вид

$$y^2 = 2px - qx^2,$$

где $p = b^2/a$, $q = b^2/a^2$, а в случае $\varepsilon > 1$ $y^2 = 2px + qx^2$, где $p$ и $q$ имеют те же выражения.

Уравнение (2.40) называют уравнением эллипса, гиперболы, параболы, отнесенных к вершине; начало декартовой прямоугольной системы координат находится в вершине линии – точке пересечения с координатной осью (рис. 2.9).

Эллипс, гиперболу, параболу называют каноническими сечениями. В сечении конуса плоскостью, не проходящей через его вершину (рис. 2.10), получаются эти линии, а именно эллипс (сечение одной полости конуса плоскостью, не перпендикулярной его оси и не параллельно образующей), парабола (сечение плоскостью, параллельной его образующей), гипербола (сечение плоскостью обеих полостей конуса).

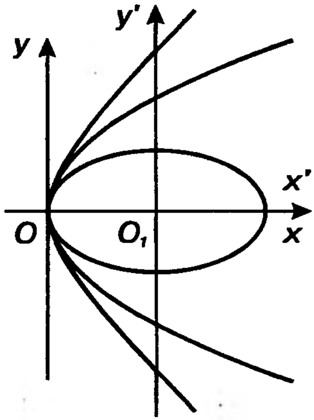


Рис. 2.9

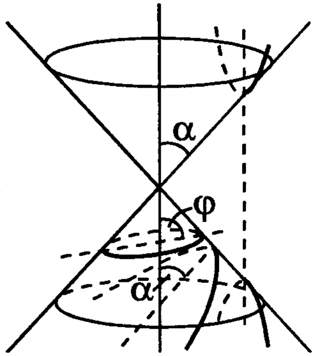


Рис. 2.10

Пример 2.25. Построить линию, определяемую уравнением $3y = x^2 - 6x + 15$.

Преобразуя это уравнение, получаем $y = (1/3)((x^2 - 6x + 9) + 6)$, $y = (1/3)(x-3)^2 + 2$, $y - 2 = (1/3)(x-3)^2$.

Перейдем к новым координатам по формулам $X = x - 3$, $Y = y - 2$. В новых координатах уравнение принимает вид $Y = (1/3)X^2$, или $X^2 = 3Y$; оно определяет параболу. Строим системы координат $Oxy$ и $O_1XY$, последнею с началом в точке $O_1(3, 2)$, и саму параболу – в новой системе координат по ее каноническому уравнению (рис. 2.11).

Пример 2.26. Построить линию, определяемую уравнением $y = \dfrac{2x+12}{x+3}$.

Преобразуя данное уравнение:

$$y(x+3) - 2x - 12 = 0, \quad y(x+3) - 2x - 6 - 6 = 0,$$
$$y(x+3) - 2(x+3) - 6 = 0, \quad (x+3)(y-2) = 6.$$

Переходя к новым координатам по формулам $X = x + 3$, $Y = y - 2$, получаем уравнение $XY = 6$, определяющее гиперболу. Строим линию в системе координат $O_1XY$ (рис. 2.12), начало которой находится в точке $O_1(-3, 2)$.

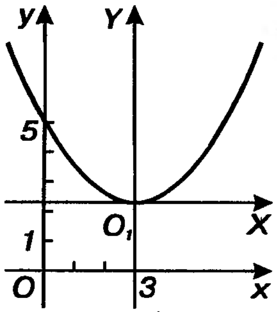


Рис. 2.11

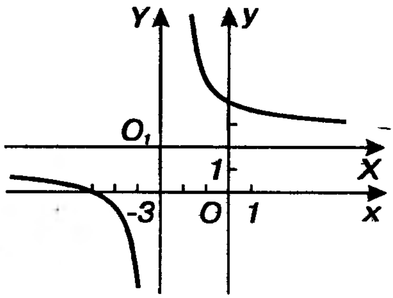


Рис. 2.12

Пример 2.27. Какую линию определяет уравнение $xy+x-2y-14=0$?

Преобразуем это уравнение: $(xy+x)-(2y+2)-12=0$, $x(y+1)-2(y+1)-12=0$, $(y+1)(x-2)-12=0$, $(x-2)(y+1)=12$.

Переходя к новым координатам по формулам $X=x-2$, $Y=y+1$, получаем уравнение $XY=12$, которое определяет гиперболу.

## 2.8. Упрощение уравнения второй степени, не содержащего члена с произведением координат

Рассмотрим уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат, не содержащее члена с произведением координат $xy$:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{2.41}$$

Перейдем к новой системе координат $O_1XY$, полученной из исходной путем параллельного переноса (см. рис. 1.10) начала в точку $O_1(a,b)$, при котором старые координаты $(x,y)$ точки $M$ выражаются через ее новые координаты $(X,Y)$ формулами (1.22).

Уравнение (2.41) путем выделения полных квадратов может быть приведено к одному из следующих канонических уравнений:

$$X^2/a^2+Y^2/b^2=1, \tag{2.42}$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2=0, \tag{2.43}$$

$$X^2/a^2+Y^2/b^2=-1 \tag{2.44}$$

в случае $AC>0$ (линии эллиптического типа);

$$X^2/a^2-Y^2/b^2=1,\quad -X^2/a+Y^2/b^2=1, \tag{2.45}$$

$$X^2/a^2-Y^2/b^2=0 \tag{2.46}$$

в случае $AC<0$ (линии гиперболического типа);

$$Y^2 = 2pX, \tag{2.47}$$

$$Y^2 = b^2, \tag{2.48}$$

$$Y^2 = 0, \tag{2.49}$$

$$Y^2 = -b^2 \tag{2.50}$$

в случае $AC = 0$, $A = 0$ (линии параболического типа).

Если $C = 0$, $A \neq 0$, то уравнение (2.41) приводится к виду $X^2 = 2qY$, если $E \neq 0$, и к одному из уравнений $X^2 = a^2$, $X^2 = -a^2$, $X^2 = 0$, когда $E = 0$.

Уравнение (2.42) определяет эллипс, уравнения (2.45) – гиперболы (с действительной осью $O_1X$ или $O_1Y$), уравнение (2.47) – параболу (с осью $O_1X$), уравнения (2.46) – пару пересекающихся прямых $bX - aY = 0$, $bX + aY = 0$, уравнение (2.48) – пару параллельных прямых $Y = b$, $Y = -b$, уравнение (2.49) – пару совпавших прямых $Y = 0$, $Y = 0$, уравнению (2.43) удовлетворяют координаты единственной точки $X = 0$, $Y = 0$, уравнениям (2.44) и (2.50) не удовлетворяют координаты ни одной точки.

П р и м е р 2.28. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) - 36 + 16 - 124 = 0,$$

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 - 144 = 0, \quad (x-2)^2/16 - (y+1)^2/9 = 1.$$

Перейдя к новым координатам по формулам $X = x - 2$, $Y = y + 1$, получим уравнение $X^2/16 - Y^2/9 = 1$, определяющее гиперболу с полуосями $a = 4$, $b = 3$ (рис. 2.13). Центр гиперболы находится в точке, для которой $X = 0$, $Y = 0$. Так как

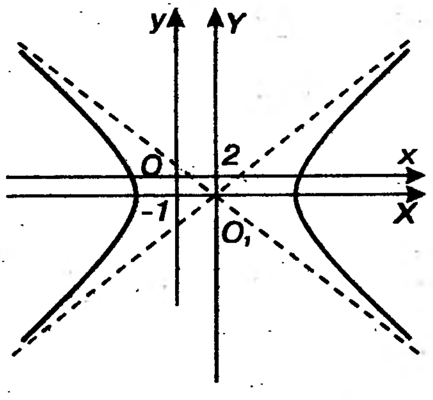


Рис. 2.13

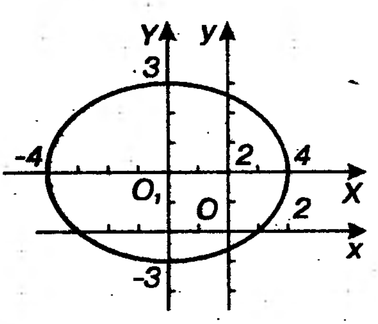


Рис. 2.14

$X = x - 2$, $Y = y + 1$, то $x - 2 = 0$, $y + 1 = 0$, откуда $x = 2$, $y = -1$. Получена точка $O_1(2, -1)$, в которой находится начало новой системы координат.

Пример 2.29. Построить линию, определяемую уравнением

$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0.$$

Выделяя полные квадраты в левой части уравнения, получаем

$$9(x^2 + 4x + 4) + 16(y^2 - 4y + 4) - 36 - 64 - 44 = 0,$$

$$9(x+2)^2 + 16(y-2)^2 = 144, \quad (x+2)^2/16 + (y-2)^2/9 = 1.$$

Переходя к новым координатам по формулам $X = x + 2$, $Y = y - 2$, последнему уравнению придадим вид $X^2/16 + Y^2/9 = 1$. Это уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 4$, $b = 3$ (рис. 2.14). Центр эллипса находится в точке, для которой $X = 0$, $Y = 0$, или $x + 2 = 0$; $y - 2 = 0$, откуда $x = -2$, $y = 2$, т. е. в точке $O_1(-2, 2)$.

## 2.9. Упрощение общего уравнения второй степени

Общее уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат $x$ и $y$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.51}$$

при повороте координатных осей на угол $\alpha$, для которого

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = (A - C)/2B, \tag{2.52}$$

преобразуется в уравнение $A_1x'^2 + C_1y'^2 + D_1x' + E_1y' + F = 0$, являющееся уравнением вида (2.41).

Формулы преобразования координат имеют вид

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \tag{2.53}$$

причем

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{(1 - \cos 2\alpha)/2}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{(1 + \cos 2\alpha)/2}, \tag{2.54}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}}, \tag{2.55}$$

где $\operatorname{ctg} 2\alpha$ определяется формулой (2.52).

Уравнение (2.51) определяет или пустое множество, или точку, или пару прямых (пересекающихся, параллельных, совпавших), или одну из линий (окружность, эллипс, гиперболу, параболу). Пару прямых называют распадающейся линией второго порядка.

Пример 2.30. Построить линию, определяемую уравнением

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x + 8y + 24 = 0.$$

Это частный случай уравнения (2.51), для которого $A = 5$, $2B = -6$, $C = 5$,

$D=-24$, $E=8$, $F=24$. По формуле (2.52) имеем $\operatorname{ctg}2\alpha=(5-5)/(-6)=0$. Возьмем $2\alpha=\pi/2$, т. е. $\alpha=\pi/4$, тогда $\sin\alpha=\cos\alpha=\sqrt{2}/2$. Формулы (2.53) принимают вид

$$x=(\sqrt{2}/2)(x'-y'),\ y=(\sqrt{2}/2)(x'+y'). \qquad \text{(I)}$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$(5/2)(x'-y')^2-(6/2)(x'-y')(x'+y')+(5/2)(x'+y')^2-$$
$$-12/\sqrt{2}(x'-y')+4\sqrt{2}(x'+y')+24=0,$$
$$(5/2)(x'^2-2x'y'+y'^2)-3(x'^2-y'^2)+(5/2)(x'^2+2x'y'+y'^2)-$$
$$-12/\sqrt{2}(x'-y')+4\sqrt{2}(x'+y')+24=0,$$
$$2x'^2+8y'^2-8\sqrt{2}x'+16\sqrt{2}y'+24=0,$$
$$x'^2+4y'^2-4\sqrt{2}x'+8\sqrt{2}y'+12=0.$$

Преобразуем левую часть последнего уравнения, выделив в ней полные квадраты: $(x'^2-4\sqrt{2}x'+8)+4(y'^2+2\sqrt{2}y'+2)-8-8+12=0$, $(x'-2\sqrt{2})^2+4(y'+\sqrt{2})^2=4$.

Переходя к новым координатам по формулам

$$X=x'-2\sqrt{2},\ Y=y'+\sqrt{2}, \qquad \text{(II)}$$

последнее уравнение записываем так:

$$X^2+4Y^2=4, \text{ или } X^2/4+Y^2/1=1. \qquad \text{(III)}$$

Каноническое уравнение (III) определяет эллипс с полуосями $a=2$, $b=1$. Построим этот эллипс относительно новой системы декартовых прямоугольных координат $O_1XY$. Угол наклона оси $O_1X$ к оси $Ox$ уже известен $\alpha=45°$, осталось определить старые координаты точки $O_1$. В системе $O_1XY$ эта точка (центр эллипса) имеет координаты $X=0$, $Y=0$. По формулам (II) имеем $x'-2\sqrt{2}=0$, $y'+\sqrt{2}=0$, откуда $x'=2\sqrt{2}$, $y'=-2\sqrt{2}$. С помощью формул (I) находим координаты точки $O_1$ в старой системе координат $Oxy$:

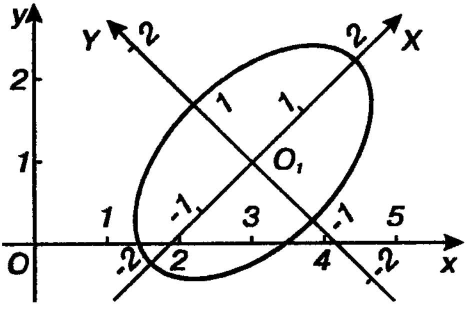


Рис. 2.15

$$x=(\sqrt{2}/2)(2\sqrt{2}-(-\sqrt{2}))=3,\ y=(\sqrt{2}/2)(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=1,\ O_1(3,1).$$

Строим новую систему координат $O_1XY$ и сам эллипс по его каноническому уравнению (III) (рис. 2.15).

П р и м е р 2.31. Построить линию, определяемую уравнением $3x^2+4xy-4x-8y=0$.

В данном случае $A=3$, $2B=4$, $C=0$. По формуле (2.52) находим $\operatorname{ctg}2\alpha=(3-0)/4=3/4$. В формулы (2.53) входят $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Найдем их значения с помощью формул (2.54) и (2.55), в которых знак можно выбрать по своему усмотрению. Выбрав везде знак плюс, получим

$$\cos 2\alpha=\frac{3/4}{\sqrt{1+(3/4)^2}}=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-3/5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

Формулы (2.53) принимают вид

$$x=(1/\sqrt{5})(2x'-y'),\ y=(1/\sqrt{5})(x'+2y'). \qquad \text{(IV)}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и преобразуем его:

$$\frac{3}{5}(2x'-y')^2+\frac{4}{5}(2x'-y')(x'+2y')-\frac{4}{\sqrt{5}}(2x'-y')-\frac{8}{\sqrt{5}}(x'+2y')=0,$$

$$\frac{3}{5}(4x'^2-4x'y'+y'^2)+\frac{4}{5}(2x'^2+4x'y'-x'y'-2y'^2)-\frac{16}{\sqrt{5}}x'-\frac{12}{\sqrt{5}}y'=0,$$

$$4x'^2-y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}x'-\frac{12}{\sqrt{5}}y'=0,$$

$$4\left(x'^2-\frac{4}{\sqrt{5}}x'+\frac{4}{5}\right)-\left(y'^2+\frac{12}{\sqrt{5}}y'+\frac{36}{5}\right)-\frac{16}{5}+\frac{36}{5}=0,$$

$$4\left(x'-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(y'+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2=-4.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$X=x'-2/\sqrt{5},\ Y=y'+6/\sqrt{5}. \qquad \text{(V)}$$

Последнее уравнение в новых координатах примет вид

$$4X^2-Y^2=-4, \text{ или } -X^2/1+Y^2/4=1.$$

Это каноническое уравнение определяет гиперболу с полуосями $a=1$, $b=2$, причем действительной осью будет ось $O_1Y$. Построим гиперболу в новой системе координат $O_1XY$. Найдем сначала старые координаты точки $O_1$, в которой находится центр гиперболы. Для этой точки $X=0$, $Y=0$. По формулам (V) получаем $x'=2/\sqrt{5}$, $y'=-6/\sqrt{5}$. С помощью формул (IV) находим

$x=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)=2$, $y=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{12}{\sqrt{5}}\right)=-2$, $O_1(2,-2)$. Через точку $O_1$ проводим ось $O_1X$, для которой $\operatorname{tg}\alpha=1/2$, и ось $O_1Y$, перпендикулярную оси $O_1X$. В системе координат $O_1XY$ строим гиперболу по ее каноническому уравнению (рис. 2.16).

Пример 2.32. Построить линию, определяемую уравнением $x^2-2xy+y^2+4x-8y+7=0$.

Поскольку $A=1$, $2B=-2$, $C=1$, то по формуле (2.52) $\operatorname{ctg}2\alpha=(1-1)/(-2)=0$, $2\alpha=\pi/2$, $\alpha=\pi/4$. Формулы (2.53) принимают вид

$$x=(\sqrt{2}/2)(x'-y'),\ y=(\sqrt{2}/2)(x'+y'). \tag{VI}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и преобразуем его:

$$(1/2)(x'-y')^2-(x'-y')(x'+y')+(1/2)(x'+y')^2+2\sqrt{2}(x'-y')-$$
$$-4\sqrt{2}(x'+y')+7=0,$$
$$2y'^2-2\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'+7=0,\ (y'-3\sqrt{2}/2)^2-\sqrt{2}(x'+1/\sqrt{2})=0.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$X=x'+1/\sqrt{2},\ Y=y'-3\sqrt{2}/2. \tag{VII}$$

В новых координатах последнее уравнение принимает вид

$$Y^2-\sqrt{2}X=0, \text{ или } Y^2=\sqrt{2}X.$$

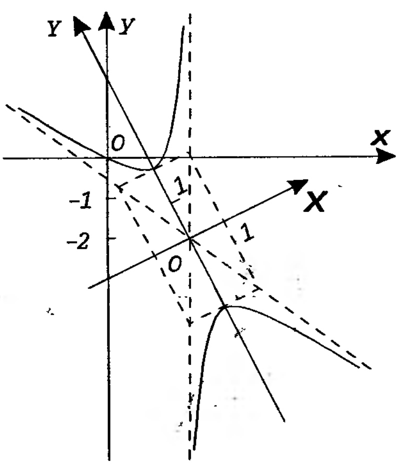


Рис. 2.16

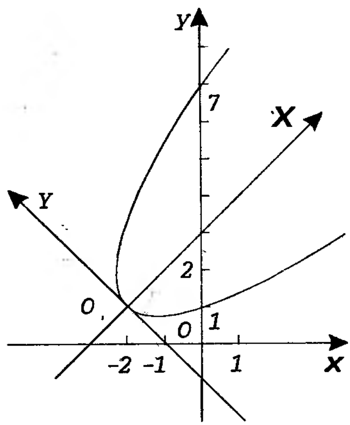


Рис. 2.17

Это уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке, для которой $X = 0$, $Y = 0$. Найдем старые координаты этой точки. По формулам (VII) находим $x' = -1/\sqrt{2}$, $y' = 3/\sqrt{2}$. С помощью формул (VI) получаем

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -2,$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 1, \quad O_1(-2, 1).$$

Строим систему координат $O_1XY$ и параболу по ее каноническому уравнению (рис. 2.17).

## 2.10. Некоторые алгебраические линии высших порядков

**Декартов лист** – линия, определяемая в прямоугольной декартовой системе координат алгебраическим уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \ (a = \text{const} \neq 0).$$

В полярных координатах уравнение принимает вид

$$\rho = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}.$$

Декартов лист можно задать и параметрическими уравнениями

$$x = 3at/(1+t^3), \ y = 3at^2/(1+t^3).$$

Линия эта изображена на рис. 2.18.

**Циссоида**. Рассмотрим окружность с диаметром $OA = 2a$ и касательную к ней в точке $A$ (рис. 2.19). Из точки $O$ проведем луч $OB$, точку его пересечения с окружностью обозначим буквой $C$. На этом луче отложим отрезок $|OM| = |BC|$.

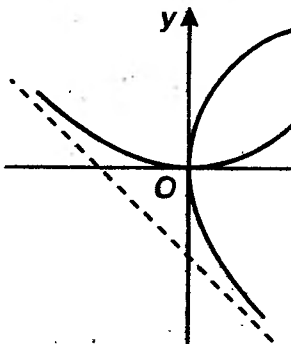

Рис. 2.18

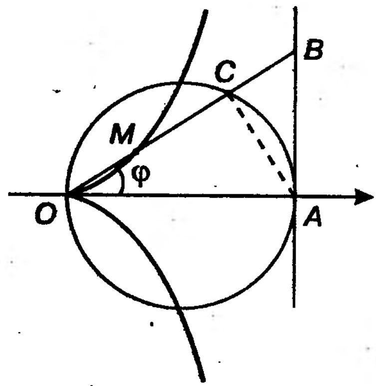

Рис. 2.19

Проведя другой луч и выполнив аналогичное построение, получим точку $M_1$. Таким способом можно построить сколько угодно точек. Множество точек $M, M_1, \ldots$ называют циссоидой. Построив достаточное число указанных точек и соединив их плавной линией, получим циссоиду (см. рис. 2.19).

Уравнение циссоиды в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$y^2 = x^3/(2a - x),$$

в полярных координатах

$$\rho = 2a\sin^2\varphi/\cos\varphi.$$

Параметрические уравнения циссоиды

$$x = \frac{2a}{t^2+1}, \quad y = \frac{2a}{t\,(t^2+1)},$$

или

$$x = 2a\sin^2\varphi, \; y = 2a\sin^3\varphi/\cos\varphi,$$

где $\varphi$ — полярный угол.

**Строфоида**. Рассмотрим точку $A$ и прямую $\Delta$, не проходящую через данную точку (рис. 2.20). Обозначим буквой $C$ точку пересечения перпендикуляра к прямой $\Delta$, проведенной в точке $A$, а длину отрезка $AC - a$, т. е. $|AC| = a$. Вокруг точки $A$ вращается луч, на котором откладываются отрезки $BM_1$ и $BM_2$ от точки $B$ пересечения с данной прямой так, что $|BM_1| = |BM_2| = |BC|$. Каждому положению луча соответствует пара точек $M_1$, $M_2$, построенных указанным способом. Множество пар точек $M_1$, $M_2$ называют строфоидой. Точки $M_1$ и $M_2$ при этом называют сопряженными. Построив достаточное число точек и соединив их плавной линией, получим строфоиду (см. рис. 2.20). Название «строфоида» происходит от греческого слова στροφη – поворот.

Уравнение строфоиды в полярных координатах

$$\rho = a\,(1 \pm \sin\varphi)/\cos\varphi,$$

в декартовых координатах

$$y^2 = \frac{(x-a)^2 x}{2a - x}, \text{ или } y = \pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Параметрические уравнения строфоиды

$$x = a(1 \pm \sin\varphi), \; y = a\,(1 \pm \sin\varphi)\sin\varphi/\cos\varphi.$$

**Версьера**. Рассмотрим окружность с диаметром $|OC| = a$ и отрезок $BM$, построенный так, что $|OB| : |BD| = |OC| : |BM|$ (рис. 2.21). Множество точек $M$ называют версьерой.

В прямоугольных декартовых координатах уравнение версьеры имеет вид

$$y = a^3/(x^2 + a^2).$$

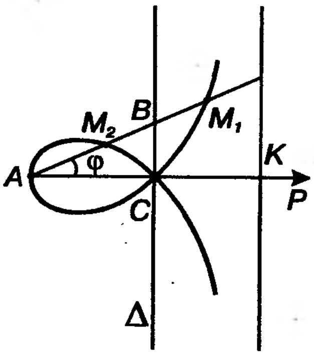


Рис. 2.20

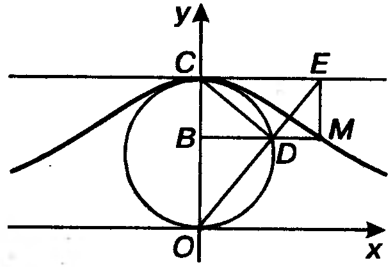


Рис. 2.21

Параметрические уравнения версьеры

$$x = t,\ y = a^3/(t^2 + a^2),$$

где роль параметра играет первая координата.

Рассматриваемую линию называют так же «локоном Аньези» в честь первой в Европе женщины, получившей известность благодаря заслугам на поприще математики.

**Лемииската Бериулли** – множество всех точек плоскости, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек той же плоскости есть посто-

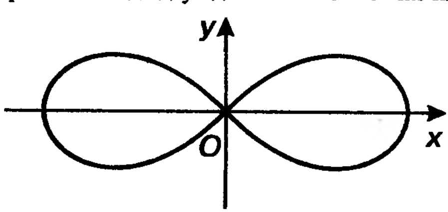


Рис. 2.22

янная величина, равная квадрату половины расстояния между данными точками.

В декартовых прямоугольных координатах лемниската Бернулли (рис. 2.22) имеет уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\,(x^2 - y^2),$$

в полярных

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

При другом выборе системы координат (рис. 2.23) эта линия определяется соответственно уравнениями

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 xy,\quad \rho^2 = 2a^2 \sin 2\varphi.$$

Название линии происходит от греческого слова λημνισκοξ – повязка, бант. Линия названа по имени ученого, открывшего ее. Уравнение лемнискаты впервые встречается в статье Я. Бернулли, опубликованной в 1694 г. в журнале «Acta eruditorum» («Труды ученных»).

**Овал Кассини** – множество всех точек плоскости, для каждой из которых произведение расстояний до двух данных точек той же плоскости есть постоянная величина.

Уравнение овала Кассини в декартовых координатах

$$(x^2+y^2)-2a^2(x^2-y^2)=b^4-a^4,$$

в полярных

$$\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi\pm\sqrt{\cos^2 2\varphi((b^4/a^4)-1)}}.$$

Вид овала Кассини зависит от соотношения между постоянными $a$ и $b$. В случае $b>a$ овал имеет форму замкнутой линии, симметричной относительно осей координат (рис. 2.24). При $b=a$ получаем лемнискату Бернулли. В случае $b<a$ овал состоит из двух замкнутых линий.

Овалы Кассини названы в честь французского ученного, впервые рассмотревшего их. Жан Доминик Кассини (1625 – 1712) открыл эти линии при попытке определить орбиту земли.

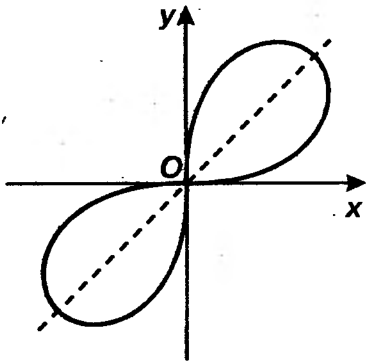


Рис. 2.23

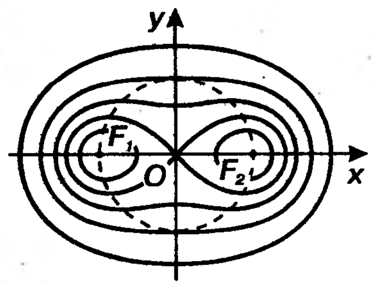


Рис. 2.24

**Конхоида**. В плоскости фиксируем прямую $LL_1$ и точку $O$, отстоящую от этой прямой на расстоянии $|OE|=a$ (рис. 2.25, *а*). Проведем луч $OK$, пересекающий прямую $LL_1$ в точке $K$. На луче от точки $K$, по обе стороны от нее, отложены два отрезка $KM$ и $KM_1$ таких, что $|KM|=|KM_1|=l$, где $l$ – заданное число. Вращая луч вокруг точки $O$ (от 0 до 180° ) и проводя аналогичные построения (при одном и том же значении $l$), получим линию, описываемую точками $M$ и $M_1$, которую называют конхоидой. Точку $O$ при этом называют полюсом конхоиды, а прямую

$LL_1$ – ее базисом. Линия эта состоит из двух ветвей: одну ветвь описывает точка $M$, другую – точка $M_1$.

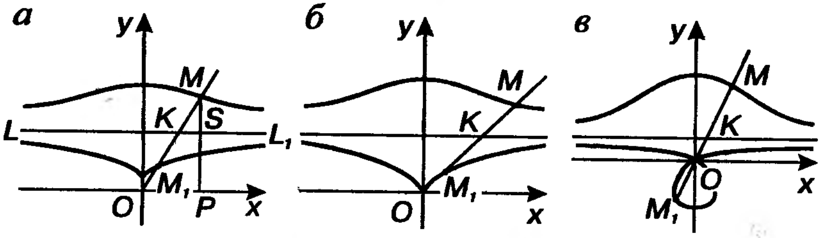


Рис. 2.25

Уравнение конхоиды в полярных координатах

$$\rho = (a/\sin\varphi) \pm l,$$

знак плюс – для верхней ветви, минус – для нижней. Форма конхоиды зависит от соотношения между параметрами $l$ и $a$. При $l = a$ и $l > a$ линия имеет вид, изображенный на рис. 2.25, *б, в*.

В прямоугольных декартовых координатах конхоида имеет уравнение

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2 y^2 = 0.$$

Линию эту называют конхоидой Никомеда, по имени древнегреческого геометра, впервые открывшего ее.

**Улитка Паскаля.** Рассмотрим окружность радиуса $r$ с центром в точке $C$ (рис. 2.26). Выберем на данной окружности точку $O$. Представим себе, что вокруг точки $O$ вращается луч $OM$. В каждом его положении от точки $N$ пересечения луча и окружности откладываем отрезок $|NM| = l$, где $l$ – заданное положительное число. При повороте луча от 0 до 180° получим множество точек $M$. При дальнейшем повороте луча от 180 до 360°, откладывая отрезок длины $l$ по направлению луча, мы фактически будем откладывать его в сторону, противоположную

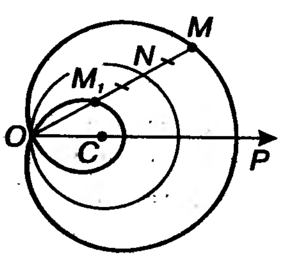


Рис. 2.26

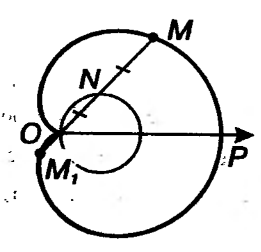


Рис. 2.27

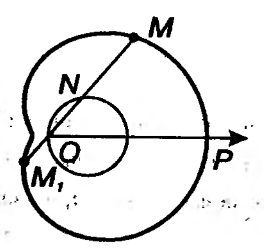


Рис. 2.28

прежней, т. е. $|NM_1| = l$, и получим точки $M_1$. Множество точек $M$ и $M_1$ называют улиткой Паскаля.

Уравнения улитки Паскаля:

$$\rho = 2r\cos\varphi \pm l, \quad (x^2+y^2-2rx)^2 - l^2(x^2+y^2) = 0.$$

Форма улитки Паскаля зависит от соотношения между параметрами $r$ и $l$: $l < 2r$ (рис. 2.26), $l = 2r$ (рис. 2.27), $l > 2r$ (рис. 2.28).

Линия названа в честь Этьена Паскаля – французского математика-любителя, отца знаменитого Блеза Паскаля.

**Кардиода** – линия, описываемая точкой $M$ окружности радиуса $r$, катящейся по окружности с таким же радиусом (рис. 2.29). Параметрические уравнения кардиоды

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t, \quad y = 2r\sin t - \sin 2t,$$

в полярных координатах

$$\rho = 2r(1-\cos\varphi),$$

в декартовых координатах

$$(x^2+y^2+2rx)^2 = 4r^2(x^2+y^2).$$

Уравнение $\rho = 2r(1+\cos\varphi)$ также определяет кардиоду в полярной системе координат с полюсом в той же точке и противоположно направленной полярной осью.

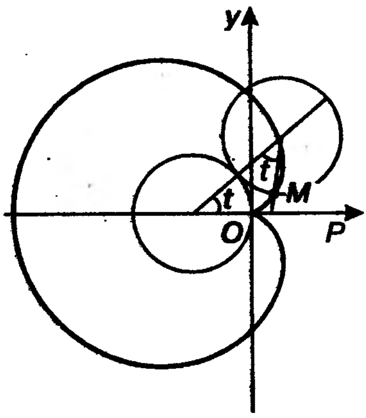


Рис. 2.29

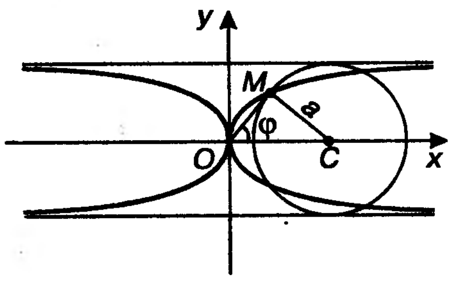


Рис. 2.30

**Каппа** – линия, представляющая собой множество точек касания касательных, проведенных из данной точки к окружности заданного радиуса, центр которой перемещается по фиксированной прямой, проходящей через эту точку (рис. 2.30).

Линия эта напоминает греческую букву κ (каппа), откуда и происходит ее название.

Параметрические уравнения каппы

$$x = a\cos^2\varphi / \sin\varphi, \quad y = a\cos\varphi,$$

в полярных координатах

$$\rho = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi,$$

в декартовых координатах

$$(x^2+y^2)^2\,y^2 = a^2x^2.$$

**Роза** – линия, заданная полярным уравнением $\rho = a\sin k\varphi$ или уравнением $\rho = a\cos k\varphi$, где $a$ и $k$ – положительные числа. Роза целиком расположена в круге радиуса $a$ $(\rho \le a)$, так как $|\sin k\varphi| \le 1$. Роза состоит из конгруэнтных лепестков, симметричных относительно наибольших радиусов, каждый из которых равен $a$. Количество этих лепестков зависит от числа $k$. Если $k$ – целое число, то роза состоит из $k$ лепестков при нечетном $k$ и из $2k$ лепестков при четном $k$ (рис. 2.31, *а*, *б*). Если $k$ – рациональное число, причем $k = m/n$ $(n > 1)$, то роза состоит из $m$ лепестков в случае, когда $m$ и $n$ – нечетные числа, или из $2m$ лепестков, если одно из чисел будет четным. При этом в отличие от предыдущего случая каждый следующий лепесток будет частично покрывать предыдущий (рис. 2.31, *в*–*е*).

Если число $k$ является иррациональным, то роза состоит из бесконечного множества лепестков, частично накладывающихся друг на друга.

Четырехлепестковой розой (см. рис. 2.31, *б*) называют линию, определяемую полярным уравнением

$$\rho = a\sin 2\varphi.$$

В декартовых координатах линия имеет уравнение

$$(x^2+y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0.$$

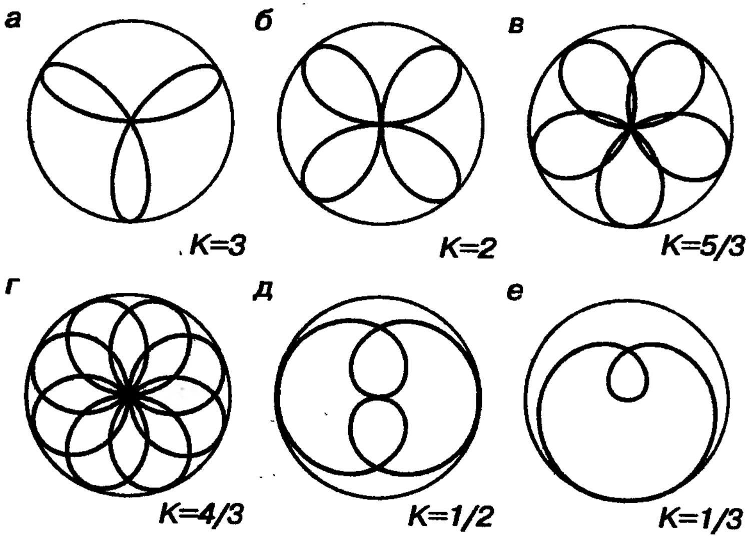


Рис. 2.31

Четырехлепестковая роза образуется множеством оснований перпендикуляров, опущенных из вершины $O$ прямого угла на отрезок постоянной длины, концы которого скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке $O$.

Трехлепестковой розой (см. рис. 2.31. *а*) называют линию, определяемую уравнением

$$\rho = a\sin 3\varphi.$$

В декартовых координатах линия имеет уравнение

$$(x^2+y^2)^2 = a(3x^2y - y^3).$$

**Астроида.** Прямоугольник, две стороны которого лежат на двух взаимно перпендикулярных прямых, деформируется так, что его диагональ сохраняет постоянную длину $a$. Множество точек – оснований перпендикуляров, опущенных из вершины прямоугольника на его диагональ, называют астроидой (рис. 2.32, *а*).

Астроида имеет параметрические уравнения

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Исключив из этих уравнений параметр $t$, получим уравнение астроиды в прямоугольных координатах:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Освобождаясь от дробных показателей, находим

$$(x^2+y^2-a^2)^3 + 27x^2y^2a^2 = 0.$$

Астроиду можно рассматривать как траекторию точки окружности радиуса $r$ (рис. 2.32, *б*), катящейся по внутренней стороне другой окружности, радиус $R$ которой в четыре раза больше $r$ $(R = 4r)$.

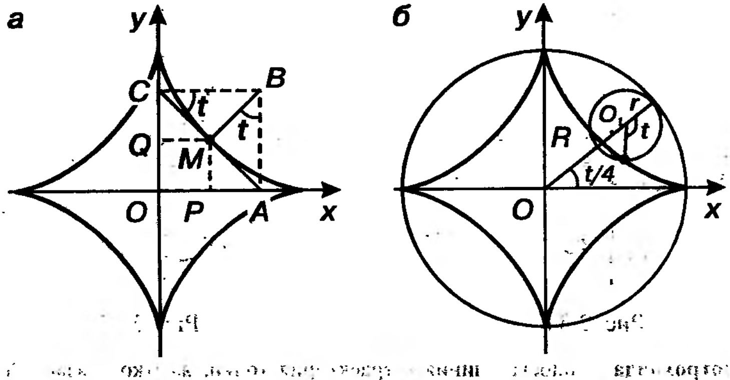


Рис. 2.32

Параметрическое уравнение астроиды в этом случае

$$x = \frac{3}{4}R\cos\frac{t}{4} + \frac{1}{4}R\cos\frac{3t}{4}, \qquad y = \frac{3}{4}R\sin\frac{t}{4} - \frac{1}{4}R\sin\frac{3t}{4}.$$

**Гипоциклоида** – плоская линия, описанная фиксированной точкой окружности радиуса $r$, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса $R$ внутри ее (рис. 2.33, где $M$ – вычерчивающая точка, $A$ – ее исходное положение, $t$ – угол поворота окружности, $AM$ – дуга линии).

Параметрические уравнения гипоциклоиды

$$x=(R-mR)\cos mt+mR\cos(t-mt),$$

$$y=(R-mR)\sin mt-mR\sin(t-mt),$$

где $m=r/R$. Форма кривой зависит от значения $m$. Если $m=p/q$ ($p$ и $q$ – взаимно простые числа), тогда $M$ после $q$ полных оборотов окружности возвращается в исходное положение и гипоциклоида – замкнутая линия, состоящая из $q$ ветвей с $q$ точками возврата при $m<1/2$ (рис. 2.34); при $m>1/2$ вместо $q$ точек возврата линия имеет $q$ других точек (рис. 2.35). При $m=1/2$ линия вырождается в диаметр неподвижной окружности, при $m=1/4$ является астроидой (см. рис. 2.32). При иррациональном $m$ число ветвей бесконечно, точка $M$ в исходное положение не возвращается. Обобщением гипоциклоиды является гипотрохоида.

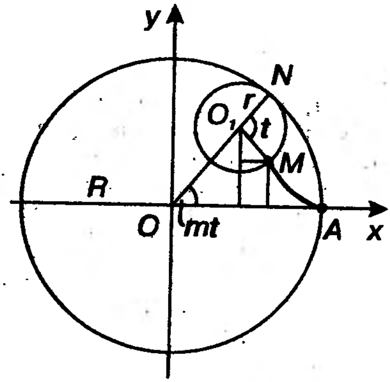


Рис. 2.33

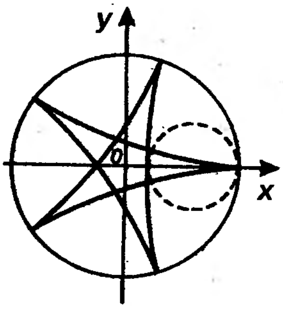


Рис. 2.34

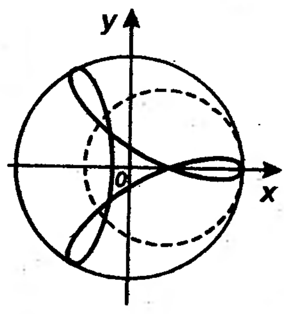


Рис. 2.35

**Гипотрохоида** – плоская линия – траектория точки, жестко связанной с окружностью радиуса $r$, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса $R$ внутри ее, причем вычерчивающая точка $M$ находится на расстоянии $h$ от центра окружности радиуса $r$. При $h>r$ кривая называется удлиненной гипоциклоидой (рис. 2.36, $m=1/4$), при $h<r$ – укороченной (рис. 2.37, $m=1/4$). Параметрические уравнения гипотрохоиды

$$x = (R - mR)\cos mt + h\cos(t - mt),$$

$$x = (R - mR)\sin mt - h\sin(t - mt),$$

где $m = r/R$. При $R = 2r$ линия является эллипсом, при $h = R+r$ – розой (см. рис. 2.31).

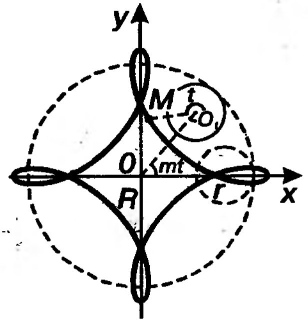


Рис. 2.36

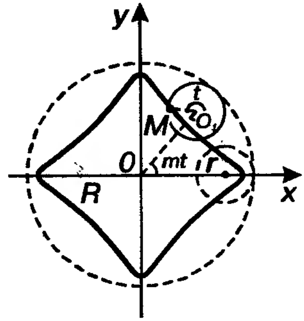


Рис. 2.37

**Эпициклоида** – плоская линия – траектория фиксированной точки окружности радиуса $r$, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса $R$ вне ее (рис. 2.38, где $M$ – вычерчивающая точка, $A$ – ее исходное положение, $t$ – угол поворота окружности, $AM$ – дуга кривой).

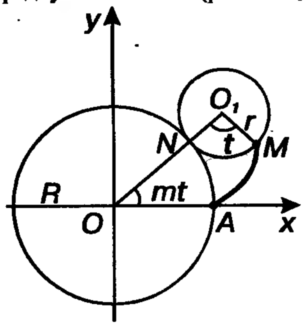


Рис. 2.38

Параметрические уравнения эпициклоиды

$$x = (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt),$$

$$y = (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt),$$

где $m = r/R$. Форма кривой зависит от значения $m$ (рис. 2.39, *а*; $m = 1/3$, рис. 2.39, *б*; $m = 2/3$). Если $m = p/q$ ($p$ и $q$ – взаимно простые числа), точка $M$ после $q$ полных оборотов окружности возвращается в исходное положение и эпициклоида – замкнутая линия, состоящая из $q$ ветвей с $q$ точками возврата. При $m = 1$ кривая является кардиодой (см. рис. 2.29). При иррациональном $m$ число ветвей бесконечно, точка $M$ в исходное положение не возвращается. Обобщением эпициклоиды является эпитрохоида.

**Эпитрохоида** – плоская кривая – траектория точки, жестко связанной с производящей окружностью радиуса $r$, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса $R$ вне ее, причем вычерчивающая точка $M$ находится на расстоянии $h$ от центра производящей окружности. При $h > r$ линия называется удлиненной эпициклоидой (рис. 2.40, *а*; $m = 1/4$), при $h < r$ – укороченной эпициклоидой (рис. 2.40, *б*; $m = 1/4$). Параметрические уравнения эпитрохоиды

$$x=(R+mR)\cos mt-h\cos(t+mt),$$

$$y=(R+mR)\sin mt-h\sin(t+mt),$$

где $m=r/R$. При $r=R$ линия является улиткой Паскаля (см. рис. 2.27, 2.28), при $h=R+r$ – розой (см. рис. 2.31).

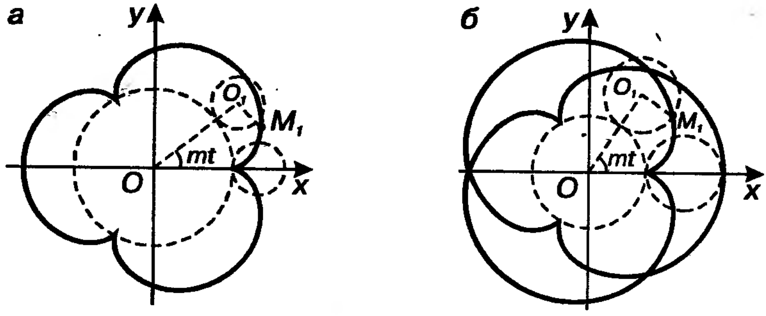


Рис. 2.39

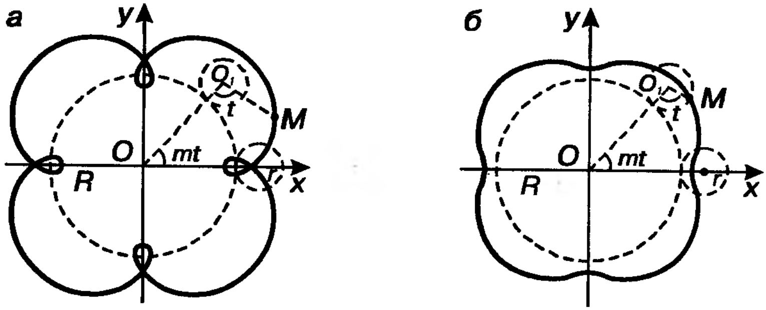


Рис. 2.40

## 2.11. Некоторые трансцендентные линии

Трансцендентной называется линия, уравнение которой в прямоугольных декартовых координатах не является алгебраическим. Простейшими примерами трансцендентных линий могут служить графики функций $y=a^x$, $y=\lg x$, $y=\sin x$ и других тригонометрических функций.

**Спираль Архимеда** – траектория точки $M$, равномерно движущейся по прямой, которая равномерно вращается вокруг фиксированной точки $O$ (рис. 2.41).

Уравнение спирали Архимеда в полярных координатах

$$\rho=a\varphi,$$

в декартовых координатах

$$\sqrt{x^2+y^2}=a\,\mathrm{arctg}\,(y/x).$$

**Циклоида** – траектория фиксированной точки окружности, которая без скольжения катится по прямой (см. пример 1.17, уравнения (1.21)).

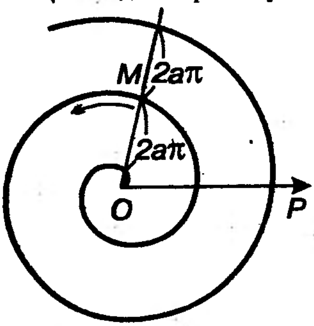


Рис. 2.41

Рассмотрим траекторию точки, жестко связанной с окружностью, катящейся по прямой, но находящуюся не на самой окружности, а на расстоянии $d$ от ее центра. При $d<R$ вычерчивающая точка находится внутри окружности, ее траекторию называют укороченной циклоидой (рис. 2.42, *а*). Если $d>R$, то вычерчивающая точка находится вне окружности; ее траекторию называют удлиненной циклоидой (рис. 2.42, *б*). Эти линии определяются параметрическими уравнениями

$$x=Rt-d\sin t,\quad y=R-d\cos t.$$

**Алгебраическая спираль** – линия, определяемая алгебраическим уравнением $f(\rho,\varphi)=0$ относительно полярных координат. К алгебраическим спиралям отно-

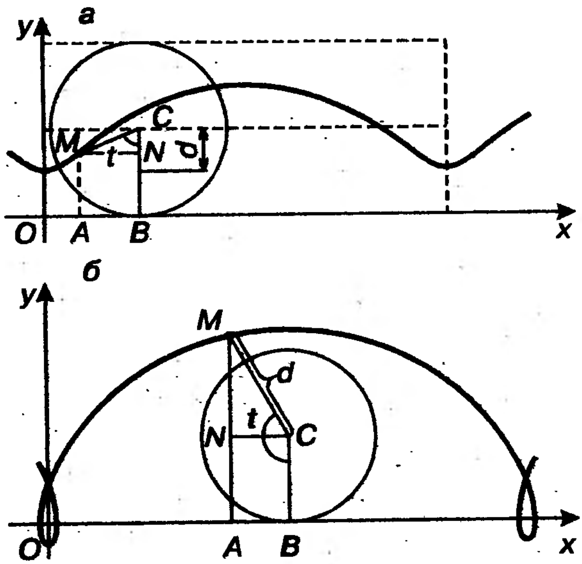


Рис. 2.42

сится спираль Архимеда, так как ее уравнение $\rho = a\varphi$ является алгебраическим уравнением первой степени относительно $\rho$ и $\varphi$. Другими простейшими алгебраическими спиралями являются линии, определяемые уравнениями:

| | |
|---|---|
| $\rho = a/\varphi$ | (гиперболическая спираль, рис. 2.43); |
| $\rho = (a/\varphi) + l$, где $l > 0$ | (конхоида гиперболической спирали, рис. 2.44); |
| $\rho = a\varphi^2$ | (спираль Галилея, рис. 2.45); |
| $\rho^2 = a^2\varphi$ | (спираль Ферма, рис. 2.46); |
| $\rho = a\sqrt{\varphi} + l$, где $l > 0$ | (параболическая спираль, рис. 2.47); |
| $\rho = a/\sqrt{\varphi}$ | (жезл, рис. 2.48); |

**Логарифмической спираль** (рис. 2.49) – линия, определяемая уравнением

$$\rho = a^{\varphi} \ (a > 0, a \neq 1).$$

Логарифмическая спираль пересекает полярные радиусы всех своих точек под одним и тем же углом. На этом свойстве основано ее применение в технике. Так, в различных режущих инструментах и машинах вращающиеся ножи имеют профиль, очерченный по дуге логарифмической спирали. В силу этого угол резания остается постоянным. Логарифмическая спираль применяется в теории механизмов при проектировании зубчатых колес с переменным передаточным числом (т.е. отношением их угловых скоростей). В природе некоторые раковины очерчены по логарифмической спирали (рис. 2.50).

Логарифмическая спираль впервые упоминается в письме Декарта к Мерсенну от 12 сентября 1638 г. (опубликовано в 1657 г.). Независимо от Декарта логарифмическая спираль была открыта Торричелли, который выполнил ее спрямление и квадратуру. Название «логарифмическая спираль» для данной линии предложил Лопиталь, автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению.

**Квадратриса**. Дан отрезок $AD$ длины $2a$, середина которого находится в точке $O$ (рис. 2.51, $a$). Отрезок $OA$ равномерно вращается вокруг точки $O$ с угловой скоростью $\omega = \pi/2T$, а прямая $KC$, перпендикулярная $AD$, одновременно начинает равномерно двигаться от точки $A$ к точке $D$ со скоростью $v = a/T$, оставаясь параллельной исходному направлению. Точка $M$ пересечения вращающегося отрезка и движущейся прямой описывает линию, которую называют квадратрисой.

Уравнение квадратрисы в декартовых координатах

$$y = x \cdot \mathrm{ctg}\,(\pi x/2a),$$

в полярных координатах

$$\rho = a\,(\pi - 2\varphi)/\pi \cos\varphi.$$

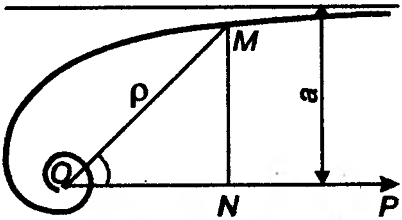


Рис. 2.43

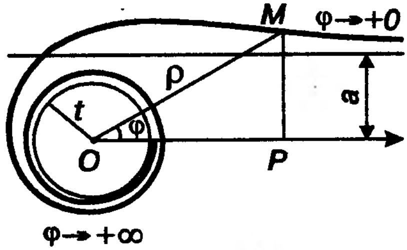


Рис. 2.44

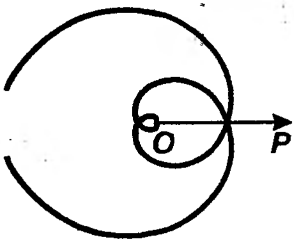


Рис. 2.45

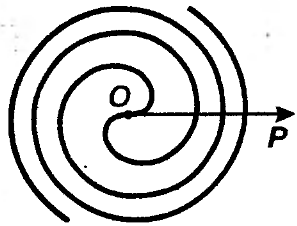


Рис. 2.46

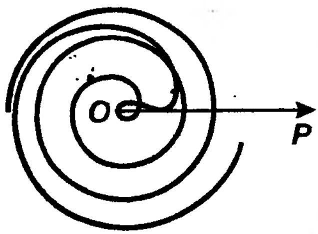


Рис. 2.47

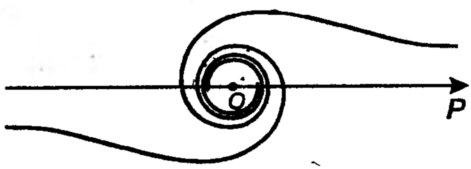


Рис. 2.48

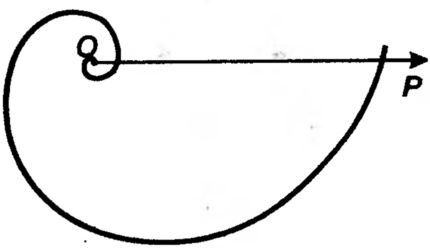


Рис. 2.49

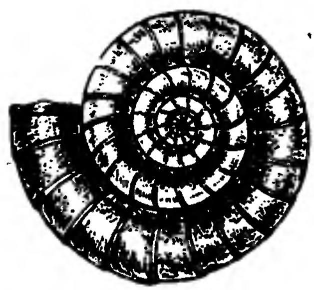

Рис. 2.50

Линия имеет бесконечное множество точек пересечения с осью ординат, так $\operatorname{ctg}(\pi x/2a)=0$ при $x=\pm a$, $x=\pm 3a$, $x=\pm 5a,\ldots$ Квадратриса изображена на рис. 2.51, *б*, а на рис. 2.51, *а* указана та часть линии, которая соответствует значениям аргумента $x{:}-a \le x \le a$. Название линии дал Лейбниц.

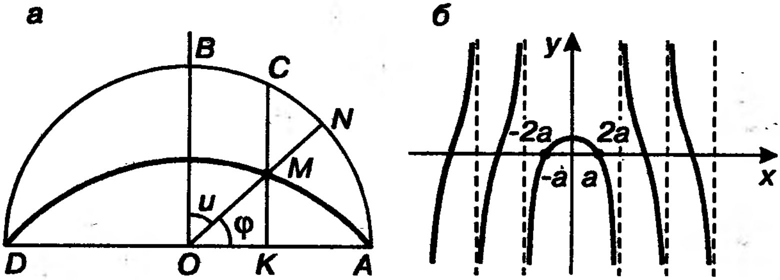


Рис. 2.51

Квадратрису впервые открыл Гиппий из Эллиды (древнегреческий софист, живший в V в. до н.э.) в поисках решения задачи о трисекции угла. К задаче о квадратуре круга эту линию применил древнегреческий геометр Динострат IV в. до н.э. В связи с этим линию называют квадратрисой Динострата.

**Трактриса** – линия, у которой длина касательной является постоянной величиной. Под длиной касательной понимают длину отрезка $MT$, касательной между точкой касания $M$ и точкой $T$ пересечения с осью $Ox$ (рис. 2.52). Трактриса имеет параметрические уравнения

$$x = a\ln\operatorname{tg}(t/2) + a\cos t, \quad y = a\sin t;$$

ее уравнение в прямоугольных декартовых координатах

$$x = \pm\left(a\ln\left(\left(a+\sqrt{a^2-y^2}\right)/y\right)+\sqrt{a^2-y^2}\right).$$

Трактриса применяется в одной из частей механизма карусельного токарного станка (рис. 2.53). Линия вертикального профиля антифрикционной пяты этого механизма обладает тем свойством, что длина ее касательной постоянна.

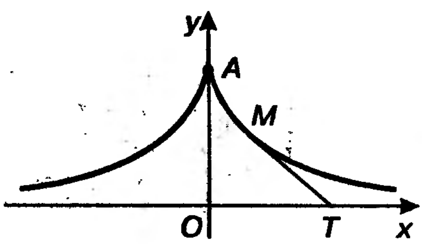


Рис. 2.52

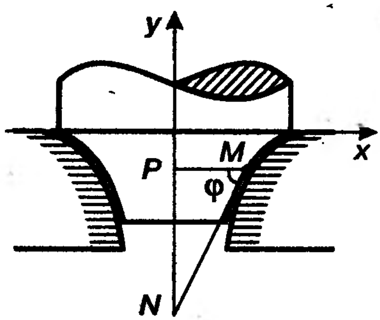


Рис. 2.53

Трактриса сыграла выдающуюся роль в истории математики в связи с открытием Н.И. Лобачевским новой геометрии и последующим развитием учения о неевклидовых геометриях. Геометрия Лобачевского реализуется на псевдосфере, полученной вращением трактрисы вокруг ее асимптоты.

Трактриса была открыта в XVII в. Ее название происходит от латинского слова *tracto* – тащу, влеку.

**Цепная линия** – кривая, форму которой принимает под действием силы тяжести нить с закрепленными концами (рис. 2.54). В прямоугольных декартовых координатах цепная линия имеет уравнение

$$y = (a/2)\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

Длина дуги цепной линии от ее вершины до заданной точки равна проекции ординаты этой точки на касательную, проведенную в этой точке (рис. 2.55, $s = MN$). Проекция ординаты произвольной точки цепной линии на нормаль в этой точке является величиной постоянной, равной параметру $a$ цепной линии ($a = ML$).

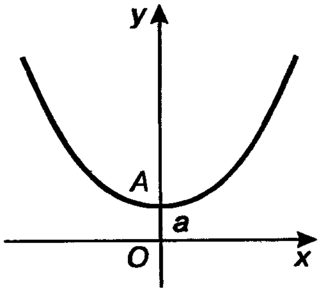

Рис. 2.54

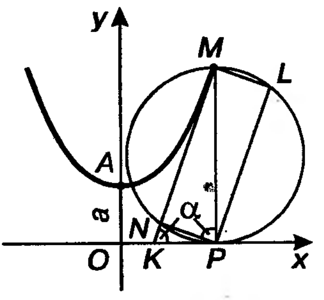

Рис. 2.55

Свойства цепной линии применяются в строительстве и технике. Они используются в расчетах, связанных с провисанием нитей-проводов, тросов и т.д. В строительной технике применяется также линия свода, определяемая уравнением

$$y = c\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

Вопрос о форме линии провисания впервые рассмотрел Галилей (1638). Он полагал, что линия провисания является параболой. Против этого позже возражал Гюйгенс. Окончательное теоретическое решения вопроса о форме линии провисания дали Лейбниц, Гюйгенс, Я. Бернулли.

*Глава 3*

# ВЕКТОРЫ

Понятие вектора возникло как математическая абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением, например, таких как перемещение, скорость и т. п. Термин «вектор» ввел У. Гамильтон (около 1845 г.), обозначения: $\bar{a}$ – Ж. Арган (1806), $\overline{AB}$ – А. Мёбиус, $\mathbf{r}$ – Коши (1853), $\mathbf{a}$ – О. Хевисайд (1891)

## 3.1. Основные понятия

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке $A$, конец – в точке $B$, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Начало вектора называют также точкой его приложения. Вектор иногда обозначается одной строчной буквой жирного шрифта $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и т. д., или такой же буквой светлого шрифта с черточкой наверху $\bar{a}, \bar{b}$ и т. д.

Модулем вектора $\mathbf{a}$ называется его длина, он обозначается через $|\mathbf{a}|$ или просто $a$. Модуль вектора – скалярная неотрицательная величина.

Нуль-вектором (или нулевым вектором) называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нуль-вектор обозначается символом $\mathbf{0}$. Его модуль равен нулю, а направление не определено.

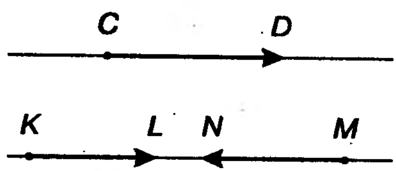


Рис. 3.1

Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой, называются коллинеарными (рис. 3.1, $\overline{\mathrm{CD}}$ и $\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{KL}}$ и $\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$ и $\overline{\mathrm{KL}}$).

Коллинеарные векторы, имеющие одинаковые направления и равные длины, называются равными (рис. 3.2, *а*, $\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AD}}$). Так как векторы $\overline{\mathrm{AB}}$ и $\overline{\mathrm{CD}}$ имеют противоположные направления, то $\overline{\mathrm{AB}} \neq \overline{\mathrm{CD}}$, хотя $|\overline{\mathrm{AB}}| = |\overline{\mathrm{CD}}|$.

Отметим, что $\overline{\mathrm{OM}_1} \neq \overline{\mathrm{OM}_2}$, где $M_1$ и $M_2$ – две различные точки окружности радиуса $R$ с центром в точке $O$ (рис. 3.2, *б*), поскольку векторы $\overline{\mathrm{OM}_1}$ и $\overline{\mathrm{OM}_2}$ имеют разные направления.

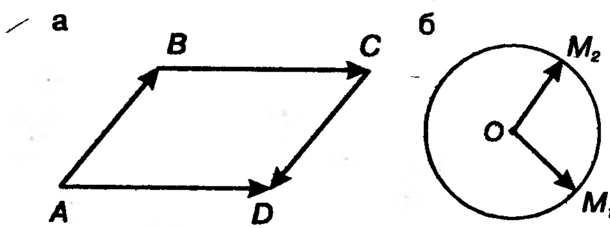


Рис. 3.2

Векторы, противоположно направленные и имеющие равные длины, называются противоположными (векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на рис. 3.2, *а*). Вектор противоположный вектору **a**, обозначается через – **a**.

Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются компланарными.

Вектор, точка приложения которого может быть выбрана произвольно, называется свободным.

## 3.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называют сложение, вычитание, умножение вектора на число.

Суммой векторов **a** и **b** называют третий вектор **c**, начало которого совпадает с началом вектора **a**, а конец – с концом вектора **b** при условии, что вектор **b** отложен из конца вектора **a**. Вектор **c** получается по правилу треугольника (рис. 3.3, *а*) или параллелограмма (рис. 3.3, *б*).

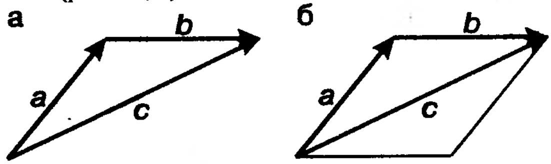


Рис. 3.3

Аналогично определяется сумма трех и более векторов. Суммой $n$ векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора $\mathbf{a}_1$, конец – с концом последнего $\mathbf{a}_n$ при условии, что каждый последующий вектор $\mathbf{a}_{k+1}$ отложен из конца предыдущего $\mathbf{a}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Указанный способ построения суммы называется правилом замыкающей.

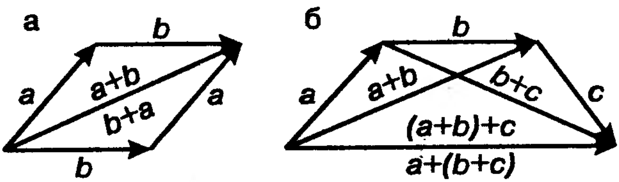


Рис. 3.4

Сумма векторов обладает свойством переместительности (коммутативности, рис. 3.4):

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

и свойством сочетательности (ассоциативности)

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Сумма трех некомпланарных векторов **a**, **b**, **c** наряду с правилом замыкающей получается и по правилу параллелепипеда: сумма **a** + **b** + **c** равна вектору $\overline{OD}$, где $\overline{OD}$ – диагональ параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = \mathbf{b}$, $\overline{OC} = \mathbf{c}$, отложенных из одной точки (рис. 3.5).

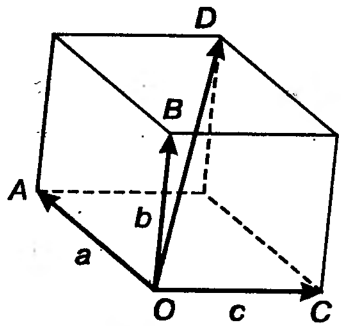


Рис. 3.5

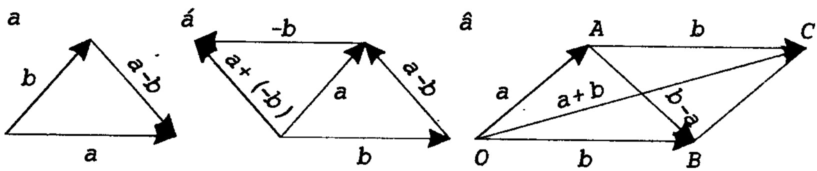


Рис. 3.6

Из определения суммы следует, что

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a},\ \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Разностью $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ двух векторов **a** и **b** называется такой вектор **d**, который в сумме с вектором **b** дает вектор **a**:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{d}, \text{ если } \mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{a}.$$

Чтобы получить разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ двух векторов **a** и **b**, необходимо отложить их из одной точки и соединить конец второго вектора с концом первого (рис. 3.6, *а*).

Разность $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ равна сумме двух векторов **a** и $(-\mathbf{b})$, где $(-\mathbf{b})$ – вектор, противоположный вектору **b** (рис. 3.6, *б*), т. е.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Векторы – диагонали параллелограмма *OACB* (рис. 3.6, *в*), построенного на векторах $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = \mathbf{b}$, являются соответственно суммой и разностью этих векторов.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на число $\alpha$ называется вектор

$$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a},$$

удовлетворяющий условиям: 1) $|\mathbf{b}| = |\alpha||\mathbf{a}|$; 2) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ одинаково направлены при $\alpha > 0$; 3) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ имеют противоположные направления при $\alpha < 0$ (рис. 3.7). Очевидно, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, если $\alpha = 0$ или $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

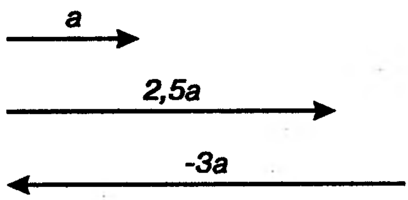


Рис. 3.7

Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:

$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a},\ \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b},\ (\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a};$$

$$\alpha(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) = \alpha\mathbf{a}_1 + \alpha\mathbf{a}_2 + \dots \alpha\mathbf{a}_n;$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a} + \alpha_2\mathbf{a} + \dots \alpha_n\mathbf{a}.$$

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается равенством

$$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}. \qquad (3.1)$$

## 3.3. Проекция вектора на ось

В пространстве заданы вектор $\overline{\mathrm{AB}}$ и ось $u$ (рис. 3.8). Пусть $A_1$ – проекция точки $A$ на ось $u$, $B_1$ – проекция точки $B$, т. е. основания перпендикуляров, опущенных из данных точек на эту ось.

Проекцией вектора на ось $u$ называется величина направленного отрезка (вектора) $\overline{A_1B_1}$ оси $u$. Проекция вектора $\overline{\mathrm{AB}}$ на ось $u$ обозначается через $\text{пр}_u\overline{\mathrm{AB}}$, т. е. $\overline{A_1B_1} = n\mathrm{p}_u\overline{AB}$, вычисляется по формуле

$$\text{пр}_u\overline{\mathrm{AB}} = \left|\overline{\mathrm{AB}}\right|\cos\varphi, \qquad (3.2)$$

где $\varphi$ – угол между вектором $\overline{\mathrm{AB}}$ и осью $u$.

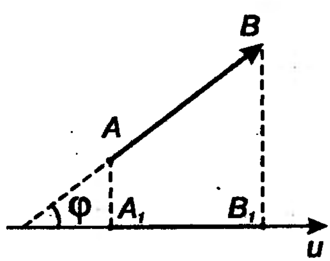


Рис. 3.8

Из равенства (3.2) следует, что если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ то

$$\text{пр}_u\mathbf{a} = \text{пр}_u\mathbf{b}, \qquad (3.3)$$

т. е. равные векторы имеют равные проекции (на одну и ту же ось).

Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

$$\text{пр}_u(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \text{пр}_u\mathbf{b} + \text{пр}_u\mathbf{a}, \tag{3.4}$$

$$\text{пр}_u(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\,\text{пр}_u\mathbf{a}, \tag{3.5}$$

$$\text{пр}_u(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n) = \text{пр}_u\mathbf{a}_1 + \text{пр}_u\mathbf{a}_2 + \cdots + \text{пр}_u\mathbf{a}_n. \tag{3.6}$$

Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – произвольная конечная система векторов; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ – произвольная система действительных чисел, то вектор

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n$$

называется линейной комбинацией векторов этой системы.

Из равенств (3.4) – (3.6) следует, что

$$\text{пр}_u(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots \alpha_n\mathbf{a}_n) = \alpha_1\,\text{пр}_u a_1 + \alpha_2\,\text{пр}_u a_2 + \cdots \alpha_n\,\text{пр}_u a_n. \tag{3.7}$$

## 3.4. Декартовы прямоугольные координаты вектора в пространстве. Длина вектора. Направляющие косинусы вектора

Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Радиусом-вектором точки $M$ называется вектор $\mathbf{r} = \overline{\text{OM}}$, точка приложения которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке $M$ (рис. 3.9).

Декартовыми прямоугольными координатами $X$, $Y$, $Z$ вектора $\mathbf{r}$ называются его проекции на координатные оси

$$X = \text{пр}_x\mathbf{r},\ Y = \text{пр}_y\mathbf{r},\ Z = \text{пр}_z\mathbf{r}. \tag{3.8}$$

Каждая из записей

$$\mathbf{r} = (X, Y, Z),\ \mathbf{r}\,(X, Y, Z),\ \mathbf{r} = \{X, Y, Z\} \tag{3.9}$$

означает что вектор $\mathbf{r}$ имеет координаты $X$, $Y$, $Z$.

Если $x, y, z$ – декартовы прямоугольные координаты точки $M$, то

$$X = x,\ Y = y,\ Z = z,$$

т. е. координаты радиуса-вектора $\overline{\text{OM}}$ равны координатам точки $M$.

Введем в рассмотрение единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ координатных осей (их называют ортами) и векторы $\overline{\text{OA}} = X\mathbf{i}$, $\overline{\text{OB}} = Y\mathbf{j}$, $\overline{\text{OC}} = Z\mathbf{k}$, где $A$, $B$, $C$ – вершины прямоугольного параллелепипеда, для которого $OM$ является диагональю ($A$, $B$, $C$ – проекции точки $M$ на координатные оси; $OA = X$, $OB = Y$, $OC = Z$ – проекции вектора на коорди-

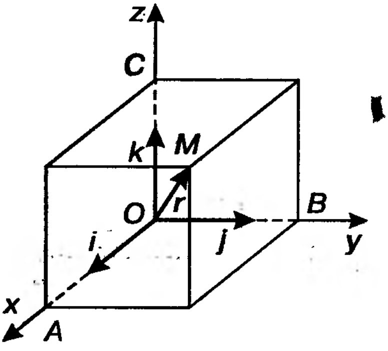


Рис. 3.9

натные оси). По определению суммы $\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$, поэтому

$$\mathbf{r}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}. \tag{3.10}$$

Формула (3.10) выражает разложение вектора $\mathbf{r}$ по базисным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Векторы стоящие в правой части формулы (3.10), называются составляющими или компонентами вектора $\mathbf{r}$.

На основании теоремы о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда получаем формулу, выражающую длину вектора (3.9) или (3.10) через его координаты:

$$|\mathbf{r}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{3.11}$$

Из равенства (3.3) следует, что равные векторы имеют равные координаты, поэтому координаты вектора не зависят от точки его приложения. Координатами любого вектора называются его проекции на координатные оси.

Направляющими косинусами вектора называются косинусы углов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, образуемых им с координатными осями.

Принимая во внимание формулу (3.2), для вектора (3.9) получаем

$$X=|\mathbf{r}|\cos\alpha,\ Y=|\mathbf{r}|\cos\beta,\ Z=|\mathbf{r}|\cos\gamma. \tag{3.12}$$

Из равенств (3.11) и (3.12) следуют формулы для направляющих косинусов вектора $\mathbf{r}$:

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \tag{3.13}$$

откуда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Из формулы (3.12) следует, что координаты единичного вектора равны его направляющим косинусам; т. е.

$$\mathbf{e}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

Пример 3.1. Дан вектор $\mathbf{a}=(2,-1,-2)$. Найти его длину и единичный вектор $\mathbf{a}_0$ направления вектора $\mathbf{a}$.

По формуле (3.11) находим длину вектора $|\mathbf{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$, а по формулам (3.13) – его направляющие косинусы $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$, $\mathbf{a}_0=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

## 3.5. Переход от векторных соотношений к координатным

Если даны векторы (т. е. известны их координаты) и указаны определенные соотношения между ними, то они равносильны аналогичным числовым соотношениям между координатами.

**Координаты произведения вектора на число.** Пусть дан вектор $\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$ и число $\alpha \neq 0$. Координаты $X_2, Y_2, Z_2$ вектора $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$:

$$X_2 = \alpha X_1,\ Y_2 = \alpha Y_1,\ Z_2 = \alpha Z_1. \tag{3.14}$$

Отметим, что равенства (3.14) выражают необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов: $\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$. Если ни одно из чисел $X_1, Y_1, Z_1$ не равно нулю, то эти равенства можно записать так:

$$X_2/X_1 = Y_2/Y_1 = Z_2/Z_1.$$

Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их одноименные координаты.

**Координаты суммы (разности) двух векторов.** Пусть даны два вектора $\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$, тогда $X, Y, Z$ – координаты вектора суммы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$:

$$X = X_1 + X_2,\ Y = Y_1 + Y_2,\ Z = Z_1 + Z_2;$$
$$X' = X_1 - X_2,\ Y' = Y_1 - Y_2,\ Z' = Z_1 - Z_2,$$

где $X', Y', Z'$ – координаты разности $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

**Координаты вектора, заданного двумя точками.** Начало вектора $\mathbf{M_1M_2}$ находится в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, конец – в точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Выражение для его координат $X, Y, Z$ через координаты точек $M_1$ и $M_2$:

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1. \tag{3.15}$$

**Координаты линейной комбинации векторов.** Заданы $n$ векторов $\mathbf{a}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (X_2, Y_2, Z_2), \ldots, \mathbf{a}_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ и их линейная комбинация

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n.$$

Координаты $X, Y, Z$ вектора $\mathbf{a}$ определяются формулами

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n,$$
$$Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_n Y_n,$$
$$Z = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \cdots + \alpha_n Z_n.$$

**Деление отрезка в данном отношении.** Даны две точки в пространстве $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки $M$, делящей отрезок $\mathbf{M_1M_2}$ в отношении $l$:

$$x = \frac{x_1 + lx_2}{1+l},\ y = \frac{y_1 + ly_2}{1+l},\ z = \frac{z_1 + lz_2}{1+l}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

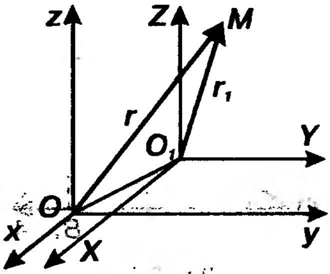


Рис. 3.10

**Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе.** Рассмотрим две декартовы прямоугольные системы координат с одним и тем же масштабным отрезком и одинаковыми направлениями одноименных координатных осей (рис. 3.10). Начало новой системы координат находится в точке $O_1(a, b, c)$. Пусть $M$ – произвольная точка пространства, $x, y, z$ – ее координаты в старой системе, $X, Y, Z$ – в новой, тогда

$$x = X + a,\ y = Y + b,\ z = Z + c,$$

или

$$X = x - a,\ Y = y - b,\ Z = z - c. \tag{3.17}$$

Пример 3.2. Даны две точки $A(3, -4, 7)$, $B(5, -6, 8)$. Найти координаты вектора **AB** и координаты точки $E$ – середины отрезка $AB$.

По формулам (3.15) и (3.16) соответственно получаем

$$X = 5 - 3 = 2,\ Y = -6 - (-4) = -2,\ Z = 8 - 7 = 1,\ \mathbf{AB} = (2, -2, 1);$$

$$x = (5 + 3)/2 = 4,\ y = (-6 + (-4))/2 = -5,\ z = (8 + 7)/2 = 7{,}5,\ E(4; -5; 7{,}5).$$

Пример 3.3. Даны четыре точки $A(5, 6, -8)$, $B(8, 10, -3)$, $C(1, -2, 4)$, $D(7, 6, 14)$. Коллинеарны ли векторы **AB** и **CD**?

Так как $\mathbf{AB} = (8 - 5, 10 - 6, -3 - (-8)) = (3, 4, 5)$, $\mathbf{CD} = (7 - 1, 6 - (-2), 14 - 4) = (6, 8, 10)$ и $\mathbf{CD} = 2\mathbf{AB}$, т. е. выполнено равенство (3.1), то векторы **AB** и **CD** коллинеарны.

## 3.6. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух векторов **a** и **b** называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Если обозначить скалярное произведение через **ab**, то

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi. \tag{3.18}$$

Так как $|\mathbf{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ и $|\mathbf{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ (рис. 3.11), то равенство (3.18) можно представить в двух видах:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b},\ \mathbf{ab} = |\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Понятие скалярного произведения возникло в механике. Если вектор **a** изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора

**b**, то работа $w$ указанной силы определяется равенством $w = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$.

Скалярным квадратом вектора **a** называется скалярное произведение вектора **a** на себя:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{aa} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}|^2,$$

т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Векторы **a** и **b** перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{ab} = 0. \tag{3.19}$$

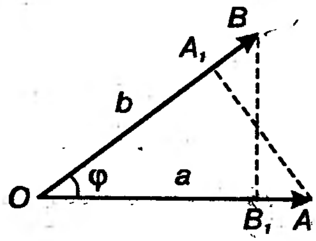


Рис. 3.11

Скалярное произведение обладает свойствами:

1) переместительности (коммутативности)

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba},$$

2) сочетательности (ассоциативности) относительно числового множителя

$$(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{ab}),$$

3) распределительности (дистрибутивности) относительно суммы векторов

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}.$$

Скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{a} = (X_1, Y_1, Z_1), \quad \mathbf{b} = (X_2, Y_2, Z_2) \tag{3.20}$$

выражается формулой

$$\mathbf{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2, \tag{3.21}$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат.

Замечание. Если $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, то формула (3.21) принимает вид $\mathbf{aa} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$. Поскольку $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$, то $|\mathbf{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_2^2}$.

Косинус угла между векторами (3.20) определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{3.22}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов (3.20) выражается равенством

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0, \tag{3.23}$$

оно следует из формул (3.19) и (3.21).

Если ось $u$ образует с координатными осями углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ соответственно, то проекция вектора $\mathbf{s} = (X, Y, Z)$ на эту ось определяется равенством

$$\text{пр}_u\mathbf{s} = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma.$$

Пример 3.4. Даны два вектора $\mathbf{a}=(8,-7,-2)$, $\mathbf{b}=(7,-11,8)$. Найти угол между ними.

По формуле (3.22) получаем

$$\cos\varphi=\frac{8\cdot 7+(-7)(-11)+(-2)\cdot 8}{\sqrt{8^2+(-7)^2+(-2)^2}\,\sqrt{7^2+(-11)^2+8^2}}=\frac{117}{117\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=45°.$$

Пример 3.5. Доказать, что векторы $\mathbf{a}=(2,-4,6)$, $\mathbf{b}=(3,3,1)$ перпендикулярны.

По формуле (3.21) находим: $\mathbf{ab}=2\cdot 3+(-4)\cdot 3+6\cdot 1=0$. Так как выполнено условие (3.19), то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны.

## 3.7. Правые и левые тройки векторов. Правые и левые системы координат

Три некомпланарных вектора $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$, $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$, взятых в указанном порядке ($\mathbf{a}$ – первый вектор, $\mathbf{b}$ – второй, $\mathbf{c}$ – третий) и приложенных в одной точке (рис. 3.12, *а*, *б*), называют тройкой векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Будем смотреть с конца вектора $\mathbf{c}$ на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если кратчайший поворот

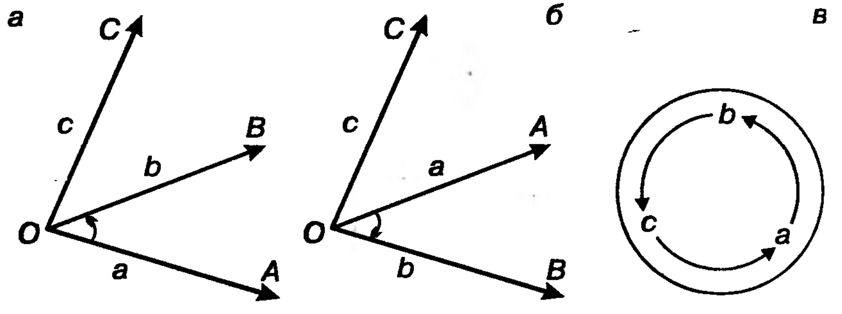


Рис. 3.12

от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ совершается против часовой стрелки, то тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется правой*) (рис. 3.12, *а*), если указанный поворот совершается по часовой стрелке, тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется левой (рис. 3.12, *б*).

Две тройки, обе правые или обе левые, называются тройками одной ориентации; если одна тройка является правой, а другая левой, то они называются тройками различной ориентации.

При круговой перестановке векторов (первый заменяется вторым, второй – третьим, третий – первым, рис. 3.12, *в*) ориентация тройки не меняется (см. рис. 3.12, *а*, *б*).

---

*) В случае правой тройки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ располагаются так, как большой, указательный и средний пальцы правой руки; если тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ является левой, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ располагаются так, как указанные пальцы левой руки.

Если поменять местами два вектора, то ориентация тройки меняется, например если **a**, **b**, **c** – правая тройка, то тройка **b**, **a**, **c** (тех же векторов, взятых в порядке *b*, *a*, *c*) будет левой.

Прямоугольная декартова система координат называется правой, если тройка базисных векторов **i**, **j**, **k** правая; если эта тройка левая, то система координат называется левой.

## 3.8. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется третий вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и удовлетворяющий условиям:

1) $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами **a** и **b**;
2) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен каждому из векторов **a** и **b**;
3) тройка векторов **a**, **b**, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ имеет ту же ориентацию, что и **i**, **j**, **k**.

Для векторного произведения применяют и другие обозначения, например $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Замечание. Если пользоваться только правыми системами координат, то условие 3) можно заменить другим – тройка **a**, **b**, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ является правой.

Понятие векторного произведения возникло в механике. Если вектор **b** изображает силу, приложенную в точке *M*, $\mathbf{a} = \mathbf{OM}$, то $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ выражает момент силы **b** относительно точки *O*.

Из условия 1) следует, что модуль векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равен площади *S* параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b** (рис. 3.13), т. е.

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S, \qquad (3.24)$$

поэтому

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = S\mathbf{e},$$

где **e** – единичный вектор направления вектора $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

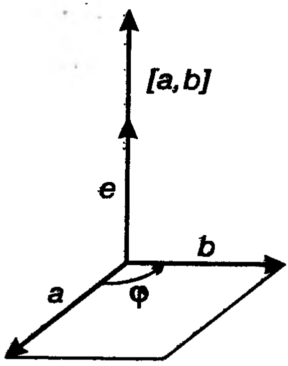

Рис. 3.13

Равенство $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$ выражает необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов **a** и **b**; в частности, для любого вектора **a** $[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$.

Векторное произведение двух векторов обладает свойствами:

1) антиперестановочности множителей

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}];$$

2) сочетательности относительно скалярного множителя

$$[(\alpha\mathbf{a}), \mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \; [\mathbf{a}, (\beta\mathbf{b})] = \beta[\mathbf{a}, \mathbf{b}];$$

3) распределительности относительно сложения

$$[(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}], \; [\mathbf{a}, (\mathbf{b}+\mathbf{c})] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}].$$

Векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ двух векторов

$$\mathbf{a}=(X_1, Y_1, Z_1),\ \mathbf{b}=(X_2, Y_2, Z_2) \tag{3.25}$$

выражается формулой

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \tag{3.26}$$

Эту формулу можно представить через символический определитель третьего порядка

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{3.27}$$

Замечание. Составим матрицу из координат векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{bmatrix}.$$

Координаты векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ равны минорам второго порядка этой матрицы, полученным путем поочередного вычеркивания первого, второго и третьего столбцов, причем второй минор нужно взять со знаком минус.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах (3.25), вычисляется по формуле

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}^2}, \tag{3.28}$$

которая следует из (3.11) и (3.24).

Площадь треугольника $ABC$ определяется формулой

$$S=\frac{1}{2}\left|\,[\mathbf{AB}, \mathbf{AC}]\,\right|. \tag{3.29}$$

Формула (3.29) следует из (3.24), так как площадь треугольника $ABC$ составляет половину площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AC}$.

Пример 3.6. Даны два вектора $\mathbf{a}=(5, 3, -4)$, $\mathbf{b}=(6, 7, -8)$. Найти координаты векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

По формуле (3.27) получаем

$$[a, b]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}\mathbf{k}=4\mathbf{i}+16\mathbf{j}+17\mathbf{k},$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]=(4, 16, 17).$$

Пример 3.7. Вершины треугольника находятся в точках $A(1, 1, 3)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 1, -3)$. Вычислить его площадь.

С помощью формул (3.15) находим координаты векторов **AB** и **AC**: **AB** $=(2,-2,3)$, **AC** $=(4,0,-6)$. Так как

$$[\mathbf{AB},\mathbf{AC}]=\left\{\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right\}=(12,24,8),$$

то

$$S=\frac{1}{2}\left|[\mathbf{AB},\mathbf{AC}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2(3^2+6^2+2^2)}=\frac{1}{2}4\cdot 7=14.$$

## 3.9. Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три вектора **a**, **b**, **c**. Вектор **a** умножим векторно на **b**, векторное произведение $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ умножим скалярно на **c**, в результате получаем число, которое называют векторно-скалярным произведением или смешанным произведением $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}$ трех векторов **a**, **b**, **c**.

Смешанное произведение $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}$ трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$, $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$ (рис. 3.14), взятому со знаком плюс, если тройка $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ – правая, со знаком минус, когда эта тройка – левая:

$$V=\operatorname{mod}([\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}). \tag{3.30}$$

Векторы **a**, **b**, **c** компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, т. е.

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}=0. \tag{3.31}$$

Смешанное произведение $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}[\mathbf{b},\mathbf{c}]$ обозначают через **abc**:

$$\mathbf{abc}=[\mathbf{a},\mathbf{b}]\mathbf{c}=\mathbf{a}[\mathbf{b},\mathbf{c}].$$

Если поменять местами два вектора, то смешанное произведение изменит лишь знак. Для трех векторов **a**, **b**, **c**:

$$\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{cba}=-\mathbf{acb}.$$

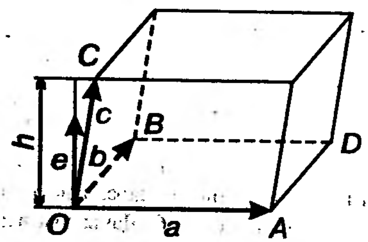


Рис. 3.14

Смешанное произведение трех векторов

$$\mathbf{a}=(X_1,Y_1,Z_1),\ \mathbf{b}=(X_2,Y_2,Z_2),\ \mathbf{c}=(X_3,Y_3,Z_3) \tag{3.32}$$

определяется формулой

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}. \tag{3.33}$$

Из формул (3.30) и (3.33) следует, что объем параллелепипеда, построенного на векторах (3.32), вычисляется по формуле

$$V = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{3.34}$$

Объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ определяется формулой

$$V = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}. \tag{3.35}$$

Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов (3.32) выражается равенством

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.36}$$

которое следует из равенств (3.31), (3.33).

Пример 3.8. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (3, 1, 2)$.

По формуле (3.34) получаем

$$V = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -8 & -1 \end{vmatrix} = 13.$$

Пример 3.9. Доказать, что векторы $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, -5, 6)$, $\mathbf{c} = (5, -7, 9)$ компланарны.

Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 5 & -7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. выполнено условие (3.36), то данные векторы компланарны.

Пример 3.10. Вычислить объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $M_1(6, 1, 4)$, $M_2(1, -3, 7)$, $M_3(7, 1, 3)$, $M_4(2, -2, -5)$.

В соответствии с формулой (3.35) находим

$$V = \mathrm{mod}\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1-6 & -3-1 & 7-4 \\ 2-6 & -2-1 & -5-4 \\ 7-6 & 1-1 & 3-4 \end{vmatrix} = \mathrm{mod}\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{23}{3}.$$

## 3.10. Линейная зависимость векторов

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из которых по меньшей мере одно отлично от нуля, такие что

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n = 0. \tag{3.37}$$

В противном случае (т. е. когда таких чисел не существует) векторы называются линейно независимыми; другими словами, векторы линейно независимы, если равенство (3.37) выполняется лишь при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0. \tag{3.38}$$

Если один из векторов, например $\mathbf{a}_1$, является нулевым, то система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ окажется линейно зависимой, так как равенство (3.37) будет выполнено при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$. Если часть векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима, то и вся система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима, поскольку из равенства $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k = 0$ следует равенство (3.37), в котором $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = \alpha_n = 0$.

Теорема 3.1. *Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ $(n > 1)$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из них является линейной комбинацией остальных.*

Теорема 3.2. *Два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Теорема 3.3. *Если* $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$ *– два неколлинеарных вектора некоторой плоскости, то любой третий вектор* $\mathbf{a}$ *той же плоскости можно единственным образом разложить по ним, т.е. представить в виде* $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$.

Теорема 3.4. *Три вектора* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Теорема 3.5. *Если векторы* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *некомпланарны, то любой вектор* $\mathbf{a}$ *можно единственным образом разложить по ним, т.е.*

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Теорема 3.6. *Всякие четыре вектора линейно зависимы.*

Любая упорядоченная система трех линейно независимых (т.е. некомпланарных) векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется базисом. Согласно теореме 3.5, всякий вектор $\mathbf{d}$ можно разложить по базису, т.е. представить в виде

$$\mathbf{d} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}. \tag{3.39}$$

Числа $x$, $y$, $z$ называют координатами вектора $\mathbf{d}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Пример 3.11. Образуют ли базис векторы $\mathbf{a} = (8, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 6, 10)$, $\mathbf{c} = (3, -2, 1)$?

Так как

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}8 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 10\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 8 & 3\\ -26 & 26 & 10\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 8\\ -26 & 26\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 8\\ 0 & 26\end{vmatrix}=182,$$

т. е. смешанное произведение отлично от нуля, то векторы некомпланарны. Значит, они линейно независимы и образуют базис.

Пример 3.12. Даны векторы $\mathbf{a}=(1,1,-1)$, $\mathbf{b}=(2,-1,3)$, $\mathbf{c}=(1,-2,1)$, $\mathbf{d}=(12,-9,11)$. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе.

Поскольку

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=9\neq 0,$$

то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ линейно независимы (некомпланарны) и образуют базис. Вектор $\mathbf{d}$ можно представить в виде $\mathbf{d}=x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ (см. формулу (3.39)). Это равенство равносильно следующим равенствам:

$$12=x+2y+z,\ -9=x-y-2z,\ 11=-x+3y+z,$$

так как равные векторы имеют равные координаты и координаты линейной комбинации векторов равны соответствующим линейным комбинациям одноименных координат (см. п. 3.5). Решив полученную систему уравнений, найдем $x=2$, $y=3$, $z=4$. Итак, $\mathbf{d}=2\mathbf{a}+3\mathbf{b}+4\mathbf{c}$, вектор $\mathbf{d}$ в данном базисе имеет координаты $x=2$, $y=3$, $z=4$.

## 3.11. Аффинные координаты

Фиксируем некоторую точку $O$ заданной плоскости и выберем два неколлинеарных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, назовем эту точку началом координат, векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – базисными. От точки $O$ отложим векторы $\mathbf{OE}_1=\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{OE}_2=\mathbf{e}_2$, проведем прямые, которым принадлежат векторы $\mathbf{OE}_1$ и $\mathbf{OE}_2$, фиксируем на них положительные направления, совпадающие с направлениями $OE_1$ и $OE_2$ соответственно, получим две координатные оси $Ox$ и $Oy$ (рис. 3.15). Будем говорить, что построена общая декартова или аффинная системы координат $(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$. Пусть $\mathbf{a}$ – любой вектор данной плоскости, отложим из точки $O$ вектор $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, тогда по теореме 3.3

$$\mathbf{a}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2. \quad (3.40)$$

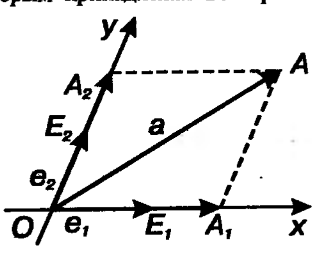

Рис. 3.15

Числа $x$ и $y$ формулы (3.40) называются общими декартовыми или аффинными координатами вектора $\mathbf{a}$ в системе $(O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, они также называются аффинными координатами точки $A$ в той же системе, т. е. $\mathbf{a}=(x,y)$, $A(x,y)$.

Так как $\mathbf{OA}_1 = x\mathbf{e}_1$, $\mathbf{OA}_2 = y\mathbf{e}_2$, то $x$ и $y$ – величины направленных отрезков $\mathbf{OA}_1$ и $\mathbf{OA}_2$ координатных осей, $|x|$ – длина отрезка $OA_1$, измеренная с помощью масштабного отрезка $OE_1$, $|y|$ – длина отрезка $OA_2$, измеренная с помощью масштабного отрезка $OE_2$. Другими словами, аффинными координатами точки $A$ (и вектора $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$) называются числа $x$ и $y$, определяемые формулами

$$x = OA_1,\ y = OA_2,$$

где $OA_1$, $OA_2$ – величины направленных отрезков $\mathbf{OA}_1$ и $\mathbf{OA}_2$ координатных осей ($A_1$ – проекция точки $A$ на ось $Ox$, взятая параллельно оси $Oy$, $A_2$ – проекция точки $A$ на ось $Oy$, взятая параллельно оси $Ox$; длины отрезков на каждой оси измеряются с помощью своего масштабного отрезка).

Аналогично вводится аффинная система координат в пространстве. Фиксируем начало координат – точку $O$, базис – три некомпланарных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, отложим из точки $O$ векторы $\mathbf{OE}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{OE}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{OE}_3 = \mathbf{e}_3$, координатные оси $Ox$, $Oy$, $Oz$. Если $\mathbf{a}$ – любой вектор, то, отложив из точки $O$ вектор $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, по теореме 3.5 получим

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{3.41}$$

Общими декартовыми или аффинными координатами вектора $\mathbf{a}$ (и точки $A$) называются числа $x$, $y$, $z$ в разложении (3.41).

Пусть $A_1$ – проекция точки $A$ на ось $Ox$, взятая параллельно координатной плоскости $Oyz$ (определяемой векторами $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), т.е. точка пересечения оси $Ox$ и плоскости, проходящей через точку $A$ и параллельной плоскости $Oyz$; $A_2$ – проекция точки $A$ на ось $Oy$, взятая параллельно плоскости $Oxz$, $A_3$ – проекция точки $A$ на ось $Oz$, взятая параллельно плоскости $Oxy$, тогда $\mathbf{OA}_1 = x\mathbf{e}_1$, $\mathbf{OA}_2 = y\mathbf{e}_2$, $\mathbf{OA}_3 = z\mathbf{e}_3$.

Следовательно, $x$, $y$, $z$ – проекции вектора $\mathbf{OA}$ на координатные оси, т.е. величины направленных отрезков $\mathbf{OA}_1$, $\mathbf{OA}_2$, $\mathbf{OA}_3$, длины отрезков на каждой координатной оси измеряются с помощью своего масштабного отрезка ($\mathbf{e}_1$ – на оси $Ox$, $\mathbf{e}_2$ – на $Oy$, $\mathbf{e}_3$ – на $Oz$).

В частном случае векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ попарно перпендикулярны и имеют равные длины $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$, их называют ортами и обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, система координат называется прямоугольной.

Термин «орт» ввел О. Хевисайд (1892), обозначения $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – Г. Грассман (1844), $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – У. Гамильтон (1853).

*Глава 4*

# ПОВЕРХНОСТИ И ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

## 4.1. Уравнение поверхности. Уравнения линии в пространстве

Уравнением поверхности в фиксированной системе координат называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной поверхности и только они.

Из этого определения вытекает способ решения следующей простой задачи: выяснить, лежит ли данная точка на поверхности, определяемой заданным уравнением. Для решения задачи необходимо подставить ее координаты в данное уравнение, если получается числовое равенство, то точка лежит на поверхности, в противном случае точка поверхности не принадлежит.

Всякое уравнение с тремя переменными $x, y, z$ можно записать так:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{4.1}$$

где $F(x, y, z)$ – функция переменных $x, y, z$.

Из определения прямоугольных декартовых координат точки в пространстве (см. п. 1.12) следует, что координатные плоскости $Oyz$, $Oxz$, $Oxy$ определяются соответственно уравнениями: $x = 0, y = 0, z = 0$ ($x = 0$ – уравнение плоскости $Oyz$ и т.д.).

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей, поэтому она определяется двумя уравнениями. Пусть $l$ – линия, по которой пересекаются поверхности, определяемые уравнениями $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$, т.е. множество общих точек этих поверхностей, тогда координаты любой точки линии $l$ одновременно удовлетворяют обоим уравнениям:

$$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{4.2}$$

Пример 4.1. Составить уравнение сферы радиуса $R$ с центром в точке $C(a,b,c)$.

Исходя из определения сферы как множества точек пространства, равноудаленных от данной точки (центра), для произвольной ее точки $M(x, y, z)$ получаем $\rho(C, M) = R$. Так как

$$\rho(C, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, \text{ то } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R,$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{4.3}$$

Для точки $N$, не лежащей на данной сфере, равенство $\rho(C, N) = R$ не будет выполнено, поэтому ее координаты не удовлетворяют уравнению (4.3). Следовательно, уравнение (4.3) является уравнением сферы радиуса $R$ с центром в точке $C(a, b, c)$.

В частном случае, когда центр сферы находится в начале координат ($a = b = c = 0$), уравнение (4.3) принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (4.4)$$

Уравнение (4.4) называется каноническим уравнением сферы.

Пример 4.2. Уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \ z = 0$$

определяют окружность радиуса $R = 5$, лежащую в плоскости $Oxy$. Действительно, первое уравнение определяет сферу радиуса $R = 5$ с центром в начале координат, второе уравнение – координатную плоскость $Oxy$.

Пример 4.3. Ось $Ox$ прямоугольной декартовой системы координат в пространстве определяется уравнениями $y = 0$, $z = 0$.

Действительно, уравнение $y$=0 определяет координатную плоскость $Oxz$, а уравнение $z$=0 – координатную плоскость $Oxy$. Ось $Ox$ является линией пересечения координатных плоскостей $Oxz$ и $Oxy$ (см. рис. 1.13).

Отметим, что ось $Oy$ имеет уравнения $x$=0, $z$=0, а ось $Oz$ – уравнения $x$=0, $y$=0.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением $n$-й степени относительно декартовых координат, называется поверхностью $n$-го порядка. Сфера – поверхность второго порядка, так как ее уравнение (см. (4.3) и (4.4)) является уравнением второй степени относительно декартовых координат.

## 4.2. Параметрические уравнения линии и поверхности

Параметрическими уравнениями линии в пространстве называются уравнения вида

$$x = \varphi_1(t), \ y = \varphi_2(t), \ z = \varphi_3(t), \qquad (4.5)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ – функции некоторой переменной $t$ (параметра), если при каждом значении $t$ из конечного или бесконечного промежутка они дают координаты всех точек данной линии и только таких точек.

Параметрические уравнения часто применяются в механике для описания траектории движущейся точки, роль параметра $t$ в таких случаях играет время.

Параметрическими уравнениями поверхности называются уравнения вида

$$x = f_1(u, v), \ y = f_2(u, v), \ z = f_3(u, v), \qquad (4.6)$$

где $f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)$ – функции двух переменных $u$ и $v$ (параметров), если при любых значениях $u$ и $v$ (меняющихся в некоторой области) они дают координаты всех точек данной поверхности и только таких точек.

Правые части уравнений (4.6) содержат два параметра, а уравнения (4.5) – только один параметр.

П р и м е р 4.4. Составить параметрические уравнения винтовой линии.

Винтовой линией называется линия, описываемая точкой, равномерно движущейся по образующей кругового цилиндра, который при этом вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

Выберем ось вращения цилиндра в качестве оси $Oz$ декартовой прямоугольной системы координат в пространстве (рис. 4.1). Обозначим через $v$ постоянную скорость прямолинейного движения точки вдоль образующей, $\omega$ – скорость вращательного движения, $R$ – радиус цилиндра. Пусть в начальный момент точка находилась на оси $Ox$ (совпадала с точкой $A$), а в момент времени $t$ – в положении $M$. Обозначим буквой $N$ проекцию точки $M$ на плоскость $Oxy$, буквой $P$ – проекцию точки $N$ на ось $Ox$, буквой $Q$ – проекцию точки $N$ на ось $Oy$. Обозначим через $\varphi$ угол между $OP$ и $ON$, получаем $x = OP = \cos\varphi$, $y = OQ = R\sin\varphi$, $z = NM = vt$. Поскольку $\varphi = \omega t$, то

$$x = R\cos\omega t,\ y = R\sin\omega t,\ z = vt. \tag{4.7}$$

Уравнения (4.7) являются параметрическими уравнениями винтовой линии.

П р и м е р 4.5. Составить параметрические уравнения сферы радиуса $R$.

Введем в рассмотрение систему декартовых прямоугольных координат с началом в центре сферы и систему сферических координат с началом в той же точке (рис. 4.2). Пусть $M$ – произвольная точка сферы, $N$ – ее проекция на плоскость $Oxy$. Обозначим угол, образуемый вектором **OM** с осью $Oz$, через $u$ (широта); угол, образуемый вектором **ON** с осью $Ox$, через $v$ (долгота). Принимая во внимание определение декартовых координат (или связь между декартовыми и сфериче-

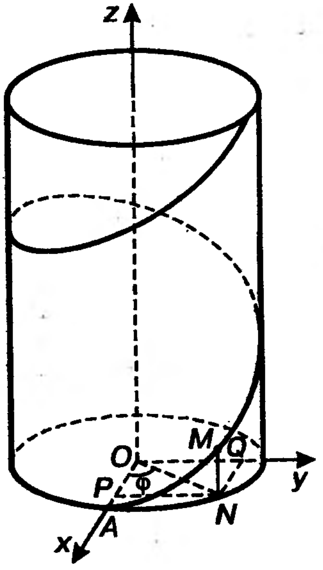


Рис. 4.1

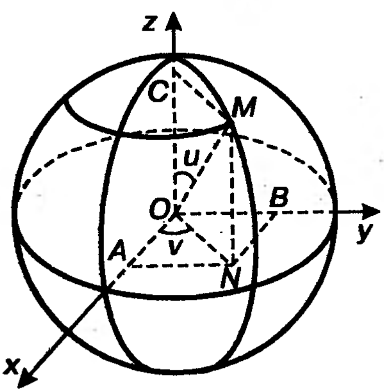


Рис. 4.2

скими координатами, см. 1.13, формулы (1.29)), получаем параметрические уравнения сферы

$$x = R\sin u\cos v,\ y = R\sin u\sin v,\ z = R\cos u, \tag{4.8}$$

где $0 \le u \le \pi,\ 0 \le v < 2\pi$.

Исключив из этих уравнений параметры $u$ и $v$ (для чего нужно возвести в квадрат обе части каждого уравнения и почленно сложить), получим уравнение сферы (4.4).

## 4.3. Различные виды уравнения плоскости

Плоскость в пространстве можно задать различными способами (точкой и вектором, перпендикулярном плоскости, тремя точками и т. д.), в зависимости от этого рассматривают различные виды ее уравнения.

**Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.** Ненулевой вектор **n**, перпендикулярный плоскости, называют ее нормальным вектором. Если дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, C)$ плоскости, то ее уравнение имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{4.9}$$

В этом уравнении коэффициенты $A$, $B$, $C$ являются координатами нормального вектора.

Равенство (4.9) выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов: $\mathbf{n} = (A, B, C)$, $\mathbf{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, где $M(x, y, z)$ – любая точка плоскости (рис. 4.3).

**Общее уравнение плоскости.** Уравнение первой степени относительно декартовых координат

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.10}$$

где $A$, $B$, $C$ одновременно в нуль не обращаются, т.е.

$$A^2 + B^2 + C^2 \ne 0, \tag{4.11}$$

определяет плоскость в пространстве. Уравнение (4.10) называется общим уравнением плоскости. Отметим частные случаи этого уравнения.

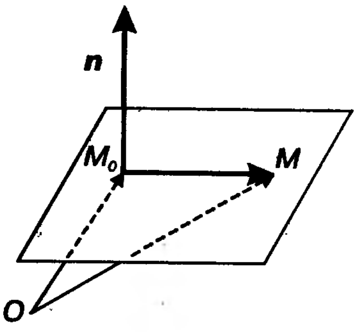

Рис. 4.3

Если $D = 0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax + By + Cz = 0$$

и определяет плоскость, проходящую через начало координат (рис. 4.4, *а*; координаты $x = y = z = 0$ удовлетворяют данному уравнению).

Если $C = 0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax + By + D = 0$$

и определяет плоскость, параллельную оси $Oz$ (рис. 4.4, *б*); нормальный вектор $\mathbf{n} = (A, B, 0)$ перпендикулярен оси $Oz$, ибо $C = 0$.

Если $C=0$, $D=0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax+By=0$$

и определяет плоскость, проходящую через ось $Oz$ (рис. 4.4, *в*; плоскость параллельна оси $Oz$ и проходит через начало координат; в этом случае $A^2+B^2\neq 0$ в силу условия (4.11)).

Если $C=0$, $B=0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax+D=0, \text{ или } x=a \quad (a=-D/A)$$

и определяет плоскость, параллельную плоскости $Oyz$ или перпендикулярную оси $Ox$ (рис. 4.4, *г*; нормальный вектор $\mathbf{n}=(A, 0, 0)$ перпендикулярен плоскости $Oyz$).

Если $C=0$, $B=0$, $D=0$, то уравнение (4.10) принимает вид

$$Ax=0, \text{ или } x=0 \text{ (так как } A\neq 0)$$

и определяет координатную плоскость $Oyz$.

З а м е ч а н и е . Если в уравнении (4.10) свободный член равен нулю ($D=0$), то плоскость проходит через начало координат; если коэффициент при одной из текущих координат равен нулю, то плоскость параллельна соответствующей координатной оси (например, если $B$=0, то плоскость параллельна оси $Oy$); если в нуль обращаются свободный член и один из коэффициентов при текущей координате, то плоскость проходит через соответствующую ось (если $D=0$ и $C=0$, то плоскость проходит через ось $Oz$); если равны нулю два коэффициента при текущих координатах, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости (когда $A=0$, $B=0$, плоскость параллельна плоскости $Oxy$); если обращаются в нуль свободный член и два коэффициента при текущих координатах, то плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью (когда $D=0$, $A=0$, $C=0$, плоскость совпадает с плоскостью $Oxz$).

**Уравнение плоскости в отрезках, отсекаемых на осях координат.** Если все коэффициенты уравнения (4.10) и его свободный член отличны от нуля, то уравнение можно привести к виду

$$x/a+y/b+z/c=1, \tag{4.12}$$

где $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$. Числа $a$, $b$ и $c$ означают величины направ-

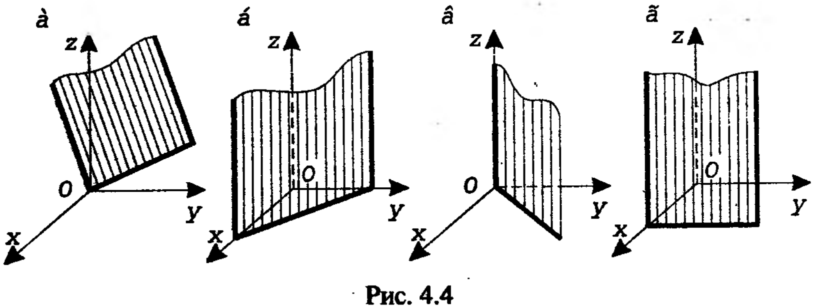


Рис. 4.4

ленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Этим объясняется название данного вида уравнения плоскости.

**Нормальное уравнение плоскости.** Уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{4.13}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы, образованные нормальным вектором плоскости с координатными осями $Ox$, $Oy$, $Oz$ соответственно, $p$ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, называется нормальным (или нормированным) уравнением плоскости. Чтобы привести общее уравнение плоскости к виду (4.13), необходимо умножить его на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где знак выбирается противоположным знаку $D$. После умножения уравнения (4.10) на число $\mu$ получаем нормированное уравнение плоскости

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

**Уравнение плоскости, проходящей через три точки.** Если даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.14}$$

Равенство (4.14) выражает необходимое и достаточное условие (см. (3.36)) компланарности трех векторов $\mathbf{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\mathbf{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\mathbf{M_1M_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$, где $M(x, y, z)$ – любая точка данной плоскости (рис. 4.5).

**Уравнение плоскости, проходящей через две точки и параллельной данному вектору.** Если задан вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$,

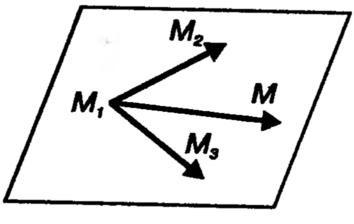


Рис. 4.5

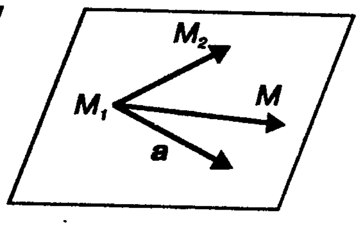


Рис. 4.6

$M_2(x_2, y_2, z_2)$, причем векторы **a** и $\mathbf{M_1M_2}$ неколлинеарны (рис. 4.6), то уравнение плоскости, проходящей через эту точку параллельно вектору **a**, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.15)$$

Равенство (4.15) выражает необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов $\mathbf{M_1M} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\mathbf{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где $M(x, y, z)$ – любая точка данной плоскости.

**Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум неколлинеарным векторам.** Если даны два неколлинеарных вектора (рис. 4.7) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно векторам **a** и **b**, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.16)$$

Равенство (4.16) выражает необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов: **a**, **b**, $\mathbf{M_1M}$, где $M$ – произвольная точка данной плоскости.

**Параметрические уравнения плоскости.** Если даны два неколлинеарных вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то параметрические уравнения плоскости, проходящей через эту точку параллельно данным векторам, имеют вид

$$x = x_1 + ua_1 + vb_1,\ y = y_1 + ua_2 + vb_2,\ z = z_1 + ua_3 + vb_3. \qquad (4.17)$$

Уравнения (4.17) следуют из равенства $\mathbf{M_1M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, где $M(x, y, z)$ – любая точка плоскости (равенство $\mathbf{M_1M} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ означает, что любой вектор $\mathbf{M_1M}$ можно разложить по векторам **a** и **b**).

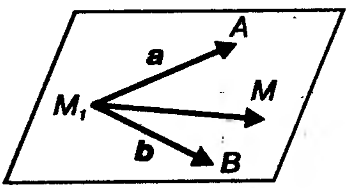

Рис. 4.7

П р и м е р 4.6. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, -3, 4)$ и имеющей нормальный вектор $n = (5, 6, -7)$.

Так как в данном случае $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $z_0 = 4$, $A = 5$, $B = 6$, $C = -7$, то уравнение (4.9) принимает вид

$$5(x-2) + 6(y+3) - 7(z-4) = 0, \text{ или } 5x + 6y - 7z + 36 = 0.$$

П р и м е р 4.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1, -3, 2)$ параллельно векторам $\mathbf{a} = (5, -4, 8)$, $\mathbf{b} = (6, -1, 7)$.

Данные векторы неколлинеарны, так как их координаты не пропорциональны.

В соответствии с уравнением (4.16) получаем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 5 & -4 & 8 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая определитель по элементам первой строки, находим

$$(x-1)\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$-20(x-1)+13(y+3)+19(z-2)=0,\ 20x-13y-19z-21=0.$$

Пример 4.8. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью $3x-4y+5z-60=0$.

Разделив обе части уравнения на 60 и преобразовав его, получим

$$\frac{x}{20}-\frac{y}{15}+\frac{z}{12}=1, \text{ или } \frac{x}{20}+\frac{y}{-15}+\frac{z}{12}=1.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (4.12), заключаем, что $a=20$, $b=-15$, $c=12$. Таковы величины отрезков, отсекаемых плоскостью соответственно на осях $Ox$, $Oy$, $Oz$.

Пример 4.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(9,-11,5)$, $M_2(7,4,-2)$, $M_3(-7,13,-3)$.

В соответствии с уравнением (4.14) получаем

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ 7-9 & 4+11 & -2-5 \\ -7-9 & 13+11 & -3-5 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -16 & 24 & -8 \end{vmatrix}=$$

$$=8\begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-9 & y+11 & z-5 \\ -2 & 15 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-9)\begin{vmatrix} 15 & -7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-(y+11)\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+(z-5)\begin{vmatrix} -2 & 15 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$6(x-9)+12(y+11)+24(z-5)=0,\ (x-9)+2(y+11)+4(z-5)=0,$$

$$x+2y+4z-7=0.$$

## 4.4. Различные виды уравнений прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать различными способами (точкой и вектором, параллельной ей; двумя точками и т. п.), в связи с чем рассматривают различные виды ее уравнений.

**Векторно-параметрическое уравнение прямой.** Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный ей. Если даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ прямой (рис. 4.8), то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \tag{4.18}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{OM}_0$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $t$ – переменная величина (параметр). Уравнение (4.18) называется векторно-параметрическим уравнением прямой, проходящей через точку $M_0$ и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a}$. Равенство (4.18) следует из определения суммы векторов и необходимого и достаточного условия коллинеарности двух векторов.

**Параметрические уравнения прямой.** Переходя от векторного соотношения (4.18) к координатным, получаем

$$x = x_0 + a_1t,\ y = y_0 + a_2t,\ z = z_0 + a_3t. \tag{4.19}$$

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

**Канонические уравнения прямой.** Выражая параметр $t$ из уравнений (4.19) и приравнивая полученные выражения, находим, что

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \tag{4.20}$$

Уравнения (4.20) называются каноническими уравнениями прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

**Уравнение прямой, проходящей через две точки.** Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве ее направляющего вектора можно взять вектор $\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, поэтому уравнения (4.20) примут вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.21}$$

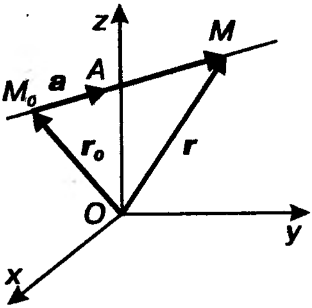


Рис. 4.8

**П р и м е р 4.10.** Записать параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0$ (7, –9, 8) параллельно вектору $\mathbf{a} = (4, 3, -2)$.

Так как в данном случае $x_0 = 7, y_0 = -9, z_0 = 8, a_1 = 4, a_2 = 3, a_3 = -2$, параметрические уравнения (4.19) принимают вид

$$x = 7 + 4t, \quad y = -9 + 3t, \quad z = 8 - 2t,$$

а канонические уравнения (4.20) запишутся так:

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y+9}{3} = \frac{z-8}{-2}.$$

Пример 4.11. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(6, -5, 4)$, $M_2(8, -7, 9)$. Привести эти уравнения к параметрическому виду.

Поскольку $x_1=6$, $y_1=-5$, $z_1=4$, $x_2=8$, $y_2=-7$, $z_2=9$, то уравнения (4.21) примут вид

$$\frac{x-6}{8-6} = \frac{y+5}{-7+5} = \frac{z-4}{9-4}, \text{ или } \frac{x-6}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-4}{5}.$$

Обозначая равные отношения буквой $t$, получаем параметрические уравнения данной прямой:

$$x = 6 + 2t, \; y = -5 - 2t, \; z = 4 + 5t.$$

## 4.5. Задачи, относящиеся к плоскостям

**Взаимное расположение двух плоскостей.** Даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{4.22}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{4.23}$$

Необходимое и достаточное условие параллельности этих плоскостей выражается равенствами

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}, \tag{4.24}$$

а их совпадения – равенствами

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}. \tag{4.25}$$

Другими словами, плоскости параллельны тогда и только тогда, когда пропорциональны их коэффициенты при текущих координатах; например, плоскости $x + 2y - 3z - 1 = 0$, $3x + 6y - 9z + 7 = 0$ параллельны. Плоскости совпадают тогда и только тогда, когда пропорциональны коэффициенты при текущих координатах и свободные члены; например, плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$, $4x - 6y + 2z - 8 = 0$ совпадают.

Если условие (4.24) не выполняется, то плоскости (4.22) и (4.23) пересекаются.

**Угол между двумя плоскостями.** Косинус угла между плоскостями (4.22) и (4.23) определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{4.26}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей (4.22) и (4.23) выражается равенством

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{4.27}$$

**Расстояние от точки до плоскости.** Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.28}$$

Пример 4.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, -5)$ и параллельной плоскости $x-2y+4z-1=0$.

Это уравнение будем искать в виде $x-2y+4z+D=0$, где $D$ – неизвестный свободный член (в формуле (4.24) полагаем отношение равным единице).

Так как плоскость проходит через точку $M_0$, то ее координаты должны удовлетворять последнему уравнению: $2-2\cdot 3+4\cdot(-5)+D=0$, $2-6-20+\ +D=0$, $D=24$. Следовательно, $x-2y+4z+24=0$ – искомое уравнение.

Пример 4.13. Найти угол между двумя плоскостями $11x-8y-7z+$ $+6=0$; $4x-10y+z-5=0$.

Косинус угла найдем по формуле (4.26), подставив в нее значения $A_1=11$, $B_1=-8$, $C_1=-7$, $A_2=4$, $B_2=-10$, $C_2=1$:

$$\cos\varphi=\frac{11\cdot 4+(-8)\cdot(-10)+(-7)\cdot 1}{\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}\,\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}}=\frac{44+80-7}{\sqrt{234}\,\sqrt{117}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4.14. Вычислить расстояние от точки $M_0(4, 3, 6)$ до плоскости $2x-y-2z-8=0$.

Подставив в формулу (4.28) значения $x_0=4$, $y_0=3$, $z_0=6$, $A=2$, $B=-1$, $C=-2$, $D=-8$, получим

$$d=\frac{|2\cdot 4-3-2\cdot 6-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{|-15|}{3}=5.$$

Пример 4.15. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x+2y-2z-1=0$, $x+2y-2z+5=0$.

Это расстояние равно расстоянию любой точки одной плоскости до другой. Выберем на первой плоскости произвольную точку. Приняв, например, что $y_0=1$, $z_0=1$, из уравнения $x+2y-2z-1=0$ найдем $x_0=1$. По формуле (4.28) находим расстояние от точки $M_0(1,1,1)$ до плоскости $x+2y-2z+5=0$:

$$d=\frac{|1+2-2+5|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3}=2.$$

## 4.6. Задачи, относящиеся к прямым в пространстве

**Угол между двумя прямыми** – угол между направляющими векторами этих прямых. Косинус угла между двумя прямыми

$$x = x_1 + a_1 t,\ y = y_1 + a_2 t,\ z = z_1 + a_3 t; \tag{4.29}$$

$$x = x_2 + b_1 t,\ y = y_2 + b_2 t,\ z = z_2 + b_3 t \tag{4.30}$$

определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{4.31}$$

Равенство $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых (4.29), (4.30). Необходимое и достаточное условие параллельности этих прямых выражается равенствами $\mathbf{b}_1 = \alpha\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 = \alpha\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_3 = \alpha\mathbf{a}_3$, или

$$b_1/a_1 = b_2/a_2 = b_3/a_3. \tag{4.32}$$

**Взаимное расположение двух прямых в пространстве.** Для исследования взаимного расположения прямых (4.29) и (4.30) рассматривается смешанное произведение трех векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Если $\mathbf{abM_1M_2} \neq 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{4.33}$$

то прямые являются скрещивающимися. Неравенство (4.33) означает, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{M_1M_2}$ некомпланарны.

Прямые (4.29) и (4.30) лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\mathbf{abM_1M_2} = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.34}$$

Эти прямые пересекаются, если первые две строки определителя не пропорциональны, т.е. не выполнено условие (4.32). Прямые параллельны, когда первые две строки определителя пропорциональны. Прямые совпадают, если пропорциональны все строки определителя (4.34).

З а м е ч а н и е. Чтобы найти точку пересечения прямых (4.29) и (4.30), необходимо решить систему их уравнений; при этом целесообразно параметры обозначить различными буквами (так как одна и та же точка пересечения прямых получается, как правило, при различных значениях параметра в уравнениях данных прямых).

**Расстояние от точки до прямой.** Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до прямой (4.29) вычисляется по формуле

$$\mathbf{d} = \frac{\left|\left[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}\right]\right|}{|\mathbf{a}|}, \tag{4.35}$$

где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_1$ – радиусы-векторы точек $M_0$ и $M_1$, $\mathbf{a}$ – направляющий вектор прямой (рис. 4.9).

**Расстояние между двумя прямыми.** Кратчайшее расстояние между двумя прямыми (4.29) и (4.30) определяется формулой

$$\mathbf{d} = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\,\mathbf{ab}|}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|}, \tag{4.36}$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ – радиусы-векторы точек $M_1$, $M_2$; $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ – направляющие векторы данных прямых (рис. 4.10).

Пример 4.16. Найти угол между двумя прямыми $x = 3 + 2t$, $y = 4 + 7t$, $z = -5 + 8t$; $x = 2 + 8t$, $y = 6 - 11t$, $z = -8 - 7t$.

Первая прямая имеет направляющий вектор $\mathbf{a} = (2, 7, 8)$, вторая – $\mathbf{b} = (8, -11, -7)$. По формуле (4.31) находим

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 8 + 7 \cdot (-11) + 8 \cdot (-7)}{\sqrt{2^2 + 7^2 + 8^2}\,\sqrt{8^2 + (-11)^2 + (-7)^2}} = \frac{-117}{\sqrt{117}\,\sqrt{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = 135°$.

Пример 4.17. Доказать, что прямые $x = 7 + 5t$, $y = -5 - 7t$, $z = -2 - 3t$ и $x = t$, $y = t$, $z = -3 + 2t$ пересекаются. Найти точку их пересечения.

Рассмотрим векторы $\mathbf{M_1M_2} = (0 - 7, 0 - (-5), -3 - (-2)) = (-7, 5, -1)$, $\mathbf{a} = (5, -7, -3)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 2)$ и их смешанное произведение

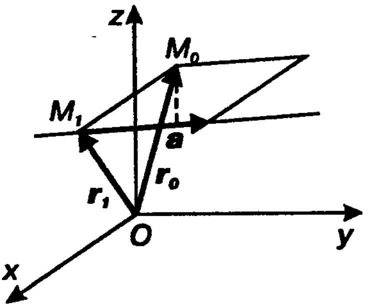

Рис. 4.9

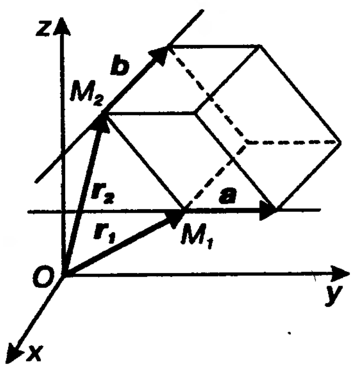

Рис. 4.10

$$\mathbf{abM_1M_2} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -12 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку смешанное произведение трех векторов равно нулю, то векторы компланарны; значит, данные прямые лежат в одной плоскости. Так как направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ этих прямых неколлинеарны (их координаты не пропорциональны), то прямые пересекаются.

Чтобы найти точку пересечения, приравняем выражения для координат, предварительно обозначив параметр буквой $s$ в уравнениях второй прямой:

$$7+5t=s, \quad -5-7t=s, \quad -2-3t=-3+2s.$$

Из первых двух уравнений следует, что $7+5t=-5-7t$, откуда $t=-1$; следовательно, $s=2$. При этих значениях $t$ и $s$ третье уравнение обращается в тождество. Подставляя значение $t=-1$ в уравнения первой прямой (или $s=2$ в уравнения второй прямой $x=s$, $y=s$, $z=-3+2s$), находим $x=2$, $y=2$, $z=1$. Итак, $M\,(2, 2, 1)$ – точка пересечения данных прямых.

Пример 4.18. Найти расстояние от точки $M_0(2,-3,5)$ до прямой: $x=5+2t$, $y=-4-t$, $z=6-2t$.

Найдем сначала векторное произведение, входящее в формулу (4.35):

$$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0=\mathbf{M_0M_1}=(5-2,-4-(-3),6-5)=(3,-1,1), \ \mathbf{a}=(2,-1,-2),$$

$$[(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0),\mathbf{a}]=\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right)=(3,8,-1).$$

По формуле (4.35) получаем

$$\mathbf{d}=\frac{\sqrt{3^2+8^2+(-1)^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{74}}{3}.$$

## 4.7. Задачи на прямую и плоскость

**Прямая как линия пересечения двух плоскостей.** Рассмотрим две плоскости, заданные общими уравнениями (4.22) и (4.23). Если условие (4.24) не выполнено (т. е. коэффициенты $A_1$, $B_1$, $C_1$ не пропорциональны коэффициентам $A_2$, $B_2$, $C_2$), то плоскости пересекаются по прямой, определяемой уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{4.37}$$

Эти уравнения приводятся к параметрическому виду

$$x=x_0+\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}t, \ y=y_0-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}t, \ z=z_0+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}t. \tag{4.38}$$

Данная прямая имеет направляющий вектор

$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \left( \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right), \tag{4.39}$$

где $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой может быть выбрана произвольно; для этого необходимо в системе (4.37) зафиксировать значение одной переменной (например, $z = z_0$), из полученной системы уравнений найти значения двух других переменных ($x = x_0$, $y = y_0$).

**Пучок плоскостей** – множество всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (4.37), имеет вид

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где $\alpha$ и $\beta$ – любые действительные числа, причем хотя бы одно из них отлично от нуля. Это уравнение можно привести к виду

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{4.40}$$

где $\lambda = \beta/\alpha$, $\alpha \neq 0$. Уравнение (4.40) определяет все плоскости пучка, за исключением той, которой соответствует $\alpha = 0$, т.е. за исключением плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

**Угол между прямой и плоскостью.** Синус угла между прямой

$$x = x_0 + a_1t,\ y = y_0 + a_2t,\ z = z_0 + a_3t \tag{4.41}$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.42}$$

определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \tag{4.43}$$

**Взаимное расположение прямой и плоскости.** Прямая (4.41) и плоскость (4.42) пересекаются, если

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 \neq 0; \tag{4.44}$$

перпендикулярны, когда

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}; \tag{4.45}$$

параллельны, если

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \tag{4.46}$$

совпадают, когда

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0,\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{4.47}$$

Координаты точки пересечения прямой (4.41) и плоскости (4.42) находятся из системы их уравнений.

Неравенство (4.44) означает, что нормальный вектор $\mathbf{n}=(A, B, C)$ плоскости (4.42) и направляющий вектор $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ прямой (4.41) не перпендикулярны, т.е. прямая и плоскость не параллельны.

Равенства (4.45) означают, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т.е. прямая (4.41) и плоскость (4.42) перпендикулярны.

Соотношения (4.46) показывают, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$ перпендикулярны, т.е. прямая и плоскость параллельны, но точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой (4.41) не принадлежит плоскости (4.42).

Равенства (4.47) означают, что векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{a}$ перпендикулярны и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой принадлежит плоскости (прямая лежит в плоскости).

П р и м е р 4.19. Уравнения прямой $x+2y+4z-7=0$, $2x+y-z-5=0$ привести к параметрическому виду.

Поскольку в этих уравнениях коэффициенты при текущих координатах непропорциональны, то плоскости, определяемые данными уравнениями, пересекаются. Данные уравнения определяют прямую. Выберем на прямой точку. Полагая в этих уравнениях, например, $z_0=2$, получаем

$$x+2y=-1, \ 2x+y=7,$$

откуда $x_0=5$, $y_0=-3$. На прямой зафиксирована точка $M_0(5,-3,2)$. По формуле (4.39) найдем направляющий вектор прямой. Так как $\mathbf{n}_1=(1,2,4)$, $\mathbf{n}_2=(2,1,-1)$, то

$$\mathbf{a}=[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]=\left(\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)=(-6, 9, -3).$$

Параметрические уравнения (4.38) данной прямой принимают вид $x=5-6t$, $y=-3+9t$, $z=2-3t$.

З а м е ч а н и е. В качестве направляющего вектора можно взять $\frac{1}{3}\mathbf{a}=(-2,3,-1)$, тогда $x=5-2t$, $y=-3+3t$, $z=2-t$.

П р и м е р 4.20. Найти угол между прямой $x=-3-t$, $y=5-t$, $z=-4+2t$ и плоскостью $2x-4y+2z-9=0$.

Применяя формулу (4.43) для случая $a_1$=-1, $a_2$=-1, $a_3$=2, $A$=2, $B$=-4, $C$=2, находим

$$\sin\varphi=\frac{|2(-1)-4(-1)+2\cdot 2|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{24}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}, \ \varphi=30^\circ.$$

П р и м е р 4.21. Найти проекцию точки $M(1,-2,4)$ на плоскость $5x-3y+6z+35=0$.

Этой проекцией является точка пересечения перпендикуляра к плоскости, проходящей через точку $M$. Для прямой, перпендикулярной плоскости, направляющим вектором будет $\mathbf{n}=(5,-3,6)$. Параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку $M$, примут вид $x=1+5t,\quad y=-2-3t,\quad z=4+6t$.

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, находим:

$$5(1+5t)-3(-2-3t)+6(4+6t)+35=0,\ 70t+70=0,\ t=-1.$$

При этом значении $t$ из уравнений прямой получаем: $x = 1-5 = -4$, $y = -2+3 = 1$, $z=4-6=-2$. Следовательно, точка $N(-4,1,-2)$ – искомая проекция.

Пример 4.22. Вершины пирамиды находятся в точках $A_1(4,6,5)$, $A_2(6,9,4)$, $A_3(2,10,10)$, $A_4(7,5,9)$. Найти: 1) длину ребра $A_1A_2$; 2) угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_3$; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$; 5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения прямой $A_1A_4$; 7) угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$.

Найдем сначала координаты векторов $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_1A_3}$, $\mathbf{A_1A_4}$ и координаты векторного произведения $[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]$. По формуле (3.15) получаем

$$\mathbf{A_1A_2}=(6-4,9-6,4-5)=(2,3,-1);\ \mathbf{A_1A_3}=(2-4,10-6,10-5)=(-2,4,5);$$
$$\mathbf{A_1A_4}=(7-4,5-6,9-5)=(3,-1,4).$$

С помощью формулы (3.26) находим

$$[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]=\left(\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}\right)=(19,-8,14).$$

1. Длина ребра $A_1A_2$ равна расстоянию между точками $A_1$ и $A_2$, которое вычислим по формуле (1.26):

$$\rho(A_1, A_2)=\sqrt{(6-4)^2+(9-6)^2+(4-5)^2}=\sqrt{14}\approx 3{,}74.$$

Тот же результат можно получить, найдя модуль вектора $\mathbf{A_1A_2}$ по формуле (3.11).

2. Угол между ребрами $A_1A_2$ и $A_1A_3$ равен углу $\varphi$ между векторами $\mathbf{A_1A_2}=\mathbf{a}$, $\mathbf{A_1A_3}=\mathbf{b}$. В соответствии с формулой (3.22) получаем

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{2(-2)+3\cdot 4-1\cdot 5}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\,\sqrt{(-2)^2+4^2+5^2}}=\frac{3}{3\sqrt{70}}=\frac{1}{\sqrt{70}}.$$

$$\cos\varphi\approx 0{,}1195,\ \varphi\approx 83°31'.$$

3. Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника $A_1A_2A_3$, которую вычислим по формуле (3.29), использовав формулу (3.11) для модуля вектора и координаты вектора $[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]$:

$$S=\frac{1}{2}\left|[\mathbf{A_1A_2}, \mathbf{A_1A_3}]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{19^2+(-8)^2+14^2}=\frac{\sqrt{621}}{2},\ S\approx 12{,}46.$$

4. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найдем по формуле (3.35):

$$V=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\\ 7-4 & 5-6 & 9-5\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=\frac{121}{6}=20\frac{1}{6}.$$

5. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ как плоскости, проходящей через три точки (см. (4.14)), принимает вид

$$\begin{vmatrix}x-4 & y-6 & z-5\\ 6-4 & 9-6 & 4-5\\ 2-4 & 10-6 & 10-5\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-4 & y-6 & z-5\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 4 & 5\end{vmatrix}=0,$$

$$19(x-4)-8(y-6)+14(z-5)=0,\ 19x-18y+14z-98=0. \qquad \text{(I)}$$

6. Уравнения прямой $A_1A_4$ как прямой, проходящей через две точки (см. (4.21)), запишутся так:

$$\frac{x-4}{7-4}=\frac{y-6}{5-6}=\frac{z-5}{9-5},\quad \frac{x-4}{3}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-5}{4},$$

или

$$x=4+3t,\ y=6-t,\ z=5+4t. \qquad \text{(II)}$$

7. Угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$ равен углу $\varphi$ между плоскостью (I) и прямой (II). По формуле (4.43) находим

$$\sin\varphi=\frac{|19\cdot3-8\cdot(-1)+14\cdot4|}{\sqrt{19^2+(-8)^2+14^2}\,\sqrt{3^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{121}{\sqrt{621}\sqrt{26}},$$

$$\sin\varphi\approx0{,}9522,\ \varphi\approx72°13'.$$

8. Уравнения высоты, опущенной из вершины $A_4$ на грань $A_1A_2A_3$, можно записать как уравнения прямой, проходящей через точку $A_4$ и перпендикулярной плоскости (I), имеющей нормальный вектор $\mathbf{n}=(19,-8,14)$, который для этой прямой будет направляющим вектором. Уравнения (4.19) в данном случае принимают вид $x=7+19t,\ \ y=5-8t,\ \ z=9+14t.$

## 4.8. Цилиндрические поверхности. Поверхности вращения

Цилиндрической называется поверхность, описываемая прямой (образующей), движущейся вдоль некоторой линии (направляющей) и остающейся параллельной исходному направлению (рис. 4.11). Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси $Oz$, имеет вид

$$F(x,y)=0. \qquad (4.48)$$

Особенность уравнения (4.48) состоит в том, что оно не содержит переменной $z$. Если уравнение $F(y,z)=0$ определяет некоторую поверхность, то ею является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $Ox$. Если уравнение $F(x,z)=0$ определяет некоторую поверхность, то ею является цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $Oy$.

Поверхность, образованная вращением линии $l$

$$x=f(z),\ y=\varphi(z) \tag{4.49}$$

вокруг оси $Oz$ (рис. 4.12), определяется уравнением

$$x^2+y^2=f^2(z)+\varphi^2(z). \tag{4.50}$$

Поверхность, образованная вращением линии $x=f_1(y)$, $z=f_2(y)$ вокруг оси $Oy$, имеет уравнение $x^2+z^2=f_1^2(y)+f_2^2(y)$.

Поверхность, образованная вращением линии $y=\varphi_1(x)$, $z=\varphi_2(x)$ вокруг оси $Ox$, определяется уравнением $y^2+z^2=\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)$.

Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, полученная вращением линии второго порядка вокруг ее оси.

Эллипсоидом вращения называется поверхность, полученная вращением эллипса вокруг одной из его осей. Уравнение эллипсоида вращения, полученного вращением эллипса $y^2/b^2+z^2/c^2=1$, $x=0$ вокруг оси $Oz$, имеет вид $x^2/b^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

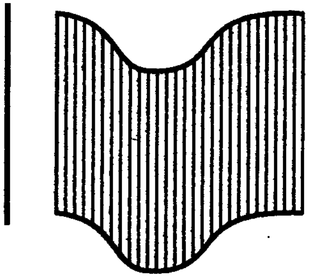

Рис. 4.11

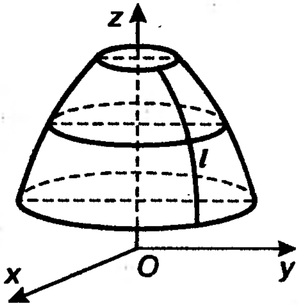


Рис. 4.12

Однополосным гиперболоидом вращения называется поверхность, полученная вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси. Однополосный гиперболоид вращения, полученный вращением гиперболы $y^2/b^2-z^2/c^2=1$, $x=0$ вокруг оси $Oz$, имеет уравнение

$$x^2/b^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1.$$

Двуполостным гиперболоидом вращения называется поверхность, полученная вращением гиперболы вокруг ее действительной оси. Двуполостный гиперболоид, полученный вращением гиперболы $z^2/c^2-y^2/b^2=1$,

$x = 0$ вокруг оси $Oz$, определяется уравнением

$$x^2/b^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1.$$

Параболоидом вращения называется поверхность, полученная вращением параболы вокруг ее оси. Уравнение параболоида вращения, полученного вращением параболы $y^2 = 2pz$, $x = 0$ вокруг оси $Oz$, имеет вид

$$\frac{x^2}{p} = \frac{y^2}{p} = 2z.$$

П р и м е р 4.23. Составить уравнение поверхности, полученной вращением линии $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 0$, $y = 0$ вокруг оси $Oz$.

Данные уравнения определяют пару пересекающихся прямых в плоскости $Oxz$, проходящих через начало координат (являющихся пересечением плоскостей $x/a - z/c = 0$, $x/a + z/c = 0$ с плоскостью $Oxz$). Приведем эти уравнения к виду (4.49):

$$x = \pm (a/c)\, z,\ y = 0.$$

В соответствии с уравнением (4.50) получаем

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2} z^2,\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением конуса вращения, получающегося при вращении указанных прямых вокруг оси $Oz$.

## 4.9. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно текущих координат $x$, $y$, $z$.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка:

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (эллипсоид, рис. 4.13); (4.51)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ (однополосный гиперболоид, рис. 4.14); (4.52)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$ (двуполостный гиперболоид, рис. 4.15); (4.53)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ (конус, рис. 4.16); (4.54)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$ (эллиптический параболоид, рис. 4.17); (4.55)

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$ (гиперболический параболоид, рис. 4.18); (4.56)

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (эллиптический цилиндр, рис. 4.19); (4.57)

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (гиперболический цилиндр, рис. 4.20); (4.58)

$x^2 = 2py$ (параболический цилиндр, рис. 4.21); (4.59)

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ (пара пересекающихся плоскостей); (4.60)

$x^2/a^2 = 1$ (пара параллельных плоскостей); (4.61)

$x^2 = 0$ (пара совпадающих плоскостей). (4.62)

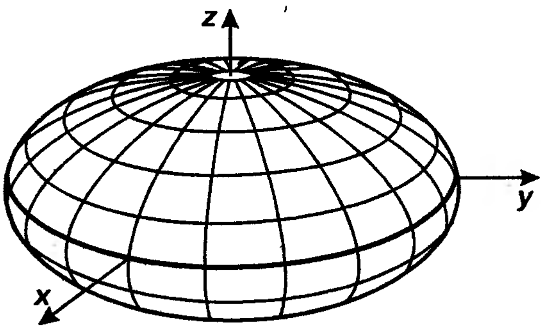


Рис. 4.13

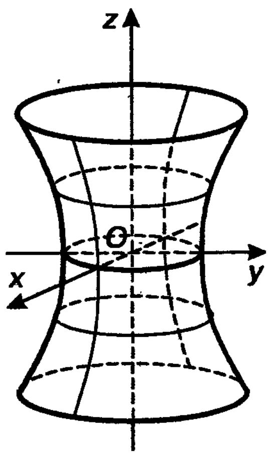


Рис. 4.14

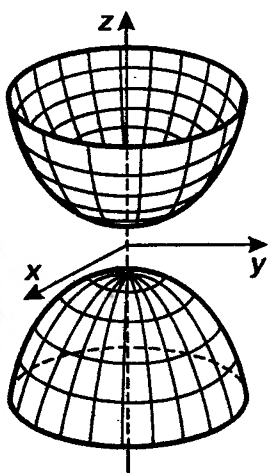


Рис. 4.15

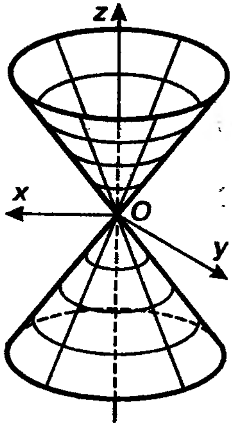


Рис. 4.16

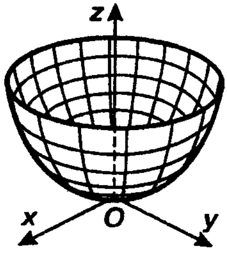


Рис. 4.17

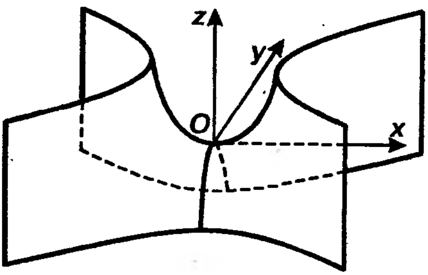


Рис. 4.18

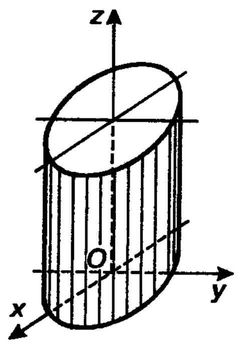


Рис. 4.19

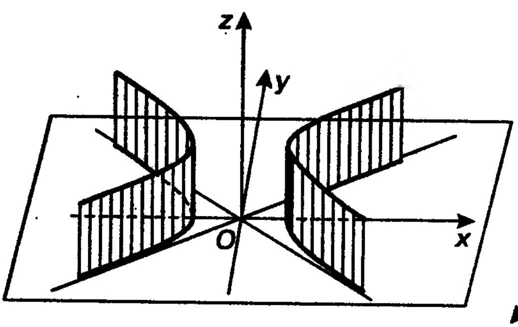


Рис. 4.20

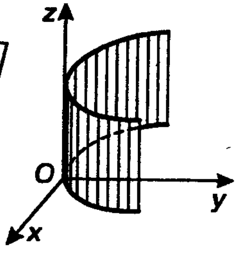


Рис. 4.21

З а м е ч а н и е  1. Уравнение (4.51) при $a=b=c=R$ принимает вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{4.63}$$

и определяет сферу радиуса $R$ с центром в начале координат.

Общее уравнение второй степени относительно $x$, $y$, $z$ может быть приведено к одному из уравнений (4.51) – (4.63) или к одному из следующих уравнений:

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=-1; \tag{4.64}$$

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=0; \tag{4.65}$$

$$x^2/a^2+y^2/b^2=-1; \tag{4.66}$$

$$x^2/a^2+y^2/b^2=0; \tag{4.67}$$

$$x^2/a^2=-1. \tag{4.68}$$

Уравнениям (4.64), (4.66) и (4.68) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства; уравнению (4.65) удовлетворяют координаты единственной точки $O(0,0,0)$; уравнению (4.67) удовлетворяют координаты точек, лежащих на прямой $x=0$, $y=0$.

З а м е ч а н и е 2. Если уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+F=0 \tag{4.69}$$

(т.е. уравнение, у которого коэффициенты при квадратах координат равны между собой, а коэффициенты при произведениях координат равны нулю) определяет некоторую поверхность, то этой поверхностью является сфера. Уравнение (4.69) в этом случае может быть приведено к виду

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{4.70}$$

Уравнение (4.70) является уравнением сферы радиуса $R$ с центром в точке $C(a, b, c)$.

Прямые, целиком лежащие на некоторой поверхности, называются прямолинейными образующими данной поверхности.

Однополосный гиперболоид (4.52) имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

$$\beta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

Гиперболический параболоид (4.56) также имеет два семейства прямолинейных образующих:

$$\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\beta z,\quad \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\alpha,$$

$$\alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\beta,\quad \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\alpha z.$$

**Пример 4.24.** Определить вид и параметры поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0.$$

Преобразуем это уравнение, выделив в левой части полные квадраты:

$$3(x^2-2x+1)+4(y^2+4y+4)+6(z^2-6z+9)-3-16-54+49=0,$$

$$3(x-1)^2+4(y+2)^2+6(z-3)^2=24.$$

Введем новые координаты по формулам (3.17):

$$X=x-1,\ Y=y+2,\ Z=z-3, \tag{I}$$

тогда уравнение примет вид

$$3X^2+4Y^2+6Z^2=24, \text{ или } X^2/8+Y^2/6+Z^2/4=1.$$

Полученное уравнение определяет эллипсоид (см. (4.51)), для которого $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2$. Центр эллипсоида находится в точке $O_1(1,-2,3)$; в новой системе координат центром является точка с координатами $X=0$, $Y=0$, $Z=0$. Из этих равенств и формул (I) находим $x=1$, $y=-2$, $z=3$, т.е. координаты точки $O_1$.

**Пример 4.25.** Определить вид и параметры поверхности

$$2x^2+3y^2-6z^2-8x+6y+12z-1=0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$2(x^2-4x+4)+3(y^2+2y+1)-6(z^2-2z+1)-8-3+6-1=0,$$

$$2(x-2)^2+3(y+1)^2-6(z-1)^2=6.$$

Переходя к новым координатам по формулам $X=x-2$, $Y=y+1$, $Z=z-1$, получаем

$$2X^2+3Y^2-6Z^2=6, \text{ или } X^2/3+Y^2/2-Z^2/1=1.$$

Это уравнение определяет однополостный гиперболоид (см. (4.52)), для которого $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $c=1$, с центром в точке $O_1(2,-1,1)$.

**Пример 4.26.** Доказать, что уравнение $z=xy$ определяет гиперболический параболоид.

Введем новые координаты по формулам $x=X-Y$, $y=X+Y$, $z=Z$, тогда уравнеиие примет вид

$$Z=(X-Y)(X+Y),\ Z=X^2-Y^2.$$

Полученное уравнение является уравнением вида (4.56), для которого $2a^2=1$, $2b^2=1$; оно определяет гиперболический параболоид.

**Пример 4.27.** Доказать что уравнение $x^2=yz$ определяет конус.

Переходя к новым координатам по формулам $x=X$, $y=Z-Y$, $z=Z+Y$, получаем $X^2=(Z-Y)(Z+Y)$, $X^2=Z^2-Y^2$, или $X^2+Y^2-Z^2=0$.

Полученное уравнение является уравнением вида (4.54), для которого $a=b=c=1$, оно определяет конус.

## 4.10. Некоторые другие поверхности

В плоскости $Oxz$ ($y=0$) задана линия $l_1$ своими параметрическими уравнениями

$$x = f(u),\ z = \varphi(u), \tag{4.71}$$

не пересекающая ось $Oz$. Рассмотрим поверхность, полученную вращением этой линии вокруг оси $Oz$.

Параметрические уравнения рассматриваемой поверхности вращения имеют вид

$$x = f(u)\cos v,\ y = f(u)\sin v,\ z = \varphi(u). \tag{4.72}$$

**Тор** – поверхность, полученная вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости данной окружности и не пересекающей ее. Эта поверхность напоминает спасательный круг, камеру автомобильной шины (рис. 4.22).

Рассмотрим тор, полученный вращением вокруг оси $Oz$ окружности, заданной параметрическими уравнениями

$$x = a + b\cos u,\ y = 0,\ z = b\sin u \quad (b < a).$$

Эта окружность лежит в плоскости $Oxz$ ($y = 0$) и определяется уравнениями вида (4.71), где $f(u) = a + b\cos u$, $\varphi(u) = b\sin u$.

В соответствии с(4.72) получаем параметрические уравнения тора

$$x = (a + b\cos u)\cos v,\ y = (a + b\cos u)\sin v,\ z = b\sin u. \tag{4.73}$$

**Катеноид** – поверхность, полученная вращением цепной линии вокруг ее оси (рис. 4.23). Рассмотрим катеноид, полученный вращением вокруг оси $Oz$ цепной линии, заданной параметрическими уравнениями

$$x = a\,\mathrm{ch}\,(u/a),\ y = 0,\ z = u.$$

Эта линия расположена в плоскости $Oxz$ $(y = 0)$. Она определена уравнениями вида (4.71), где $f(u) = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)$, $\varphi(u) = u$. В соответствии с (4.72) находят

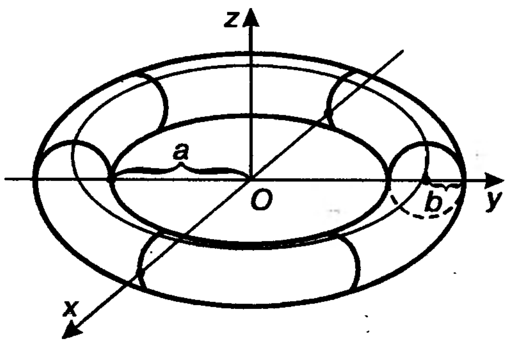


Рис. 4.22

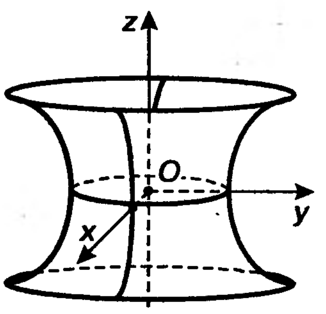


Рис. 4.23

параметрические уравнения катеноида

$$x = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)\cos v,\ y = a\,\mathrm{ch}\,(u/a)\sin v,\ z = u.$$

Исключая из этих уравнений параметры $u$, $v$, получаем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = (a/2)\left(e^{z/a} + e^{-z/a}\right). \tag{4.74}$$

Катеноид является единственной минимальной поверхностью среди поверхностей вращения. Минимальные поверхности возникли при решении следующей задачи: среди всех поверхностей, проходящих через данную замкнутую пространственную линию, найти ту, которая имеет минимальную площадь поверхности, ограниченной данной линией. Отсюда происходит и название такой поверхности. Бельгийский физик Плато предложил простой экспериментальный способ получения минимальных поверхностей посредством мыльных пленок, натянутых на проволочный каркас.

Катеноид обладает следующим свойством. Рассмотрим две окружности, полученные пересечением катеноида (4.74) соответственно плоскостями $z = -c$, $z = c$. Любая поверхность, края которой совпадают с этими окружностями, имеет площадь большую, чем часть катеноида, расположенная между указанными окружностями. Мыльная пленка, соединяющая данные окружности под действием сил внутреннего натяжения, принимает форму катеноида.

**Геликоид** – поверхность, описанная прямой, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси, пересекает ось под постоянным углом $\alpha$ и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси. При $\alpha = 90°$ геликоид называют прямым (рис. 4.24, *а*), при $\alpha \neq 90°$ геликоид называют косым (рис. 4.24, б).

Рассмотрим прямой геликоид, описанный прямой, перпендикулярной оси $Oz$ (см. рис. 4.24, *а*). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности, $P$ – ее проекция на плоскость $Oxy$, $Q$, $L$ – проекции точки $P$ соответственно на оси $Ox$, $Oy$. Обозначим через $u$ расстояние точки $M$ до оси $Oz$ ($|MN| = |OP| = u$), а через $v$ – угол, образуемый отрезком $OP$ с осью $Ox$.

Параметрические уравнения геликоида имеют вид

$$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = av,$$

где $a$ – некоторая постоянная.

Наглядное представление о положении отдельных прямых (лучей) при $v = \mathrm{const}$ дают ступени винтовой лестницы.

Представление о геликоиде можно составить, например, наблюдая движение винта вертолета при его вертикальном взлете. Отметим, что первоначально вертолеты называли геликоптерами, винтокрылыми. Первый эскиз геликоида был нарисован еще Леонардо да Винчи.

Разнообразные геликоиды широко применяются на практике. Это объясняется следующим: геликоид образован сложением двух самых распространенных видов равномерного движения – прямолинейного и вращательного. Вследствие этого геликоид можно применить там, где необходимо перейти от одного из указанных видов движения к другому, что имеет место практически в любой машине.

**Псевдосфера** – поверхность, полученная вращением трактрисы вокруг ее асимптоты (рис. 4.25). Рассмотрим псевдосферу, полученную вращением вокруг оси $Oz$ трактрисы

$$x = a\sin u,\ y = 0,\ z = a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u).$$

Эта трактриса лежит в плоскости $Oxz$ $(y = 0)$, ось $Oz$ служит ее асимптотой. Линия задана параметрическими уравнениями вида (4.71), где $f(u) = a\sin u$,

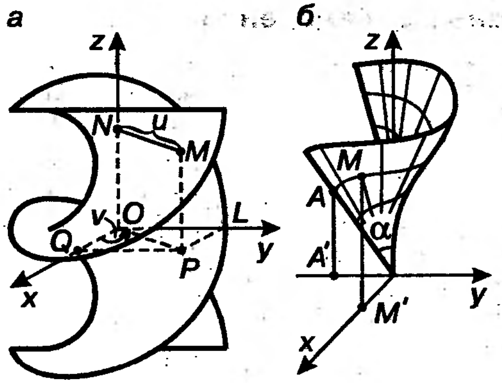


Рис. 4.24

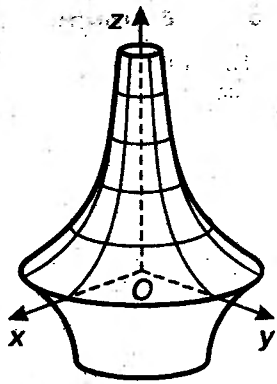


Рис. 4.25

$\varphi(u) = a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$. В соответствии с (4.72) получены параметрические уравнения псевдосферы

$$x = a\sin u\cos v,\ y = a\sin u\sin v,\ z = a\,(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u).$$

Важность псевдосферы состоит в том, что на ней частично реализуется плоская неевклидова геометрия Лобачевского. Этот удивительный факт установил итальянский математик Эудженио Бельтрами в 1868 г., уже после смерти Н.И. Лобачевского.

# II
# АЛГЕБРА

## Глава 5

# МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## 5.1. Матрицы. Основные определения

Матрицей называется система $m \cdot n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из $m$ строк и $n$ столбцов. Числа этой таблицы называются элементами матрицы. Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ составляют $i$-ю строку $(i = 1, 2, \ldots, m)$, элементы $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}$ составляют $k$-й столбец $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $a_{ik}$ – элемент, принадлежащий $i$-й строке и $k$-му столбцу матрицы, числа $i$, $k$ называют индексами элемента. Матрицу, имеющую $m$ строк и $n$ столбцов, называют матрицей размеров $m \times n$ (читается $m$ на $n$). Употребляются и более краткие обозначения матрицы размеров $m \times n$:

$$[a_{ik}]_{mn},\ (a_{ik})_{mn},\ \|a_{ik}\|_{mn}.$$

Матрицу обозначают также одной заглавной буквой, например

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если необходимо отметить, что матрица $A$ имеет $m$ строк и $n$ столбцов, т. е. необходимо указать ее размеры, то пишут $A_{m \times n}$ или $A_{mn}$.

Две матрицы $A_{mn} = (a_{ik})_{mn}$, $B_{pq} = (b_{ik})_{pq}$ называются равными, если $p = m$, $q = n$ и $a_{ik} = b_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$; другими словами, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны.

Матрица, состоящая из одной строки, называется строчной матрицей, или матрицей-строкой. Строчная матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},$$

имеющая один столбец, называется столбцовой матрицей, или матрицей-столбцом.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Нулевую матрицу обозначают буквой $O$:

$$O \doteq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Квадратной называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов $(m = n)$, т. е. матрица вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк.

Будем говорить, что элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – вторую диагональ.

Квадратная матрица называется симметрической, если $a_{ik} = a_{ki}$, т. е. равны ее элементы, симметричные относительно главной диагонали.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, т. е. матрица

$$\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Скалярной называется диагональная матрица, у которой $a_{ii} = c$ $(c = \text{const})$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

Единичной называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой $E$:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Треугольной называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица произвольных размеров вида

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (5.1)$$

где $a_{ii} \neq 0$ $(i=1,2,\dots,r)$, называется квазитреугольной (ступенчатой или трапециевидной).

Матрица $A^{\mathrm{T}}$, полученная из данной матрицы $A$ заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной относительно $A$. Если $A$ – матрица размером $m \times n$, то $A^{\mathrm{T}}$ имеет размеры $n \times m$:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Например, если $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, то $A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

Элементарными преобразованиями матрицы называют следующие преобразования: 1) умножение строки (или столбца) матрицы на число, отличное от нуля; 2) прибавление к элементам строки (столбца) соответственных элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число; 3) перестановка местами двух строк (столбцов).

Термин «матрица» был введен Д. Сильвестром в 1851 г.

## 5.2. Линейные действия над матрицами

Линейными действиями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матриц на число. Сложение и вычитание определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A=(a_{ik})_{mn}$, $B_{mn}=(b_{ik})_{mn}$ называется такая матрица $C=(c_{ik})_{mn}$, что

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \quad (i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n), \tag{5.2}$$

т. е. матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых. Сумма двух матриц $A$ и $B$ обозначается $A+B$.

Разностью двух матриц $A=(a_{ik})_{mn}$, $B_{mn}=(b_{ik})_{mn}$ называется матрица $D=(d_{ik})_{mn}$, для которой

$$d_{ik}=a_{ik}-b_{ik} \quad (i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n). \tag{5.3}$$

Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{mn}$ на число $\alpha$ (или числа $\alpha$ на матрицу $A$) называется матрица $B=(b_{ik})_{mn}$, для которой

$$b_{ik}=\alpha a_{ik} \quad (i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n), \tag{5.4}$$

т. е. матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число $\alpha$. Произведение матрицы $A$ на число $\alpha$ обозначается $A\alpha$ (или $\alpha A$).

Матрицу $(-1)A$ называют матрицей, противоположной матрице $A$, и обозначают $-A$.

З а м е ч а н и е. Разность $A-B$ двух матриц можно определить так:

$$A-B=A+(-B). \tag{5.5}$$

Линейные действия над матрицами обладают следующими свойствами: 1) $A+B=B+A$; 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$; 3) $A+O=A$; 4) $A+(-A)=O$; 5) $1\cdot A=A$; 6) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$; 7) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$; 8) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, где $A$, $B$, $C$ – матрицы одних и тех же размеров; $O$ – нулевая матрица; $(-A)$ – матрица, противоположная матрице $A$; $\alpha$, $\beta$ – любые действительные числа.

П р и м е р 5.1. Найти сумму и разность двух матриц

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 6 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 2\\ 6 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулами (5.2) и (5.3) получаем

$$A+B=\begin{bmatrix}1+8 & 3+2\\ 2+6 & 5+3\\ 6+1 & 4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 5\\ 8 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix},\quad A-B=\begin{bmatrix}1-8 & 3-2\\ 2-6 & 5-3\\ 6-1 & 4-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ -4 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}.$$

Пример 5.2. Даны две матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Найти $3A-2B$.

В соответствии с формулами (5.4) и (5.5) получаем $3A$, $-2B$, и $3A-2B=3A+(-2B)$:

$$3A=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 12 & 9\\ 18 & 15\end{bmatrix},\quad -2B=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ -4 & 4\\ -2 & 6\end{bmatrix},\quad 3A-2B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 8 & 13\\ 16 & 21\end{bmatrix}.$$

## 5.3. Произведение матриц. Многочлены от матриц

Произведение определяется для квадратных матриц одного и того же порядка, а также для прямоугольных матриц, у которых число столбцов матрицы множимого равно числу строк матрицы множителя.

Произведением матрицы $A_{mn}=(a_{ik})_{mn}$ на матрицу $B_{nl}=(a_{ik})_{nl}$ называется такая матрица $C_{ml}=(c_{ik})_{ml}$, для которой

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}, \tag{5.6}$$

т. е. элемент $c_{ik}$ матрицы $C_{ml}$ равен сумме произведений элементов $i$-й строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $k$-го столбца матрицы $B_{nl}$. Матрица $C_{ml}$ имеет $m$ строк (как и матрица $A$) и $l$ столбцов (как и матрица $B_{nl}$). Произведение матрицы $A$ на матрицу $B$ обозначается $AB$.

Замечание. Из того, что матрицу $A$ можно умножить на $B$, не следует, что матрицу $B$ можно умножать на $A$. В общем случае $AB\neq BA$. Если $AB=BA$, то матрицы $A$ и $B$ называются перестановочными или коммутативными.

При умножении матриц единичная матрица $E$ играет роль единицы, а нулевая матрица $O$ – роль нуля, так как $AE=EA=A$, $AO=OA=O$.

Умножение матриц обладает следующими свойствами. Если имеют смысл соответствующие действия, то выполняются равенства: 1) $(AB)C=A(BC)$; 2) $\alpha(AB)=(\alpha A)B$; 3) $(A+B)C=AC+BC$; 4) $C(A+B)=CA+CB$, где $\alpha$ – любое действительное число.

Отметим, что $(AB)' = B'A'$, где штрихом обозначена матрица, транспонированная данной.

Целой положительной степенью $A^k$ $(k>1)$ квадратной матрицы $A$ называется произведение $k$ матриц, каждая из которых равна $A$, т.е. $A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ раз}}$. Матрица $A^k$ имеет тот же порядок, что и матрица $A$. Нулевой степенью квадратной матрицы $A$ $(A \neq 0)$ называется единичная матрица того же порядка, что и $A$, т. е. $A^0 = E$. Первой степенью $A^1$ матрицы $A$ называется сама матрица $A$, т. е. $A^1 = A$. Многочленом (или полиномом) степени $k$ ($k$ — целое неотрицательное число) от квадратной матрицы $A$ называется выражение вида

$$a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 A^0,$$

где $a_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ – любые числа, причем $a_k \neq 0$. Обозначим многочлен от матрицы $A$ через $P(A)$, тогда по определению

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 A^0,$$

или

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \ldots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 E. \tag{5.7}$$

Из определения следует, что многочлен от матрицы можно получить, если в обычный многочлен $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ вместо $x$ подставить квадратную матрицу (и учесть, что $A^0 = E$).

Пусть дан многочлен $P(x)$. Если $P(A)$ является нулевой матрицей, т. е. $P(A) = O$, то матрица $A$ называется корнем многочлена $P(x)$, а многочлен $P(x)$ — аннулирующим многочленом для матрицы $A$.

Пример 5.3. Найти произведение $AB$ и $BA$ матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Обе матрицы являются квадратными матрицами одного и того же порядка (второго), поэтому можно получить произведения $AB$ и $BA$. Применяя формулу (5.6) для случая $m = n = 2$, $n = l = 2$, получаем

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(-5)+2(-6) & 1\cdot 7+2\cdot 8 \\ 3(-5)+4(-6) & 3\cdot 7+4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 23 \\ -39 & 53 \end{bmatrix};$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)1+7\cdot 3 & (-5)2+7\cdot 4 \\ (-6)1+8\cdot 3 & (-6)2+8\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 18 \\ 18 & 20 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что $AB \neq BA$, т. е. результат умножения зависит от порядка множителей.

П р и м е р 5.4. Даны две матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 6 & 5 & 7 & -8 \\ 9 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 6 & -3 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Найти произведение $AB$. Можно ли получить произведение $BA$?

Число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$ (ширина матрицы $A$ равна высоте матрицы $B$), поэтому произведение $AB$ определено. Умножая строку матрицы $A$ на столбец матрицы $B$, по формуле (5.6) получаем

$$AB=\begin{bmatrix} 3\cdot4+1\cdot5+2\cdot6+(-4)8 & 3(-1)+1(-2)+2(-3)+(-4)(-7) \\ 6\cdot4+5\cdot5+7\cdot6+(-8)8 & 6(-1)+5(-2)+7(-3)+(-8)(-7) \\ 9\cdot4+0\cdot5+1\cdot6+(-2)8 & 9(-1)+0(-2)+1(-3)+(-2)(-7) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 12+5+12-32 & -3-2-6+28 \\ 24+25+42-64 & -6-10-21+56 \\ 36+0+6-16 & -9+0-3+14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 17 \\ 27 & 19 \\ 26 & 2 \end{bmatrix}.$$

Произведение $BA$ не определено, так как число столбцов матрицы $B$ не равно числу строк матрицы $A$.

П р и м е р 5.5. Найти многочлен $P(A)$, если $P(x)=x^2-3x+5$ и $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

В соответствии с определением многочлена от матрицы (см. формулу (5.7)) получаем $P(A)=A^2-3A+5E$ или

$$P(A)=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^2-3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -10 & 21 \end{bmatrix}.$$

## 5.4. Определители и их свойства

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

называется число, равное $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ и обозначаемое символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{т. е.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (5.8)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя матрицы второго порядка. Каждый элемент определителя обозначен буквой $a$ с двумя индексами; первый (1) обозначает номер строки, второй (2) – номер столбца, на пересечении которых находится соответствующий элемент (например, элемент $a_{21}$ принадлежит второй строке и первому столбцу определителя).

Определитель матрицы называют также детерминантом. Для определителя матрицы употребляются следующие обозначения:

$$|A|, \ \det A, \ \det(a_{ik}), \ \Delta.$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части этой формулы представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком плюс, какие со знаком минус, полезно правило, схематически изображенное на рис. 5.1.

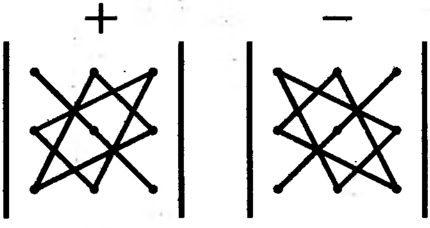


Рис. 5.1

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит данный элемент. Минор элемента $a_{ik}$ обозначим $M_{ik}$.

Алгебраическим дополнением элемента $a_{ik}$ определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$. Алгебраическое дополнение элемента $a_{ik}$ будем обозначать через $A_{ik}$. В соответствии с определением $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Определители матриц второго порядка и третьего порядка короче называют определителями второго и третьего порядка.

Свойства определителей:

1) определитель не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами;

2) при перестановке двух соседних строк (столбцов) определитель меняет лишь знак;

3) определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю;

4) множитель, общий для элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя;

5) определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю;

6) определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель;

7) определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Например, $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Эта формула выражает разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.

По аналогии с формулой (5.10) вводятся определители четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k}, \quad (5.11)$$

или

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k},$$

где $A_{1k}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{1k}$, $n = 4$; определители пятого порядка и т. д.

**Теорема 5.1** (теорема замещения). *Суммы произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ соответственно на алгебраические дополнения элементов некоторого столбца (строки) матрицы порядка n равны определителю матрицы, которая получается из данной заменой элементов этого столбца (строки) числами $b_1, b_2, \dots, b_n$.*

**Теорема 5.2** (теорема аннулирования). *Сумма произведений элементов одного из столбцов (строк) матрицы на соответствующие алгебраические дополнения элементов другого столбца (строки) равна нулю.*

**Теорема 5.3.** *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц:*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Название «детерминант» предложил Гаусс. Современное изложение теории определителей дал Коши. Обозначение определителя в виде квадратной таблицы чисел с двумя вертикальными чертами ввел Кэли в 1841 г.

**Пример 5.7.** Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$.

В соответствии с формулой (5.8) получаем $\Delta = 7 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 50$.

**Пример 5.8.** Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4273 & 3273 \\ 4274 & 3274 \end{vmatrix}$.

Умножая первую строку на $-1$ и прибавляя ко второй, находим

$$\begin{vmatrix} 4273 & 3273 \\ 4274 & 3274 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4273 & 3273 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4273 - 3273 = 1000.$$

**Пример 5.9.** Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

тремя способами: 1) по определению; 2) по формуле (5.10); 3) преобразованием его с помощью свойств.

1) $\Delta = 1 \cdot 6(-8) + 2(-1)3 + 2 \cdot 5(-4) - (-4)6 \cdot 3 - 2 \cdot 2(-8) - 1 \cdot 5(-1) = 15.$

2) $\Delta = 1\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(-43) - 2(-13) - 4(-8) = 15.$

3) Умножая первую строку на $(-2)$ и прибавляя ко второй, затем умножая первую строку на $(-3)$ и прибавляя к третьей, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам первого столбца, находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-7) = 15.$$

**Пример 5.10.** Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&8&3\\3&2&1&2\\4&2&4&1\end{bmatrix},\text{ т. е. }\det A=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&1&8&3\\3&2&1&2\\4&2&4&1\end{vmatrix}.$$

Применяя формулу (5.11), получаем

$$\det A=\begin{vmatrix}1&8&3\\2&1&2\\2&4&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&8&3\\3&1&2\\4&4&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&3\\3&2&2\\4&2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1&8\\3&2&1\\4&2&4\end{vmatrix}.$$

Вычисляя определители третьего порядка, находим $\det A = 27 - 50 + (-5) - (-12) = -16$.

**Замечание.** Этот определитель можно вычислить путем его преобразований на основании свойств:

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&1&8&3\\3&2&1&2\\4&2&4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&-1&6&1\\3&-1&-2&-1\\4&-2&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&6&1\\-1&-2&-1\\-2&0&-3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-1&6&1\\0&-8&-2\\0&-12&-5\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-8&-2\\-12&-5\end{vmatrix}=-16.$$

## 5.5. Обратная матрица

Матрицей, обратной квадратной матрице $A$, называется квадратная матрица $A^{-1}$, удовлетворяющая равенствам

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, \tag{5.12}$$

где $E$ – единичная матрица.

Квадратная матрица называется невырожденной или неособенной, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной или особенной.

Всякая невырожденная квадратная матрица

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix} \tag{5.13}$$

имеет единственную обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

где $A_{ik}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{ik}$ матрицы $A$. Отметим, что алгебраические дополнения элементов каждой строки матрицы $A$ в формуле (5.14) записаны в столбец с тем же номером.

В случаях $n=2$ и $n=3$ формулы (5.13) и (5.14) принимают соответственно вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Теорема 5.4. *Произвольную невырожденную матрицу $A$ с помощью элементарных преобразований можно привести к единичной матрице $E$:*

$$A \to E. \tag{5.17}$$

Теорема 5.5. *Если к единичной матрице порядка $n$ применить те же элементарные преобразования только над строками и в том же порядке, с помощью которых невырожденная квадратная матрица $A$ порядка $n$ приводится к единичной, то полученная при этом матрица будет обратной матрице $A$.*

Эта теорема дает способ нахождения матрицы, обратной данной, с помощью элементарных преобразований. При этом удобно записывать матрицы $A$ и $E$ рядом, отделяя их вертикальной чертой (рассматривать расширенную матрицу $(A\,|\,E)$), и одновременно производить элементарные преобразования над строками матриц $A$ и $E$. В результате преобразования строк матрица $(A\,|\,E)$ преобразуется в матрицу $(E\,|\,A^{-1})$:

$$(A\,|\,E) \to (E\,|\,A^{-1}). \tag{5.18}$$

Этот метод вычисления обратной матрицы называют методом Жордана.

Замечание 1. Теорема 5.5. верна применительно к элементарным преобразованиям над строками. Когда преобразования производятся над столбцами, то матрицу $E$ располагают под матрицей $A$, рассматривают расширенную матрицу $\left[\frac{A}{E}\right]$, тогда

$$\left[\frac{A}{E}\right] \to \left[\frac{E}{A^{-1}}\right]. \tag{5.19}$$

Замечание 2. Если в соотношении (5.18) на место единичной матрицы справа от вертикальной черты поставить матрицу $B$, то в результате соответствующих преобразований получим матрицу $A^{-1}B$:

$$[A\,|\,B] \to [E\,|\,A^{-1}B]. \tag{5.20}$$

З а м е ч а н и е 3. Если в соотношении (5.19) на место единичной матрицы под горизонтальной чертой поставить матрицу $B$, то в результате соответствующих преобразований получим матрицу $BA^{-1}$:

$$\left[\frac{A}{B}\right] \to \left[\frac{E}{BA^{-1}}\right]. \tag{5.21}$$

Обратная матрица используется при решении матричных уравнений вида

$$AX = B, \; YA = B, \tag{5.22}$$

где $A$, $B$ – невырожденные квадратные матрицы одного и того же порядка. Эти уравнения имеют соответственно решения

$$X = A^{-1}B, \; Y = BA^{-1}. \tag{5.23}$$

Матрицы $A^{-1}B$ и $BA^{-1}$ можно найти с помощью элементарных преобразований в соответствии с соотношениями (5.20) и (5.21).

П р и м е р 5.11. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Так как $\det A = 2$, т. е. $\det A \neq 0$, то матрица $A$ имеет обратную. Поскольку $A_{11} = 3$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = -5$, $A_{22} = 4$, то по второй из формул (5.15) находим

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -2{,}5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

П р и м е р 5.12. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель данной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 3 & 10 \\ 15 & 6 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица $A$ имеет обратную матрицу. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы $A$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 15 & 6 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

По второй из формул (5.16) находим

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 10 & -5 & 1\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 10 & -5 & 1\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

П р и м е р 5.13. С помощью элементарных преобразований найти матрицу $A^{-1}$, обратную матрице

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Составляем матрицу $(A\,|\,E)$ и преобразуем ее; приводя матрицу $A$ к единичной, матрица $E$ будет приведена к $A^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\end{array}\right],$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Вторая матрица получена из первой в результате следующих элементарных преобразований: элементы первой строки умножены на $(-1)$ и сложены с элементами второй строки, элементы первой строки умножены на $(-2)$ и сложены с элементами третьей строки.

Умножив последнюю строку второй матрицы на $(-1)$, получим третью матрицу (матрица $A$ приведена к верхней треугольной форме).

Умножая третью строку на $(-1)$ и прибавляя ее ко второй, а затем к первой строке, получаем четвертую матрицу. Умножая ее вторую строку на $(-1)$ и прибавляя к первой строке, получаем пятую матрицу: слева от черты – единичная матрица, справа – матрица $A^{-1}$, обратная исходной матрице $A$.

З а м е ч а н и е. Элементарные преобразования производятся в два этапа: 1) матрица $A$ преобразуется к верхней треугольной форме с единичными диагональными элементами (путем преобразования строк «сверху вниз»); 2) полученная матрица преобразуется к единичной (путем преобразования строк «снизу вверх»).

**Пример 5.14.** Даны две матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу $X$, удовлетворяющую уравнению $AX = B$.

Это уравнение разрешимо, так как $\det A \neq 0$, его решение $X = A^{-1}B$ (см. первую из формул (5.23)). Матрицу $A^{-1}B$ найдем с помощью элементарных преобразований в соответствии с соотношением (5.20). Составляем матрицу $[A \mid B]$, преобразуем ее, приводя матрицу $A$ к единичной:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 8 & -1 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & 3 & -7 \\ 0 & -5 & -8 & -18 & 5 & -13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & -18 & 5 & -13 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -8 & -18 & 5 & -13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1}B = X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Называя шагом переход от одной матрицы к другой, дадим пояснения к выполненным преобразованиям. I шаг – поменяли местами первую и третью строки (чтобы $a_{11} = 1$). II шаг – первую строку умножили на $-2$ и прибавили ко второй; первую строку умножили на $-3$ и прибавили к третьей. III шаг – третью строку умножили на $-1$ и прибавили ко второй. IV шаг – вторую строку умножили на $1/2$. V шаг – вторую строку умножили на 5 и прибавили к третьей. VI шаг – третью строку умножили на $1/2$. VII шаг – третью строку умножили на $-3$ и прибавили к первой; третью строку умножили на $-2$ и прибавили ко второй. VIII шаг – вторую строку умножили на $-2$ и прибавили к первой.

## 5.6. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу размером $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Выберем в ней произвольно $s$ различных строк и $s$ различных столбцов, причем $1 < s \le \min(m, n)$, где $\min(m, n)$ – меньшее из чисел $m$ и $n$. Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют матрицу порядка $s$. Определитель этой матрицы называется минором порядка $s$ матрицы $A$. Например, если дана матрица

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & -6 & 3 & 8 & 0 \\ 4 & -5 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

то, взяв первую и третью строку, третий и пятый столбец, получим матрицу второго порядка и ее определитель

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = -43.$$

Этот определитель является минором второго порядка для исходной матрицы. Аналогично можно получить другие миноры второго порядка, а также миноры третьего порядка. Некоторые из миноров могут оказаться равными нулю.

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Ранг матрицы $A$ обозначают одним из символов: $r_A$, $\operatorname{rang} A$, $r$. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг ее считается равным нулю.

Из определения ранга матрицы получаем следующие утверждения.

1. Ранг матрицы выражается целым числом, заключенным между 0 и меньшим из чисел $m$, $n$, т. е. $0 \le r \le \min(m, n)$.

.... Ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица нулевая.

3. Для квадратной матрицы $n$-го порядка $r = n$ тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

При нахождении ранга матрицы можно пользоваться свойствами миноров. Если все миноры порядка $k$ данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка также равны нулю. Таким образом, если среди миноров порядка $k$ данной матрицы есть отличные от нуля, а все миноры порядка $k+1$ равны нулю или не существуют, то $r = k$.

Отметим некоторые очевидные свойства ранга матрицы.

1. Ранг матрицы, полученной из данной транспонированием, равеи рангу исходиой матрицы.

2. Ранг матрицы не изменится, если вычеркнуть или приписать нулевую строку (т. е. строку, все элементы которой равны нулю) или нулевой столбец.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к квазитреугольной форме. Ранг квазитреугольной матрицы (5.1) равен $r$, поскольку ее минор с главной диагональю $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ равен произведению $a_{11}a_{22}\dots a_{rr} \neq 0$, а все миноры более высокого порядка равны нулю (как содержащие нулевые строки).

**Пример 5.15.** Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Среди миноров второго порядка этой матрицы имеется один, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Все миноры третьего порядка равны нулю. Следовательно, ранг данной матрицы равен двум $(r = 2)$.

**Пример 5.16.** Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Применяя элементарные преобразования, приводим данную матрицу к квазитреугольной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Вторая матрица получена из первой путем поочередного умножения первой строки на $(-1)$, $(-8)$, $1$ и прибавления ко второй, третьей и четвертой строкам; третья матрица получена из второй путем прибавления второй строки к третьей.)

Ранг последней матрицы равен трем, так как имеется отличный от нуля минор третьего порядка этой матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 18 = 18 \neq 0,$$

а определитель самой матрицы (определитель четвертого порядка) равен нулю (как содержащий нулевую строку). Следовательно, ранг исходной матрицы равен трем $(r = 3)$.

## Глава 6

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 6.1. Линейные системы. Основные определения

Системой уравнений называют множество уравнений с $n$ неизвестными ($n \geq 2$), для которых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы.

Системой $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или линейной системой, называется система вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $a_{ik}, b_i$ – числа. Числа $a_{ik}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$) называются коэффициентами, $b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) – свободными членами. Коэффициенты обозначены буквой $a$ с двумя индексами $i$ и $k$: первый ($i$) указывает номер уравнения, второй ($k$) – номер неизвестной, к которой относится данный коэффицнент. Число уравнений $m$ может быть больше, равно или меньше числа неизвестных $n$.

Линейная система называется неоднородной, если среди свободных членов имеются отличные от нуля. Если все свободные члены равны нулю, то линейная система называется однородной. Однородная линейная система имеет вид

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Решением линейной системы (6.1) называется упорядоченная совокупность $n$ чисел

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \tag{6.3}$$

подстановка которых вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно ($x_1 = c_1$, $x_2 = c_2, \ldots$ $\ldots, x_n = c_n$) обращает в тождество каждое из уравнений этой системы.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а система, не имеющая ни одного решения, – несовместной. Отметим, что однородная система всегда совместна, так как она имеет нулевое решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной. Совместная система называется неопределенной, если она имеет более одного решения.

Две системы называются эквивалентными или равносильными, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т. е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования: 1) умножение уравнения системы на число, отличное от нуля; 2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на любое число; 3) перестановка местами двух уравнений системы.

При элементарных преобразованиях линейной системы получают систему, равносильную данной.

Выражение «решить линейную систему» означает выяснить, совместна она или несовместна; в случае совместности – найти все ее решения.

## 6.2. Матричная запись линейной системы

Линейную систему (6.1) можно записать в матричном виде. Матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (6.1), называется основной матрицей системы (или матрицей системы). Матрица

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}, \tag{6.5}$$

полученная из основной присоединением столбца свободных членов, называется расширенной матрицей системы (6.1).

Рассмотрим столбцовые матрицы, составленные из неизвестных и свободных членов:

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Поскольку матрица $A$ согласована с матрицей $X$ (число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $X$), то можно найти произведение

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Элементами этой столбцовой матрицы являются левые части уравнений системы (6.1), поэтому на основании определения равенства матриц

$$AX = B. \tag{6.7}$$

Таким образом, система линейных уравнений (6.1) записана в виде одного матричного уравнения (6.7), где $A$, $X$, $B$ определяются формулами (6.4) и (6.6); эта запись системы называется матричной.

Каждой линейной системе (6.1) соответствует единственная пара матриц $A$, $B$ и обратно: каждой паре матриц – единственная линейная система. Система (6.1) может быть записана и в таком виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Если $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – решение системы (6.1), то матрица

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

называется вектор-решением этой системы. Матрица (6.9) удовлетворяет уравнению (6.7).

П р и м е р 6.1. Представить в матричной форме линейную систему уравнений

$$2x_1 + 3x_2 = 8,$$
$$5x_1 + x_2 = 7.$$

В данном случае формулы (6.4) и (6.6) запишутся так:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

поэтому уравнение (6.7) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Эта система имеет вектор-решение $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

З а м е ч а н и е. В соответствии с формулой (6.8) данная система представима в виде

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

## 6.3. Невырожденные линейные системы

Определителем системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{6.10}$$

называется определитель матрицы из коэффициентов уравнений этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6.11}$$

Обозначим через $\Delta_k$ определитель, полученный заменой в определителе $\Delta$ столбца из коэффициентов при неизвестной $x_k$ столбцом свободных членов системы (6.10):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{6.12}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Линейная система (6.10) называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля $(\Delta \neq 0)$.

Теорема 6.1. *Невырожденная линейная система (6.10) имеет единственное решение*

$$x_1 = \Delta_1/\Delta, \quad x_2 = \Delta_2/\Delta, \quad \ldots, \quad x_n = \Delta_n/\Delta, \tag{6.13}$$

*где $\Delta$ и $\Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определены соответственно формулами* (6.11) *и* (6.12).

Эта теорема называется теоремой Крамера, а формулы (6.13) – формулами Крамера.

Следствие из теоремы Крамера. *Если однородная линейная система*

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{aligned}$$

*имеет ненулевое решение, то ее определитель $\Delta$ равен нулю.*

Систему (6.10) $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными можно записать в матричном виде

$$AX = B, \tag{6.14}$$

где

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 2 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 2 & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & 2 & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \qquad (6.15)$$

Если система является невырожденной, т. е. $\det A \neq 0$, то она имеет единственное решение

$$X = A^{-1}B, \qquad (6.16)$$

где $A^{-1}$ – матрица, обратная матрице $A$, а $B$ определяется третьей из формул (6.15).

Пример 6.2. Решить систему уравнений

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 1,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5,$$
$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4.$$

Составим определитель системы $\Delta$ и определители $\Delta_k (k = 1, 2, 3)$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Определитель системы $\Delta = 21 \neq 0$, т. е. данная система является невырожденной, поэтому применимы теорема 6.1 и формулы (6.13). Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; пользуемся формулами (6.13), полагая в них $n = 3$. Так как $\Delta_1 = 42$, $\Delta_2 = 63$, $\Delta_3 = 21$, то

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = \frac{42}{21} = 2,\ x_2 = \Delta_2/\Delta = \frac{63}{21} = 3,\ x_3 = \Delta_3/\Delta = \frac{21}{21} = 1.$$

Пример 6.3. Решить систему уравнений

$$4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9,$$
$$2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4,$$
$$5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18.$$

Данную систему запишем в матричном виде (6.14), где

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы $A$, находим матрицу $A^{-1}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 39, \quad A^{-1} = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{bmatrix}.$$

По формуле (6.16) получаем решение системы

$$X = \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 8 & 6 & -1 \\ -11 & -18 & 16 \\ -13 & -39 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 78 \\ 117 \\ 195 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

## 6.4. Произвольные линейные системы

Рассмотрим линейную систему (6.1), ее основную матрицу $A$ и расширенную $\widetilde{A}$, определяемую формулой (6.5).

Теорема 6.2. (Кронекера – Капелли). *Для совместности системы* (6.1) *необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы.*

Теорема 6.3. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.*

Теорема 6.4. *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.*

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу этой матрицы. Базисными неизвестными совместной системы, ранг матрицы которой равен $r$, назовем $r$ неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные назовем свободными.

Из теорем 6.2 – 6.4 следует, что решение системы линейных уравнений можно производить следующим образом.

1. Находят ранг $r$ матрицы $A$ системы и ранг $\widetilde{r}$ расширенной матрицы $\widetilde{A}$. Если $r \neq \widetilde{r}$, то система несовместна.

2. Если $r = \widetilde{r}$, то выделяют базисный минор и базисные неизвестные. Исходную систему уравнений заменяют эквивалентной ей системой, состоящей из тех $r$ уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

Отметим, что в случае, когда число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Если число базисных неизвестных меньше числа всех неизвестных, то из соответствующей системы находят выражения базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получают бесконечное множество решений исходной системы.

Пример 6.4. Решить систему уравнений

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1,$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5,$$
$$5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8.$$

Поскольку

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 5 & -8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 7 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = 2;$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{r} = 2; \; r = \widetilde{r},$$

то система совместна. В матрице $A$ минор $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, ему соответствует система уравнений $x_1 - 3x_2 = 1 - 2x_3$, $2x_1 + x_2 = 5 + 4x_3$, в которой $x_1$, $x_2$ – базисные неизвестные, $x_3$ – свободная неизвестная. Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$x_1 = (10x_3 + 16)/7, \; x_2 = (8x_3 + 3)/7,$$

где $x_3$ может принимать любые действительные значения.

## 6.5. Метод Гаусса

Пусть дана система (6.1) $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса, применяемый для решения системы (6.1), состоит в следующем.

Предполагая, что $a_{11} \neq 0$ (это всегда можно сделать сменой нумерации уравнений), умножая первое уравнение системы (6.1) на $-a_{21}/a_{11}$ и прибавляя ко второму, получаем уравнение, в котором коэффициент при $x_1$ обращается в нуль. Умножая первое уравнение на $-a_{31}/a_{11}$ и прибавляя к третьему, получаем уравнение, также не содержащее члена с $x_1$. Аналогичным путем преобразуем все остальные уравнения, в результате чего придем к системе, эквивалентной исходной системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 3 \;\; + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a'_{22}x_2 + 3 \;\; + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\
a'_{32}x_2 + 3 \;\; + a'_{3n}x_n &= b'_3, \\
\cdots\cdots\cdots \\
a'_{m2}x_2 + 3 \;\; + a'_{mn}x_n &= b'_m,
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

где $a'_{ik}$ $(i = 2, 3, 2\;\;, m;\; k = 2, 3, 2\;\;, n)$ – некоторые новые коэффициенты.

Полагая $a'_{22} \neq 0$ и оставляя неизменными первые два уравнения системы (6.17), преобразуем ее так, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при $x_2$ обратился в нуль. Продолжая этот процесс, систему (6.17) можно привести к одной из следующих систем:

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + 3 \;\; + c_{1n}x_n &= d_1, \\
c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + 3 \;\; + c_{2n}x_n &= d_2, \\
c_{33}x_3 + 3 \;\; + c_{3n}x_n &= d_3, \\
\cdots\cdots\cdots \\
c_{nn}x_n &= d_n,
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

где $c_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, 2\;\;, n)$, $c_{ij}$ – некоторые коэффициенты, $d_i$ – свободные члены;

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + 3 \;\; + c_{1k}x_k + 3 \;\; + c_{1n}x_n &= d_1, \\
c_{22}x_2 + 3 \;\; + c_{2k}x_k + 3 \;\; + c_{2n}x_n &= d_2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
c_{kk}x_k + 3 \;\; + c_{kn}x_n &= d_k,
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

где $k < n$;

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + 3 \;\; + c_{1n}x_n &= d_1, \\
c_{22}x_2 + 3 \;\; + c_{2n}x_n &= d_2, \\
\cdots\cdots \\
0\;\; x_n &= d_k,
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

где $k \leq n$.

Система (6.18) имеет единственное решение, значение $x_n$ находится из последнего уравнения, $x_{n-1}$ – из предпоследнего, $x_1$ – из первого.

Система (6.19) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения можно выразить одно из неизвестных (например, $x_k$) через остальные $n-k$ неизвестных ($x_{k+1}, x_{k+2}, 2\;\;, x_n$), входящих в это уравнение. Из предпоследнего уравнения можно выразить $x_{k-1}$ через эти неизвестные и т. д. В полученных формулах, выражающих $x_1, x_2, 2\;\;, x_{k-1}, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, 2\;\;, x_n$, последние неизвестные могут принимать любые значения.

Система (6.20) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять ее последнему уравнению.

Итак, метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. Решая систему этим методом, преобразования совершаются не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членах.

Пример 6.5. Решить систему уравнений

$$x_1-2x_2-3x_3-x_4=2,$$

$$x_1+x_2+6x_3+3x_4=-3,$$

$$2x_1+3x_2+5x_3+2x_4=1,$$

$$x_2+x_3+x_4=3,$$

$$5x_2+7x_3+4x_4=5.$$

Составляем матрицу и преобразуем ее:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & 11 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & 11 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -24 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует совместная система четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$x_1-2x_2-3x_3-x_4=2,$$
$$x_2+x_3+x_4=3,$$
$$2x_3-x_4=-10,$$
$$-x_4=-4.$$

Решая эту систему, находим $x_4=4$, $2x_3=-10+x_4=-10+4=-6$, $x_3=-3$, $x_2=3-x_3-x_4=3-(-3)-4=2$, $x_1=2x_2+3x_3+x_4+2= =2\cdot2+3(-3)+4+2=1$

Следовательно, исходная система имеет решение $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=4$.

П р и м е р 6.6. Решить систему уравнений

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4,$$
$$2x_1-x_2+3x_3-2x_4=2,$$
$$3x_1+2x_2+4x_3-6x_4=3,$$
$$4x_1+3x_2+5x_3-5x_4=6.$$

Записывая соответствующую матрицу и совершая преобразования, получаем

$$\left[\begin{array}{rrrr|r}1&1&1&1&4\\2&-1&3&-2&2\\3&2&4&-6&3\\4&3&5&-5&6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{rrrr|r}1&1&1&1&4\\0&-3&1&-4&-6\\0&-1&1&-9&-9\\0&-1&1&-9&-10\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{rrrr|r}1&1&1&1&4\\0&-1&1&-9&-9\\0&-1&1&-9&-10\\0&-3&1&-4&-6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{rrrr|r}1&1&1&1&4\\0&-1&1&-9&-9\\0&0&0&0&-1\\0&0&-2&23&21\end{array}\right].$$

Третья матрица получена из предыдущей переменой местами последних трех строк. Последней матрице соответствует система уравнений

$$x_1+x_2+x_3+x_4=4,$$
$$-x_2+x_3-9x_4=-9,$$
$$0\,x_4=-1,$$
$$-2x_3+23x_4=21.$$

Эта система несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворить ее третьему уравнению.

Следовательно, исходная система также несовместна.

П р и м е р 6.7. Решить систему уравнений

$$x_1+x_2-x_3+x_4=2,$$
$$2x_1-x_2+3x_3-4x_4=0,$$
$$4x_1+x_2+x_3-2x_4=4,$$
$$5x_1+2x_2-x_4=6.$$

Преобразуя матрицу, получаем

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Таким образом, данная система сводится к системе двух уравнений относительно четырех неизвестных:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2,$$
$$-3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -4,$$

общее решение которой определяется формулами

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4, \; x_2 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}x_3 - 2x_4,$$

где $x_3$, $x_4$ могут принимать любые действительные значения.

**Пример 6.8.** Решить систему уравнений

$$x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1,$$
$$4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8,$$
$$6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3.$$

Составляем матрицу и преобразуем ее:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -9 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -31 & 9 & -15 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -37 & 9 & -18 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -45 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Последняя матрица получена в результате сложения третьей, умноженной на $(-1)$, и четвертой строк. Этой матрице соответствует система уравнений

$$x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2,$$
$$-x_2 - 6x_3 = -3,$$
$$-45x_3 + 9x_4 = -18,$$
$$8x_3 = 0,$$

имеющая решение $x_3 = 0$, $x_4 = -2$, $x_2 = 3$, $x_1 = 1$.

*Глава 7*

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

## 7.1. Упорядоченные пары действительных чисел и операции над ними

Пару $(a, b)$ действительных чисел $a$ и $b$ называют упорядоченной, если указано, какое из них считается первым, какое – вторым. Примеры упорядоченных пар: $(0, 1)$; $(2, 3)$; $(3, 2)$. Отметим, что последние две пары различны, хотя и образованы одними и теми же числами.

Каждую упорядоченную пару чисел обозначим одной буквой, введем понятие равенства двух пар, определим действия над ними. Рассмотрим две упорядоченные пары

$$\alpha = (a, b), \quad \beta = (c, d). \tag{7.1}$$

Эти пары называют равными, если $a = c$, $b = d$, т. е.

$$((a, b) = (c, d)) \Leftrightarrow (a = c, b = d). \tag{7.2}$$

Суммой двух пар (7.1) называют упорядоченную пару

$$\alpha + \beta = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{7.3}$$

а их произведением – упорядоченную пару

$$\alpha\beta = (a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad). \tag{7.4}$$

Из соотношения (7.3) видно, что пара

$$0 = (0, 0) \tag{7.5}$$

обладает тем свойством, что сложение ее с любой другой упорядоченной парой не меняет исходной пары: $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$. Пара (7.5) играет роль нуля при сложении упорядоченных пар; назовем ее нуль-парой.

Разностью $\alpha - \beta$ двух упорядоченных пар (7.1) называют такую упорядоченную пару $z = (x, y)$, что $z + \beta = \alpha$.

Вычитание упорядоченных пар (7.1) определяется следующим образом:

$$\alpha - \beta = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d). \tag{7.6}$$

Частным $\alpha/\beta$, где $\beta \neq 0$, двух упорядоченных пар (7.1) называют такую упорядоченную пару $z = (x, y)$, что $z\beta = \alpha$.

Если $\beta \neq 0$, т. е. $c^2 + d^2 \neq 0$, то частное $\alpha/\beta$ двух упорядоченных пар (7.1) определяется формулой

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right). \tag{7.7}$$

Из этой формулы следует, что если $\alpha=\beta$, т. е. $a=c$, $b=d$, то

$$1=\left(\frac{c^2+d^2}{c^2+d^2},\ \frac{dc-cd}{c^2+d^2}\right),\quad 1=(1,0).$$

Значит, роль единицы при делении двух упорядоченных пар выполняет упорядоченная пара

$$1=(1,0). \tag{7.8}$$

Рассмотрим упорядоченные пары

$$a=(a,0),\quad b=(b,0). \tag{7.9}$$

Арифметические действия над упорядоченными парами вида (7.9) производятся так, как и над действительными числами. Действительные числа отождествляются с парами вида (7.9).

## 7.2. Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называют упорядоченную пару $(a,b)$ действительных чисел $a$ и $b$. Рассмотрим упорядоченную пару

$$i=(0,1). \tag{7.10}$$

Применяя формулу (7.4), получаем $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)= =(-1,0)$. Поскольку $(-1,0)=-1$ (см. формулу (7.9)), то

$$i^2=-1,\quad i=\sqrt{-1}. \tag{7.11}$$

Упорядоченную пару (7.10), удовлетворяющую соотношению (7.11), называют мнимой единицей. С помощью мнимой единицы можно выразить любое комплексное число $\alpha=(a,b)$, т. е. упорядоченную пару действительных чисел. В самом деле, так как $bi=(b,0)(0,1)=(0,b)$, то $(a,b)=(a,0)+(0,b)= =a+bi$, т. е.

$$(a,b)=a+bi. \tag{7.12}$$

Поскольку $(a,b)=a+bi$, $(a,b)=(0,b)+(a,0)=bi+a$, то $a+bi=bi+a$. Значит, в правой части формулы (7.12) можно менять местами слагаемые. Выражение $a+bi$ называют алгебраической формой комплексного числа. Число $a$ называют действительной частью, число $b$ – мнимой частью комплексного числа $a+bi$. Обозначая комплексное число $a+bi$ одной буквой $\alpha$, записывают $a=\mathrm{Re}\,\alpha$, $b=\mathrm{Im}\,\alpha$, где Re – начальные буквы латинского слова realis (действительный), Im – начальные буквы латинского слова imaginarius (мнимый).

Кроме этих обозначений, употребляют и другие, например: $a = R(\alpha)$, $b = I(\alpha)$, где $\alpha = a + bi$.

Отметим частные случаи формулы (7.12). Если $b = 0$, то $(a, 0) = a$ – действительное число; если $a = 0$, то

$$(0,\ b) = bi. \tag{7.13}$$

Число $bi$ называют чисто мнимым или просто мнимым.

Два комплексных числа $a + bi$, $c + di$ называют равными, когда $a = c$, $b = d$:

$$(a + bi = c + di) \Leftrightarrow (a = c, b = d).$$

Комплексное число равно нулю, когда равны нулю его действительная и мнимая части:

$$(a + bi = 0) \Leftrightarrow (a = 0, b = 0).$$

Если дано комплексное число $\alpha = a + bi$, то число $a - bi$, отличающееся от $\alpha$ только знаком при мнимой части, называют числом, сопряженным числу $\alpha$, и обозначают $\overline{\alpha}$. Числом, сопряженным $\overline{\alpha}$, будет, очевидно, число $\alpha$, поэтому говорят о паре сопряженных чисел. Действительные числа, и только они, сопряжены сами себе.

Обозначение $i$ для мнимой единицы $(i = \sqrt{-1})$ ввел Эйлер в 1777 г.

## 7.3. Геометрическое изображение комплексных чисел

На плоскости выберем систему прямоугольных декартовых координат (рис. 7.1). Комплексному числу $(a, b) = a + bi$ сопоставим точку $M(a, b)$ этой плоскости с координатами $(a, b)$. Если $b = 0$, то получим действительное число $(a, 0) = a$, которое изображается точкой $A(a, 0)$ на оси $Ox$. Вследствие этого ось $Ox$ называют действительной осью (точками оси абсцисс изображаются действительные числа). Если $a = 0$, то получаем чисто мнимое число $bi$, которое изображается точкой $B(0, b)$, лежащей на оси $Oy$. По этой причине ось ординат называют мнимой осью (точками этой оси изображаются чисто мнимые числа). Отметим, что мнимая единица $i$ изображается точкой $(0, 1)$, расположенной на положительной полуоси ординат и отстоящей от начала координат на расстояние, равное единице. Число $(-i)$ изображается на оси ординат точкой $(0, -1)$, симметричной точке $(0, 1)$. Любое комплексное число $\alpha = (a, b)$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, изображается точкой, не лежащей на осях координат. Обратно, любой точке $M(a, b)$ плоскости соответствует комплексное число $(a, b) = a + bi$. Таким образом, между множеством ком-

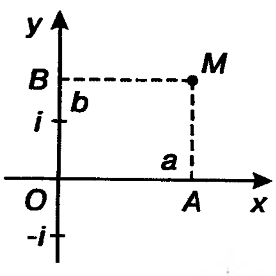


Рис. 7.1

плексных чисел и множеством точек плоскости установлено взаимно однозначное соответствие. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называют комплексной плоскостью.

Рассматривают также комплексную переменную $z = x + iy$, где $x$, $y$ – действительные переменные, $i$ – мнимая единица. Значения этой переменной – комплексные числа, изображаемые точками комплексной плоскости. Вследствие этого комплексную плоскость называют также плоскостью комплексной переменной.

## 7.4. Действия над комплексными числами

Из определения комплексного числа (как упорядоченной пары действительных чисел) и определения арифметических действий над упорядоченными парами (см. формулы (7.3), (7.4), (7.6), (7.7)) следует, что

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i, \tag{7.14}$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i, \tag{7.15}$$

$$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)\,i, \tag{7.16}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i \quad (c^2+d^2\neq 0). \tag{7.17}$$

Формула (7.14) определяет правило сложения двух комплексных чисел: чтобы сложить два комплексных числа, необходимо сложить отдельно их действительные и мнимые части. Формула (7.15) означает, что при вычитании одного комплексного числа из другого необходимо вычесть отдельно их действительные и мнимые части.

Отметим, что сумма и произведение двух комплексно-сопряженных чисел $\alpha = a+bi$, $\overline{\alpha} = a-bi$ являются действительными числами: $\alpha+\overline{\alpha}=2a$, $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2$.

Арифметические действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами. Если $\alpha = a+bi$, $\beta = c+di$, $\gamma = e+fi$ – любые комплексные числа, то верны следующие равенства: 1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; 2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; 3) $\alpha\beta=\beta\alpha$; 4) $(\alpha\beta)\,\gamma=\alpha\,(\beta\gamma)$; 5) $(\alpha+\beta)\,\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Полагая $a=1$, $b=0$ в формуле (7.17), получаем

$$\frac{1}{c+di}=\frac{c}{c^2+d^2}+\frac{-d}{c^2+d^2}\,i. \tag{7.18}$$

Формулой (7.18) определяется число $\beta^{-1}$, обратное комплексному числу $\beta = c+di$ ($\beta\neq 0$, т. е. $c^2+d^2\neq 0$).

Натуральные степени мнимой единицы $i$ принимают лишь четыре значения: $-1$, $-i$, $1$, $i$, определяемые формулами

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i, \tag{7.19}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$

При возведении комплексного числа $\alpha = a + bi$ в степень $n$ ($n$ – натуральное число) пользуются формулой бинома Ньютона:

$$(a+bi)^n = a^n + na^{n-1}(bi) + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}(bi)^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}(bi)^3 + \cdots + (bi)^n. \qquad (7.20)$$

В правой части этого равенства заменяют степени мнимой единицы по формулам (7.19) и приводят подобные члены, в результате получают некоторое комплексное число $c + di$.

Квадратным корнем из комплексного числа называют комплексное число, квадрат которого равен данному комплексному числу:

$$\sqrt{a+bi} = u + iv, \text{ если } (u+iv)^2 = a + bi. \qquad (7.21)$$

Числа $u$ и $v$ определяются из равенств

$$u^2 = \left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)/2, \quad v^2 = \left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)/2, \qquad (7.22)$$

причем $u$ и $v$ будут действительными, так как при любых $a$ и $b$ выражения $a+\sqrt{a^2+b^2}$ и $-a+\sqrt{a^2+b^2}$ являются положительными. Знаки $u$ и $v$ выбирают так, чтобы выполнялось равенство $2uv = b$. Извлечение квадратного корня из комплексного числа $a + bi$ всегда возможно и дает два значения $u_1 + iv_1$, $u_2 + iv_2$, различающихся лишь знаком.

Пример 7.1. Даны два комплексных числа $5+i$ и $2+3i$. Найти их сумму, разность, произведение и частное.

В соответствии с формулами (7.14) – (7.17) получаем

$$(5+i)+(2+3i) = (5+2)+(1+3)\,i = 7+4i,$$
$$(5+i)-(2+3i) = (5-2)+(1-3)\,i = 3-2i,$$
$$(5+i)(2+3i) = 10+15i+2i+3i^2 = 7+17i,$$
$$\frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-15i+2i-3i^2}{4-9i^2} = \frac{13-13i}{13} = 1-i.$$

Пример 7.2. Возвести в указанные степени данные комплексные числа: $(3+4i)^2$, $(1+2i)^3$, $(2+i)^4$.

Применяя формулы (7.19) и (7.20) при $n = 2$, $n=3$, $n = 4$, получаем

$$(3+4i)^2 = 3^2 + 2\cdot 12i + (4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i,$$
$$(1+2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i,$$
$$(2+i)^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 i + 6\cdot 4i^2 + 4\cdot 2i^3 + i^4 = 16 + 32i - 24 - 8i + 1 = -7 + 24i.$$

П р и м е р 7.3. Извлечь корень квадратный из числа $\alpha = 9+40i$.

Обозначим $\sqrt{9+40i} = u+iv$. Поскольку в данном случае $a=9$, $b=40$, то формулы (7.22) примут вид

$$u^2 = (9+\sqrt{9^2+40^2})/2 = (9+41)/2 = 25;$$

$$v^2 = (-9+\sqrt{9^2+40^2})/2 = (-9+41)/2 = 16.$$

Так как $u^2 = 25$, $v^2 = 16$, то $u_1 = -5$, $u_2 = 5$, $v_1 = -4$, $v_2 = 4$. Получено два значения корня: $u_1 + v_1 i = -5-4i$ и $u_2 + v_2 i = 5+4i$.

П р и м е р 7.4. Найти значение выражения $z^3 - 2z^2 + 5z$ при $z = 1-i$.

Поскольку $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$, $(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i\,(1-i) = -2i+2i^2 = -2-2i$, то $z^3 - 2z^2 + 5z = -2-2i-2\,(-2i)+5\,(1-i) = 3\text{-}3i$.

П р и м е р 7.5. Показать, что комплексное число $z = 1-i$ является корнем уравнения $z^3 + 2z^2 - 6z + 8 = 0$.

Так как $z^2 = (1-i)^2 = -2i$, $z^3 = (1-i)^3 = -2-2i$, то $z^3 + 2z^2 - 6z + 8 = -2-2i+2\,(-2i)-6\,(1-i)+8 = 0$, т. е. $(1-i)$ – корень уравнения.

## 7.5. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа

Комплексное число $\alpha = a+bi$, заданное в алгебраической форме, можно представить и в другом виде. Изобразим число $\alpha$ точкой $M\,(a, b)$ комплексной плоскости. Рассмотрим радиус-вектор этой точки (рис. 7.2). Модулем комплексного числа $\alpha = a+bi$ называют длину $r$ радиуса-вектора **OM** точки $M\,(a, b)$, изображающей данное число. Модуль комплексного числа $\alpha$ обозначают символом $|\alpha|$. Следовательно, по определению

$$r = |\,\mathbf{OM}\,|,\ r = |\alpha|,\ |\alpha| \geq 0. \tag{7.23}$$

Так как $|\,\mathbf{OM}\,| = \sqrt{a^2+b^2}$ (см. рис. 7.2), то

$$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2},\ |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2},\ r = \sqrt{a^2+b^2}, \tag{7.24}$$

т.е. модуль комплексного числа равен арифметическому значению корня квадратного из суммы квадратов его действительной и мнимой частей. Если $b=0$, т. е. число $\alpha$ является действительным, причем $\alpha = a$, то формула (7.24) принимает вид $|a| = \sqrt{a^2}$.

Аргументом комплексного числа $\alpha = a+bi$ называют величину угла $\varphi$ наклона радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ точки $M\,(a, b)$ к положительной полуоси $Ox$. Аргумент комплексного числа $\alpha$ обозначают символом $\operatorname{Arg}\alpha$. Угол $\varphi$ может принимать любые действительные значения. Аргумент комплексного числа $\alpha$ имеет бесконечное множество значений, отличающихся одно от другого на число, кратное $2\pi$. Аргумент не определен лишь для числа 0, модуль которого равен нулю. Среди значений аргумента комплексного числа $\alpha \neq 0$ существует одно и только одно, заключенное между $-\pi$ и $\pi$, включая последнее значение. Его называют главным значением и обозначают $\arg\alpha$. Итак, аргумент комплексного числа удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname{Arg}\alpha = \arg\alpha + 2\pi k \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots), \quad -\pi < \arg\alpha \leq \pi.$$

С помощью модуля и аргумента комплексное число $\alpha = a + bi$ можно представить в другой форме. Поскольку

$$a = r\cos\varphi, \ b = r\sin\varphi, \tag{7.25}$$

то

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (r \geq 0), \tag{7.26}$$

где

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = a\big/\sqrt{a^2+b^2}, \quad \sin\varphi = b\big/\sqrt{a^2+b^2}. \tag{7.27}$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (7.26), называют тригонометрической формой комплексного числа. Отметим особенности тригонометрической формы: 1) первый множитель – неотрицательное число, $r \geq 0$; 2) записаны косинус и синус одного и того же аргумента; 3) мнимая единица умножена на $\sin\varphi$.

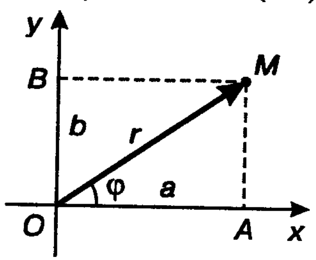

Рис. 7.2

Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную $2\pi$. Следовательно, если

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \tag{7.28}$$

то

$$r_1 = r_2, \ \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi \ (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots); \tag{7.29}$$

и обратно, из равенств (7.29) следует формула (7.28).

Если комплексное число $\alpha = a + bi$ задано в тригонометрической форме $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то комплексно-сопряженное число $\overline{\alpha} = a - bi$ записывается в форме $\overline{\alpha} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$; поэтому $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$, $\arg\overline{\alpha} = -\arg\alpha$ (рис. 7.3).

П р и м е р 7.6. Комплексное число $\alpha = 2\sqrt{2}/(1-i)$ записать в алгебраической и тригонометрической форме.

Умножая числитель и знаменатель данной дроби на число, сопряженное знаменателю, получаем

$$\frac{2\sqrt{2}}{1-i} = \frac{2\sqrt{2}\,(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\sqrt{2}\,(1+i)}{1-i^2} = \frac{2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

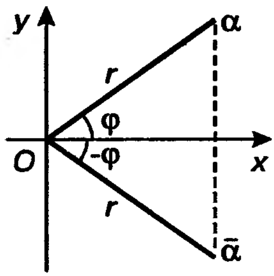

Рис. 7.3

Это – алгебраическая форма данного числа: $\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Применяя формулы (7.27), находим $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$, $\sin\varphi = b/r = \sqrt{2}/2$, $\cos\varphi = a/r = \sqrt{2}/2$, откуда главное значение $\varphi = \pi/4$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа имеет вид $\alpha = 2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.

## 7.6. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Произведение двух комплексных чисел

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi), \tag{7.30}$$

где $r = |z_1|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z_1$, $\rho = |z_2|$, $\psi = \operatorname{Arg} z_2$ находится по формуле

$$z_1 z_2 = r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)). \tag{7.31}$$

Из этой формулы следует, что

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ \varphi + \psi = \operatorname{Arg}(z_1 z_2),$$

т. е. модуль произведения равен произведению модулей множителей, а сумма аргументов множителей является аргументом их произведения.

Если $z_2 \neq 0$, т. е. $\rho \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)), \tag{7.32}$$

откуда

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\ \varphi - \psi = \operatorname{Arg}(z_1/z_2).$$

Эти формулы означают, что модуль частного равен модулю делимого, деленному на модуль делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного двух комплексных чисел.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $r \neq 0$, то

$$z^{-1} = 1/z = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)), \tag{7.33}$$

откуда

$$|z^{-1}| = |z|^{-1},\ \arg z^{-1} = -\arg z,$$

т. е. модуль комплексного числа $z^{-1}$, обратного числу $z$, равен обратной величине модуля числа $z$, а его главное значение аргумента отличается от главного значения аргумента $z$ лишь знаком.

Если $n$ – натуральное число и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{7.34}$$

откуда $|z^n| = |z|^n$, $n\varphi = \operatorname{Arg} z^n$.

Формула (7.34) называется формулой Муавра. При $r = 1$ она принимает вид

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Корнем $n$-й степени из комплексного числа $z$ называется такое комплексное число $\alpha$, что $\alpha^n = z$.

Извлечение корня $n$-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ всегда возможно и дает $n$ различных значений:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),\ \alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),\\
\alpha_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right), \ldots,\\
\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \tag{7.36}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Из формул видно, что все $n$ значений корня $n$-й степени из комплексного числа $z$ расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в точке нуль и делят эту окружность на $n$ равных частей.

Отметим, что корень $n$-й степени из действительного числа также имеет $n$ различных значений. Среди этих значений действительных будет два, одно или ни одного в зависимости от знака $a$ и четности $n$. Корень $n$-й степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю ($\sqrt[n]{0} = 0$).

Корни $n$-й степени из единицы определяются формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \tag{7.37}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 7.7. Найти значения квадратного корня из числа $z = i$.

Представим сначала это число в тригонометрической форме: $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$. В соответствии с формулой (7.36) имеем

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2},\ k = 0, 1.$$

Следовательно,

$$\alpha_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\alpha_0.$$

Пример 7.8. Найти все значения корня 6-й степени из числа $-64$.

Представим данное число в тригонометрической форме: $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$. Формула (7.36) принимает вид

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Замечая, что $\sqrt[6]{64} = 2$ и придавая $k$ указанные значения, находим шесть искомых значений:

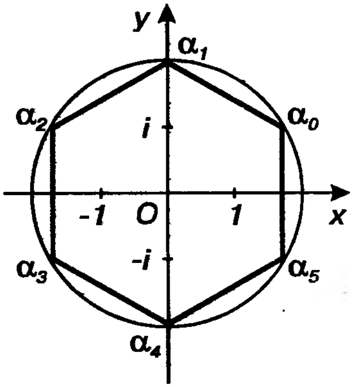


Рис. 7.4

$$\alpha_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$\alpha_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$\alpha_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$\alpha_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$\alpha_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i,$$

$$\alpha_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Эти значения изображаются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ (рис. 7.4.).

Пример 7.9. Решить уравнение $z^3 - 2\sqrt{2}/(1-i) = 0$.

Так как $2\sqrt{2}/(1-i) = 2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$, то

$$z = \sqrt[3]{2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))}.$$

Применяя формулу (7.36), получаем

$$\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(\pi/4)+2k\pi}{3} + i\sin\frac{(\pi/4)+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Полагая в этой формуле $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, находим

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{(\pi/4)+2\pi}{3} + i\sin\frac{(\pi/4)+2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Глава 8

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## 8.1. Алгебраические многочлены

Алгебраическим многочленом степени $n$ называется сумма целых неотрицательных степеней переменной $x$, взятых с некоторыми числовыми коэффициентами, т. е. выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \ a_0 \neq 0.$$

Для сокращенной записи многочленов употребляют обозначения $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ и т. п.

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ считают равными и пишут $f(x) = g(x)$ в том и только в том случае, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях $x$.

Теорема 8.1. *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что*

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x), \tag{8.1}$$

*причем степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ или же $r(x) = 0$. Многочлены $q(x)$ и $r(x)$ определяются однозначно.*

Многочлен $q(x)$ называется частным от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$, а $r(x)$ – остатком от этого деления.

Замечание. Формулу (8.1) можно записать так:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{\varphi(x)} \quad (\varphi(x) \neq 0).$$

Если остаток от деления $f(x)$ на $\varphi(x)$ равен нулю, то многочлен $\varphi(x)$ называется делителем многочлена $f(x)$; в этом случае говорят, что $f(x)$ делится на $\varphi(x)$ (или нацело делится на $\varphi(x)$).

Многочлен $\varphi(x)$ тогда и только тогда является делителем многочлена $f(x)$, когда существует многочлен $\psi(x)$, удовлетворяющий равенству

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x).$$

Многочлен $h(x)$ называется общим делителем для многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он является делителем каждого из этих многочленов.

Два многочлена называются взаимно простыми, если они не имеют других общих делителей, кроме многочленов нулевой степени (т. е. постоянных).

Наибольшим общим делителем отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется общий делитель $d(x)$, который делится на любой другой общий делитель этих многочленов. Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ обозначается так: $(f(x), g(x))$.

Наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно найти с помощью алгоритма Евклида. Если

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\ g(x)&=r_1(x)q_2(x)+r_2(x),\\ r_1(x)&=r_2(x)q_3(x)+r_3(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ r_{k-2}(x)&=r_{k-1}(x)q_k(x)+r_k(x),\\ r_{k-1}(x)&=r_k(x)q_{k+1}(x), \end{aligned}\right\} \qquad (8.2)$$

то $r_k(x)=(f(x), g(x))$.

**Замечание.** Наибольший общий делитель многочленов определен с точностью до постоянного множителя: если $d(x)$ – наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $cd(x)$, где $c$ – любое число, отличное от нуля, также является их наибольшим общим делителем.

**Пример 8.1.** Найти частное $q(x)$ и остаток $r(x)$ при делении многочлена $f(x)=x^4-x^2-2$ на многочлен $\varphi(x)=x^3-2x^2+x-2$. Выразить $f(x)$ через $\varphi(x)$ и $r(x)$.

Выполняя деление, находим

$$\begin{array}{r|l} x^4-x^2-2 & x^3-2x^2+x-2 \\ \cline{2-2} -\;\underline{\pm x^4\mp 2x^3\pm x^2\mp 2x} & x+2 \\ 2x^3-2x^2+2x-2 & \\ -\;\underline{\pm 2x^3\mp 4x^2\pm 2x\mp 4} & \\ 2x^2+2 & \end{array}$$

Итак, $q(x)=x+2$, $r(x)=2x^2+2$, $x^4-x^2-2=(x^3-2x^2+x-2)\times$ $\times(x+2)+2x^2+2$.

**Пример 8.2.** Найти общий наибольший делитель двух многочленов $f(x)=x^4+2x^2-3$ и $\varphi(x)=x^3-x^2+2x-2$.

Произведя деление $f(x)$ на $\varphi(x)$, получим первое из равенств (8.2): $x^4+2x^4-3=(x^3-x^2+2x-2)(x-1)+(x^2-1)$, так как $q_1(x)=x-1$ и $r_1(x)=x^2-1$. Разделив $\varphi(x)$ на $r_1(x)$, найдем второе из указанных равенств: $x^3-x^2+2x-2=(x^2-1)(x-1)+3x-3$, поскольку $q_2(x)=x-1$ и $r_2(x)=3x-3$.

Остаток $r_1(x)$ нацело делится на остаток $r_2(x)$: $x^2-1=(3x-3)\times \times\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)$; $q_3(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$.

Следовательно, $r_2(x)=3x-3=3(x-1)$ является общим наибольшим делителем данных многочленов. В соответствии с замечанием общим наибольшим делителем будет также $d(x)=x-1$.

## 8.2. Корни многочлена. Теорема Безу

Значением многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \tag{8.3}$$

при $x=c$ называется число

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\cdots+a_{n-1}c+a_n.$$

Число $c$ называется корнем многочлена $f(x)$ или корнем уравнения $f(x)=0$, если $f(c)=0$, т. е.

$$a_0c^n+a_1c^{n-1}+\cdots+a_{n-1}c+a_n=0.$$

Теорема 8.2. (Безу). *Остаток $r$ от деления многочлена $f(x)$ на линейный многочлен $x-c$ равен значению $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x=c$, т. е.*

$$r=f(c). \tag{8.4}$$

Следствие. *Число $c$ тогда и только тогда будет корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x)$ делится на $x-c$.*

Если многочлен $f(x)$ задан формулой (8.3) и

$$f(x)=(x-c)\,q(x)+r,$$

где

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1},$$

то коэффициенты многочлена $q(x)$ определяются формулами

$$b_0=a_0,\ b_k=cb_{k-1}+a_k,\ k=1,2,\ldots,n-1, \tag{8.5}$$

а остаток $r$ — по формуле $r=cb_{n-1}+a_n$.

Коэффициенты частного и остаток вычисляются по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & cb_0+a_1=b_1 & cb_1+a_2=b_2 & cb_2+a_3=b_3 & \ldots & cb_{n-2}+a_{n-1}=b_{n-1} & cb_{n-1}+a_n=r. \end{array}$$

Эту схему, называемую схемой Горнера, используют также для вычисления значений многочлена, поскольку $f(c)=r$ (см. формулу (8.4)).

Если $c$ – корень многочлена $f(x)$, т. е. $f(c)=0$, то многочлен $f(x)$ делится на $x-c$. Может оказаться, что $f(x)$ делится и на более высокие степени $x-c$. Пусть существует такое натуральное число $k$, что $f(x)$ нацело делится на $(x-c)^k$, но уже не делится на $(x-c)^{k+1}$. В этом случае $f(x)= =(x-c)^k\varphi(x)$, причем число $c$ не является корнем многочлена $\varphi(x)$. Число $k$ называется кратностью корня $c$ многочлена $f(x)$, а число $c$ – $k$-кратным корнем этого многочлена. Если $k=1$, то говорят, что число $c$ – простой корень многочлена $f(x)$.

Теорема 8.3. *Всякий многочлен, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень (действительный или комплексный).*

Эту теорему раньше называли «основной теоремой высшей алгебры».

Следствие. 1. *Всякий многочлен n-й степени единственным образом, с точностью до порядка сомножителей, разлагается в произведение n линейных множителей: если $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – корни многочлена (8.3), то*

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n). \tag{8.6}$$

Следствие. 2. *Всякий многочлен $f(x)$ степени $n\geq 1$ имеет n корней, считая равные и комплексные.*

Следствие. 3. *Если многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$, степени которых не превышают n, имеют равные значения более чем при n различных значениях переменной, то $f(x)=\varphi(x)$.*

Если многочлен

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n, \tag{8.7}$$

для которого $a_0=1$, имеет корни $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, то его коэффициенты выражаются формулами Виета:

$$\begin{aligned}
&a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n);\\
&a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
&a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\cdots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n);\\
&a_n=(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Эти формулы означают следующее: в правой части $k$-го равенства $(k=1,2,\ldots,n)$ находится сумма всевозможных произведений по $k$ корней, взятая со знаком плюс или минус в зависимости от четности или нечетности $k$.

Последняя из формул (8.8) свидетельствует о том, что корни многочлена (8.7) являются делителями его свободного члена.

Формулы Виета дают возможность найти многочлен по корням.

Теорема 8.4. *Если комплексное число $\alpha$ является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то его корнем будет также и сопряженное число $\overline{\alpha}$.*

**Следствие. 1.** *Многочлен $f(x)$ в этом случае делится на квадратный трехчлен $\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2+px+q$ с действительными коэффициентами $p=-(\alpha+\overline{\alpha})$, $q=\alpha\overline{\alpha}$.*

**Следствие. 2.** *Комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены.*

**Следствие. 3.** *Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень. Если же действительных корней больше одного, то их будет нечетное число (так как комплексные корни попарно сопряжены).*

**Следствие. 4.** *Всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить, причем единственным способом (с точностью до порядка множителей), в виде произведения его старшего коэффициента и нескольких многочленов с действительными коэффициентами, линейных вида $x-c$, соответствующих его действительным корням, и квадратных вида $x^2+px+q$, соответствующих парам его сопряженных комплексных корней.*

**Пример 8.3.** Разделить многочлен $f(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+5$ на $x-1$.

Коэффициенты многочлена: $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=-2$, $a_3=2$, $a_4=-3$, $a_5=5$. Коэффициенты частного $q(x)=b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4$ и остаток $r$ находим по схеме Горнера, считая $c=1$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 1 | 0 | $-2$ | 2 | $-3$ | 5 |
| 1 | 1 | $1\cdot1+0=1$ | $1\cdot1-2=-1$ | $1\cdot(-1)+2=1$ | $1\cdot1-3=-2$ | $1\cdot(-2)+5=3$ |

Следовательно, частное $q(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$, а остаток $r=3$.

**Пример 8.4.** Вычислить значение многочлена $f(x)=2x^5-4x^4+$ $+5x^3-26x^2-17x+9$ при $x=3$.

По схеме Горнера находим:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 2 | $-4$ | 5 | $-26$ | $-17$ | 9 |
| 3 | 2 | $3\cdot2-4=2$ | $3\cdot2+5=11$ | $3\cdot11-26=7$ | $3\cdot7-17=4$ | $3\cdot4+9=21$ |

Итак, $r=21$; поскольку $f(c)=r$, то $f(3)=21$.

**Пример 8.5.** Показать, что число $x=4$ является корнем многочлена $f(x)=3x^4-2x^3-47x^2+30x-8$.

С помощью схемы Горнера находим, что $r=f(4)=0$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | 3 | $-2$ | $-47$ | 30 | $-8$ |
| 4 | 3 | $4\cdot3-2=10$ | $4\cdot10-47=-7$ | $4(-7)+30=2$ | $4\cdot2-8=0$ |

Так как $r=0$, то $f(4)=0$, $x=4$ – корень многочлена.

**Пример 8.6.** Найти многочлен третьей степени, корни которого $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=3$.

Воспользуемся формулами Виета. При $n=3$ многочлен (8.7) и формулы (8.8) принимают соответственно вид

$$f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,\ a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3,\ a_3=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Подставляя в последние три формулы значения корней, получаем $a_1=$ $=-(1-2+3)=-2,$ $a_2=1\cdot(-2)+1\cdot 3+(-2)3=-5,$ $a_3=-1(-2)3=6.$ Следовательно, $f(x)=x^3-2x^2-5x+6.$

Пример 8.7. Найти многочлен четвертой степени, имеющий корни $\alpha_1=-1,$ $\alpha_2=2,$ $\alpha_3=4,$ $\alpha_4=5.$

При $n=4$ многочлен (8.7) и формулы (8.8) запишутся так:

$$f(x)=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,$$
$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4,$$
$$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4),$$
$$a_4=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

По эти формулам находим $a_1=-10,$ $a_2=27,$ $a_3=-2,$ $a_4=-40.$ Итак, $f(x)=x^4-10x^3+27x^2-2x-40.$

## 8.3. Квадратные уравнения

Алгебраическим уравнением $n$-й степени с одной переменной $x$ называется уравнение вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{8.9}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – заданные числа, называемые коэффициентами.

Корнем алгебраического уравнения (8.9) называется такое значение переменной $x=c,$ при котором оно обращается в тождество, т.е. $a_0c^n+$ $+a_1c^{n-1}+\cdots a_{n-1}c+a_n=0.$

Выражение «решить уравнение» означает найти все его корни.

Квадратным называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0). \tag{8.10}$$

Корни уравнения (8.10) вычисляются по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{8.11}$$

Выражение

$$D=b^2-4ac$$

называется дискриминантом квадратного уравнения (8.10).

Если $a$, $b$, $c$ – действительные числа, то квадратное уравнение (8.10) при $D>0$ имеет два различных действительных корня, при $D=0$ – два равных действительных корня, при $D<0$ – два комплексно-сопряженных корня.

Отметим, что коэффициенты квадратного уравнения (8.10) могут быть и комплексными числами. Его корни также вычисляются по формулам (8.11). В этом случае дискриминант будет комплексным числом.

Уравнение (8.10) можно привести к виду

$$x^2+px+q=0. \tag{8.12}$$

Корни этого уравнения вычисляются по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \tag{8.13}$$

которая является частным случаем формулы (8.11).

Пример 8.8. Решить уравнение $x^2-4x+13=0$.

По формуле (8.13) получаем $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}$. Это уравнение имеет корни $x_1=2+3i$, $x_2=2-3i$, где $i=\sqrt{-1}$.

Пример 8.9. Решить уравнение $x^2-(4+6i)x-5+10i=0$ с комплексными коэффициентами.

По формуле (8.13) находим $x_{1,2}=(2+3i)\pm\sqrt{(2+3i)^2-(-5+10i)}=$ $=(2+3i)\pm\sqrt{4+12i+9i^2+5-10i}=(2+3i)\pm\sqrt{2i}=(2+3i)\pm(1+i)$; $x_1=3+4i$, $x_2=1+2i$.

## 8.4. Кубические уравнения

Кубическим называется уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \tag{8.14}$$

Это уравнение с помощью формулы $x=z-a/3$ можно привести к виду

$$z^3+pz+q=0. \tag{8.15}$$

Корни кубического уравнения (8.15) вычисляются по формуле $z=u+v$, где

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{8.16}$$

или

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{8.17}$$

Все три корня уравнения (8.15) определяются следующими формулами:

$$z_1=u_1+v_1,\ z_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2,\ z_3=u_1\varepsilon^2+v_1\varepsilon, \tag{8.18}$$

где $u_1$ – любое из трех значений $u$, определяемых первой из формул (8.16), $v_1$ – то из трех значений $v$, которое соответствует $u_1$ на основании равенства

$$3uv+p=0, \tag{8.19}$$

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{8.20}$$

– кубические корни из единицы.

Дискриминантом уравнения (8.15) называется выражение

$$D=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right).$$

Уравнение (8.15) при $D<0$ имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корня: при $D=0$ – три действительных корня, причем два равных; при $D>0$ – три различных действительных корня.

Замечание. Третий случай ($D>0$) называется неприводимым. В этом случае все корни уравнения (8.15) с действительными коэффициентами являются действительными, однако для нахождения их по формуле (8.17) следует извлекать кубические корни из комплексных чисел.

Формула (8.17) называется формулой Кардано. Правило, соответствующее этой формуле, впервые опубликовано в книге итальянского ученого Д. Кардано «Великое искусство или о правилах алгебры» (1545). Это правило решения кубического уравнения было получено ранее (1535) другим итальянским математиком Н. Тартальей.

Пример 8.10. Решить уравнение $z^3-6z+9=0$. Это уравнение вида (8.15), для которого $p=-6$, $q=9$. Составим выражение

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{9^2}{4}+\frac{(-6)^3}{3^3}=\frac{81}{4}-8=\frac{49}{4}.$$

По формулам (8.16) находим $u$ и $v$:

$$u_1=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}=\sqrt[3]{-1}=-1,$$

$$v_1=\sqrt[3]{-\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}=\sqrt[3]{-8}=-2.$$

Следовательно, $u_1=-1$, $v_1=-2$, равенство (8.19) выполняется. По формулам (8.18) с учетом формул (8.20) находим

$$z_1=u_1+v_1=-3,$$

$$z_2=u_1\varepsilon+v_1\varepsilon^2=(-1)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-2)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3=u_1\varepsilon^2+v_1\varepsilon=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**Замечание.** Корни $z_2$ и $z_3$ можно найти и другим способом. Так как $z_1=-3$ – корень уравнения, то многочлен $z^3-6z+9$ делится на $(z+3)$. Произведя это деление, получим $z^3-6z+9=(z+3)(z^2-3z+3)$. Данное уравнение примет вид $(z+3)(z^2-3z+3)=0$, откуда $z+3=0$, $z^2-3z+3=0$. Последнее уравнение имеет корни

$$z_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**Пример 8.11.** Решит уравнение $x^3-5x^2+8x-6=0$.

Разложим на множители многочлен в левой части уравнения: $x^3-5x^2+8x-6=x^3-3x^2-2x^2+6x+2x-6=x^2(x-3)-2x(x-3)+2(x-3)=$ $=(x-3)(x^2-2x+2)$. Данное уравнение примет вид $(x-3)(x^2-2x+2)=0$ и распадается на два уравнения: $x-3=0$, $x^2-2x+2=0$, которые имеют корни $x_1=3$, $x_2=1+i$, $x_3=1-i$.

## 8.5. Уравнения четвертой степени

Алгебраическое уравнение четвертой степени

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

с помощью подстановки $x=z-a/4$ можно привести к уравнению

$$z^4+pz^2+qz+r=0, \tag{8.21}$$

в котором коэффициент при $z^3$ равен нулю.

Это уравнение можно записать так:

$$(z^2+p/2+\alpha)^2-(2\alpha z^2-qz+(\alpha^2+p\alpha-r+p^2/4))=0, \tag{8.22}$$

где $\alpha$ – вспомогательный параметр. Значение параметра выберем так, чтобы вычитаемый многочлен был полным квадратом. В этом случае многочлен имеет два равных корня, так как его дискриминант равен нулю, т. е.

$$q^2-4\cdot 2\alpha(\alpha^2+p\alpha-r+p^2/4)=0. \tag{8.23}$$

Уравнение (8.22) принимает вид

$$\left(z^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\left(z-\frac{q}{4\alpha_0}\right)^2=0, \tag{8.24}$$

где $\alpha_0$ – отличный от нуля корень уравнения (8.23).

Уравнение (8.24) распадается на два квадратных уравнения:

$$
\begin{gathered}
z^2-\sqrt{2\alpha_0}\,z+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0+\frac{q}{2\sqrt{\alpha_0}}\right)=0,\\
z^2+\sqrt{2\alpha_0}\,z+\left(\frac{p}{2}+\alpha_0-\frac{q}{2\sqrt{\alpha_0}}\right)=0.
\end{gathered}
\tag{8.25}
$$

Корни этих уравнений будут корнями уравнения (8.21).

П р и м е р 8.12. Решить уравнение $z^4-5z^2+4=0$.

Это уравнение вида (8.21), для которого $p=-5$, $q=0$, $r=4$. Уравнение (8.23) в данном случае сводится к квадратному уравнению относительно параметра $\alpha:\alpha^2-5\alpha-4+25/4=0$, или $\alpha^2-5\alpha+9/4=0$, которое имеет корни $\alpha_1=9/2$, $\alpha_2=1/2$. При $\alpha_0=1/2$ уравнения (8.25) запишутся так: $z^2-z-2=0$, $z^2+z-2=0$. Первое из них имеет корни $z_1=-1$, $z_2=2$, а второе – $z_1=1$, $z_2=-2$. Эти числа являются и корнями исходного уравнения.

П р и м е р 8.13. Решить уравнение $x^4+4x^3+7x^2-4x-8=0$. Разложим на множители многочлен в левой части уравнения: $x^4+4x^3+7x^2-4x-8=(x^4-x^2)+(4x^3-4x)+(8x^2-8)=x^2(x^2-1)+4x(x^2-1)+$ $+8(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+4x+8)$.

Следовательно, уравнение примет вид $(x^2-1)(x^2+4x+8)=0$, откуда $x^2-1=0$, $x^2+4x+8=0$; $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-2+2i$; $x_4=-2-2i$.

## 8.6. Решение алгебраических уравнений способом разложения многочлена на множители

Если $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – корни многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+$ $+a_{n-1}x+a_n$, то уравнение (8.9) можно записать так:

$$a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)=0.$$

Если $\alpha$ и $\overline{\alpha}$ – сопряженные комплексные корни, то $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=$ $=x^2+px+q$, где $p$ и $q$ – действительные числа ($p=-(\alpha+\overline{\alpha})$, $q=\alpha\overline{\alpha}$).

Предположим, что левая часть уравнения (8.9) разложена на множители вида $x-c$ и $x^2+px+q$. Приравнивая нулю каждый множитель, получаем уравнения, каждое из которых является линейным или квадратным. Корни этих уравнений будут корнями уравнения (8.9).

П р и м е р 8.14. Решить уравнение $x^3-2x-4=0$.

Разлагаем на множители многочлен в левой части уравнения:

$$x^3-2x-4=x^3-2x^2+2x^2-4x+2x-4=$$

$$= x^2(x-2)+2x(x-2)+2(x-2)=(x-2)(x^2+2x+2).$$

Данное уравнение принимает вид $(x-2)(x^2+2x+2)=0$ и распадается на два уравнения: $x-2=0$, $x^2+2x+2=0$; первое из них имеет корень $x_1=2$, а второе – два комплексно-сопряженных корня $x_2=-1-i$, $x_3=-1+i$.

Пример 8.15. Решить уравнение $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$.

Так как $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=x^4-5x^3+5x^2+5x-5-1=(x^4-1)+(-5x^3+5x^2)+(5x-5)=$ $=(x^2-1)(x^2+1)-5x^2(x-1)+5(x-1)=(x^2-1)(x^2+1)-5(x-1)(x^2-1)=(x^2-1)(x^2+1-5(x-1))=$ $(x^2-1)(x^2-5x+6)$, то $(x^2-1)(x^2-5x+6)=0$, откуда $x^2-1=0$, $x^2-5x+6=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Пример 8.16. Решить уравнение $x^4+2x^3-2x^2-8x-8=0$.

При разложении на множители используется результат примера 8.14. Поскольку $x^4+2x^3-2x^2-8x-8=x^4+2x^3-2x^2-4x-4x-8=x^3(x+2)-$ $-2x(x+2)-4(x+2)=(x+2)(x-2)(x^2+2x+2)=0$, откуда $x+2=0$, $x-2=0$, $x^2+2x+2=0$; $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-1-i$, $x_4=-1+i$.

Пример 8.17. Решить уравнение $x^5-x^4-81x+81=0$. Так как $x^5-$ $-x^4-81x+81=x^4(x-1)-81(x-1)=(x-1)(x^4-81)=(x-1)(x^2-9)(x^2+9)$, то $(x-1)(x^2-9)(x^2+9)=0$, откуда $x-1=0$, $x^2-9=0$, $x^2+9=0$; $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=3$, $x_4=-3i$, $x_5=3i$.

Замечание. Алгебраические уравнения $n$-й степени $(n\geq 5)$ в общем случае в радикалах не решаются, т. е. не существует формул, которые давали бы возможность вычислить корни уравнения по его коэффициентам. Это впервые доказал норвежский математик Н.Х Абель. Однако имеются частные виды уравнений любой степени, разрешимые в радикалах (например, $x^n=a$). Вопрос о том, каково необходимое и достаточное условие для того, чтобы алгебраическое уравнение решалось в радикалах, исследовал французский математик Э. Галуа.

## 8.7. Разложение дробной рациональной функции в сумму элементарных дробей

Целой рациональной функцией называют алгебраический многочлен. Дробной рациональной функцией или рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}. \tag{8.26}$$

Если $m>n$, то рациональная дробь называется правильной.

Элементарными дробями называются рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-c)^n},\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

где $n$, $m$ – натуральные числа; $c$, $p$, $q$, $A$, $B$, $C$ – действительные числа; $(p^2/4)-q<0$ (корни трехчлена $x^2+px+q$ являются комплексными).

Всякую правильную рациональную дробь можно разложить в сумму элементарных дробей на основании следующей теоремы.

Теорема 8.5. *Если дана правильная рациональная дробь* (8.26) *и*

$$Q(x)=(x-c_1)^{n_1}\ldots(x-c_r)^{n_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s},$$

*где* $c_i\,(i=1,2,\ldots,r)$ *– попарно различные действительные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* $n_i$; $x^2+p_kx+q_k=(x-\alpha_k)(x-\widetilde{\alpha}_k)$, *где* $\alpha_k$ *и* $\widetilde{\alpha}_k$ $(k=1,2,\ldots,s)$ *– попарно различные при разных* $k$ *корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* $m_k$, *то существуют действительные числа*

$$A_j^n\ (j=1,2,\ldots,r;\ n=1,2,\ldots,n_i),\ B_k^m,\ C_k^m\ (k=1,2,\ldots,s;\ m=1,2,\ldots,m_k)$$

*такие, что*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^1}{x-c_1}+\frac{A_1^2}{(x-c_1)^2}+\cdots+\frac{A_1^{n_1}}{(x-c_1)^{n_1}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{A_r^1}{x-c_r}+\frac{A_r^2}{(x-c_r)^2}+\cdots+\frac{A_r^{n_r}}{(x-c_r)^{n_r}}+$$
$$\frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_1^2x+C_1^2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_1^{m_1}x+C_1^{m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{B_s^1x+C_s^1}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{B_s^2x+C_s^2}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\cdots+\frac{B_s^{m_s}x+C_s^{m_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}.$$

Отметим, что каждому действительному корню $c$ кратности $l$ соответствует сумма $l$ элементарных дробей вида $A/(x-c)^n$:

$$\frac{A_1}{x-c}+\frac{A_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{A_l}{(x-c)^l},$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha$ и $\overline{\alpha}$ (таких, что $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2+px+q$) кратности $m$ – сумма дробей вида $(Bx+C/(x^2+px+q)^n$:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Пример 8.18. Разложить в сумму элементарных дробей рациональную дробь $(7x^2-x+1)/(x^3+1)$.

Так как $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, то искомое разложение имеет вид

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

где коэффициенты $A$, $B$, $C$ пока не определены.

Приводя к общему знаменателю правую часть и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C}{x^3+1},$$

$$7x^2-x+1=(A+B)x^2+(B+C-A)x+(A+C),$$

$$A+B=7,\ B+C-A=-1,\ A+C=1.$$

Из этой системы уравнений находим $A=3$, $B=4$, $C=-2$. Следовательно,

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{3}{x+1}+\frac{4x-2}{x^2-x+1}.$$

Пример 8.19. Разложить в сумму элементарных дробей рациональную дробь $(x^2+x+1)/(x^3-3x+2)$.

Разлагая знаменатель на множители, получаем $x^3-3x+2=x^3-x-2x-2=x(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)(x(x+1)-2)=(x-1)(x^2-1)+(x-1)=(x-1)^2(x+2)$.

Данную рациональную дробь представим в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}, \qquad \text{(I)}$$

откуда

$$x^2+x+1=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2), \qquad \text{(II)}$$

или

$$x^2+x+1=(A+B)x^2+(B+C-2A)x+(A-2B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем уравнения $A+B=1$, $B+C-2A=1$, $A-2B+2C=1$, из которых находим $A=1/3$, $B=2/3$, $C=1$.

Следовательно, разложение (I) примет вид

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{1}{3(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Замечание. Коэффициенты $A$, $B$, $C$ разложения (I) можно получить и другим способом. Полагая в тождестве (II) $x=1$, получаем $3=C\cdot 3$, $C=1$. Положив в этом тождестве $x=-2$, получим $3=A(-3)^2$, откуда $A=1/3$. Аналогично при $x=0$ находим $1=A-2B+2C$, $B=2/3$.

*Глава 9*

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## 9.1. Линейное пространство. Подпространство

Линейным действительным пространством или векторным действительным пространством называется множество $V$ элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$, для которых определены операции сложения элементов и умножения элемента на действительное число, удовлетворяющие следующим аксиомам: I. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$, II. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$, III. Существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$, IV. Для каждого $\mathbf{x}\in V$ существует противоположный элемент $-\mathbf{x}$ такой, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$, V. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$, VI. $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$, VII. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})= \; =\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$, VIII. $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$.

Эти аксиомы выполняются соответственно для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\in V$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

Элементы действительного линейного пространства называются векторами.

Замечание. Аналогично определяется комплексное линейное пространство: вместо множества $\mathbf{R}$ действительных чисел рассматривается множеств[о] $\mathbf{C}$ комплексных чисел.

Из определения линейного пространства вытекают следующие утверждения.

1. В линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент.
2. Для любого элемента $\mathbf{x}$ линейного пространства существует единственны[й] элемент $-\mathbf{x}$.
3. Для элемента $-\mathbf{x}$ противоположным будет элемент $\mathbf{x}$.
4. Для любого элемента $\mathbf{x}$ произведение $0\mathbf{x}=\mathbf{0}$, где $0$ – нуль, $\mathbf{0}$ – нулевой элемен[т]
5. Для любого элемента $\mathbf{x}$ $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$, где $(-\mathbf{x})$ – элемент, противоположный $\mathbf{x}$
6. Для любого числа $\alpha$ произведение $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ – нулевой элемент.
7. Если $\alpha\mathbf{x}=\mathbf{0}$ и $\alpha\neq 0$, то $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
8. Если $\alpha\mathbf{x}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, то $\alpha=0$.

Равенство $\alpha\mathbf{x}=\mathbf{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha=0$ или $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Замечание. Сумму $\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$ обозначают $\mathbf{x}$ - $\mathbf{y}$ и называют разност[ью] элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Примеры линейных пространств.

1. Множество $V_3$ всех свободных векторов $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, для которых оп[ре]делены сложение и умножение вектора на число так, как в п. 3.2, является лин[ей]ным пространством. Отметим, что роль нулевого элемента здесь играет ну[левой] вектор; для любого вектора $\mathbf{a}$ противоположным является $-\mathbf{a}$. Аксиомы I – V[III] выполняются, о чем свидетельствуют формулы п. 3.2.

2. Множество всех матриц размером $m \times n$, для которых определены сложение матриц и умножение матрицы на число соответственно формулами (5.2), (5.4). Роль нулевого элемента здесь играет нулевая матрица; для матрицы $(a_{ik})_{mn}$ противоположной является матрица $(-a_{ik})_{mn}$. Аксиомы I – VIII выполняются (см. п. 5.2, свойства 1 – 8 линейных операций над матрицами).

3. Множество $\{P_n(x)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа $n$, для которых операции сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число определены обычными правилами. Нулевой элемент – многочлен, все коэффициенты которого равны нулю; для многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ противоположным будет $-P_n(x) = -a_0x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n$.

Замечание. Множество всех многочленов степени, точно равной натуральному числу $n$, не является линейным пространством, так как сумма двух таких многочленов может оказаться многочленом степени ниже $n$ (т. е. не принадлежать рассматриваемому множеству).

4. Множество $A_n$ элементами которого являются упорядоченные совокупности $n$ действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Каждый элемент этого множества будем обозначать одним символом, например $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$, и писать $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots$ Действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют координатами элемента $\mathbf{x}$. Линейные операции над элементами $A_n$ определяются формулами $\mathbf{x} + \mathbf{y} = ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots, (x_n + y_n))$, $\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$. Отметим, что элемент $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ является нулевым, элемент $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ – противоположным элементу $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

5. Множество $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$. Операции сложения этих функций и умножения функции на число определяются обычными правилами. Нулевым элементом является функция $x(t) \equiv 0$ для всех $t \in [a, b]$. Элементом, противоположным элементу $x(t)$, будет $-x(t)$.

Множество $W \subset V$ называется подпространством линейного пространства $V$, если выполняются следующие условия: 1. В множестве $W$ определены те же операции, что и в множестве $V$. 2. Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$. 3. Если $\mathbf{x} \in W$, то $\alpha\mathbf{x} \in W$. Очевидно, всякое подпространство $W$ линейного пространства $V$ является линейным пространством, т.е. в $W$ выполняются аксиомы I – VIII. Прежде всего, в $W$ имеется нулевой элемент $\mathbf{0}$: если $\mathbf{x} \in W$, то $0\mathbf{x} = \mathbf{0} \in W$. Для любого элемента $\mathbf{x} \in W$ имеется противоположный элемент $-\mathbf{x}$: если $\mathbf{x} \in W$, то $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \in W$.

Отметим, что нулевой элемент $\mathbf{0}$ линейного пространства $V$ образует подпространство этого пространства, которое называют нулевым подпространством.

Само линейное пространство $V$ можно рассматривать как подпространство этого пространства. Эти подпространства называются тривиальными, а все другие, если они имеются, — нетривиальными. Приведем примеры нетривиальных подпространств. 1. Множество $V_2$ всех свободных векторов $\mathbf{a}(a_1, a_2)$, параллельных некоторой плоскости, для которых обычным образом определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, представляет подпространство линейного пространства $V_3$. 2. Множество $V_1$ всех свободных векторов $\mathbf{a}(a_1)$, параллельных некоторой прямой, также является подпространством линейного пространства $V_3$. 3. Множество $\{P_{n-1}(x)\}$ всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа $n-1$, является подпространством линейного пространства $\{P_n(x)\}$.

## 9.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов линейного пространства

Рассмотрим векторы (элементы) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ линейного пространства. Вектор $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – некоторые числа, называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – коэффициентами этой линейной комбинации. Если все числа $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ равны нулю, то линейная комбинация называется тривиальной. Если хотя бы одно из чисел $\alpha_i$ отлично от нуля, линейная комбинация называется нетривиальной.

Система векторов

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \tag{9.1}$$

называется линейно зависимой, если существуют числа

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \tag{9.2}$$

не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}. \tag{9.3}$$

Если таких чисел не существует, т. е. равенство (9.3) выполняется только в случае

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0, \tag{9.4}$$

то система векторов (9.1) называется линейно независимой.

Другими словами, векторы (9.1) называются линейно зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нуль-вектору, и линейно независимыми, если только их тривиальная линейная комбинация является нуль-вектором.

Из определения линейной зависимости и линейной независимости векторов вытекают следующие утверждения.

1. Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, является линейно зависимой.
2. Если $k$ $(k < n)$ векторов системы (9.1) линейно зависимы, то и вся система линейно зависима.

3. Если из системы линейно независимых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ отбросить $r$ ($r < n$) векторов, то оставшиеся векторы образуют также линейно независимую систему.
4. Если среди векторов системы (9.1) имеются такие векторы $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{x}_m$, что $\mathbf{x}_k = \lambda \mathbf{x}_m$, где $\lambda$ – некоторое число, то система (9.1) линейно зависима.

Теорема 9.1. *Векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией всех остальных.*

Эта теорема выражает необходимое и достаточное условие линейной зависимости $n$ векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Два вектора линейного пространства называются коллинеарными, если они линейно зависимы, и неколлинеарными, если они линейно независимы. Три вектора линейного пространства называются компланарными, если они линейно зависимы, и некомпланарными, если они линейно независимы. Введенные понятия коллинеарности и компланарности векторов линейного пространства совпадают с известными из аналитической геометрии понятиями коллинеарности и компланарности обычных векторов.

## 9.3. Размерность и базис линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств

Число $n$ называется размерностью линейного пространства $V$, если выполняются следующие условия: 1) в $V$ существует $n$ линейно независимых векторов; 2) любая система $n+1$ векторов из $V$ линейно зависима. Размерность линейного пространства $V$ обозначают $\dim V$ (от французского слова *dimension* – размерность). Если пространство состоит из одного нулевого элемента, то его размерность считают равной нулю. Размерность линейного пространства – это наибольшее возможное количество линейно независимых элементов в нем. Понятие размерности согласуется с наглядным представлением о ней; так, пространство $V_3$ всех свободных векторов является трехмерным ($\dim V_3 = 3$), пространство $V_2$ – двумерным, пространство $V_1$ – одномерным.

Базисом $n$-мерного линейного пространства $V_n$ называется любая упорядоченная система $n$ линейно независимых векторов этого пространства. Приведем примеры базисов некоторых линейных пространств. Базис пространства $V_3$ образует любая тройка некомпланарных векторов, так как эти векторы линейно независимы (см. теорему 3.4), и любая четверка векторов линейно зависима (см. теорему 3.6). Базис пространства $V_2$ образует два любых неколлинеарных вектора, поскольку они линейно независимы (см. теорему 3.2), и любой вектор плоскости, определяемой двумя векторами, можно разложить по ним (см. терему 3.3). Базисом линейного пространства $V_1$ является любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой.

Линейное пространство, в котором имеется базис, состоящий из конечного числа векторов, называется конечномерным. Примерами конечномерных пространств являются пространства $V_1, V_2, V_3, A_n$.

Линейное пространство $A_n$ является $n$-мерным, а его базис образует система векторов $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Линейное пространство называется бесконечномерным, если при любом натуральном числе $m$ в нем найдется $m$ линейно независимых векторов. Примером бесконечномерного пространства может служить линейное пространство $C[a, b]$ всех функций $x = x(t)$, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$.

Два линейных пространства $V$ и $U$ называются изоморфными, когда между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что если $\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in U$, то $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \leftrightarrow (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)$, $\alpha\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \alpha\mathbf{y}_1$, где $\alpha$ – действительное число.

Теорема 9.2. *Два линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

В частности, пространство $V_3$ (всех свободных векторов) и пространство $A_3$ (всех упорядоченных троек действительных чисел) изоморфны. Отметим также, что каждое конечномерное линейное пространство размерности $n$ изоморфно линейному пространству $A_n$.

## 9.4. Координаты вектора линейного пространства

Теорема 9.3. *Если* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ *– базис линейного n-мерного пространства* $V_n$, *то любой вектор* $\mathbf{x}$ *этого пространства линейно выражается через базисные векторы* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, *т. е.*

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n. \tag{9.5}$$

*Коэффициенты* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *этого разложения определяются однозначно.*

Выражение (9.5) называется разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называют коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в разложении этого вектора по данному базису, т. е. в формуле (9.5). Если вектор $\mathbf{x}$ в некотором базисе имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то пишут $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, или $\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Операции над векторами сводятся к операциям над их координатами на основании следующих свойств.

1. Вектор является нулевым вектором линейного пространства тогда и только тогда, когда все его координаты в любом базисе равны нулю.
2. Координаты суммы двух векторов в некотором базисе равны сумме соответствующих координат данных векторов в том же базисе.
3. Координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующих координат на это число (в одном и том же базисе).
4. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе.
5. Вектор $\mathbf{y}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ тогда и

только тогда, когда каждая координата вектора $\mathbf{y}$ является такой же линейной комбинацией соответствующих координат этих векторов в одном и том же базисе.

Пример 9.1. Пусть $A_4$ – четырехмерное линейное пространство с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Найти координаты векторов $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_3 + 7\mathbf{e}_4$ в этом базисе.

Представим каждый из векторов $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{x}$ в виде (9.5). Так как $\mathbf{e}_3 = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4$, то вектор $\mathbf{e}_3$ имеет координаты $(0, 0, 1, 0)$. Поскольку $\mathbf{x} = 3\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 + 7\mathbf{e}_4$, то вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $(3, 0, -5, 7)$.

Пример 9.2. В некотором базисе даны векторы $\mathbf{x}(1, 2, -2, -1, 3)$, $\mathbf{y}(4, -3, -2, 1, -1)$. Найти координаты вектора $5\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$.

Так как $5\mathbf{x} = (5, 10, -10, -5, 15)$, $-3\mathbf{y} = (-12, 9, 6, -3, 3)$, то вектор $5\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = 5\mathbf{x} + (-3\mathbf{y})$ имеет координаты $(-7, 19, -4, -8, 18)$.

## 9.5. Ранг системы векторов линейного пространства

Рассмотрим систему $m$ векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}) \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_m &= (a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}) \end{aligned} \tag{9.6}$$

линейного $n$-мерного пространства, координаты которых заданы в одном и том же базисе. Системе векторов (9.6) поставим в соответствие матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \tag{9.7}$$

в $k$-м столбце которой записаны координаты вектора $\mathbf{a}_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$. Матрицу (9.7) называют матрицей системы векторов (9.6) в данном базисе, а ранг этой матрицы – рангом системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$. Обратно, если дана матрица (9.7), то ей можно поставить в соответствие систему (9.6) $m$ векторов линейного $n$-мерного пространства. Согласно свойству 5 п. 9.4, будем говорить, что столбцы матрицы (9.7) линейно зависимы, если векторы (9.6) линейно зависимы и обратно.

Теорема 9.4. *Для того чтобы $m$ векторов $n$-мерного линейного пространства были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен $m$.*

Следствие 1. *Система $n$ векторов $n$-мерного линейного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда матрица этой системы векторов является невырожденной.*

С л е д с т в и е 2. *Если ранг матрицы системы $m$ векторов линейного пространства равен $r$, то максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно $r$.*

П р и м е р 9.3. Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $\mathbf{a}_1(1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_2(1,2,3,4)$, $\mathbf{a}_3(8,7,6,5)$, $\mathbf{a}_4(-1,-1,1,1)$.

Матрица данной системы векторов имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ -1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как ранг этой матрицы равен 3 (см. пример 5.16), то максимальное число линейно независимых векторов этой системы равно 3.

Т е о р е м а 9.5. *Максимальное число линейно независимых строк всякой матрицы равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов, т. е. равно рангу этой матрицы.*

## 9.6. Преобразование координат вектора при изменении базиса

В линейном $n$-мерном пространстве $V_n$ фиксируем два базиса

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \tag{9.8}$$

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n. \tag{9.9}$$

Матрицей перехода от базиса (9.8) к базису (9.9) называется матрица системы векторов (9.9) в базисе (9.8). Каждый вектор системы (9.9) можно разложить по базису (9.8). Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_2 &= t_{12}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_n &= t_{1n}\mathbf{e}_1 + t_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{x}_n, \end{aligned} \tag{9.10}$$

тогда матрица перехода от базиса (9.8) к базису (9.9) имеет вид

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}. \tag{9.11}$$

Матрица перехода от одного базиса к другому невырожденная (так как базисные векторы линейно независимы). Всякую невырожденную матрицу $n$-го порядка можно рассматривать как матрицу перехода от одного базиса $n$-мерного линейного пространства к другому базису этого пространства. Очевидно, матрица $T^{-1}$, обратная матрице (9.11), является матрицей перехода от базиса (9.9) к базису (9.8).

**Теорема 9.6.** *Если* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *– координаты вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ *– координаты того же вектора в базисе* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, *то*

$$X = TX', \tag{9.12}$$

*где*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \tag{9.13}$$

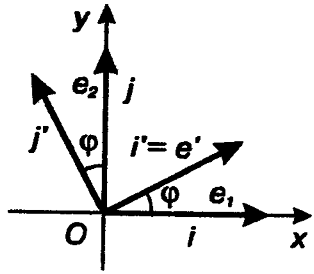


Рис. 9.1

$T$ *– матрица, определяемая формулой* (9.11).

**Замечание.** Теорема 9.6 выражает старые координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора $\mathbf{x}$ через его новые координаты. Чтобы получить формулы, выражающие новые координаты через старые, умножим слева равенство (9.12) на матрицу $T^{-1}$, обратную матрице $T$, получим $T^{-1}X = T^{-1}TX'$, $T^{-1}X = X'$ или $X' = T^{-1}X$.

**Пример 9.4.** В пространстве $V_2$ рассмотрим базис $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – орты, и базис $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i}'$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{j}'$, где $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ – орты, причем $\mathbf{i}'$ образует с $\mathbf{i}$ угол $\varphi$ (рис. 9.1). В данном случае $\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi$, $\mathbf{j}' = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi$. Матрица перехода от базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ к базису $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $x$, $y$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$; $x', y'$ – в базисе $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$, то $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$, $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$.

## 9.7. Евклидово пространство

**Определение евклидова пространства.** В линейном действительном пространстве $V$, кроме операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число, введем еще одну операцию, которую назовем скалярным умножением векторов. Каждой упорядоченной паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ поставим в соответствие действительное число, которое назовем их скалярным произведением и обозначим $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Потребуем, чтобы для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ и любого числа $\alpha \in \mathbf{R}$ выполнялись следующие аксиомы: I. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$, II. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$, III. $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, IV. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Очевидно, скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой: $(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = (0\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x}$ на себя называется скалярным квадратом этого вектора и обозначается $\mathbf{x}^2$, т. е.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^2. \tag{9.14}$$

Евклидовым пространством называется линейное действительное пространство, в котором задана операция скалярного умножения векторов, удовлетворяющая аксиомам I – IV. Если $n$-мерное линейное пространство является евклидовым, то будем называть его евклидовым $n$-мерным пространством, а базис этого линейного пространства – базисом евклидова пространства.

**Примеры евклидовых пространств.** 1. В линейном пространстве $V_3$ скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определим так, как в п. 3.6; аксиомы I – IV для него будут выполнены (см. свойства скалярного произведения и определение скалярного квадрата вектора).

Следовательно, линейное пространство $V_3$ всех свободных векторов с обычным определением скалярного произведения является евклидовым пространством.

2. Рассмотрим $n$-мерное линейное пространство $A_n$ упорядоченных совокупностей $n$ действительных чисел. Скалярное произведение двух его элементов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ по аналогии с формулой (3.21) определим соотношением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \tag{9.15}$$

Легко видеть, что все аксиомы I – IV скалярного произведения при этом выполняются. Таким образом, рассматриваемое линейное пространство со скалярным произведением (9.15) является евклидовым пространством, его обозначают $E_n$.

3. В бесконечномерном линейном пространстве $C[a, b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, скалярное произведение двух его функций $x(t)$, $y(t)$ определим формулой

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt. \tag{9.16}$$

Непосредственной проверкой можно убедится в том, что аксиомы I – IV скалярного произведения будут выполнены, в частности $(x, x) = \int_a^b x^2(t) dt > 0$ при $x(t) \neq 0$, $(x, x) = 0$ при $x(t) \equiv 0$.

Следовательно, линейное пространство $C[a, b]$ с указанным определением скалярного произведения любых двух его элементов является евклидовым пространством.

**Норма вектора евклидова пространства.** Нормой вектора евклидова пространства называется арифметическое значение корня из скалярного квадрата этого вектора. Норму вектора $\mathbf{x}$ обозначим $\|\mathbf{x}\|$, тогда по определению

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}^2}. \tag{9.17}$$

Норма вектора обладает следующими свойствами: 1) $\|\mathbf{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}=0$; 2) $\|\alpha\mathbf{x}\|=|\alpha|\cdot\|\mathbf{x}\|$, где $\alpha$ – действительное число; 3) $|(\mathbf{x},\mathbf{y})|\le\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$; 4) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$.

Неравенством Коши – Буняковского называют неравенство

$$|(\mathbf{x},\mathbf{y})|\le\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|, \tag{9.18}$$

а неравенством треугольника – неравенство

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|. \tag{9.19}$$

Запишем норму и неравенства (9.18), (9.19) для векторов (элементов) каждого из рассмотренных выше евклидовых пространств.

В евклидовом пространстве $V_3$ с обычным определением скалярного произведения норма вектора совпадает с его длиной, т. е. $\|\mathbf{a}\|=|\mathbf{a}|$; это следует из формул $\mathbf{a}^2=|\mathbf{a}|^2$ и (9.17). Неравенства (9.18) и (9.19) принимают соответственно вид $|(\mathbf{a},\mathbf{b})|\le|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$. Отметим, что неравенство $|(\mathbf{a},\mathbf{b})|\le|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$ следует из формулы (3.18). Неравенство $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\le|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ следует из определений суммы векторов и длины вектора; оно имеет простой геометрический смысл (в треугольнике сумма длин двух сторон больше длины третьей стороны).

В евклидовом пространстве $C[a,b]$ норма элемента $x(t)$ определяется формулой

$$\|x(t)\|=\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt},$$

неравенства (9.18) и (9.19) принимают вид

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\le\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}\,\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt},$$

$$\sqrt{\int_a^b (x(t)+y(t))^2\,dt}\le\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}+\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt}.$$

В евклидовом пространстве $E_n$ со скалярным произведением (9.15) норма элемента $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ определяется формулой

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}.$$

а неравенства (9.18) и (9.19) принимают вид

$$|x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2},$$

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\dots+(x_n+y_n)^2}\le$$

$$\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2}.$$

**Угол между двумя векторами евклидова пространства.** Углом между двумя векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства называется угол $\varphi$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \quad (0 \le \varphi < 2\pi). \tag{9.20}$$

Отметим, что в пространстве $V_3$ всех свободных векторов введенное понятие угла совпадает с понятием угла, рассматриваемого в векторной алгебре.

Два вектора евклидова пространства называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, нулевой вектор ортогонален любому другому вектору. В пространстве $V_3$ ортогональность векторов означает их перпендикулярность.

Из определений следует, что ненулевые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\cos\varphi = 0$.

Равенство

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \tag{9.21}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны ( $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ ). Другими словами, в формуле (9.18) равенство достигается лишь в случае коллинеарности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

**Ортонормированный базис.** Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называется ортогональной, если эти векторы ортогональны, т. е. $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) = 0$ при $i \ne k$.

Теорема 9.7. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Вектор $\mathbf{a}$ называется нормированным или единичным, если $\|\mathbf{a}\| = 1$. Если $\mathbf{a}$ – ненулевой вектор, то каждый из векторов

$$\mathbf{a}_1^\circ = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}, \; \mathbf{a}_2^\circ = -\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \tag{9.22}$$

будет нормированным. Нахождение для данного вектора нормированного вектора по формулам (9.22) называется нормированием данного вектора, а множитель $\mu = 1/\pm\|\mathbf{a}\|$ – нормирующим множителем.

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ называется ортонормированной, если она ортогональна и каждый вектор является нормированным, т. е.

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \ne k, \\ 1, & \text{при } i = k, \end{cases} \tag{9.23}$$

где $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Базис $n$-мерного евклидова пространства называется ортонормированным, если базисные векторы образуют ортонормированную систему.

Теорема 9.8. *Во всяком евклидовом $n$-мерном пространстве* $(n \ge 2)$ *существует ортонормированный базис.*

**Выражение скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе.** Пусть в $n$-мерном евклидовом пространстве фиксирован ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и даны векторы этого пространства

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \; \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n. \tag{9.24}$$

Скалярное произведение этих векторов выражается формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{9.25}$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

## 9.8. Унитарное пространство

Комплексное линейное пространство $U$ называется унитарным пространством, если каждой паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и называемое скалярным произведением векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем выполняются следующие аксиомы: I. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$, II. $(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$, III. $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, IV. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in U$ и всех $\alpha \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ – множества комплексных чисел).

Замечание. Черта означает комплексную сопряженность: $\overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$ – комплексное число, сопряженное комплексному числу $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Из аксиом скалярного произведения в унитарном пространстве вытекают следующие свойства:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in U$;
2) $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \tilde{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ и любого $\alpha \in \mathbf{C}$;
3) $(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$ для любого $\mathbf{x} \in U$;
4) $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_i y_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{l} \alpha_i \overline{\beta}_j (x_i, y_j)$.

Примером унитарного пространства является множество $C_n$ упорядоченных систем $n$ комплексных чисел

$$\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \ldots,$$

для которых скалярное произведение определено формулой

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha_1\overline{\beta}_1 + \alpha_2\overline{\beta}_2 + \cdots + \alpha_n\overline{\beta}_n,$$

где $\overline{\beta}_k$ – комплексное число, сопряженное числу $\beta_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Унитарным преобразованием комплексного линейного пространства называется линейное преобразование, сохраняющее положительно определенную эрмитову форму $x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \cdots + x_n\overline{x}_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора пространства. В ортонормированном базисе относительно эрмитова произведения, задаваемого этой формой, унитарное преобразование записывается унитарной матрицей. Унитарной матрицей называется квадратная невырожденная матрица $A$, удовлетворяющая условию $A^{-1} = \overline{A}^{\mathrm{T}}$, где $A^{-1}$ – обратная матрица, $\overline{A}^{\mathrm{T}}$ – транспонированная и комплексно-сопряженная матрица. Определитель унитарной матрицы по модулю равен единице. Все характеристические корни унитарной матрицы по модулю равны единицы. Всякая (действительная) ортогональная матрица есть в то же время унитарная матрица.

*Глава 10*

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ)

## 10.1. Линейное преобразование и его матрица

Если указано правило $f$, по которому каждому вектору $\mathbf{x}$ линейного пространства $V$ ставится в соответствие единственный вектор $\mathbf{y}$ этого пространства, то будем говорить, что в нем задано преобразование (отображение, оператор) $f$ или задано преобразование пространства $V$ в себя, и писать $f : V \to V$. Говорят также, что преобразование $f$ переводит вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}$, и пишут $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Вектор $\mathbf{y}$ называют образом вектора $\mathbf{x}$, а $\mathbf{x}$ – прообразом вектора $\mathbf{y}$.

Преобразование, при котором каждый вектор имеет единственный прообраз, называется взаимно однозначным (или биективным).

Преобразование $f$ линейного пространства $V$ называется линейным преобразованием (линейным оператором), если для любых векторов этого пространства $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}$ и любого действительного числа $\lambda$ выполняются условия

$$1)\ f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2); \quad 2)\ f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

(Если рассматривается комплексное пространство, то $\lambda$ – любое комплексное число.)

Из этих условий следует, что

$$f(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha f(\mathbf{x}_1) + \beta f(\mathbf{x}_2), \tag{10.1}$$

где $\alpha$, $\beta$ – любые числа (действительные или комплексные). Обратно, из равенства (10.1) следуют условия 1) и 2). Итак, линейное преобразование (линейный оператор) определяется равенством (10.1).

Отметим, что линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой, так как, согласно условию 2), $f(\mathbf{0}) = f(0\mathbf{x}) = 0 f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Простейшим примером линейного преобразования является тождественное преобразование или преобразование $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, т.е. преобразование, которое каждому вектору линейного пространства ставит в соответствие тот же вектор. Линейное преобразование будет вполне определено, если заданы образы базисных векторов рассматриваемого пространства.

Пусть $f$ – линейное преобразование $n$-мерного линейного пространства, переводящее базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в векторы $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$. Каждый из последних векторов разложим по базису:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\
\mathbf{e}'_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{e}_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{e}'_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{x}_n.
\end{aligned}$$

Матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

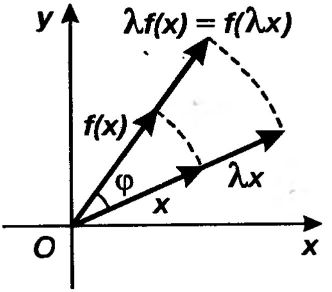


Рис. 10.1

в которой $k$-й столбец состоит из координат вектора $\mathbf{e}'_k$ $(k=1,2,\dots,n)$, называется матрицей линейного преобразования $f$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$; ранг $r$ матрицы $A$ называется рангом преобразования $f$, а число $(n-r)$ – дефектом этого преобразования. Итак, каждому линейному преобразованию $n$-мерного линейного пространства соответствует матрица порядка $n$ в данном базисе; и наоборот, каждой матрице порядка $n$ соответствует линейное преобразование $n$-мерного пространства.

Отметим, что матрица тождественного преобразования в любом базисе будет единичной; обратно, любой единичной матрице $n$-го порядка соответствует тождественное преобразование линейного $n$-мерного пространства.

Пример 10.1. В пространстве $V_2$ всех свободных векторов на плоскости определим преобразование поворота всех векторов вокруг начала координат на угол φ. Каждому вектору $\mathbf{x}$ (рис. 10.1) этой плоскости ставим в соответствие вектор $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$, полученный вращением вектора $\mathbf{x}$ на один и тот же угол φ. Это преобразование является линейным, поскольку условия 1) и 2), определяющие линейное преобразование, будут выполнены. Найдем матрицу этого линейного преобразования в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ (рис. 10.2, *а*, *б*). Так как $f(\mathbf{i}) = \mathbf{OA}+\mathbf{OB} = \mathbf{i}\cos\varphi+\mathbf{j}\sin\varphi$, $f(\mathbf{j})=\mathbf{OC}+\mathbf{OD}=-\mathbf{i}\sin\varphi+\mathbf{j}\cos\varphi$, то

$$A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

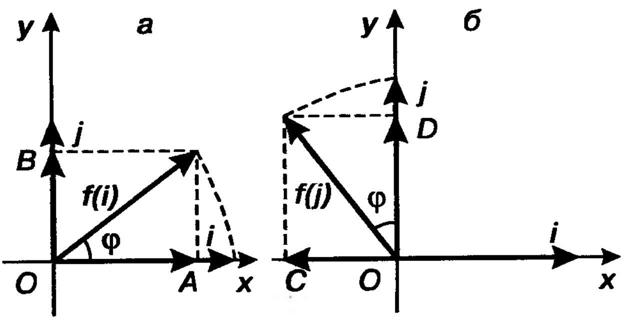


Рис. 10.2

## 10.2. Линейное преобразование в координатах

Рассмотрим линейное преобразование $f$ $n$-мерного линейного пространства, заданное в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ матрицей

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{10.2}$$

Координаты вектора $\mathbf{x}$ и его образа $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$ известны:

$$x=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n,\; f(\mathbf{x})=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+\cdots+y_n\mathbf{e}_n. \tag{10.3}$$

Зависимость между координатами векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выражается формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_n &= a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Формулы (10.4) можно записать в матричном виде

$$Y=AX, \tag{10.5}$$

где $A$ определяется формулой (10.2), а $X$ и $Y$ – формулами

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Если переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ связаны с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формулами (10.4), то будем говорить, что задано линейное однородное преобразование переменных с матрицей $A$, переводящее переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Оно обладает теми же свойствами, что и линейное преобразование $n$-мерного линейного пространства. Линейное однородное преобразование переменных (10.4) или (10.5) называется невырожденным, если $\det A \neq 0$.

З а м е ч а н и е. При рассмотрении линейных преобразований (линейных операторов) пользуются и другими обозначениями. Если $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$, где $f$ – линейное преобразование (линейный оператор) с матрицей $A$ в некотором базисе, то пишут $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$. Условия 1) и 2), определяющие линейное преобразование, можно записать в виде $A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=A\mathbf{x}_1+A\mathbf{x}_2$, $A(\lambda\mathbf{x})=\lambda A\mathbf{x}$.

## 10.3. Зависимость между матрицами одного и того же преобразования в различных базисах. Подобные матрицы

В $n$-мерном линейном пространстве фиксируем два базиса: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$; первый из них назовем старым, второй – новым. Предположим, что известно преобразование, переводящие старый базис в новый.

Теорема 10.1. *Если* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *и* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ *– два базиса линейного пространства, A – матрица линейного преобразования в старом базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, *то матрица B этого преобразования в новом базисе* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ *имеет вид*

$$B = T^{-1}AT. \tag{10.6}$$

*где T – матрица перехода от старого базиса к новому.*

Следствие. *Если линейное преобразование имеет невырожденную матрицу в некотором базисе, то матрица этого преобразования будет невырожденной в любом другом базисе.*

Матрица $B$ называется подобной матрице $A$, если существует невырожденная квадратная матрица $C$, удовлетворяющая равенству $B = C^{-1}AC$.

Две квадратные матрицы $A$ и $B$ порядка $n$ тогда и только тогда являются матрицами одного и того же линейного преобразования пространства $V_n$ в соответствующих базисах, когда матрица $B$ подобна матрице $A$.

Пример 10.2. В базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ преобразование $f$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования $f$ в базисе $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = 6\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$.

Так как

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

то по формуле (10.6) получаем

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

## 10.4. Характеристическое уравнение линейного преобразования

Теорема 10.2. *Если линейное преобразование f в базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *имеет матрицу A и в базисе* $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ *– матрицу B, то*

$$\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E), \tag{10.7}$$

*где* $\lambda$ *– любое действительное число, E – единичная матрица n-го порядка.*

Отметим, что $\det(A-\lambda E)$ является многочленом степени $n$ относительно $\lambda$ и называется характеристическим многочленом матрицы $A$ или характеристическим многочленом линейного преобразования $f$.

З а м е ч а н и е . Равенство (10.7) означает, что характеристический многочлен линейного преобразования остается неизменным при переходе к новому базису; матрица линейного преобразования меняется.

Характеристическим уравнением линейного преобразования называется уравнение

$$\det(A-\lambda E)=0, \tag{10.8}$$

где $A$ – матрица этого преобразования в некотором базисе. Очевидно, характеристическое уравнение не зависит от выбора базиса. Уравнение (10.8) называют также характеристическим уравнением матрицы $A$, а корни уравнения – характеристическими числами линейного преобразования $f$ или характеристическими числами матрицы $A$.

Если линейное преобразование $f$ в некотором базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ имеет квадратную матрицу $n$-го порядка $A=(a_{ik})$, то характеристическое уравнение (10.8) запишется так:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{10.9}$$

Левая часть равенства (10.9) является характеристическим многочленом матрицы $A$; обозначим его $P_n(\lambda)$, тогда характеристическое уравнение (10.9) примет вид $P_n(\lambda)=0$.

П р и м е р 10.3. Найти характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с определением характеристического многочлена получаем

$$P_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

$$P_n(\lambda)=(4-\lambda)(1-\lambda)^2+4+2+2(1-\lambda)+2(1-\lambda)-2(4-\lambda)=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6.$$

Приравнивая этот многочлен нулю, находим характеристическое уравнение $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$ или $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$. Разлагая левую часть этого уравнения на множители $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=\lambda^3-\lambda^2-5\lambda^2+5\lambda+6\lambda-6=$ $=\lambda^2(\lambda-1)-5\lambda(\lambda-1)+6(\lambda-1)=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$, приводим данное уравнение к виду $(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$, откуда $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Эти корни – характеристические числа данной матрицы.

## 10.5. Собственные векторы линейного преобразования

Ненулевой вектор $\mathbf{x}$ линейного пространства называется собственным вектором линейного преобразования $f$ этого пространства, если существует число $k$ такое, что

$$f(\mathbf{x})=k\mathbf{x}, \tag{10.10}$$

причем $k$ – действительное число для действительного линейного пространства и комплексное число в случае комплексного пространства. Число $k$ называется собственным значением вектора $\mathbf{x}$ относительно преобразования $f$. Равенство (10.10) можно записать в матричном виде

$$AX=kX, \tag{10.11}$$

где $A$ – матрица преобразования $f$ в некотором базисе, $X$ – матрица-столбец из координат собственного вектора $\mathbf{x}$ в том же базисе. Ненулевая матрица-столбец $X$, удовлетворяющая уравнению (10.11), называется собственным вектором-столбцом матрицы $A$ с собственным значением $k$.

Собственные векторы и собственные значения обладают следующими свойствами.

1. Собственный вектор линейного преобразования имеет единственное собственное значение $k$.

2. Если $\mathbf{x}$ – собственный вектор линейного преобразования $f$ с собственным числом $k$ и $\lambda$ – любое, отличное от нуля число, то $\lambda\mathbf{x}$ – также собственный вектор преобразования $f$ с собственным значением $k$

3. Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – линейно независимые собственные векторы линейного преобразования $f$ с одним и тем же собственным значением $k$, то $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ – также собственный вектор этого преобразования с собственным значением $k$.

4. Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – собственные векторы линейного преобразования $f$ с собственными числами $k$ и $m$, причем $k\neq m$, то $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ линейно независимы.

Следствие. *Если* $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots,\mathbf{x}_m$ *– линейно независимые собственные векторы линейного преобразования $f$ с одним и тем же собственным значением $k$, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором этого преобразования с собственным значением $k$.*

Теорема 10.3. *В комплексном линейном пространстве все корни характеристического уравнения и только они являются собственными значениями линейного преобразования.*

Координаты собственного вектора $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} &(a_{11}-k)\,x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ &a_{21}x_2+(a_{22}-k)\,x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-k)\,x_n=0. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю (см. следствие из теоремы Крамера), т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0. \tag{10.13}$$

Это означает, что число $k$ является корнем характеристического уравнения.

Замечания. 1. Уравнение (10.13) является алгебраическим уравнением $n$-й степени относительно $k$. Такое уравнение имеет ровно $n$ корней, считая равные и комплексные. Среди корней этого уравнения может не оказаться действительных.

2. Собственными значениями линейного преобразования действительного пространства являются только действительные корни характеристического уравнения.

Собственные значения линейного преобразования называются также собственными значениями матрицы этого преобразования. Собственное значение называется $m$-кратным, если оно является $m$-кратным корнем характеристического уравнения.

Теорема 10.4. *Корни характеристического уравнения действительной симметрической матрицы являются действительными числами.*

Следствие. *Действительная симметрическая матрица имеет только действительные собственные векторы.*

Система (10.12) для определения координат собственного вектора в этом случае имеет только действительные решения, так как $a_{ij}$ и $k$ – действительные числа.

Теорема 10.5. *Собственные векторы действительной симметрической матрицы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Пример 10.4. Найти действительные собственные значения и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение матрицы $A$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7\\ 1 & -4-\lambda & 9\\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^3-5\lambda^2+17\lambda-13=0.$$

Разложим на множители многочлен в левой части уравнения: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 13\lambda - 13 = \lambda^2(\lambda - 1) - 4\lambda(\lambda - 1) + 13(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$. Уравнение принимает вид $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 - 3i$, $\lambda_3 = 2 + 3i$. Следовательно, линейное преобразование с данной матрицей имеет только одно действительное собственное значение $\lambda = 1$.

Для отыскания соответствующего собственного вектора используем систему уравнений (10.12), которая принимает вид

$$\begin{aligned} (4-\lambda)x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - (4+\lambda)x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + (5-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 0, \\ -4x_1 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

при $\lambda = 1$. Решая полученную систему, находим $x_1 = x_3$, $x_2 = 2x_3$. Полагая $x_3 = 1$, получаем собственный вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 1)$.

Замечание. Собственный вектор линейного преобразования определяется с точностью до произвольного множителя (см. свойство 2 собственного вектора).

## 10.6. Приведение матрицы линейного преобразования к диагональному виду

Теорема 10.6. *Матрица линейного преобразования имеет диагональный вид*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{10.14}$$

*тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор является собственным вектором этого преобразования.*

Матрица $A$ называется приводимой к диагональному виду, если существует невырожденная матрица $T$ такая, что матрица $T^{-1}AT = B$ является диагональной. Следовательно, если матрица $A$ приводима к диагональному виду, то

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — характеристические числа матрицы $A$.

Теорема 10.7. *Матрица $A$ линейного преобразования $f$ $n$-мерного линейного пространства приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис этого пространства, состоящий из собственных векторов данного преобразования.*

Если все собственные числа матрицы $A$ попарно различны, то матрица приводится к диагональному виду.

## 10.7. Действия над линейными преобразованиями

**Произведение преобразований.** Рассмотрим преобразование $f$, переводящие вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{y}$, т. е. $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$. К вектору $\mathbf{y}$ применим преобразование $g$, переводящие вектор $\mathbf{y}$ в вектор $\mathbf{z}$, т. е. $\mathbf{z}=g(\mathbf{y})$. Так как $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$, то имеем преобразование $\mathbf{z}=g(f(\mathbf{x}))$, переводящее вектор $\mathbf{x}$ в вектор $\mathbf{z}$, причем $\mathbf{z}$ получен в результате последовательного применения преобразований $f$ и $g$. Преобразование, заключающееся в последовательном применении преобразований $f$ и $g$, называется произведением преобразования $f$ на преобразование $g$ или композицией этих преобразований и обозначается $g\circ f$ (или просто $gf$); отметим, что справа записывается первое преобразование. Таким образом,

$$g\circ f(x)=g(f(x)). \tag{10.15}$$

Произведение линейных преобразований является линейным преобразованием.

Теорема 10.8. *Если в некотором базисе линейные преобразования $f$ и $g$ имеют соответственно матрицы $A$ и $B$, то их произведение $gf$ в том же базисе имеет матрицу $BA$.*

**Сумма преобразований.** Суммой преобразований $f$ и $g$ некоторого пространства называется преобразование $h$ такое, что для любого вектора $\mathbf{x}$ этого пространства

$$h(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}). \tag{10.16}$$

Сумму преобразований $f$ и $g$ будем обозначать $f+g$. Очевидно $f+g=g+f$.

Теорема 10.9. *Если линейные преобразования $f$ и $g$ в некотором базисе имеют соответственно матрицы* A *и $B$, то преобразование $f+g$ в том же базисе имеет матрицу $A+B$.*

Пример 10.5. Даны два линейных преобразования

$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1+4x_3, & x_1'' &= x_2'-6x_3',\\ x_2' &= 4x_2-9x_3, & x_2'' &= 3x_1'+7x_3',\\ x_3' &= 3x_1+x_2, & x_3'' &= x_1'+x_2'-x_3'. \end{aligned}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее $x_1'', x_2'', x_3''$ через $x_1, x_2, x_3$.

Первое преобразование задано матрицей $A$, второе – матрицей $B$, где

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 4\\ 0 & 4 & -9\\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 7\\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Искомое преобразование в соответствии с теоремой 10.8. имеет матрицу $BA$. Умножив матрицу $B$ на матрицу $A$, получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -2 & -9 \\ 42 & 7 & 12 \\ 4 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, искомое преобразование определяется формулами $x_1'' = -18x_1 - 2x_2 - 9x_3$, $x_2'' = 42x_1 + 7x_2 + 12x_3$, $x_3'' = 4x_1 + 3x_2 - 5x_3$.

## 10.8. Невырожденные линейные преобразования. Преобразование, обратное данному

Линейное преобразование называется невырожденным, если его матрица является невырожденной; в противном случае линейное преобразование называется вырожденным.

Теорема 10.10. *Линейное преобразование является невырожденным тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно.*

Следствие. *Линейное невырожденное преобразование ненулевой вектор переводит в ненулевой; обратно также верно: если линейное преобразование ненулевой вектор переводит в ненулевой, то оно будет невырожденным.*

Теорема 10.11. *Произведение двух линейных невырожденных преобразований есть невырожденное линейное преобразование. Преобразование $\varphi$ называется обратным преобразованию $f$, если для любого вектора* $\mathbf{x}$

$$f\varphi(\mathbf{x}) = \varphi f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \tag{10.17}$$

т. е. произведение этих преобразований является тождественным преобразованием. Из определения следует, что если $\varphi$ – преобразование, обратное преобразованию $f$, то $f$ – преобразование, обратное $\varphi$. Преобразования $f$ и $\varphi$, удовлетворяющие условию (10.17), называются взаимно обратными.

Линейное преобразование имеет обратное преобразование тогда и только тогда, когда оно является невырожденным.

Для любого невырожденного линейного преобразования с матрицей $A$ в некотором базисе существует единственное обратное преобразование с матрицей $A^{-1}$ в том же базисе.

Пример 10.6. Найти линейное преобразование, обратное преобразованию $y_1 = 2x_1 - x_3$, $y_2 = -3x_1 + x_2 + x_3$, $y_3 = 2x_1 - x_2$.

Это преобразование имеет матрицу $A$, определитель которой отличен от нуля, поэтому для него существует обратное преобразование с матрицей $A^{-1}$. Так как

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

то обратное преобразование выражается формулами $x_1 = y_1 + y_2 + y_3$, $x_2 = 2y_1 + 2y_2 + y_3$, $x_3 = y_1 + 2y_2 + 2y_3$.

## 10.9. Ортогональные матрицы

Матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{10.18}$$

называется ортогональной, если соответствующая ей система векторов

$$\mathbf{a}_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}),\ \mathbf{a}_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}),\ \dots,\ \mathbf{a}_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}) \tag{10.19}$$

является ортонормированной.

Векторы (10.19) будут ортонормированными (см. п. 9.7), если

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{10.20}$$

для любых $i, j$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Примеры ортогональных матриц:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & -0{,}8 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что единичная матрица любого порядка является ортогональной.

Теорема 10.12. *Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы $A$ выражается равенством*

$$A^{\mathrm{T}}A = E, \tag{10.21}$$

*где $A^{\mathrm{T}}$ – матрица, полученная из матрицы $A$ транспонированием, $E$ – единичная матрица того же порядка, что и $A$.*

Следствие 1. *Модуль определителя ортогональной матрицы равен единице.*

Следствие 2. *Ортогональная матрица является невырожденной матрицей.*

Следствие 3. *Произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица.*

Следствие 4. *Равенство $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$ выражает необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы $A$.*

Следствие 5. *Матрица, полученная транспонированием ортогональной матрицы, является ортогональной.*

Следствие 6. *Матрица, обратная ортогональной матрице, является ортогональной.*

Замечания. 1. Из условия $\det A = \pm 1$ не следует, что $A$ – ортогональная матрица. Например, матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, для которой $\det A = 1$, не является ортогональной, так как $A^{\mathrm{T}} A \neq E$.

2. Сумма ортогональных матриц не является ортогональной матрицей.

3. Необходимое и достаточное условие ортогональности матрицы $A$ можно выразить равенством $AA^{\mathrm{T}} = E$.

Теорема 10.13. *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.*

## 10.10. Ортогональные преобразования

Линейное преобразование евклидова пространства называется ортогональным, если в некотором ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Теорема 10.14. *Линейное преобразование евклидова пространства является ортогональным тогда и только тогда, когда оно ортонормированный базис переводит в ортонормированный.*

Теорема 10.15. *Ортогональное преобразование не меняет скалярного произведения векторов.*

Следствие 1. *При ортогональном преобразовании $f$ остается неизменной норма вектора, т. е.* $\|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\|$.

Следствие 2. *При ортогональном преобразовании $f$ остается неизменным угол между векторами, т. е.*

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \frac{(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{\|f(\mathbf{x})\| \cdot \|f(\mathbf{y})\|}.$$

Ортогональные преобразования обладают следующими свойствами.

1. Ортогональное преобразование является невырожденным.

2. Для любого ортогонального преобразования существует обратное преобразование, являющееся ортогональным.

3. Если ортогональное преобразование имеет матрицу $A$, то обратное ему преобразование имеет матрицу $A^{\mathrm{T}}$.

4. Произведение двух ортогональных преобразований является ортогональным преобразованием.

## Глава 11

# КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

## 11.1. Квадратичная форма и ее матрица

Квадратичной формой $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $n$ действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма вида

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n &+ \\
+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n &+ \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2&,
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

или

$$
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{11.2}
$$

где $a_{ij}$ – некоторые числа, называемые коэффициентами. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичная форма называется действительной или комплексной в зависимости от того, являются ли ее коэффициенты соответственно действительными или комплексными числами. Будем рассматривать действительные квадратичные формы.

Матрицей квадратичной формы называется матрица, составленная из ее коэффициентов. Квадратичной форме (11.1) соответствует единственная симметрическая матрица

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{11.3}
$$

И наоборот, всякой симметрической матрице (11.3) соответствует единственная квадратичная форма с точностью до обозначения переменных.

Рангом квадратичной формы называют ранг ее матрицы. Квадратичная форма $n$ переменных называется невырожденной, если ее матрица невырожденная, т. е. $r = n$, и вырожденной, если $r < n$.

Квадратичную форму (11.1) $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно записать в матричном виде. Действительно, если $X$ – матрица-столбец из переменных

$x_1, x_2, \dots, x_n$, $X^{\mathrm{T}}$ – матрица, полученная транспонированием матрицы $X$, т.е. матрица-строка из тех же переменных, то

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^{\mathrm{T}} A X, \tag{11.4}$$

где $A$ определяется формулой (11.3).

Пример 11.1. Записать матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 7x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2$ и найти ее ранг.

В данном случае $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = -3$, $a_{13} = a_{31} = -4$, $a_{22} = 7$, $a_{23} = a_{32} = 2$, $a_{33} = -5$, поэтому

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -35 + 24 + 24 - 112 + 45 - 4 = -58.$$

Так как $\det A \neq 0$, то ранг матрицы равен трем $(r = 3)$. Эта квадратичная форма является невырожденной, поскольку $r = n$.

## 11.2. Преобразование квадратичной формы при линейном однородном преобразовании переменных

Рассмотрим квадратичную форму (11.1). Перейдем к новым переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$ по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}y_n, \end{aligned} \tag{11.5}$$

или в матричном виде

$$X = BY, \tag{11.6}$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{11.7}$$

В квадратичной форме (11.1) вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ подставим их выражения через $y_1, y_2, \dots, y_n$, определяемые формулами (11.5), получим квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ $n$ переменных с некоторой матрицей $C$. В этом случае говорят, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ переводится в квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ линейным однородным преобразованием (11.5). Линейное однородное преобразование (11.6) называется невырожденным, если $\det B \neq 0$.

Две квадратичные формы называются конгруэнтными, если существует невырожденное линейное однородное преобразование, переводящее одну форму в другую. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ конгруэнтны, то будем писать $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Свойства конгруэнтности квадратичных форм.

1. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \sim \psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, то $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim \psi(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Теорема 11.1. *Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с матрицей $A$ линейным однородным преобразованием $X = BY$ переводится в квадратичную форму $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$ с матрицей $C = B^{\mathrm{T}}AB$.*

Следствие 1. *Определители матриц конгруэнтных невырожденных действительных квадратичных форм имеют одинаковые знаки.*

Следствие 2. *Конгруэнтные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.*

## 11.3. Приведение действительной квадратичной формы к нормальному виду

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется канонической, если она не содержит произведений различных переменных, т. е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ii} x_i^2 \quad (r \leq n). \tag{11.8}$$

Каноническая квадратная форма называется нормальной (или имеет нормальный вид), если $|\alpha_{ii}| = 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, т. е. отличные от нуля коэффициенты при квадратах переменных равны $+1$ или $-1$. Например, квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1^2 + 4x_3^2 - 3x_4^2$, для которой $\alpha_{11} = 6$, $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{33} = 4$, $\alpha_{44} = -3$, имеет канонический вид; квадратная форма $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - \; - x_3^2 + x_4^2$ является нормальной, так как $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = 0$, $\alpha_{33} = -1$, $\alpha_{44} = 1$.

Теорема 11.2. *Любая квадратичная форма некоторым невырожденным линейным преобразованием может быть приведена к каноническому виду*

$$\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + \dots + b_{nn}y_n^2,$$

*где $y_1, y_2, \dots, y_n$ – новые переменные.*

Некоторые из коэффициентов $b_{ii}$ могут оказаться равными нулю; число отличных от нуля коэффициентов в этой формуле равно рангу $r$ матрицы квадратичной формы $\varphi$.

Теорема 11.3. *Любую действительную квадратичную форму линейным невырожденным преобразованием можно привести к нормальному виду*

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{k-1}^2 - z_k^2 - \cdots - z_r^2.$$

Число входящих сюда квадратов равно рангу формы.

## 11.4. Закон инерции квадратичных форм

Закон инерции квадратичных форм выражает

Теорема 11.4. *Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная действительная квадратичная форма невырожденным действительным линейным преобразованием, не зависит от выбора преобразования.*

Число положительных квадратов в нормальной форме, к которой приводится данная действительная квадратичная форма, называют положительным индексом инерции этой формы, число отрицательных квадратов – отрицательным индексом инерции, разность между положительным и отрицательным индексами инерции – сигнатурой формы $f$. Если известен ранг формы, то задание любого из трех указанных выше чисел определяет два других.

Теорема 11.5. *Две действительные квадратичные формы от $n$ переменных тогда и только тогда конгруэнтны, когда они имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.*

## 11.5. Знакоопределенные квадратичные формы

Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно-определенной, если она приводится к нормальному виду, состоящему из $n$ положительных квадратов: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2, \tag{11.9}$$

т. е. если ранг и положительный индекс инерции равны числу неизвестных.

Систему значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем нулевой, если $x_1 = x_2 = \ldots = \; = x_n = 0$, и ненулевой, если хотя бы одно из них отлично от нуля.

Теорема 11.6. *Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является положительно-определенной тогда и только тогда, когда она принимает положительные значения при любой ненулевой системе значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

Пусть дана квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей $A = (a_{ij})$. Главными минорами квадратичной формы $f$ называются миноры

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

т. е. миноры порядка $1, 2, \ldots, n$ матрицы $A$, расположенные в левом верхнем углу; последний из них совпадает с определителем матрицы.

Теорема 11.7. *Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с действительной матрицей является положительно-определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.*

Действительная квадратичная форма называется отрицательно-определенной, если она является невырожденной и приводится к нормальному виду, содержащему только отрицательные квадраты всех переменных; эту форму можно привести к виду

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = -y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2. \tag{11.10}$$

Теорема 11.8. *Квадратичная форма является отрицательно-определенной тогда и только тогда, когда ее главные миноры четного порядка положительны, а нечетного – отрицательны.*

Положительно-определенные и отрицательно-определенные квадратичные формы называются знакоопределенными квадратичными формами.

Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых состоит из квадратов одного знака, называются полуопределенными.

Неопределенными называются квадратичные формы, нормальный вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты переменных.

Пример 11.2. Доказать, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ положительно-определенная.

Запишем матрицу $A$ этой квадратичной формы и определитель матрицы $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Так как главные миноры матрицы $a_{11} = 6$, $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 26$ и $\det A = 162$, т.е. все положительны, то данная квадратичная форма является положительно-определенной.

## 11.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных

Теорема 11.9. *Если существует ортогональное преобразование с матрицей C, приводящее действительную квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду*

$$\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \tag{11.11}$$

*то $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – характеристические числа матрицы A квадратичной формы f.*

Теорема 11.10. *Для любой действительной квадратичной формы существует ортогональное преобразование, приводящее ее к каноническому виду.*

Теорема 11.11. *Для любой действительной симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица T, что $T^{-1}AT$ – диагональная матрица.*

С л е д с т в и е. *Любая действительная симметрическая матрица может быть приведена к диагональному виду.*

Т е о р е м а 11.12. *Если линейное преобразование действительного линейного пространства имеет действительную симметрическую матрицу в некотором ортонормированном базисе, то существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого преобразования.*

Из этих теорем следует правило нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму $n$ переменных к каноническому виду. Это правило состоит в следующем: 1) записать матрицу данной квадратичной формы, найти ее собственные значения и $n$ попарно ортогональных собственных векторов, пронормировать их; 2) составить матрицу из ортонормированных собственных вектор-столбцов; 3) записать искомое ортогональное преобразование с помощью последней матрицы.

П р и м е р 11.3. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму двух переменных $x_1, x_2$,

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4\sqrt{6}x_1x_2 + 7x_2^2.$$

Поскольку в данном случае $a_{11} = 5$, $a_{12} = a_{21} = 2\sqrt{6}$, $a_{22} = 7$, то матрица $A$ этой квадратичной формы и ее характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ запишутся так:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение $(5-\lambda)(7-\lambda) - 24 = 0$, или $\lambda^2 - 12\lambda + {} + 11 = 0$, имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$, которые являются собственными значениями матрицы $A$.

Найдем собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям. Координаты $(s, t)$ этих векторов определяются из системы уравнений (10.12), которая в данном случае имеет вид

$$(5-\lambda)s + 2\sqrt{6}t = 0, 0$$

$$2\sqrt{6}s + (7-\lambda)t = 0.$$

При $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$ имеем две системы

$$4s + 2\sqrt{6}t = 0, \quad -6s + 2\sqrt{6}t = 0,$$

$$2\sqrt{6}s + 6t = 0, \quad 2\sqrt{6}s - 4t = 0.$$

Из этих систем находим собственные векторы $u = (-(\sqrt{6}/2)t, t)$, $v = ((\sqrt{6}/3)t, t)$, где $t \neq 0$. Положив $t_1 = -2$, $t_2 = 3$, получим $u = (\sqrt{6}, -2)$, $v = (\sqrt{6}, 3)$. Нормировав эти векторы, запишем их координаты в столбцы, составим матрицу $B$:

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы $B$ записываем искомое ортогональное преобразование

$$x_1=\sqrt{\frac{3}{5}}y_1+\sqrt{\frac{2}{5}}y_2,\quad x_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}y_1+\sqrt{2}y_2),$$

или

$$x_2=-\sqrt{\frac{2}{5}}y_1+\sqrt{\frac{3}{5}}y_2,\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{2}y_1+\sqrt{3}y_2).$$

Это преобразование приводит данную квадратичную форму к каноническому виду $\varphi(y_1,y_2)=y_1^2+11y_2^2$.

## 11.7. Упрощение уравнений фигур второго порядка на плоскости

Фигурой второго порядка на плоскости называется множество точек этой плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_{13}x+a_{23}y+a_{33}=0, \tag{11.12}$$

где $a_{11},a_{12},a_{22}$ одновременно в нуль не обращаются. Отметим, что это множество, в частности, может состоять из единственной точки или оказаться пустым.

Первые три члена левой части уравнения (11.12) образуют квадратичную форму двух переменных $x_1=x,\ \ x_2=y$:

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2 \tag{11.13}$$

с симметрической матрицей

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{11.14}$$

По теореме 11.10 эту квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду

$$f_1(x',y')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2 \tag{11.15}$$

с матрицей

$$C=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{11.16}$$

где $\lambda_1,\lambda_2$ – характеристические числа матрицы $A$, т. е. корни характеристического уравнения матрицы $A$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{11.17}$$

При этом ортогональном преобразовании уравнение (11.12) примет вид

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+a'_{13}x'+a'_{23}y'+a'_{33}=0. \tag{11.18}$$

Это уравнение можно привести к каноническому виду путем выделения в левой части полных квадратов.

Фигуру второго порядка, определяемую уравнением (11.12), называют центральной, если $\det A\neq 0$, и нецентральной, когда $\det A=0$.

Отметим, что при ортогональном преобразовании переменных определитель матрицы квадратичной формы не меняется, т. е. $\det C = \det A$. Так как $\det C = \lambda_1\lambda_2$ (см. (11.16)), то

$$\det A = \lambda_1\lambda_2. \tag{11.19}$$

Пусть уравнение (11.18) определяет центральную фигуру, т. е. $\det A \neq 0$. Здесь возможны два случая: 1) $\lambda_1\lambda_2 > 0$ (числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ одного знака), фигура называется фигурой эллиптического типа; 2) $\lambda_1\lambda_2 < 0$ (числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ имеют разные знаки), фигура называется фигурой гиперболического типа.

Если $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, то уравнение (11.18), выделив в его левой части полные квадраты, можно привести к виду

$$\lambda_1(x' - h_1)^2 + \lambda_2(y' - h_2)^2 = q$$

или

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = q, \tag{11.20}$$

где

$$X = x' - h_1, \ Y = y' - h_2. \tag{11.21}$$

Формулы (11.21) выражают зависимость между координатами $(x', y')$ и $(X, Y)$ при параллельном переносе координатных осей в точку $O_1(h_1, h_2)$.

В случае $\lambda_1\lambda_2 > 0$ уравнение (11.20) приводится к одному из канонических видов

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1, \tag{11.22}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = -1, \tag{11.23}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 0 \tag{11.24}$$

в зависимости от знаков $\lambda_1$ и $q$: 1) $\lambda_1 q > 0$, 2) $\lambda_1 q < 0$, 3) $q = 0$.

Уравнение (11.22) определяет эллипс, уравнению (11.23) не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости, уравнению (11.24) удовлетворяют координаты одной точки $(X = 0, Y = 0)$.

В случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$ уравнение (11.20) приводится к одному из канонических видов

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1, \tag{11.25}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = -1, \tag{11.26}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 0 \tag{11.27}$$

в зависимости от знаков $\lambda_1$ и $q$: 1) $\lambda_1 q > 0$, 2) $\lambda_1 q < 0$, 3) $q = 0$.

Уравнение (11.25) определяет гиперболу с действительной осью $O_1X$, уравнение (11.26) – гиперболу с действительной осью $O_1Y$, уравнение (11.27) – пару пересекающихся прямых, так как оно распадается на два уравнения

$$\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0, \ \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0, \ \text{или} \ Y = \frac{b}{a}X, \ Y = -\frac{b}{a}X.$$

Обратимся к нецентральным фигурам, т.е. к случаю когда $\det A = 0$. В силу (11.19) из равенства $\det A = 0$ следует, что $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Последнее равенство означает, что одно из чисел $\lambda_1\lambda_2$ равно нулю (оба числа $\lambda_1$, $\lambda_2$ в нуль обратиться не могут, так как это означало бы, что квадратичная форма (11.15) является вырожденной, чего быть не может, поскольку $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$). Если $a'_{23} \neq 0$, то уравнение (11.18) можно привести к виду $\lambda_1(x' - h_1)^2 + a'_{23}y' + q = 0$ и записать так:

$$\lambda_1(x' - h_1)^2 = -a'_{23}(y' - h_2). \tag{11.28}$$

Осуществим параллельный перенос репера $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ на вектор $\mathbf{OO}_1 = h_1\mathbf{e}'_1 + h_2\mathbf{e}'_2$, получим новую систему координат $O_1XY$, причем $X$ и $Y$ определяются формулами (11.21). Уравнение (11.28) приведем к виду

$$X^2 = 2pY. \tag{11.29}$$

Уравнение (11.29) определяет параболу с осью $O_1Y$.

Если в уравнении (11.18) $a'_{23} = 0$ (и $\lambda_2 = 0$), то, выделив полный квадрат, его можно записать так:

$$\lambda_1(x' - h_1)^2 + q = 0. \tag{11.30}$$

Осуществив параллельный перенос репера $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ на вектор $\mathbf{OO}_1 = h\mathbf{e}_1$, т.е. выполнив преобразование $X = x' - h_1$, $Y = y'$, получим новую систему координат $O_1XY$, в которой уравнение (11.30) принимает один из видов:

$$X^2 = a^2,\ X^2 = -a^2,\ X^2 = 0 \tag{11.31}$$

в зависимости от соотношения знаков чисел $\lambda_1$ и $q$: $\lambda_1 q > 0$, $\lambda_1 q < 0$, $q = 0$. Первое из уравнений (11.31) определяет пару параллельных прямых $X = a$, $X = -a$, второму уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости, третье уравнение определяет пару совпавших прямых $X = 0$, $X = 0$.

Операция перехода от уравнения (11.12) к уравнению (11.18) называется отнесением фигуры к главным осям. Новые оси координат параллельны осям симметрии фигуры. Главными направлениями фигуры, заданной уравнением (11.12), называют направления ортогональных собственных векторов матрицы квадратичной формы, соответствующей этому уравнению.

Из теорем п. 11.6 следует, что существует декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение (11.12) принимает канонический вид. Чтобы выбрать эту систему координат, необходимо сделать следующее.

1. Найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду квадратичную форму, соответствующую данному уравнению.
2. С помощью этого преобразования определить главные направления фигуры, т. е. векторы $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ – ортонормированные собственные векторы матрицы указанной квадратичной формы.
3. Найти уравнение фигуры в репере $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$.
4. Выделить полные квадраты в полученном уравнении.
5. Совершить параллельный перенос системы $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ на соответствующий вектор $\mathbf{OO}_1$ и составить каноническое уравнение фигуры в репере $(O_1, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$.

Пример 11.4. Какую линию на плоскости определяет уравнение $5x^2+4\sqrt{6}xy+7y^2=22$?

С помощью теории квадратичных форм приведем это уравнение к каноническому виду. Левая часть уравнения – квадратичная форма $f(x,y)=5x^2+4\sqrt{6}xy+7y^2$, которая с точность до обозначений переменных ($x_1=x$, $x_2=y$, $y_1=x'$, $y_2=y'$) (см. п. 11.6, пример 11.3) приведена к каноническому виду $\varphi(x',y')=x'^2+11y'^2$ посредством ортогонального преобразования $x=$ $=\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}x'+\sqrt{2}y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{2}x'+\sqrt{3}y')$.

Это преобразование данное уравнение переводит в уравнение

$$5\left(\frac{1}{5}(\sqrt{3}x'+\sqrt{2}y')^2\right)+\frac{4\sqrt{6}}{5}(\sqrt{3}x'+\sqrt{2}y')(-\sqrt{2}x'+\sqrt{3}y')+$$
$$+\frac{7}{5}(-\sqrt{2}x'+\sqrt{3}y')^2=22, \text{ или } x'^2+11y'^2=22.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=\sqrt{22}$, $b=\sqrt{2}$.

## 11.8. Упрощение уравнений фигур второго порядка в пространстве

Фигурой второго порядка в пространстве называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+a_{14}x+a_{24}y+a_{34}z+a_{44}=0, \qquad (11.32)$$

где $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\neq 0$.

Сумма первых шести членов левой части уравнения (11.32) представляет собой квадратичную форму трех переменных, $x, y, z$:

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \qquad (11.33)$$

с симметрической матрицей

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad (11.34)$$

Фигура второго порядка называется центральной, если $\det A\neq 0$, и нецентральной, если $\det A=0$.

С помощью ортогонального преобразования квадратичную форму (11.33) можно привести к каноническому виду $\varphi(x',y',z')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$, где

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Матрица квадратичной формы $\varphi = \varphi(x', y', z')$ принимает вид

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{11.35}$$

Указанное ортогональное преобразование приводит уравнение (11.32) к виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + a'_{14}x' + a'_{24}y' + a'_{34}z' + a'_{44} = 0. \tag{11.36}$$

**Центральные фигуры.** Если $\det A \neq 0$, то $\det C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, так как $\det A = \det C$. Выделяя полные квадраты в левой части уравнения (11.36), можно привести его к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = \mu, \tag{11.37}$$

где $X = x' - h_1$, $Y = y' - h_2$, $Z = z' - h_3$.

Поскольку $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, то ни одно из чисел не равно нулю, все эти числа могут иметь один знак $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0)$ или только два из них одного знака.

1. Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака, то уравнение (11.37) можно привести к одному из следующих канонических видов:

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 1, \tag{11.38}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = -1, \tag{11.39}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 0 \tag{11.40}$$

в зависимости от $\lambda_1$ и $\mu$: $\lambda_1\mu > 0$, $\lambda_1\mu < 0$, $\mu = 0$.

Уравнение (11.38) определяет эллипсоид, уравнению (11.39) не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства, уравнению (11.40) удовлетворяют координаты единственной точки $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.

2. Пусть знак одного из этих чисел противоположен знаку двух других: предположим, что $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Уравнение (11.37) можно привести к одному из канонических видов

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 - Z^2/c^2 = 1, \tag{11.41}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 - Z^2/c^2 = -1, \tag{11.42}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 - Z^2/c^2 = 0 \tag{11.43}$$

в зависимости от $\lambda_1$ и $\mu$: $\lambda_1\mu > 0$, $\lambda_1\mu < 0$, $\mu = 0$.

Уравнения (11.41) – (11.43) определяют соответственно однополосный гиперболоид, двуполостный гиперболоид и конус второго порядка.

**Нецентральные фигуры.** Если $\det A = 0$, или $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, то одно или два из этих чисел равны нулю.

1. Пусть $\lambda_3 = 0, a'_{34} \neq 0$, тогда уравнение (11.36) приводится к виду

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \mu Z = 0. \tag{11.44}$$

Если $\lambda_1\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1\mu < 0$, то имеем

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 2Z; \tag{11.45}$$

в случае $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $\lambda_1\mu < 0$ получаем

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 2Z. \tag{11.46}$$

Уравнения (11.45) и (11.46) определяют соответственно эллиптический и гиперболический параболоиды.

2. Пусть $\lambda_3 = 0, a'_{34} = 0$, тогда имеем уравнение

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \nu = 0, \tag{11.47}$$

которое приводится к одному из следующих канонических видов:

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1, \tag{11.48}$$

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 = -1, \tag{11.49}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 1, \tag{11.50}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = -1, \tag{11.51}$$

$$X^2/a^2 - Y^2/b^2 = 0. \tag{11.52}$$

Уравнение (11.48) определяет эллиптический цилиндр, каждое из уравнений (11.51), (11.50) – гиперболический цилиндр, уравнение (11.52) – пару пересекающихся плоскостей; уравнению (11.49) не удовлетворяют координаты ни одной точки.

3. Если $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и $a'_{24} \neq 0$, то уравнение (11.36) приводится к виду $\lambda_1 X^2 + \mu Y = 0$ или

$$X^2 = 2pY \tag{11.53}$$

и определяет параболический цилиндр.

4. Если $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и $a'_{24} = 0$, то имеем уравнение $\lambda_1 X^2 + \nu = 0$, которое приводится к одному из канонических видов

$$X^2 = a^2,\ X^2 = -a^2,\ X^2 = 0. \tag{11.54}$$

Первое из уравнений (11.54) определяет пару параллельных плоскостей ($X = a$, $X = -a$), третье уравнение – пару совпавших плоскостей; второму уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки пространства.

**Пример 11.5.** Какую поверхность определяет уравнение $6x^2+5y^2+$ $+7z^2-4xy+4xz=18$?

Это уравнение вида (11.32), для которого $a_{11}=6$, $a_{22}=5$, $a_{33}=7$, $a_{12}=-2$, $a_{13}=2$, $a_{23}=0$, $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$, $a_{44}=-18$. Левая часть данного уравнения является квадратичной формой $f(x,y,z)=6x^2+5y^2+7z^2-4xy+$ $+4xz$ трех переменных $x, y, z$ $(x=x_1, y=x_2, z=x_3)$. Составим матрицу $A$ этой квадратичной формы и характеристическое уравнение матрицы $A$:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Характеристическое уравнение $(6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda)-4(5-\lambda)-$ $-4(7-\lambda)=0$, или $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=0$ имеет корни $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$, (так как $\lambda^3-18\lambda^2+99\lambda-162=\lambda^3-3\lambda^2-15\lambda^2+45\lambda+54\lambda-162=\lambda^2\times$ $\times(\lambda-3)-15\lambda(\lambda-3)+54(\lambda-3)=(\lambda-3)(\lambda^2-15\lambda+54)$).

Следовательно, квадратичную форму $f(x,y,z)$ можно привести к виду $\varphi(X,Y,Z)=3X^2+6Y^2+9Z^2$. В новых координатах $X, Y, Z$ данное уравнение имеет вид $3X^2+6Y^2+9Z^2=18$, или

$$X^2/6+Y^2/3+Z^2/2=1,$$

оно определяет эллипсоид с полуосями $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{2}$.

## Глава 12

# ГРУППЫ

## 12.1. Понятие группы. Основные определения

Группой называется множество $G$ элементов $a, b, c, \ldots$, для которых определена операция (сложения или умножения), которая каждой упорядоченной паре $(a, b)$ элементов $G$ ставит в соответствие единственный элемент $c = a \circ b$ данного множества, причем операция обладает следующими свойствами:

1) операция ассоциативна, т.е. для любых $a, b, c \in G$

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c; \tag{12.1}$$

2) в $G$ существует нейтральный элемент $e$ такой, что для любого элемента $a \in G$

$$a \circ e = e \circ a = a; \tag{12.2}$$

3) для каждого элемента $a \in G$ существует обратный ему элемент $a^{-1}$ такой, что

$$a \circ a^{-1} = e, \ a^{-1} \circ a = e. \tag{12.3}$$

Если, кроме того, для любых $a, b \in G$ выполняется условие

$$a \circ b = b \circ a, \tag{12.4}$$

то группа называется коммутативной или абелевой группой.

В любой группе нейтральный элемент определен однозначно; для каждого элемента существует единственный обратный элемент.

Группа состоящая из конечного числа элементов, называется конечной. Число элементов группы называют ее порядком. Группа, не являющаяся конечной, называется бесконечной.

Группа называется аддитивной или группой по сложению, когда групповая операция, ставящая в соответствие паре элементов $(a, b)$ элемент $c = a \circ b$, является сложением. В этом случае символ операции $\circ$ заменяется знаком $+$; $c = a + b$, нейтральный элемент называют нулем и обозначают символом 0; $a + 0 = 0 + a = a$. Элемент, обратный к элементу $a$, называют противоположным и обозначают $-a : a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Группа называется мультипликативной или группой по умножению, когда групповая операция, ставящая в соответствие упорядоченной паре $(a, b)$ элемент $c = a \circ b$, является умножением. В данном случае произведение $a \circ b$ обозначается $a \cdot b$ или $ab$; нейтральный элемент называется единицей и обозначается символом 1: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Произведение $n$ элементов, равных $a$, называют $n$-й степенью элемента $a$ и обозначают $a^n$. Отрицательные степени элемента $a$ можно определить или как элементы группы $G$, обратные положительным степеням, или как произведения соответствующего числа множителей, равных элементу $a^{-1}$. Эти определения совпадают, так как верно равенство

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n \quad (n > 0).$$

В любой группе $G$ для степеней каждого элемента $a$ при любых показателях $m$ и $n$ (положительных, отрицательных или нулевых) выполняются равенства

$$a^n a^m = a^m a^n = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Если операция в группе называется сложением, то вместо степеней элемента $a$ говорят о кратных этого элемента и пишут $na$.

В каждой мультипликативной группе однозначно разрешимы уравнения $ax = b$, $ya = b$, первое из них имеет решение $x = a^{-1}b$, второе – $y = ba^{-1}$.

Если группа является коммутативной, то эти уравнения не различаются, они имеют одинаковые решения $x = y = a^{-1}b$.

## 12.2. Примеры групп

1. Множество всех целых чисел с операцией сложения образует аддитивную группу. Действительно, сумма $a + b$ двух целых чисел $a$ и $b$ также является целым числом. В этом случае говорят, что множество целых чисел замкнуто относительно операции сложения. Сложение целых чисел коммутативно: $(a+b)+c = a+(b+c)$. В данном множестве имеется нейтральный элемент, т.е. число 0 такое, что $a + 0 = a$ при любом целом числе $a$. Для каждого элемента целого числа $a$ существует обратный элемент (противоположное число), т.е. такое число $-a$, что $a + (-a) = 0$. Рассматриваемая группа является коммутативной, так как $a + b = b + a$.

Замечание 1. Множество всех целых чисел не образуют группу по умножению, так как обратные для целых чисел (отличных от $-1$ и $1$) не являются целыми числами. Например, для числа 2 обратное число $2^{-1}$ не принадлежит множеству целых чисел.

2. Множество всех действительных чисел, отличных от нуля, с операцией умножения образует мультипликативную группу. Эта группа является коммутативной, так как $ab = ba$.

Замечание 2. Множество всех действительных чисел не образует группу по умножению, поскольку для числа 0 нет обратного.

3. Множество всех векторов трехмерного пространства образует группу по сложению. Эта группа является коммутативной $(a + b = b + a)$.

4. Множество матриц размером $m \times n$ образует коммутативную группу по сложению $(A + B = B + A)$. Для матрицы $A$ обратным элементом является матрица $(-A)$; нейтральный элемент – нулевая матрица $O$.

5. Множество всех невырожденных квадратных матриц порядка $n$ образует мультипликативную группу. Эта группа, которую называют полной линейной группой, не является коммутативной ( в общем случае $AB \neq BA$).

Замечание 3. Множество всех квадратных матриц порядка $n$ не образует группу по умножению, так как для некоторых его элементов нет обратных (вырожденная матрица не имеет обратной).

6. Множество всех невырожденных линейных преобразований линейного пространства образует мультипликативную группу.

7. Множество, состоящее из двух чисел $+1, -1$, образует группу по умножению. Действительно, каждой из произведений $(+1)(-1) = -1$, $(+1)(+1) = +1$, $(-1)(-1) = +1$ принадлежит данному множеству. Умножение ассоциативно. Существует единица – число $+1$, которое удовлетворяет условию $(-1)(+1) = -1$, $(+1)(+1) = +1$. Для каждого элемента существует обратный: каждое из этих двух чисел совпадает со своим обратным.

Замечание 4. Множество, состоящее из двух чисел $+1, -1$, не образует группу по сложению, так как сумма $(+1)+(-1) = 0$, а число 0 не принадлежит данному множеству. (В таком случае говорят, что данное множество не является замкнутым отиосительно операции сложения).

8. Множество, состоящее из одного элемента 0, образует аддитивную группу. Действительно, $0+0=0$, сумма принадлежит данному множеству. Свойства операции сложения очевидны.

9. Множество, состоящее из одного элемента 1, образует мультипликативную группу.

Группа, образованная одним элементом, называется единичной.

## 12.3. Подгруппа

Подгруппой группу $G$ называется подмножество $H$ ее элементов, образующее группу относительно операции, определенной в $G$. Чтобы убедится в том, что множество $H$ группы $G$ является ее подгруппой, необходимо проверить, что: 1) произведение (сумма) любых двух элементов $a, b \in H$ принадлежит $H$; 2) для любого элемента $a \in H$ обратный элемент принадлежит $H$. Этого будет достаточно, так как ассоциативный закон выполняется для любых трех элементов $G$, в том числе и для элементов $H$, а нейтральный элемент $e$ (1 или 0) будет принадлежать $H$ (как произведение $aa^{-1}$ или сумма $a+(-a)$).

Примеры подгрупп некоторых групп.

I. Множество всех действительных чисел является аддитивной группой.

Подгруппами аддитивной группы всех действительных чисел являются в частности, следующие: 1) аддитивная группа рациональных чисел; 2) аддитивная группа целых чисел; 3) аддитивная группа всех целых чисел, кратных числу $k$, например аддитивная группа четных чисел.

Группа целых чисел является подгруппой группы рациональных чисел.

Замечание 1. Множество нечетных чисел не образует группу по сложению, так как сумма двух нечетных чисел является четным числом (и не принадлежит данному множеству).

II. Мультипликативная группа всех действительных чисел, отличных от нуля, имеет, в частности, следующие подгруппы: 1) мультипликативную группу положительных действительных чисел; 2) мультипликативную группу рациональных чисел, отличных от нуля; 3) множество, состоящее из двух чисел $+1, -1$ с операцией умножения.

Замечание 2. Мультипликативная группа положительных действительных чисел не является подгруппой аддитивной группы всех действительных чисел, так как групповые операции в рассматриваемых множествах – разные (соответственно умножение, сложение).

III. Мультипликативная группа невырожденных матриц порядка $n$ имеет, в частности, подгруппы: 1) группу ортогональных матриц; 2) группу диагональных матриц; 3) группу матриц с положительным определителем; 4) группу матриц с определителем, равным единицы (эта группа называется унимодулярной).

Пересечение двух подгрупп группы $G$ является подгруппой в $G$. Например, в аддитивной группе целых чисел пересечение подгруппы четных чисел и подгруппы чисел, кратных трем, будет подгруппой чисел, кратных шести.

Каждая группа является своей подгруппой. Далее, каждая группа имеет единичную подгруппу, состоящую из одного нейтрального элемента (единицы или нуля). Эти две подгруппы называются несобственными (или тривиальными) подгруппами. Остальные подгруппы называются собственными (или истинными) подгруппами. В любой группе все подгруппы каждой группы являются в тоже время подгруппами исходной группы. Например, аддитивная группа целых чисел является подгруппой аддитивной группы рациональных чисел, которая в свою очередь есть подгруппа аддитивной группы всех действительных чисел; аддитивная группа целых чисел – подгруппа аддитивной группы всех действительных чисел.

## 12.4. Группы преобразований. Симметрическая группа $n$-й степени

Преобразованием множества $X$ называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя. Преобразование множества $X$ обозначим буквой $P$. Определение преобразования $P$ множества $X$ означает следующее: любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $x' = Px$ того же множества; $x'$ называется образом элемента $x$, а $x$ – прообразом $x'$. Каждый элемент $x' \in X$ имеет единственный прообраз $x \in X$.

Умножением преобразований называется последовательное их выполнение. Произведение двух преобразований $P$, $Q$ обозначается $PQ$ (справа записано то преобразование, которое выполняется первым; по определению $(QP)x = Q(Px)$). Очевидно, произведение двух преобразований данного множества является преобразованием данного множество. Отметим, что в общем случае умножение не является коммутативным, т.е. $QP \neq PQ$. Можно показать, что произведение преобразований подчиняется ассоциативному закону. Роль единицы при умножении преобразований выполняет тождественное преобразование $E$, ставящее в соответствие каждому элементу множества его самого. Для каждого преобразования $P$ существует обратное преобразование $P^{-1}$, которое каждому элементу $x' \in X$ ставит в соответствие его единственный прообраз $x \in X$, причем $PP^{-1} = P^{-1}P = E$. Следовательно, множество преобразований $P$ данного множества $X$ образует группу.

Если множество $X$ конечно и состоит из $n$ элементов, то всевозможные взаимно однозначные отображения этого множества на себя называются подстановками. Подстановку из $n$ элементов можно обозначить так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – те же числа $1, 2, 3, \dots, n$, обозначающие данные элементы и записанные в другом порядке.

Примеры подстановок при $n = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Первая подстановка означает такое взаимно однозначное отображение множества (1, 2, 3, 4, 5) на себя, при котором 1 переходит в 3, 2 – в 1 и т. д. Вторая подстановка называется тождественной, каждый элемент соответствует сам себе. Равенство двух других подстановок показывает, что расположение столбцов в записи подстановки не играет роли. Подстановки, отличающиеся только порядком следования столбцов, не считаются различными.

Умножением подстановок называют последовательное их выполнение (сначала правого сомножителя, затем левого). Умножение подстановок ассоциативно, но не коммутативно. Например, если

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

то

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad PQ \neq QP.$$

Единицей при умножении подстановок из $n$ элементов служит тождественная подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Каждая подстановка из $n$ элементов имеет обратную:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить подстановку, обратную данной, необходимо поменять местами строки.

Множество подстановок из $n$ элементов относительно введенной операции умножения образует группу. Группа подстановок из $n$ элементов называется симметрической группой $n$-й степени и обозначается $S_n$. Число подстановок из $n$ элементов равно $n!$, поэтому группа $S_n$ имеет порядок $n!$.

Рассмотрим группу подстановок из трех элементов $a$, $b$, $c$. Поскольку из трех элементов можно составить шесть различных перестановок $abc$, $acb$, $bac$, $bca$, $cab$, $cba$, то и число различных подстановок для них равно шести ($n = 3, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$).

Обозначим эти подстановки следующим образом:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $P_1$ – тождественная подстановка; для каждой подстановки существует обратная:

$$P_1^{-1} = P_1,\ P_2^{-1} = P_2,\ P_3^{-1} = P_3,\ P_4^{-1} = P_4,\ P_5^{-1} = P_6,\ P_6^{-1} = P_5.$$

Группа $S_3$ (симметрическая группа подстановок из 3 элементов) некоммутативна, поскольку, например, $P_4P_5 = P_2$, $P_5P_4 = P_3$, т. е. $P_4P_5 \neq P_5P_4$.

Таблица 12.1

| $P_i$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
| $P_2$ | $P_2$ | $P_1$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_3$ | $P_4$ |
| $P_3$ | $P_3$ | $P_6$ | $P_1$ | $P_5$ | $P_4$ | $P_2$ |
| $P_4$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ |
| $P_5$ | $P_5$ | $P_4$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_6$ | $P_1$ |
| $P_6$ | $P_6$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_2$ | $P_1$ | $P_5$ |

Группу $S_3$ можно представить следующей таблицей умножения, в которой слева стоят левые множители $P_i$, сверху – правые $P_i$, а на пересечении соответствующей строки и столбца – их произведение. Таблицы такого рода называют таблицами Кэли (табл. 12.1).

## 12.5. Группа вращений правильного многоугольника. Циклические группы. Группа симметрий правильного треугольника

Пусть дан правильный $n$-угольник $A_1A_2 \dots A_n$ с центром в точке $O$ (рис. 12.1, $n=6$). Рассмотрим всевозможные повороты плоскости вокруг точки $O$, при которых этот правильный $n$-угольник совмещается сам с собой. Таких поворотов будет $n: a_0$ – поворот на угол $\varphi_0 = 0$ (тождественное преобразование); $a_1$ – поворот на угол $\varphi_1 = 2\pi/n$, $a_2$ – поворот на угол $\varphi_2 = \ = (2\pi/n)2, \dots, a_{n-1}$ – поворот на угол $\varphi_{n-1} = (2\pi/n)(n-1)$. Под умножением поворотов будем понимать последовательное их выполнение: $a_k \circ a_l = a_{k+l}$, причем $a_{k+n} = a_k$ при любом $k$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$, в частности $a_n = a_0$. Умножение поворотов является ассоциативным (и коммутативным). Множество указанных поворотов правильного многоугольника образует группу по умножению, роль единицы играет тождественное преобразование – поворот $a_0$. Для каждого элемента $a_k$ существует обратный элемент $a_k^{-1} = a_{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, так как $a_k \circ a_{n-k} = a_n = a_0$, т.е. $a_k \circ a_{n-k} = a_0$, где $a_0$ – единичный элемент.

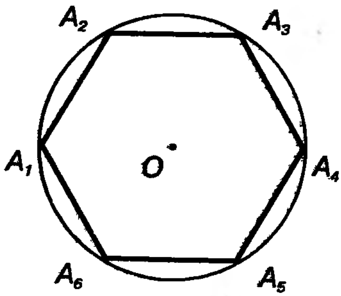

Рис. 12.1

Положим $a_1 = a$, тогда $a_2 = a^2, a_3 = a^3, \dots, a_{n-1} = a^{n-1}, a_n = a^n$. В этом случае говорят, что группа образована степенями одного из своих элементов (или что она порождается одним из своих элементов); таким элементом является элемент $a = a_1$. Группы, образованные степенями одного из своих элементов, называются циклическими. Таким образом, группа вращения правильного $n$-угольника является циклической группой порядка $n$, эта группа обозначается $C_n$. Отметим, что аддитивная группа целых чисел также будет циклической, она порождается одним из своих элементов – числом 1: $2 = 1+1$, $3 = (1+1)+1$ и т. д. Эта группа является бесконечной циклической группой, ее обозначают $C_\infty$.

Пусть дан правильный треугольник $ABC$ с центром в точке $O$ (рис. 12.2). Рассмотрим все симметрии данной фигуры, т.е. те преобразования плоскости, при которых этот треугольник переходит в себя (или самосовмещается). К ним относятся: три поворота $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ плоскости вокруг точки $O$ соответственно на углы $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ (частный случай рассмотренных выше вращений правильного $n$-

угольника при $n=3$); три осевых симметрии $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$, определяемых соответственно осями симметрии $l$, $m$, $n$, проходящими через вершину правильного треугольника и середину его противоположной стороны (см. рис. 12.2).

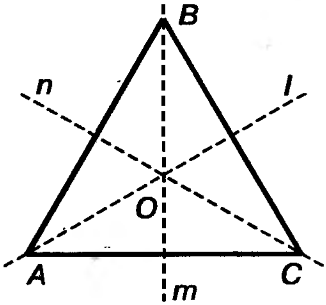


Рис. 12.2

Будем характеризовать каждое самосовмещение $\varphi$ подстановкой на множестве вершин $A, B, C$ правильного треугольника

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$ – те же буквы $A, B, C$, взятые в некотором порядке. Принятое нами соответствие между самосовмещениями треугольника и подстановками множества его вершин дает

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix},\ \varphi_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix},\ \varphi_4 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix},\ \varphi_5 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}.$$

Множество самосовмещений $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ образует группу относительного умножения (последовательного выполнения двух самосовмещений). Роль единицы играет тождественное преобразование, каждый элемент данного преобразования имеет обратный. Эта группа называется группой симметрий треугольника.

## 12.6. Изоморфизм групп

Группы $G_1$ и $G_2$ называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее групповую операцию, т.е. такое, что если $x_1, y_1 \in G_1$, $x_2, y_2 \in G_2$ и $x_1 \leftrightarrow x_2$, $y_1 \leftrightarrow y_2$, то $x_1 \circ y_1 \leftrightarrow x_2 \circ y_2$.

Симметрическая группа $S_3$ трех элементов $a, b, c$ и группа симметрий правильного треугольника с вершинами $A, B, C$ изоморфны. Эти группы отличаются только обозначениями элементов и названиями соответствующих преобразований. Циклическая группа порядка $n$ изоморфна группе вращений правильного $n$-угольника; бесконечная циклическая группа изоморфна аддитивной группе целых чисел.

Если $f$ – изоморфное отображение группы $G_1$ на $G_2$, то $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – единичные элементы групп $G_1$ и $G_2$ соответственно, и для любого $x_1 \in G_1$, $f(x_1^{-1}) = (f(x_1))^{-1}$.

## 12.7. Разложение группы по подгруппе

Пусть дана группа $G$ и некоторая ее подгруппа $H$. Фиксировав любой элемент $x \in G$, рассмотрим множество элементов $x \circ h$, $h$ – любой элемент $H$. Это множество $x \circ H$ называется левым смежным классом группы $G$ по подгруппе $H$, порожденным элементом $x$. Два любых смежных класса группы $G$ по подгруппе $H$ или совпадают, или не имеют ни одного общего элемента.

Вся группа $G$ распадается на непересекающиеся левые смежные классы по подгруппе $H$. Это разложение называется левосторонним разложением группы $G$ по подгруппе $H$. Очевидно, одним из левых смежных классов этого разложения будет сама подгруппа $H$, этот смежный класс порождается элементом $e$ (или любым элементом $h \in H$, поскольку $h \circ H = H$).

Аналогично вводится понятие правого смежного класса группы $G$ по подгруппе $H$, порожденного элементом $x$; это множество $H \circ x$, т. е. множество всех элементов вида $h \circ x$, где $x$ – фиксированный элемент $G$, $h$ – любой элемент из $H$. Аналогичным образом получается правостороннее разложение группы $G$ по подгруппе $H$. Если группа $G$ абелева, то оба ее разложения по любой подгруппе (левостороннее и правостороннее) совпадают. В этом случае говорят просто о разложении группы по подгруппе. Приведем пример такого разложения.

Пусть $G$ – аддитивная группа целых чисел и $H$ – ее подгруппа, состоящая из всех чисел, кратных $k$. Разобьем группу $G$ на классы, относя к одному классу все те числа, которые при делении на $k$ дают одинаковые остатки. Разложение данной группы $G$ по указанной подгруппе $H$ состоит из $k$ различных смежных классов, порождаемых соответственно числами $0, 1, 2, \ldots \ \ldots, k-1$. В классе, порождаемом числом $l$, где $0 \le l \le k-1$, собраны все те числа, которые при делении на число $k$ дают остаток $l$.

Полученное разложение группы целых чисел по подгруппе чисел, кратных $k$, при $k = 3$ можно представить следующим образом:

$$H \ldots -9 -6 -3 \ 0 \ 3 \ 6 \ 9 \ldots$$

$$1+H \ldots -8 -5 -2 \ 1 \ 4 \ 7 \ 10 \ldots$$

$$2+H \ldots -7 -4 -1 \ 2 \ 5 \ 8 \ 11 \ldots$$

З а м е ч а н и е. В некоммутативной группе левостороннее и правостороннее разложения могут оказаться различными. Обратимся к симметрической группе $S_3$ (см. п. 12.4). Из таблицы Кэли для этой группы видно, что множество элементов $P_1, P_2$ образует подгруппу, обозначим ее $B = \{P_1, P_2\}$. Левостороннее разложение группы $S_3$ по подгруппе $B$ состоит из классов $B$, $P_5B = P_4B = \{P_4, P_5\}$, $P_3B = P_6B = \{P_3, P_6\}$, а правостороннее – из классов $B$, $BP_6 = BP_4 = \{P_4, P_6\}$, $BP_5 = BP_3 = \{P_3, P_5\}$, т. е. эти разложения различны. Отметим, что левостороннее и правостороннее разложение этой группы по ее подгруппе третьего порядка $A=\{P_1, P_5, P_6\}$ совпадают; каждое из них состоит из двух классов: $A=\{P_1, P_5, P_6\}$, $AP_2=P_2A=\{P_2, P_3, P_4\}$.

Теорема 12.1 (Лагранжа). *Порядок подгруппы конечной группы является делителем порядка группы.*

Следствие 1. *Порядок любого элемента конечной группы является делителем порядка группы.*

Следствие 2. *Всякая конечная группа, порядок которой есть простое число, является циклической.*

## 12.8. Нормальный делитель

Подгруппа $H$ группы $G$ называется нормальным делителем этой группы (или инвариантной подгруппой), если левостороннее и правостороннее разложения этой группы по указанной подгруппе совпадают.

Из определения следует, что любая подгруппа коммутативной группы является в ней нормальным делителем. Далее, в любой группе $G$ сама группа и ее единичная подгруппа будут нормальными делителями: разложение группы $G$ по самой этой группе состоит из одного элемента $G$, разложения группы $G$ по единичной подгруппе совпадают с разложением группы на отдельные элементы. Приведем примеры нормальных делителей в некоммутативных группах.

1. В симметричной группе $S_3$ (см. п. 12.4) подгруппа $H=\{P_1, P_5, P_6\}$ является нормальным делителем, так как левостороннее и правостороннее разложения совпадают, они состоят из двух классов: $H=\{P_1, P_5, P_6\}$, $HP_2=$ $=P_2H=\{P_2, P_3, P_4\}$.

2. В мультипликативной группе невырожденных квадратных матриц порядка $n$ подгруппа матриц с определителем, равным единице, будет нормальным делителем. Действительно, левый и правый смежные классы по этой подгруппе, порождаемые матрицей $M$, совпадают с классом всех матриц, определитель которых равен определителю матрицы $M$ (как известно, определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц).

Можно дать и другие определения нормального делителя, равносильные исходному. Приведем одно из них.

Подгруппа $H$ группы $G$ называется нормальным делителем этой группы, если $x\circ H=H\circ x$ для любого $x\in G$, т. е. для любого $x\in G$ и элемента $h\in H$ существуют $h_1, h_2\in H$ такие, что $x\circ h=h_1\circ x$, $h\circ x=x\circ h_2$.

## 12.9. Классы сопряженных элементов

Элементы $a$ и $b$ группы $G$ называют сопряженными, если в $G$ существует хотя бы один такой элемент $x$, что

$$b=x^{-1}ax. \qquad (12.5)$$

В этом случае говорят, что элемент $b$ получается из элемента $a$ трансформированием с помощью элемента $x$. Из равенства (12.5) находим

$$a = xbx^{-1} = (x^{-1})^{-1}bx^{-1},$$

т.е. элемент $a$ при этом получается из элемента $b$ трансформированием элементом $x^{-1}$.

Теорема 12.2. *Подгруппа $H$ группы $G$ тогда и только тогда будет нормальным делителем в $G$, если вместе с любым своим элементом $h$ она содержит все элементы, сопряженные с ним в $G$.*

Замечание. Нормальный делнтель называют также инвариантной подгруппой. Из теоремы 12.2 следует происхождение этого названия. Если $H$ – нормальный делитель группы $G$, то трансформирование любого элемента подгруппы $H$ с помощью элемента группы $G$ дает снова элемент подгруппы $H$ (подгруппа $H$ остается неизменяемой по отношению к операции трансформирования элементов $H$).

Теорема 12.3. *Пересечение двух нормальных делителей группы является нормальным делителем этой группы.*

## 12.10. Фактор-группа

Фактор-группой группы $G$ по нормальному делителю $H$ называется группа всех смежных классов этой группы $G$ по подгруппе $H$.

Таким образом, с группой $G$ можно связать некоторый набор новых групп – ее фактор-групп по различным нормальным делителям.

Отметим, что фактор-группа абелевой группы является абелевой; фактор-группа циклической группы – циклической группой.

Примеры фактор-групп.

1. Пусть $G$ – аддитивная группа целых чисел, $H$ – подгруппа чисел, делящихся на 3. Найдем фактор группу $G/H$. Групповой операцией в данном случае является сложение. Число смежных классов равно трем (см. пример в п. 12.7): множество чисел, делящихся на 3, два множества чисел, дающих при делении на 3 соответственно остатки 1 и 2. Обозначим эти смежные классы [0], [1], [2]. В этом множестве введем операцию сложения следующим образом: сложив соответствующие числа в квадратных скобках, определим, какой остаток при делении на 3 дает их сумма, и будем считать суммой смежных классов тот, которому принадлежит полученный остаток. Таблица умножения для фактор-группы имеет вид [0]+[0] = [1]+[2] = [2]+[1] = [0], [0]+[1] = [1]+[0] = [2]+[2] = [1], [0]+[2] = [2]+[0] = [1]+[1 ]= [2]. Отсюда видно, что фактор-группа абелева. Кроме того, все смежные классы порождаются классом [1], они совпадают со степенями этого класса: [1], [1]+[1]=[2], [1]+[1]+[1]=[0]. Поскольку фактор-группа порождена одним элементом, то она циклическая.

2. Пусть $G$ – аддитивная группа целых чисел, $H$ – подгруппа целых чисел, кратных натуральному числу $k$. Фактор-группой $G/H$ является конечная группа порядка $k$, состоящая из классов $[0], [1], [2], \dots [k-1]$. Эта фактор-группа циклическая, как и сама группа $G$.

3. Пусть $G$ – мультипликативная группа всех невырожденных матриц порядка $n$, $H$ – подгруппа матриц с определителем, равным единице. Фактор-группа $G/H$ изоморфна мультипликативной группе отличных от нуля действительных чисел.

## 12.11. Гомоморфизм групп

Если $G$ и $G'$ – группы и $f$: $G \to G'$ – такое отображение, при котором для любых элементов $x, y$ группы $G$

$$f(xy) = f(x)\,f(y), \tag{12.6}$$

то $f$ называется гомоморфным отображением или гомоморфизмом группы $G$ в группу $G'$. Отметим, что в определении гомоморфизма имеется в виду, что каждый элемент группы $G$ поставлен в соответствие хотя бы одному элементу группы $G'$, но разным элементам из $G$ может соответствовать один и тот же элемент из $G'$. Другими словами, отображение группы $G$ в группу $G'$ не предполагается взаимно однозначным, как в случае изоморфизма.

Очевидно, каждая группа гомоморфна себе самой, так как можно положить $f(x) = x$ для всех $x \in G$. Далее, каждая группа гомоморфна единичной группе ( состоящей из одного нейтрального элемента $e$). Примером гомоморфного отображения групп может служить циклическая группа $C_6$ шестого порядка с элементами $e, a, a^2, a^3, a^4, a^5$, которая гомоморфна циклической группе $C_2$ второго порядка с элементами $E, A$:

$$f(e) = f(a^2) = f(a^4) = E,\ f(a) = f(a^3) = f(a^5) = A.$$

Равенство (12.6) означает, что образ произведения двух элементов равен произведению образов этих элементов (которые, впрочем, могут называться по-разному в группах $G$ и $G'$), поэтому говорят, что гомоморфизм «сохраняет групповую операцию». Гомоморфизм групп сохраняет не только групповую операцию, но также нейтральный и обратный элементы: если $f$ – гомоморфное отображение группы $G$ в группу $G'$, то $f(e) = e'$, где $e, e'$ – нейтральные элементы групп $G$ и $G'$ соответственно.

Теорема 12.4. *Каждая группа гомоморфна любой своей фактор-группе. Обратно, если группа $G$ гомоморфна группе $G'$, то $G'$ изоморфна фактор-группе $G$ по некоторому нормальному делителю $H$.*

## 12.12. Представления групп

С точки зрения алгебры изоморфные группы не считаются различными. О группе, изоморфной некоторой подгруппе группы подстановок, говорят, что она представлена подстановками.

Теорема 12.5. (Кэли). *Каждая конечная группа изоморфна некоторой группе подстановок (т. е. всякую конечную группу можно представить подстановками).*

Следовательно, при описании любой конечной группы можно воспользоваться преимуществами группы подстановок.

Для теории и приложений наиболее интересны линейные представления конечных групп. Говоря о линейном представлении конечной группы $G$, предполагают, что дано векторное пространство $V_n$, в котором действуют линейные невырожденные преобразования. Эти преобразования образуют группу $G'$, которой гомоморфна исходная группа $G$; при этом говорят, что группа $G'$ представляет группу $G$.

Гомоморфное отображение $\Gamma$ группы $G$ в группу $G'$ невырожденных линейных преобразований $n$-мерного векторного пространства $V_n$ называется линейным представлением группы $G$.

Следовательно, если $\Gamma$ – линейное представление группы $G$ группой $G'$, то каждому элементу $a \in G$ поставлено в соответствие невырожденное линейное преобразование $\Gamma(a) \in G'$ пространства $V_n$ так, что для любых $a, b \in G$ справедливо соотношение $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$. Как известно, при этом $\Gamma(e) = E$, где $e, E$ – нейтральные элементы групп $G$, $G'$ соответственно, и $\Gamma(a^{-1}) = (\Gamma(a))^{-1}$ для любого $a \in G$.

Пространство $V_n$, в котором действуют преобразования из группы $G'$, называется пространством представления группы $G$. Размерность пространства $V_n$ называют размерностью (или степенью) рассматриваемого представления.

Вместо линейных преобразований часто рассматривают соответствующие им матрицы.

# III
# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## Глава 13

## ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

### 13.1. Понятие функции. Основные определения

Рассмотрим множество $X$ элементов $x$ и множество $Y$ элементов $y$. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу $f$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве $X$ задана функция $y = f(x)$ со значениями в множестве $Y$. Элементы $x \in X$ называются значениями аргумента, а элементы $y \in Y$ – значениями функции. Множество $X$ называют областью определения функции, множество всех значений функции – областью значений этой функции.

Замечание. Функцию, заданную на множестве $X$ со значениями в множестве $Y$, называют также отображением множества $X$ в множество $Y$. Если множество $Y$ является множеством значений функции, то рассматриваемую функцию называют отображением множества $X$ на множество $Y$.

Функцию, заданную на множестве $X$, называют также оператором, заданным на множестве $X$, и обозначают символом $f$.

В случае, когда $X$ и $Y$ – числовые множества, соответствующие функции называются числовыми функциями. Если рассматриваются действительные числа, то функции называют действительными (вещественными) функциями одной действительной (вещественной) переменной.

Употребляются следующие обозначения функции: $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \Phi(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ и т. п. Значение, которое функция $y = f(x)$ принимает при $x = a$, обозначается через $f(a)$.

Функция и аргумент могут обозначатся также другими буквами, например $s = f(t)$, $u = f(v)$, $r = r(t)$, $x = x(t)$ и т. д.

К простейшим областям определения функции относятся отрезок, интервал, полуинтервалы или совокупность указанных промежутков. Например, для функции $y = -\sqrt{9 - x^2}$ областью определения является отрезок $[-3, 3]$, а областью ее значений – отрезок $[-3, 0]$; для функции $y = x^3$ область определения и область значений совпадают с интервалом $(-\infty, +\infty)$.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости, т. е. точек $M(x, f(x))$. Например, графиком функции $y=-\sqrt{16-x^2}$ является полуокружность радиуса $R=4$ с центром в начале координат, расположенная ниже оси $Ox$.

К традиционным основным способам задания функции относятся: аналитический (с помощью одной или нескольких формул); графический (с помощью графика); табличный (с помощью таблицы значений).

Функция заданная формулой

$$y=f(x), \tag{13.1}$$

правая часть которой не содержит $y$, называется явной функцией.

Функция $y=y(x)$, определяемая уравнением

$$F(x, y)=0, \tag{13.2}$$

называется функцией, заданной неявно, или неявной функцией.

Отметим, что одно уравнение вида (13.2) может определять несколько функций. Например, уравнение $x^2+y^2-R^2=0$ определяет две функции $y_1=f_1(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$, $y_2=f_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$.

Обратимся к функции (13.1). Каждому $x \in X$ по определенному закону ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$. С другой стороны, каждому $y \in Y$ соответствует одно или несколько значений $x \in X$.

В случае, когда каждому $y \in Y$ по некоторому закону $\varphi$ соответствует только одно значение $x \in X$, получаем функцию

$$x=\varphi(y), \tag{13.3}$$

заданную на множестве $Y$ со значениями в множестве $X$. Функцию (13.3) называют обратной функцией по отношению к функции (13.1). Функции (13.1) и (13.3) в этом случае называются взаимно обратными. Для взаимно обратных функций выполняются тождества:

$$\varphi(f(x)) \equiv x,\ x \in X;\ f(\varphi(y)) \equiv y,\ y \in Y.$$

Примеры взаимно обратных функций: $y=3^x$, $x=\log_3 y$; $y=2x-3$, $x=(y+3)/2$.

Если придерживаться стандартных обозначений ($y$ – функция, $x$ – аргумент), то обратную функцию (13.3) следует писать в виде $y=\varphi(x)$. Например, можно говорить, что функции $y=3^x$, $y=\log_3 x$ взаимно обратные.

Функцию, обратную к функции $y=f(x)$, удобно обозначать символом $x=f^{-1}(y)$.

Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ – функции своих аргументов, причем область определения функции $f$ содержит область значений $\varphi$, то каждому $x$ из области определения функции $\varphi$ соответствует $y$ такое, что $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием

$$y=f(\varphi(x)),$$

называется функцией от функции или сложной функцией. (Применяются также и другие названия: композиция функций $\varphi$ и $f$, суперпозиция функций $\varphi$ и $f$.) Например, если $y=u^3$, $u=\cos x$, то $y=(\cos x)^3=\cos^3 x$.

Рассматривают также функции, являющиеся композициями более чем двух функций. Так, функция $w=\sin\lg(1+x^2)$ представляет собой композицию следующих функций: $w=\sin u$, $u=\lg v$, $v=1+z$, $z=x^2$.

Функция $y=f(x)$ называется четной, если для любых $x$ и $-x$ из области ее определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$. Функция $y=\varphi(x)$ называется нечетной, если для любых $x$ и $-x$ из области ее определения выполняется равенство $\varphi(-x)=-\varphi(x)$. Например, $y=x^2$, $y=\cos x$ – четные функции, $y=x^3$, $y=\sin x$ – нечетные функции.

Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует число $T\neq 0$ такое, что при всех $x$ и $x+T$ из области ее определения выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$. Число $T$ в этом случае называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. Говоря о периоде функции $y=f(x)$ $(f(x)\not\equiv \text{const})$, обычно имеют в виду наименьший положительный период: так, периодом функции $y=\sin x$ является число $2\pi$, периодом функции $y=\operatorname{tg} x$ – число $\pi$.

Функция $y=f(x)$ называется ограниченной на множестве $X$, если существует такое число $C>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|\leq C$.

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции, функции $y=x^a$ $(a=\text{const})$, $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$, $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ называются основными элементарными функциями.

Элементарными функциями называются все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций. Например, функции $y=\lg\cos x$, $y=x^3+\sin x$, $y=2^{\lg\sin x+\cos x}$ и т. д. являются элементарными.

Термин «функция» впервые появился в 1673 г. в одной из работ Лейбница. Под функциями Лейбниц понимал некоторые отрезки прямых. И. Бернулли дал определение функции как аналитического выражения, состоящего из переменной и постоянных величин (1718), он же применил обозначение $\varphi x$ (без скобок). Обозначение $f(x)$ впервые предложил Эйлер в 1734 г.

## 13.2. Предел последовательности

Числовой последовательностью (или последовательностью) называется функция

$$x_n=\varphi(n),\quad n=1,2,3,\ldots,$$

определенная на множестве натуральных чисел. Каждое значение $x_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ называется элементом последовательности, а число $n$ – его номером.

Числовую последовательность с элементом $x_n$ обозначают либо $x_n$, $n=1,2,3,\ldots$, либо $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, либо $(x_n)$.

Примеры числовых последовательностей: 1) $(c)=(c,c,c,\ldots)$; 2) $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right)=\left(1,-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{16},\ldots\right)$; 3) $(\cos\pi n)=(-1,1,-1,1,\ldots)$.

Числовая последовательность всегда содержит бесконечное множество элементов; среди них могут быть равные (см. примеры 1) и 3)).

Число $a$ называется пределом последовательности $(x_n)$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число $N$, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Предел последовательности $(x_n)$ обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$; $x_n\to a$ при $n\to\infty$ (читается: $x_n$ стремится к $a$, когда $n$ стремится к бесконечности).

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Последовательность, у которой нет предела, называется расходящейся.

Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется $\varepsilon$-окрестностью точки $a$ и обозначается $O(a,\varepsilon)$.

Определение предела имеет следующий геометрический смысл: число а является пределом последовательности $(x_n)$, если в любой его $\varepsilon$-окрестности содержатся почти все члены $(x_n)$, или вне этой окрестности находится лишь конечное число членов данной последовательности.

Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной $\lim\limits_{n\to\infty} c=c$ ($c=\text{const}$), поскольку в данном случае $x_n=c$, $a=c$, $|x_n-a|=0<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. Из определения следует также, что последовательность может иметь только один предел.

Последовательность $(x_n)$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число $A$, что $x_n\le A$ (соответственно $x_n\ge A$) для всех номеров $n$.

Последовательность $(x_n)$, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной.

Очевидно, последовательность $(x_n)$ ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число $C>0$, что $|x_n|\le C$ для всех номеров $n$.

Например, последовательности $(1/n)$, $(1/n^2)$, $(\cos(\pi n/2))$ ограничены, последовательность $(n^2)$ ограничена снизу, но не ограничена сверху, последовательность $(n\cos\pi n)$ не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

Т е о р е м а 13.1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Число $a$ называется верхней гранью последовательности $(x_n)$, если: 1) $x_n\le a$ при всех $n$; 2) для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N$, что $x_N>a-\varepsilon$. Верхняя грань последовательности $(x_n)$ обозначается $\sup(x_n)$ или $\sup x_n$.

Аналогично определяется нижняя грань последовательности $(x_n)$ и обозначается $\inf(x_n)$ или $\inf x_n$.

В качестве примеров отметим, что $\sup\left(\frac{n-1}{n}\right)=1$, $\inf\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$, $\inf(n^2)=1$, $\sup(n^2)=\infty$.

Последовательность $(x_n)$ называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если $x_n \le x_{n+1}$ (соответственно $x_n \ge x_{n+1}$) при всех $n$. Монотонно возрастающие или монотонно убывающие последовательности называются просто монотонными.

Теорема 13.2. *Всякая ограниченная сверху (снизу) монотонно возрастающая (монотонно убывающая) последовательность $(x_n)$ имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup(x_n)$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf(x_n)$).*

Если последовательности $(a_n)$ и $(b_n)$ имеют пределы, то пределы их суммы, разности, произведения, частного существуют и находятся по формулам

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{13.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{13.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n, \tag{13.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\quad (\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0). \tag{13.7}$$

Пример 13.1. Последовательность $(8+1/n)$ сходится и имеет предел $a=8$.

Действительно, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдется такое натуральное число $N$, что $|x_n-a|=|(8+1/n)-8|=1/n<\varepsilon$, $1/n<\varepsilon$ для $n>N$; неравенство $(1/n)<\varepsilon$ будет выполнено при всех $n>N$, если $N>1/\varepsilon$, т. е. в качестве $N$ можно взять большее из двух последовательных натуральных чисел, между которыми заключено число $1/\varepsilon$. Например, если $\varepsilon_1=0{,}1$, то $N_1=10$; если $\varepsilon_2=0{,}01$, то $N_2=100$ и т. д.

Замечание. Одновременно показано, что последовательность $(1/n)$ имеет пределом нуль, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \tag{13.8}$$

Пример 13.2. Последовательность $(\cos\pi n)$ является расходящейся.

В самом деле, каково бы ни было число $a$, вне его $\varepsilon$-окрестности, например при $0<\varepsilon<1$, заведомо лежит бесконечное множество элементов данной последовательности (хотя среди них и много равных между собой); это означает, что $a$ не является ее пределом.

Пример 13.3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+5}{6n^2+4n-9}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на $n^2$ и применив формулы (13.4) – (13.8), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{6n^2+4n-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3/n+5/n^2}{6+4/n-9/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-3/n+5/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(6+4/n-9/n^2)}=\frac{1}{3}.$$

## 13.3. Предел функции

Постоянная $b$ называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$ (или в точке $a$), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при всех $x$, удовлетворяющих условию

$$0<|x-a|<\delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Предел функции $f(x)$ при $x$, стремящемся к $a$, обозначают:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b;\ f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

Рассматривают также односторонние пределы функций: предел слева $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b_1$ ($x$ стремится к $a$, оставаясь меньше $a$; $x<a$) и предел справа $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b_2$ ($x$ стремится к $a$, оставаясь больше $a$; $x>a$). Если односторонние пределы равны: $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b$, то предел функции $f(x)$ в точке $a$ существует и равен $b$: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Если односторонние пределы различны или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции в соответствующей точке.

Если $c$ – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a}c=c$.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x), \qquad (13.9)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\,\varphi(x))=\lim_{x\to a}f(x)\,\lim_{x\to a}\varphi(x), \qquad (13.10)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\quad(\lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0). \qquad (13.11)$$

Из (13.10) следует, что

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)\ (c=\text{const}), \qquad (13.12)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^m=(\lim_{x\to a}f(x))^m, \tag{13.13}$$

$$\lim_{x\to a}x^m=a^m, \tag{13.14}$$

где $m$ – натуральное число.

Если $\sqrt[m]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)}=\sqrt[m]{\lim_{x\to a}f(x)}. \tag{13.15}$$

Число $A$ называется пределом функции $y=f(x)$ при $x$, стремящемся к $-\infty$ или $+\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать положительное число $N$, такое, что при всех значениях $x$, удовлетворяющих условию $|x|>N$, выполнялось неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пример 13.4. Найти $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-5x+4)$.

Применяя формулы (13.9), (13.12), (13.14), получаем

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=\lim_{x\to 3}(2x^2)-\lim_{x\to 3}(5x)+\lim_{x\to 3}4=2\cdot 3^2-5\cdot 3+4=7.$$

Пример 13.5. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x^2-9x+7}{3x^2-8x+5}$.

С помощью формулы (13.11) и формул, указанных в примере 13.4, находим

$$\lim_{x\to 2}\frac{6x^2-9x+4}{3x^2-8x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(6x^2-9x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-8x+6)}=\frac{6\cdot 2^2-9\cdot 2+4}{3\cdot 2^2-8\cdot 2+6}=5.$$

Пример 13.6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}$.

При $x=1$ числитель и знаменатель дроби равны нулю, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, предварительно преобразуем данную дробь, разложив многочлены на множители:

$$\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}=\frac{x^3(x-1)+(x-1)(x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)-2x^2(x-1)}=$$

$$=\frac{(x-1)(x^3+x+1)}{(x-1)((x+1)(x^2+1)-2x^2)}=\frac{x^3+x+1}{x^3-x^2+x+1}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-1}{x^4-2x^3+2x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x+1}{x^3-x^2+x+1}=\frac{3}{2}.$$

**Пример 13.7.** Найти $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$.

При $x=4$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, предварительно преобразуем дробь:

$$\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{(\sqrt{5+x}-3)(\sqrt{5+x}+3)}=\frac{(16-x^2)(\sqrt{5+x}+3)}{5+x-9}=$$

$$=\frac{(4-x)(4+x)(\sqrt{5+x}+3)}{x-4}=-(x+4)(\sqrt{5+x}+3).$$

Переходя к пределу с использованием формулы (13.15), находим

$$\lim_{x\to4}\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}=-\lim_{x\to4}(x+4)(\sqrt{5+x}+3)=-8\cdot6=-48.$$

## 13.4. Бесконечно малые функции и их свойства

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ (или при $x\to\infty$), если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0\ \ (\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0).$$

Например, функция $\alpha(x)=(x-5)^2$ есть бесконечно малая при $x\to5$, так как $\lim\limits_{x\to5}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to5}(x-5)^2=0$; функция $\alpha(x)=1/x$ является бесконечно малой при $x\to\infty$, поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Принимая во внимание определение предела функции, определение бесконечно малой функции можно сформулировать следующим образом.

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если, задав любое число $\varepsilon>0$, можно указать такое число $\delta>0$, что для всех $x$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Свойства бесконечно малых выражаются следующими теоремами.

**Теорема 13.3.** *Если функция $y=y(x)$ имеет предел $b$ при $x\to a$, то*

$$y(x)=b+\alpha(x),\ \ y=b+\alpha, \tag{13.16}$$

где $\alpha=\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$. Обратное также верно: если выполнено равенство (13.16), то $\lim\limits_{x\to a}y(x)=b$.

**Теорема 13.4.** *Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x\to a$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$.*

Теорема 13.5. *Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.*

Следствие 1. *Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.*

Следствие 2. *Произведение бесконечно малой функции на постоянную есть бесконечно малая функция.*

## 13.5. Сравнение бесконечно малых функций

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ называются величинами одного порядка, если их отношение имеет конечный предел, отличный от нуля, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c, \text{ или } \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{1}{c} \quad (c\neq 0).$$

В этом случае пишут: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ при $x \to a$ (читается: $\alpha(x)$ есть $O$ большое от $\beta(x)$ при $x \to a$).

Например, $\alpha(x)=\sin x$ и $\beta(x)=3x$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка, так как $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)/\beta(x)=1/3$, $\sin x=O(3x)$ при $x \to 0$.

Если предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$ при $x \to a$ равен нулю ($c=0$), то величина $\alpha(x)$ называется бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\beta(x)$ (величина $\beta(x)$ – бесконечно малая низшего порядка по сравнению с $\alpha(x)$). В данном случае применяется обозначение $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x \to a$ (читается: $\alpha(x)$ есть $o$ малое от $\beta(x)$ при $x \to a$). Например, $x^2=o(\sin x)$ при $x \to 0$, поскольку

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\cdot 1=0.$$

Функция $\beta(x)$ называется бесконечно малой $k$-го порядка относительно функции $\alpha(x)$, если $\beta(x)$ и $(\alpha(x))^k$ – бесконечно малые одного порядка, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{(\alpha(x))^k}=c \quad (c\neq 0).$$

Например, если $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=x^4$, то при $x \to 0$ $\beta(x)$ – бесконечно малая четвертого порядка относительно бесконечно малой $\alpha(x)$ (но бесконечно малая второго порядка по сравнению с $\gamma(x)=x^2$).

Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными (или равносильными) бесконечно малыми при $x \to a$, если предел их отношения равен единице, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1, \text{ или } \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Эквивалентность бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначается символом ~

$$\alpha(x)\sim\beta(x) \text{ при } x\to a.$$

Из формул (13.17) и (13.22) (см. п. 13.8) следует, что при $x\to 0$

$$x\sim\sin x\sim \operatorname{tg} x,\quad \ln(1+x)\sim x.$$

Теорема 13.6. *Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.*

Теорема 13.7. *Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to a$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем*

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Следствие. *Если $\alpha_1(x)\sim\beta(x)$, $\alpha_2(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$, то $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$ при $x\to a$.*

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них (или только одну) можно заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной: если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Замечание. Если отношение $\alpha(x)/\beta(x)$ двух бесконечно малых функций при $x\to a$ не имеет предела и не стремится к бесконечности, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы между собой. Например, несравнимы при $x\to 0$ бесконечно малые функции $\alpha(x)=x\sin(1/x)$, $\beta(x)=x$, так как

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{x\sin(1/x)}{x}=\sin\frac{1}{x}$$

и $\sin(1/x)$ не имеет предела при $x\to 0$.

Пример 13.8. Доказать, что функции $\alpha(x)=6x^2/(1-x)$ и $\beta(x)= =x^2$ при $x\to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка.

Найдем предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{x^2(1-x)}=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=6.$$

Поскольку полученный предел отличен от нуля, то данные функции являются бесконечно малыми одного порядка.

Пример 13.9. Доказать, что порядок функции $\alpha(x)=x^5/(2+x^2)$ выше, чем порядок функции $\beta(x)=x^4$ при $x\to 0$.

Так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{x^4(2+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2+x^2}=0,$$

то функция $\alpha(x)=x^5/(2+x^2)$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем функция $\beta(x)=x^4$.

Пример 13.10. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

При $x\to 3$ функции $x-3$, $\sin(x-3)$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поскольку при замене бесконечно малой функции $\sin(x-3)$ эквивалентной ей функцией $x-3$ предел отношения не изменится, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{(x-3)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}=1.$$

Пример 13.11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2-x^4}{2x-x^3}$.

Так как $(\sin x+x^2-x^4)\sim x$, $(2x-x^3)\sim 2x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2-x^4}{2x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

## 13.6. Бесконечно большие функции

Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого положительного числа $N$ можно найти такое число $\delta>0$, что при всех значениях $x$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>N$.

Бесконечно большая функция не имеет предела при $x\to a$, но иногда условно говорят, что ее предел равен бесконечности, и пишут: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, или $f(x)\to\infty$, при $x\to a$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to a$, принимая только положительные или только отрицательные значения, то соответственно пишут: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x\to\infty$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Примером бесконечно большой функции является функция $f(x)=1/x$ при $x\to 0$. В самом деле, при любом $N>0$ неравенство $|1/x|>N$ будет выполнено, если $|x|=|x-0|<1/N=\delta$. Эта функция принимает положительные значения при $x>0$ ( $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$ ) и отрицательные – при $x<0$ ( $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-\infty$ ).

Функция $f(x)=1/(x-2)^2$ – бесконечно большая при $x\to 2$. Действительно, при любом $N>0$ неравенство $1/(x-2)^2>N$ будет выполнено, если $(x-2)^2<1/N$ или $|x-2|<1/\sqrt{N}=\delta$. Данная функция принимает только положительные значения.

Если функция $\alpha=\alpha(x)$ стремится к нулю при $x\to a$ (или $x\to\infty$) и не обращается в нуль, то функция $y(x)=1/\alpha(x)$ стремится к бесконечности.

## 13.7. Основные теоремы о пределах функций

Теорема 13.8. *Функция $y=y(x)$ не может иметь более одного предела при $x\to a$.*

Теорема 13.9. *Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором промежутке, содержащем точку $a$. Если при $x\to a$ функция $y=f(x)$ имеет положительный (отрицательный) предел, то найдется $\delta$-окрестность точки $a$ такая, что для всех $x\in O(a,\delta)$ функция положительна (отрицательна).*

Эта теорема называется теоремой о сохранении знака функции, имеющей предел.

Теорема 13.10. *Если функции $u(x)$, $v(x)$ определены в некоторой $\delta$-окрестности точки $a$, для всех $x\in O(a,\delta)$, $x\neq a$ выполняется неравенство $u(x)<v(x)$ и функции имеют пределы при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)\le \lim\limits_{x\to a} v(x)$.*

Замечание. Теорему 13.10 кратко можно сформулировать так: в неравенстве, обе части которого имеют пределы, можно перейти к пределу, присоединив знак равенства. Например, $7+x^2>7-x^2$, $x\neq 0$; $\lim\limits_{x\to 0}(7+x^2)=\lim\limits_{x\to 0}(7-x^2)=7$.

Теорема 13.11. *Пусть три функции $u=u(x)$, $y=y(x)$, $v=v(x)$ определены в некотором промежутке, содержащем точку $a$.*

*Если для любого $x$ из этого промежутка выполняются неравенства $u(x)\le y(x)\le v(x)$ и функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют одинаковые пределы при $x\to a$, то $y=y(x)$ имеет тот же предел при $x\to a$.*

## 13.8. Некоторые важные пределы

Если угол $\alpha$ выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=1. \qquad (13.17)$$

Числом $e$ называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \text{ или } \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e. \qquad (13.18)$$

При нахождении многих пределов применяются следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \qquad (13.19)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \qquad (13.20)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha. \qquad (13.21)$$

Частными случаями формул (13.19) и (13.20) являются соответственно формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad (13.22)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \qquad (13.23)$$

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}(\varphi(x))^{\psi(x)} = C$ необходимо иметь в виду следующее:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = B$, то $C = A^B$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, то $C$ находится с помощью формул

$$\lim_{x\to+\infty} A^x = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < A < 1, \\ +\infty, & \text{если } A > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} A^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если } 0 < A < 1, \\ 0, & \text{если } A > 1; \end{cases}$$

3) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, то, положив $\varphi(x) = 1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, получим

$$C = \lim_{x\to a}\{[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)}.$$

Пример 13.12. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x$.

При $x\to\infty$ выражение $(1-(b/x))\to 1$, получаем неопределенность вида $1^\infty$. Чтобы раскрыть ее, введем новую переменную по формуле $(-b/x) = \alpha$, откуда $x = -b/\alpha$; $\alpha\to 0$, когда $x\to\infty$. Переходя к пределу с использованием формул (13.13) и (13.18), находим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-b/\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}[\,(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-b} =$$

$$= [\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-b} = e^{-b};\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{b}{x}\right)^x = e^{-b}.$$

В частности, при $b=-2$ получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$, при $b=3$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x = e^{-3}$.

Пример 13.13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^x$.

Разделив числитель и знаменатель на $3x$ и воспользовавшись результатом примера 13.12, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-(2/3)/x}{1+(4/3)/x}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2/3}{x}\right)^x : \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4/3}{x}\right)^x = e^{-2/3} : e^{4/3} = e^{-2}.$$

Пример 13.14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

Преобразуя эту дробь и применяя первую из формул (13.17), находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{7x} = 7\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x} = 7\cdot 1 = 7.$$

Пример 13.15. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$.

Преобразуя данную функцию, вводя новую переменную $x=2y$ и применяя формулу (13.21), находим

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y} = \lim_{y\to 0} 2\,\frac{(1+2y)^{1/2}-1}{2y} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{x} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Пример 13.16. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+5y)}{y}$.

Преобразуя эту функцию, вводя новую переменную $x=5y$ и применяя формулу (13.22), получаем

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+5y)}{y} = \lim_{y\to 0} 5\,\frac{\ln(1+5y)}{5y} =$$

$$= 5\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 5\cdot 1 = 5.$$

П р и м е р 13.17. Найти $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y/3}-1}{y}$.

После соответствующих преобразований по формуле (13.23) иаходим

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{y/3}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y/3}-1}{3y/3}=$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

## 13.9. Непрерывность функции

Функция $y=f(x)$, определенная иа интервале $(a,b)$, называется непрерывиой в точке $x_0\in(a,b)$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (13.24)$$

(т. е. предел функции равен ее значению при предельном значении аргумента).

Согласио определению предела функции, условие (13.24) равносильно следующему: для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что при всех $x$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется иеравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

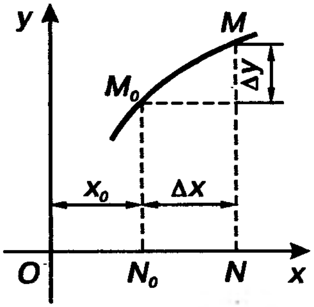


Рис. 13.1

Если $x_0\in(a,b)$ и $x\in(a,b)$, то разность $\Delta x=x-x_0$ называется приращением аргумента в точке $x_0$, а разность $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, или $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, – приращением функции в той же точке (рис. 13.1); $\Delta y$ – функция $\Delta x$.

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ выражается равенством

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0, \text{ или } \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0. \qquad (13.25)$$

Итак, функция иепрерывна в точке, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бескоиечно малое приращение функции.

З а м е ч а и и е. Поскольку $x_0=\lim\limits_{x\to x_0}x$, то формулу (13.24) можно переписать так: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$, т. е. для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны.

Т е о р е м а 13.12. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то также непрерывны в этой точке их сумма $f(x)+\varphi(x)$, разность $f(x)-\varphi(x)$, произведение $f(x)\varphi(x)$, а также частное $f(x)/\varphi(x)$ при условии, что $\varphi(x)\neq 0$.*

С л е д с т в и е 1. *Целая рациональная функция* $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ *непрерывна при всех* $x$.

С л е д с т в и е 2. *Дробная рациональная функция*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

*непрерывна при всех* $x$, *для которых знаменатель не обращается в нуль.*

Т е о р е м а 13.13. *Если функция* $\varphi(x)$ *непрерывна в точке* $x_0$, *а функция* $f(y)$ *непрерывна в точке* $y_0 = \varphi(x_0)$, *то сложная функция* $F(x) = f[\varphi(x)]$ *непрерывна в точке* $x_0$.

Функция называется непрерывиой на интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если функция определена при $x = a$ и при этом $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, то говорят, что $f(x)$ в точке $a$ непрерывна справа. Аналогично, если $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$, то говорят, что в точке $b$ эта функция непрерывна слева.

Функция иазывается непрерывной иа отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой его точке (в точке $a$ – иепрерывна справа, в точке $b$ – непрерывна слева).

Отметим, что основные элементарные функции непрерывны в соответствующей области определения.

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом важных свойств, которые выражаются следующими теоремами.

Т е о р е м а 13.14. *Функция, непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *достигает в нем своего наименьшего значения* $m$ *и наибольшего значения* $M$, *т.е. существуют такие точки* $x_1$, $x_2$ *этого отрезка, что* $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

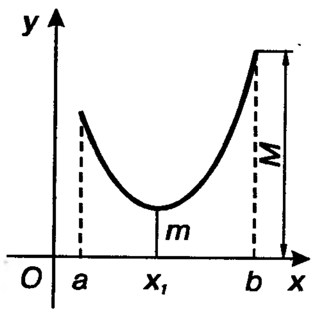


Рис. 13.2

Эта теорема имеет простой геометрический смысл (рис. 13.2).

З а м е ч а н и е. Функция, иепрерывная на интервале, этим свойством не обладает. Например, функция $y = 6x^2$ на интервале $(0, 1)$ не достигает значений $m = 0$ и $M = 6$, так как эти значения функция принимает в точках $x = 0$ и $x = 1$, а последние данному интервалу ие принадлежат.

Т е о р е м а 13.15. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и на его концах принимает неравные значения* $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$, *то каково бы ни было число* $C$, *заключенное между* $A$ *и* $B$, *найдется точка* $c \in [a, b]$ *такая, что* $f(c) = C$.

Геометрический смысл теоремы иллюстрируется на рис. 13.3, *а*, *б*. Всякая прямая $y = C$, где $A < C < B$ (или $A > C > B$), пересекает график функции $y = f(x)$.

С л е д с т в и е. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.*

Это частный случай теоремы: $AB < 0$, $C = 0$; геометрический смысл: график непрерывной функции $y = f(x)$, соединяющий точки $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$, для которых $f(a)\,f(b) < 0$, пересекает ось $Ox$ (рис. 13.4, *а*, *б*).

Отметим, что сумма конечного числа функций, непрерывных на некотором отрезке, непрерывна на этом отрезке.

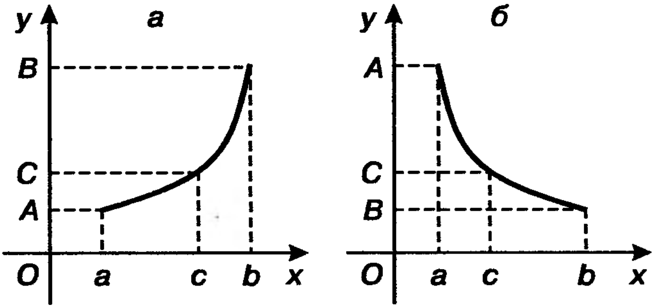


Рис. 13.3

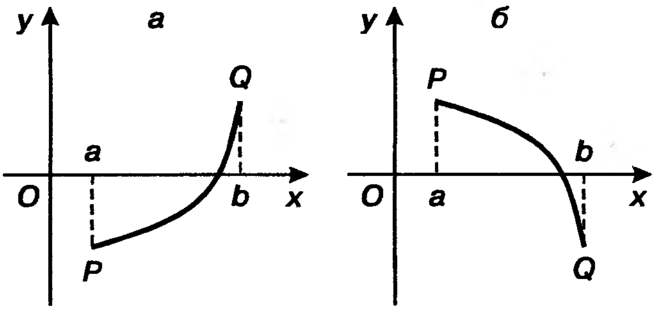


Рис. 13.4

## 13.10. Точки разрыва функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $(a, b)$, кроме, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Значение аргумента $x_0$ называется точкой разрыва данной функции, если при $x = x_0$ функция определена, но не является непрерывной или не определена при этом значении $x$.

Если $x_0$ – точка разрыва $f(x)$ и существуют коиечные пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то она называется точкой разрыва первого рода. Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Если $x_0$ – точка разрыва и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то $x_0$ иазывается точкой устранимого разрыва.

Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует или является бесконечным, то $x_0$ называется точкой разрыва второго рода.

Пример 13.18. Функция $f(x)=-x/|x|$ в точке $x_0=0$ имеет разрыв первого рода.

Действительно, $f(x)=1$ при $x<0$ и $f(x)=-1$ при $x>0$, в точке $x_0=0$ функция ие определена; $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=-1$. Скачок функции в точке $x_0=0$ равеи $-2$ (рис. 13.5).

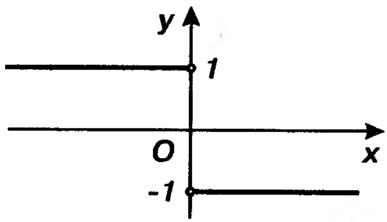


Рис. 13.5

Пример 13.19. Для функции $f(x)=(\sin x)/x$ значение аргумента $x_0=0$ является точкой устранимого разрыва.

В самом деле, при $x_0=0$ данная функция не определена, ио имеет равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -0}(\sin x)/x=1,\quad \lim_{x\to +0}(\sin x)/x=1.$$

График функции изображеи иа рис. 13.6.

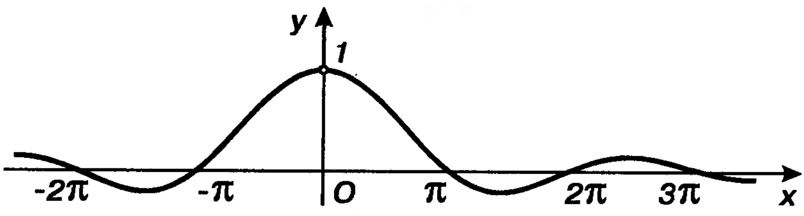


Рис. 13.6

Пример 13.20. Функция $f(x)=1/x$ в точке $x_0=0$ имеет разрыв второго рода, так как

$$\lim_{x\to -0} 1/x=-\infty,\quad \lim_{x\to +0} 1/x=+\infty.$$

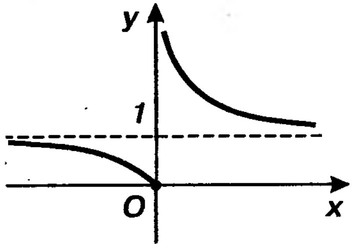


Рис. 13.7

Пример 13.21. Для функции $f(x)=3^{1/x}$ значение $x_0=0$ является точкой разрыва второго рода, так как $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=+\infty$. Второй односторонний предел конечен: $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=0$ (рис. 13.7).

## 13.11. Показательная функция. Гиперболические функции

Показательной (экспоненциальной) называется функция $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Пусть $a=e$ (см. формулу 13.18), в этом случае показательная (экспоненциальная) функция обозначается $y=e^x=\exp x$.

Показательную функцию с другим основанием можно привести к показательиой функции с основанием $e$. Действительно, по определению логарифма $a=e^{\ln a}$, поэтому $a^x=(e^{\ln a})^x=e^{kx}$, где $k=\ln a$.

Гиперболическим синусом иазывается функция, определяемая формулой

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \tag{13.26}$$

гиперболическим косинусом – функция

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}. \tag{13.27}$$

Гиперболический тангенс и гиперболический котангеис определяются соответственно формулами

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \tag{13.28}$$

$$\operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}. \tag{13.29}$$

Фуикции, определяемые формулами (13.26) – (13.29), называются гиперболическими.

Гиперболические функции имеют вполне определенные значения при всех значениях $x$, кроме функции $y=\operatorname{cth} x$, которая в точке $x=0$ обращается в бескоиечиость. Отметим, что $\operatorname{sh} 0=0$, $\operatorname{ch} 0=1$, как и для обычных синуса и косинуса.

Гиперболические функции не обладают важнейшим свойством тригонометрических функций – свойством периодичиости. Кроме того, множество значений каждой гиперболической функции существенно отличается от множества значений соответствующей тригонометрической функции. Функция $y = \operatorname{sh} x$ принимает все действительные значения, т. е. множество ее значений совпадает с бесконечным интервалом $(-\infty, +\infty)$; $y = \operatorname{ch} x$ – значения, не меньше единицы $(1 \leq \operatorname{ch} x < +\infty)$; значения функции $y = \operatorname{th} x$ по модулю не превышают единицы $(-1 < \operatorname{th} x < 1)$; значения $y = \operatorname{cth} x$ по модулю больше единицы ($\operatorname{cth} x > 1$ при $x > 0$, $\operatorname{cth} x < -1$ при $x < 0$).

Графики гиперболических функций представлены на рис. 13.8 и 13.9, *а*, *б*. Прямые $y = +1$, $y = -1$ являются асимптотами графиков функций $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$. Кроме того, ось $Oy$ служит асимптотой графика функции $y = \operatorname{cth} x$.

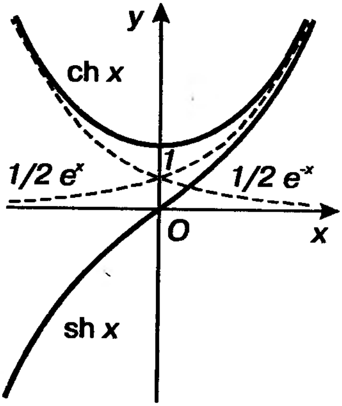


Рис. 13.8

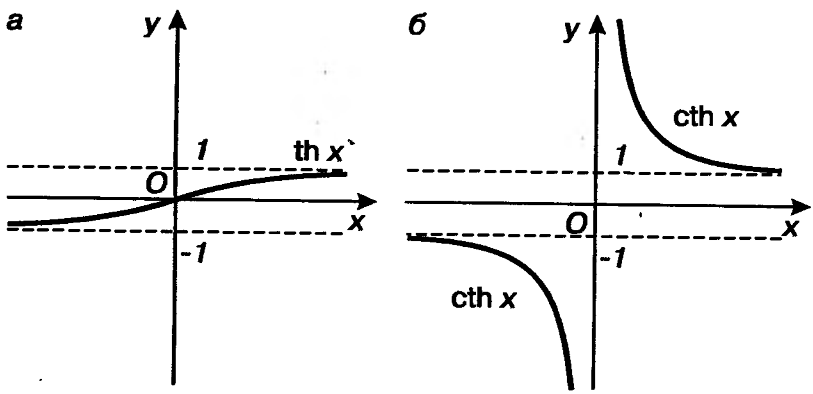


Рис. 13.9

## Глава 14

# ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

## 14.1. Понятие производной, ее геометрический и физический смысл

Касательной к линии $l$ в точке $M_0$ называется прямая $M_0T$ – предельное положение (рис. 14.1) секущей $M_0M$, когда точка $M$ стремится к $M_0$ вдоль данной линии (т. е. угол $\gamma$ стремится к нулю) произвольным образом.

Производной функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Производную функции $y=f(x)$ в точке $x_0$ обозначают символом $f'(x_0)$ (читается: «эф штрих от $x_0$») или $y'(x_0)$. Следовательно, по определению

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \text{ или } y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{14.1}$$

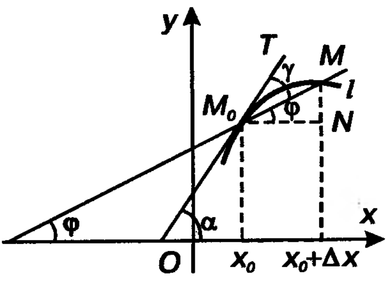


Рис. 14.1

Употребляются и другие обозначения: $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $\dot{x}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, если $x=f(t)$.

Термин «производная» (а также «вторая производная») ввел Ж. Лагранж (1797), он же предложил обозначения $y'$, $f'(x)$, $f''(x)$ (1770, 1779). Обозначение $dy/dx$ впервые встречается у Лейбница (1675).

**Геометрический смысл производной.** Производная функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т. е.

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha, \tag{14.2}$$

где $\alpha$ – угол наклона касательной к оси $Ox$ прямоугольной декартовой системы координат (рис. 14.2).

Уравнение касательной к линии $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ принимает вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \tag{14.3}$$

Нормалью к кривой в некоторой ее точке называется перпендикуляр к касательной в той же точке. Если $f(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали к линии $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ запишется так:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{14.4}$$

**Физический смысл производной.** Если $x = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то $x' = f'(t)$ – скорость этого движения в момент времени $t$.

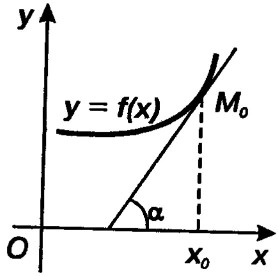


Рис. 14.2

Быстрота протекания физических, химических и других процессов выражается с помощью производной.

Если отношение $\Delta y/\Delta x$ при $x \to x_0$ имеет предел справа (или слева), то он называется производной справа (соответственно производной слева). Такие пределы называются односторонними производными.

Односторонние производные функции $f(x)$ в точке $x_0$ обозначается соответственно символами $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ – производная слева;}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ – производная справа.}$$

Очевидно, функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x_0$, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ существуют и равны между собой, причем $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$.

Если для некоторого значения $x$ выполняется одно из условий

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то говорят, что в точке $x$ существует бесконечная производная, равная соответственно $+\infty$, $-\infty$.

Геометрическое истолкование производной как углового коэффициента касательной к графику распространяется и на этот случай: касательная в данном случае параллельна оси $Oy$ (рис. 14.3, $a - b$).

Функция, имеющая производную в данной точке, называется дифференцируемой в этой точке. Функция, имеющая производную в каждой точке данного промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке. Если промежуток является замкнутым, то на концах его имеются односторонние производные.

Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции выражается следующей теоремой.

Теорема 14.1. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в ней.*

Замечание. Обратное утверждение не всегда верно. Например, функция $y = |x-1|$ непрерывна в точке $x = 1$, но не является дифференцируемой в ней.

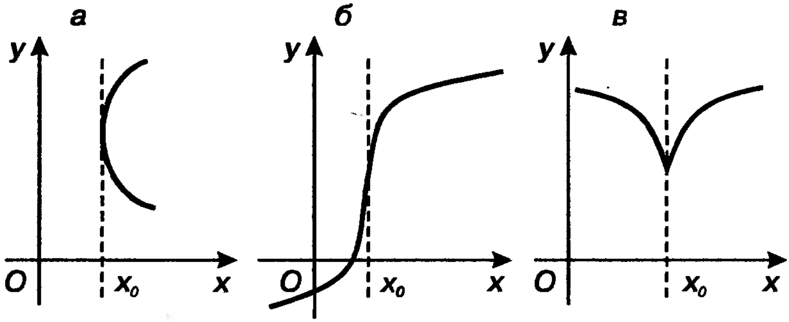


Рис. 14.3

Пример 14.1. Записать уравнение касательной к лиии $f(x) = x^2 - 4x + 7$ в точке $x = 3$.

Так как $f'(x) = 2x - 4$, $x_0 = 3$, $f'(x_0) = f'(3) = 2$, $y_0 = f(x_0) = f(3) = 4$, то в соответствии с уравнением (14.3) получаем $y - 4 = 2(x-3)$, или $2x - y - 2 = 0$.

Пример 14.2. В какой точке касательная к линии $f(x) = x^3 - 11x - 5$ параллельна прямой $2x - 2y + 3 = 0$.

Данная прямая имеет угловой коэффициент $k = 1$. Поскольку $f'(x) = 3x^2 - 11$, то в силу равенства (14.2) имеем $3x^2 - 11 = 1$, или $3x^2 = 12$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Находим $y_1 = f(x_1) = f(-2) = 9$, $y_2 = f(x_2) = f(2) = +19$. Следовательно, получили две точки: $M_1(-2, 9)$, $M_2(2, -19)$.

Пример 14.3. Записать уравнение нормали к линии $f(x) = x^2 + 5x - 7$ в точке $x = -4$.

Так как $f'(x) = 2x + 5$, $x_0 = -4$, $f'(x_0) = f'(-4) = -3$, $y_0 = f(x_0) = f(-4) = -11$, то уравнение (14.4) принимает вид $y + 11 = (-1/-3)/(x+4)$, или $x - 3y - 29 = 0$.

## 14.2. Основные правила дифференцирования

**Производная алгебраической суммы функций** выражается следующей теоремой.

Теорема 14.2. *Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \qquad (14.5)$$

Следствие. *Производная конечной алгебраической суммы дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных слагаемых. Например,* $(u - v + w)' = u' - v' + w'$.

**Производную произведения функций** определяет

Теорема 14.3. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первой функции на производную второй плюс произведение второй функции на производную первой, т. е.*

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad (14.6)$$

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной* $(cv)' = cv'$ ($c = \text{const}$).

Следствие 2. *Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждой из них на все остальные. Например,* $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

**Производная частного двух функций** выражается следующей теоремой.

Теорема 14.4. *Производная частного двух дифференцируемых функций определяется формулой*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \qquad (14.7)$$

**Производную сложной функции** выражает

Теорема 14.5. *Если* $y = f(u)$ *и* $u = \varphi(x)$ – *дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции* $y = f(\varphi(x))$ *существует и равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной, т. е.*

$$y'_x = y'_u u'_x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \qquad (14.8)$$

**Производная обратной функции.** Если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ – взаимно обратные дифференцируемые функции и $y'_x \neq 0$, то

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \qquad (14.9)$$

## 14.3. Основные формулы дифференцирования

**Производные степенных и тригонометрических функций** выражаются следующими формулами:

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1},\ x'_x=1,\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},$$

$$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Если $u=u(x)$ – дифференцируемая функция, то

$$(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}u', \tag{14.10}$$

$$(\sin u)'=\cos u\cdot u',\ (\cos u)'=-\sin u\cdot u', \tag{14.11}$$

$$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 x},\ (\operatorname{ctg} u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}. \tag{14.12}$$

Пример 14.4. Найти производную функции $y=\sqrt{1-x^2}$.

Считая $1-x^2=u$ и применяя формулу (14.10), получаем

$$y=(1-x^2)^{1/2},\ y'=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 14.5. Найти производную функции $y=\sin\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{6}$.

Применяя формулы (14.11), находим

$$y'=\cos\frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}\right)'-\sin\frac{x}{6}\left(\frac{x}{6}\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}=-\frac{1}{6}\sin\frac{x}{6}.$$

Пример 14.6. Найти производную функции $y=\operatorname{ctg}^2 3x$.

Так как $y=v^2$, где $v=\operatorname{ctg} u$, $u=3x$, то формулу (14.8) применяем дважды. На основании формулы (14.10) и второй из формул (14.12) получаем

$$y'=-2\operatorname{ctg}3x\,\frac{1}{\sin^2 3x}(3x)'=-\frac{6\operatorname{ctg}3x}{\sin^2 3x}.$$

Пример 14.7. Найти производную функции $y=1/\operatorname{tg}^2 2x$.

Так как $y=1/w$, $w=v^2$, $v=\operatorname{tg} u$, $u=2x$, то $y'_x=y'_w\cdot w'_v\cdot v'_u\cdot u'_x$. Применяя формулу (14.10) и первую из формул (14.12), находим

$$y'=-\frac{1}{\operatorname{tg}^4 2x}2\operatorname{tg}2x\,\frac{1}{\cos^2 2x}2=-\frac{4}{\operatorname{tg}^3 2x}\frac{1}{\cos^2 2x}=-\frac{4\cos 2x}{\sin^3 2x}.$$

**Производные показательных и логарифмических функций** выражаются формулами

$$(a^x)'=a^x\ln a,\ (e^x)'=e^x,$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\ (x>0),\ (\ln|x|)'=\frac{1}{x}\ (x\neq 0).$$

Если $u=u(x)$ – дифференцируемая функция, то

$$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u',\ (e^u)'=e^u u', \tag{14.13}$$

$$(\log_a u)'=\frac{u'}{x\ln a},\ (\ln u)'=\frac{u'}{u}. \tag{14.14}$$

Пример 14.8. Найти производную функции $y=e^{\sin 3x}$.

Применяя вторую из формул (14.13), находим

$$y'=e^{\sin 3x}(\sin 3x)'=e^{\sin 3x}\cos 3x\,(3x)'=3e^{\sin 3x}\cos 3x.$$

Пример 14.9. Найти производную функции $y=\ln(1+x^2)$. На основании второй из формул (14.14) получаем

$$y'=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Пример 14.10. Найти производную функции $y=\ln\sqrt{x^2+4x+5}$. Так как $y=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)$, то

$$y'=\frac{(x^2+4x+5)'}{2(x^2+4x+5)}=\frac{x+2}{x^2+4x+5}.$$

**Производные обратных тригонометрических функций** находят по формулам

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2},\ (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Если $u=u(x)$ – дифференцируемая функция от $x$, то

$$(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\ (\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{14.15}$$

$$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2},\ (\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}. \tag{14.16}$$

Пример 14.11. Найти производную функции $y=\arcsin\sqrt{1-3x}+$ $+\arccos\sqrt{1-2x}$.

Применяя формулы (14.15), находим

$$y' = \frac{(\sqrt{1-3x})'}{\sqrt{1-(1-3x)}} - \frac{(\sqrt{1-2x})'}{\sqrt{1-(1-2x)}} = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}\,\frac{1}{\sqrt{3x}} -$$

$$-\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}\,\frac{1}{\sqrt{2x}} = -\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}.$$

Пример 14.12. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$.

С помощью первой из формул (14.16) и формулы (14.7) получаем

$$y' = \frac{1}{1+((1-x)/(1+x))^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}\right) = \frac{-2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

**Производные гиперболических функций** находят по формулам

$$(\operatorname{sh}x)' = \operatorname{ch}x,\ (\operatorname{ch}x)' = \operatorname{sh}x,$$

$$(\operatorname{th}x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ (\operatorname{cth}x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Если $u = u(x)$ – дифференцируемая функция, то

$$(\operatorname{sh}u)' = \operatorname{ch}u\cdot u',\ (\operatorname{ch}u)' = \operatorname{sh}u\cdot u', \tag{14.17}$$

$$(\operatorname{th}u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 x},\ (\operatorname{cth}u)' = -\frac{u'}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{14.18}$$

Пример 14.13. Найти производную функции $y = \operatorname{sh}2x + \operatorname{ch}3x$.

Применяя формулы (14.17), находим $y' = \operatorname{ch}2x\,(2x)' + \operatorname{sh}3x\,(3x)' = 2\operatorname{ch}2x + 3\operatorname{sh}3x$.

Пример 14.14. Найти производную функции $y = \operatorname{th}\dfrac{x}{5} + \operatorname{cth}\dfrac{x}{7}$.

В соответствии с формулами (14.18) получаем

$$y' = \frac{(x/5)'}{\operatorname{ch}^2(x/5)} - \frac{(x/7)'}{\operatorname{sh}^2(x/7)} = \frac{1}{5\operatorname{ch}^2(x/5)} - \frac{1}{7\operatorname{sh}^2(x/7)}.$$

**Производные неявных функций и функций, заданных параметрически. Производная функции** $y = u^v$. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$, то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $F_x' = 0$, где $F = F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной $x$.

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически:

$$x = x(t),\ \ y = y(t)\ \ (\alpha < t < \beta), \tag{14.19}$$

где $x(t), y(t)$ – дифференцируемые функции и $x'(t) \neq 0$, то ее производная $y'_x$ определяется формулой

$$y'_x = y'_t / x'_t. \tag{14.20}$$

Производная степенно-показательной функции $u^v$, где $u, v$ – дифференцируемые функции от $x$, находится с помощью предварительного логарифмирования, которое приводит к формуле

$$(u^v)' = u^v \left( v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right). \tag{14.21}$$

Пример 14.15. Найти производную функции, заданной уравнением $y \sin x = \cos(x - y)$.

Это уравнение определяет $y = y(x)$ – функцию от $x$. Подставляя функцию $y = y(x)$ в данное уравнение, получаем тождество $y(x) \sin x \equiv \cos(x - y(x))$. Дифференцируем это тождество и из полученного уравнения находим $y' = y'(x)$: $y' \sin x + y \cos x = -\sin(x - y)(1 - y')$, $y' \sin x + y \cos x = -\sin(x - y) + y' \sin(x - y)$, $y \cos x + \sin(x - y) = y'(\sin(x - y) - \sin x)$, $y' = \dfrac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$.

Пример 14.16. Найти производную функции, заданной уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

Эта функция задана параметрически (см. (14.19)). Так как $x'_t = 1 - \cos t$, $y'_t = \sin t$, то по формуле (14.20) получаем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$.

Пример 14.17. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

Логарифмируя это равенство по основанию $e$, получаем $\ln y = \sin x \ln x$. Дифференцируя, находим $y'/y = \cos x \ln x + \sin x \cdot (1/x)$, откуда $y' = y(\cos x \ln x + \sin x \cdot (1/x))$, $y' = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \sin x / x)$.

Пример 14.18. Найти производную функции $x^x$.

Это также функция $y = u^v$, где $u = x$, $v = x$. По формуле (14.21) получаем $y' = x^x(\ln x + 1)$.

**Производные высших порядков.** Производной второго порядка, или второй производной, функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$ (которую называют первой производной).

Обозначения второй производной:

$$y'' = (y')',\ \ f''(x) = (f'(x))',\ \ \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}.$$

**Механический смысл второй производной.** Если $x = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то $x'' = f''(t)$ – ускорение этого движения в момент времени $t$.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и более высоких порядков:

$$y''' = (y'')' = (f''(x))', \quad y^{IV} = (y''')', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Производная $n$-го порядка обозначается и так:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}.$$

Если функция задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то ее вторая производная определяется формулой

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}. \tag{14.22}$$

Пример 14.19. Найти вторую производную функции $y = x^3 \ln x$.

Так как $y' = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 (1/x) = 3x^2 \ln x + x^2$, то $y'' = 6x \ln x + 3x^2 (1/x) + 2x$, $y'' = 6x \ln x + 5x$.

Пример 14.20. Найти вторую производную функции, заданной параметрически: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.

Поскольку $x' = 1 - \cos t$, $y' = \sin t$, $x'' = \sin t$, $y'' = \cos t$, то по формуле (14.22) получаем $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{(1-\cos t)\cos t - \sin t \sin t}{(1-\cos t)^3} = \dfrac{\cos t - 1}{(1-\cos)^3} = -\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$.

Пример 14.21. Найти $f'''(1)$ для функции $f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 9$.

Так как $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 7$, $f''(x) = 12x^2 - 30x + 12$, то $f'''(x) = 24x - 30$. Следовательно, $f'''(1) = -6$.

## 14.4. Дифференциал функции

**Понятие дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.** Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некотором промежутке $(a, b)$, и ее приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ в точке $x_0$, где $x_0$, $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$.

Если приращение функции представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{14.23}$$

где $A$ – постоянная, $o(\Delta x)$ – бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\Delta x$, то слагаемое $A\Delta x$ называют дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначают $dy$ или $df(x_0)$: $dy = A\Delta x$; функцию $y = f(x)$ в этом случае называют дифференцируемой в точке $x_0$.

Если приращение функции $y = f(x)$ представимо формулой (14.23), то $A = f'(x)$: следовательно, $dy = f'(x_0)\,\Delta x$. Так как

$$dx = \Delta x, \tag{14.24}$$

т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной, то

$$dy = f'(x_0)\,dx, \quad dy = y'_x dx, \tag{14.25}$$

откуда $f'(x_0) = dy/dx$, т. е. производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Формулу (14.23) можно записать так:

$$\Delta y = dy + o(\Delta x). \tag{14.26}$$

Дифференциал функции называют также главной линейной частью ее приращения.

Теорема 14.6. *Бесконечно малое приращение функции эквивалентно ее дифференциалу при всех значениях независимой переменной, для которых производная функции конечна и отлична от нуля.*

Из равенства (14.26) при достаточно малых $\Delta x$ получаем

$$\Delta y \approx dy, \text{ или } f(x_0 + \Delta x) - f(x) \approx f'(x_0)\,\Delta x, \tag{14.27}$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x. \tag{14.28}$$

Формулы (14.27) и (14.28) применяются в приближенных вычислениях.

Пример 14.22. Вычислить значение дифференциала функции $f(x) = x^4 - 5x^2 + 7$, когда аргумент $x$ меняется от $x = 2$ до $x = 2,1$.

Найдем сначала выражение для дифференциала данной функции по формуле (14.25): $dy = (x_0^4 - 5x_0^2 + 7)'\,dx = (4x_0^3 + 10x_0)\,dx$. Так как $dx = \Delta x = x_1 - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1$, $x_0 = 2$, то $dy = (4 \cdot 2^3 - 10 \cdot 2)\,0{,}1 = 1{,}2$.

Пример 14.23. Вычислить приближенно значение функции $f(x) = \sqrt[3]{1 + 7x^2}$ при $x = 1{,}1$.

Значение аргумента $x = x_0 + \Delta x$ представим в виде $x = 1 + 0{,}1$, где $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$. При $x_0 = 1$ легко вычисляются значения функции и ее производной

$$f'(x) = \frac{14x}{3\sqrt[3]{(1+7x^2)^2}} : f(1) = \sqrt[3]{1 + 7 \cdot 1^2} = 2, \quad f'(1) = \frac{14 \cdot 1}{3\sqrt[3]{(1 + 7 \cdot 1^2)^2}} = \frac{7}{6}.$$

Эти значения входят в формулу $\sqrt[3]{1 + 7\,(1{,}1)^2} \approx \sqrt[3]{1 + 7 \cdot 1^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{14 \cdot 1}{\sqrt[3]{(1 + 7 \cdot 1^2)^2}}\,0{,}1$, полученную из формулы (14.28). Следовательно, $f(1,1) = 2 + 7/60 \approx 2{,}117$.

Г е о м е т р и ч е с к и й   с м ы с л   д и ф ф е р е н ц и а л а. Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции в соответствующей точке, когда аргумент получает приращение $\Delta x$ (рис. 14.4).

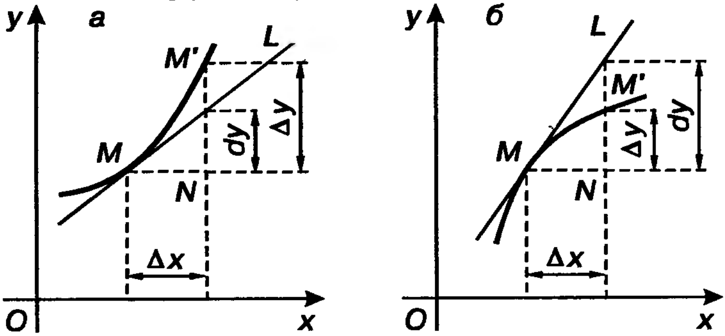


Рис. 14.4

Отметим, что $dy < \Delta y$ (рис. 14.4, *а*) или $dy > \Delta y$ (рис. 14.4, б); если функция равна постоянной, то $dy = \Delta y = 0$.

Ф и з и ч е с к и й   с м ы с л   д и ф ф е р е н ц и а л а. Рассмотрим прямолинейное движение точки по закону $s = f(t)$, где $s$ – длина пути, $t$ – время, $f(t)$ – дифференцируемая функция; тогда $ds = f'(t)\,dt = v\,(t)\,dt$, где $v\,(t)$ – скорость движения. Следовательно, дифференциал пути равен приращению пути, полученного в предположении, что, начиная с данного момента $t$, точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.

**Свойства дифференциала.** Дифференциал функции обладает свойствами, аналогичными свойствам производной.

1. Дифференциал постоянной равен нулю:

$$dc = 0, \quad c = \text{const}. \tag{14.29}$$

2. Дифференциал суммы дифференцируемых функций равен сумме дифференциалов слагаемых:

$$d\,(u + v) = du + dv. \tag{14.30}$$

С л е д с т в и е. *Если две дифференцируемые функции отличаются постоянным слагаемым, то их дифференциалы равны*

$$d\,(u + c) = du \quad (c = \text{const}). \tag{14.31}$$

3. Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций равен произведению первой функции на дифференциал второй плюс произведение второй на дифференциал первой:

$$d\,(uv) = udv + vdu. \tag{14.32}$$

С л е д с т в и е. *Постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала*

$$d\,(cu) = cdu \quad (c = \text{const}). \tag{14.33}$$

4. Дифференциал частного $u/v$ $(v \neq 0)$ двух дифференцируемых функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определяется формулой

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \qquad (14.34)$$

5. Свойство независимости вида дифференциала от выбора независимой переменной (инвариантность формы дифференциала): дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента независимого от того, является ли этот аргумент независимой переменной или функцией другой независимой переменной.

Основные дифференциалы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | $dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}dx,$ | II. | $d(a^x) = a^x \ln a dx,$ |
| III. | $d(\ln\lvert x\rvert) = \dfrac{dx}{x},$ | IV. | $d(\sin x) = \cos x dx,$ |
| V. | $d(\cos x) = -\sin x dx,$ | VI. | $d(\operatorname{tg} x) = dx/\cos^2 x,$ |
| VII. | $d(\operatorname{ctg} x) = -dx/\sin^2 x,$ | VIII. | $d(\arcsin x) = dx/\sqrt{1-x^2},$ |
| IX. | $d(\arccos x) = -dx/\sqrt{1-x^2},$ | X. | $d(\operatorname{arctg} x) = dx/(1+x^2),$ |
| XI. | $d(\operatorname{arcctg} x) = -dx/(1+x^2),$ | XII. | $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx,$ |
| XIII. | $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx,$ | XIV. | $d(\operatorname{th} x) = dx/\operatorname{ch}^2 x,$ |
| XV. | $d(\operatorname{cth} x) = -dx/\operatorname{sh}^2 x,$ | XVI. | $df(u) = f'(u)\,du.$ |

**Дифференциалы высших порядков.** Если $x$ – независимая переменная и $y = f(x)$ – дифференцируемая функция, то $dx = f'(x)\,dx,$ т. е. дифференциал функции есть функция, зависящая от двух аргументов $x$ и $dx$. Этот дифференциал будем называть также дифференциалом первого порядка (или первым дифференциалом). Считая $dx$ постоянной, получаем, что $df(x)$ – функция одной переменной. Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет не только первую производную, но и $n$ последовательных производных $y'' = f''(x),$ $y''' = f'''(x), \ldots, y^{(n)} = f^{(n)}(x).$

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ называется вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка этой функции и обозначается $d^2y$: $d^2y = d(dy),$ причем

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \qquad (14.35)$$

Дифференциалом $n$-го порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^n y = d(d^{n-1}y)$:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n. \qquad (14.36)$$

Замечание. Формулы (14.35) и (14.36) при $n > 1$ справедливы, когда $x$ является независимой переменной.

## 14.5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 14.7. (Лагранжа). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируема в интервале* $(a, b)$, *то существует такая точка* $c \in (a, b)$, *что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (a < c < b).$$

Следствие 1. *Если производная функции равна нулю в каждой точке некоторого промежутка, то функция есть тождественная постоянная в этом промежутке.*

Следствие 2. *Если две функции имеют равные производные в некотором промежутке, то они отличаются в этом промежутке лишь постоянным слагаемым.*

Корнем (или нулем) функции $y = f(x)$ называется такое значение $x = x_0$ ее аргумента, при котором эта функция обращается в нуль. Геометрически корень функции означает абсциссу точки, в которой график функции пересекает ось $Ox$ или касается ее.

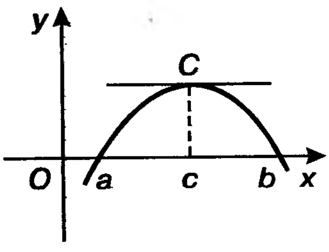


Рис. 14.5

Теорема 14.8. (Ролля). *Между двумя различными корнями дифференцируемой функции содержится по меньшей мере один корень ее производной.*

Замечание 1. Теорема имеет простую геометрическую интерпретацию: между значениями $a$ и $b$ имеется по меньшей мере одно значение $c$ такое, что в точке $C(c, f(c))$ графика функции касательная к графику параллельна оси $Ox$ (рис. 14.5).

Замечание 2. Теорему можно сформулировать в более общем виде. Если $y = f(x)$ – функция, дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = f(b)$, то между $a$ и $b$ найдется точка $c$, в которой производная равна нулю, т. е. $f'(c) = 0$.

Теорема 14.9. (Коши). *Если* $y = f(x)$ *и* $y = \varphi(x)$ *– две функции, непрерывные на отрезке* $[a, b]$ *и дифференцируемые в интервале* $(a, b)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0$ *для любого* $x \in (a, b)$, *то между* $a$ *и* $b$ *найдется такая точка* $c$, *что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

## 14.6. Формула Тейлора

Формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{14.37}$$

называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \tag{14.38}$$

Если $a=0$, то формула принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{14.39}$$

где $0<\theta<1$, и называется формулой Маклорена.

Формулу (14.37) можно записать в виде

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n), \tag{14.40}$$

где $o((x-a)^n)$ – бесконечно малая порядка выше $n$-го по сравнению с $x-a$; эта форма остаточного члена была указана Пеано.

З а м е ч а н и е. Если в формулах (14.37) и (14.40) перенести в левые части $f(a)$ и обозначить $(x-a)=\Delta x$, тогда

$$\Delta f(a)=f'(a)\,\Delta x+\frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},$$

$$\Delta f(a)=f'(a)\,\Delta x+\frac{1}{2!}f''(a)\,\Delta x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\,\Delta x^n+o(\Delta x^n).$$

Если в этих формулах $\Delta x$ заменить на $dx$ и принять во внимание формулы (14.35), (14.36), то получим соответственно

$$\Delta f(a)=df(a)+\frac{1}{2!}d^2f(a)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(a)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi),$$

$$\Delta f(a)=df(a)+\frac{1}{2!}d^2f(a)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(a)+o(\Delta x^n).$$

Следовательно, если предположить, что $\Delta x \to 0$, то по этим формулам из бесконечно малого приращения функции $\Delta f(a)$ можно выделить не только его главный член – первый дифференциал, но и члены более высоких порядков малости, совпадающие (с точностью до факториалов в знаменателях) с последовательными дифференциалами $d^2 f(a), d^3 f(a), \ldots, d^n f(a)$.

## 14.7. Формула Тейлора для некоторых функций

Формула (14.39) для функции $f(x) = e^x$ принимает вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1). \tag{14.41}$$

Отметим, что при любом $x$ остаточный член формулы (14.41) стремится к нулю при неограниченном возрастании $n$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0.$$

Разложение функции $f(x) = \sin x$ по формуле (14.39):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{2} +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right). \tag{14.42}$$

Остаточный член

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

формулы (14.42) также стремится к нулю при $n \to \infty$.

Формула (14.39) для функции $f(x) = \cos x$ имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{2} +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right). \tag{14.43}$$

Каково бы ни было $x$, остаточный член формулы (14.43) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для функции $f(x) = (a + x)^n$, где $a$ – действительное число, $n$ – натуральное число, получаем

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!} ax^{n-1} + x^n. \tag{14.44}$$

Это равенство называется формулой бинома Ньютона.

## 14.8. Приближенные формулы

Если в формуле (14.39) отбросить остаточный член, то получится приближенная формула

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \qquad (14.45)$$

заменяющая данную функцию многочленом $n$-й степени. Качество этой формулы оценивается двояко: указываются границы погрешности $R_n(x)$ с помощью выражения (14.38) для остаточного члена либо порядок малости этой погрешности при $x \to 0$ $R_n(x) = o(x^n)$.

В случае функции $f(x) = e^x$ получаем приближенную формулу

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}. \qquad (14.46)$$

Поскольку $R_n(x) = e^{\theta x}x^{n+1}/(n+1)!$, то например, при $x > 0$ погрешность оценивается неравенствами

$$0 < R_n(x) < \frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (14.47)$$

В частности, при $x=1$ получаем $e^x \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $0 < R_n(x) < \frac{3}{(n+1)!}$.

Если взять $n = 8$ и произвести вычисления с пятью десятичными знаками, то получим $e = 2{,}71827$. Здесь верны первые четыре знака, так как ошибка не превосходит $3/9!$ или $0{,}00001$.

Взяв $f(x) = \sin x$ и положив в равенстве (14.42) $n = 2m$, получим приближенную формулу

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \qquad (14.48)$$

остаточный член которой

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin(\theta x + (2m+1)\pi/2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

оценивается соотношением

$$|R_{2m}(x)| \le \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Для функции $f(x)=\cos x$ аналогично получаем

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}. \tag{14.49}$$

Погрешность приближенной формулы (14.49) выражается остаточным членом

$$R_{2m+1}(x)=(-1)^{m+1}\cos\theta x\,\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

и оценивается неравенством

$$|R_{2m+1}(x)|\le\frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Например, для формулы $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ погрешность

$$|R_5(x)|\le\frac{|x|^6}{6!}=\frac{x^6}{720}.$$

Пример 14.24. Вычислить $e^{0,75}$ с точностью до 0,001.

Применяем формулу (14.46), полагая в ней $x=0,75=3/4$. Поскольку $x<1$ и $e<3$, то из формулы (14.47) следует, что

$$|R_n(x)|<\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Требование $|R_n(x)|<0,001$ будет выполнено, если $\frac{3}{(n+1)!}<\frac{1}{1000}$, или $(n+1)!>3000$.

Это неравенство выполняется при $n=6$ (тогда $(n+1)!=7!=5040$). Значит, для вычисления $e^{0,75}$ с заданной точностью в формуле (14.46) нужно взять шесть слагаемых $e^{0,75}\approx 1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\frac{3^2}{4^2}+\frac{1}{6}\frac{3^3}{4^3}+\frac{1}{24}\frac{3^4}{4^4}+\frac{1}{120}\frac{3^5}{4^5}\approx 1+$
$+0,7500+0,2813+0,0703+0,0132+0,0019\approx 2,1167$, $e^{0,75}\approx 2,117$.

*Глава 15*

# ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

## 15.1. Правило Лопиталя – Бернулли

При исследовании функций может появиться необходимость нахождения предела дроби $f(x)/\varphi(x)$, числитель и знаменатель которой при $x \to a$ стремятся к нулю или к бесконечности. Нахождение таких пределов называют раскрытием неопределенностей соответствующего вида. Основой его является правило Лопиталя – Бернулли, выражаемое следующей теоремой.

Теорема 15.1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, обращаются в нуль в этой точке и существует предел отношения $f'(x)/\varphi'(x)$ при $x \to a$, тогда существует предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (15.1)$$

Замечание 1. Теорема верна и в том случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены в точке $x = a$, но $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$.

Замечание 2. Теорема верна и в случае $a = \infty$, т. е. когда $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$.

Замечание 3. Если $f'(a) = 0$, $\varphi'(a) = 0$, функции $f'(x)$, $\varphi'(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x = a$ и существует предел отношения $f''(x)/\varphi''(x)$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}. \qquad (15.2)$$

Другими словами, правило Лопиталя – Бернулли при выполнении соответствующих условий можно применять несколько раз.

Правило Лопиталя – Бернулли применимо и при раскрытии неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, поскольку ее можно привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, представив рассматриваемую дробь так:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} : \frac{1}{f(x)}.$$

С помощью тождественных преобразований к основному виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно свести неопределенности других видов, таких, как $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$, т. е. произведение $f(x)\varphi(x)$, где $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$, приводится к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ по формулам

$$f(x)\varphi(x)=f(x):\frac{1}{\varphi(x)},\quad f(x)\varphi(x)=\varphi(x):\frac{1}{f(x)},$$

а затем применяется правило Лопиталя – Бернулли.

Аналогично раскрывается неопределенность вида $\infty-\infty$, т. е. находится предел $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. С помощью преобразования $f(x)-\varphi(x)=\left(\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right):\frac{1}{f(x)\varphi(x)}$ эта неопределенность сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Раскрыть неопределенность вида $1^{\infty}$ – значит найти предел $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

Раскрыть неопределенности вида $0^0$, $\infty^0$ – значит найти предел $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}$ при соответствующем условии: 1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$.

Неопределенности $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$ раскрываются способом, в котором используется тождество $(f(x))^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.

При раскрытии этих неопределенностей данное выражение предварительно логарифмируют и находят предел его логарифма.

Правило, выражаемое теоремой 15.1, сформулировано швейцарским математиком И. Бернулли (1667 – 1748) и опубликовано в 1696 г. в первом печатном учебнике анализа бесконечно малых, написанном французским математиком Г. Лопиталем (1661 – 1704).

Пример 15.1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

При $x=0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, применяем правило Лопиталя – Бернулли:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1/(1+x)}=2.$$

Пример 15.2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 7x}{\cos x-\cos 3x}$.

Для раскрытия этой неопределенности вида $\frac{0}{0}$ правило Лопиталя – Бернулли необходимо применить дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 7x}{\cos x-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+7\sin 7x}{-\sin x+3\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+49\cos 7x}{-\cos x+9\cos 3x}=$$

$$=\frac{-1+49}{-1+9}=6.$$

Пример 15.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

Здесь имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Преобразуем данную разность $\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$.

При $x=0$ в правой части этого равенства имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя дважды правило Лопиталя – Бернулли, находим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+e^x+e^x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 15.4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$, где $n$ – натуральное число.

Применяя правило Лопиталя – Бернулли $n$ раз, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\dots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{e^x}=0.$$

Следовательно, при неограниченном возрастании аргумента степенная функция растет медленнее показательной функции.

Пример 15.5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$.

При $x=0$ получаем неопределенность вида $0^0$. Обозначим $y=x^{1/\ln(e^x-1)}$ и прологарифмируем это равенство по основанию $e$:

$$\ln y=\frac{1}{\ln(e^x-1)}\ln x=\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}.$$

В правой части этого равенства при $x=0$ имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Применяя дважды правило Лопиталя – Бернулли, находим

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^x/(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=1,\ \lim\limits_{x\to 0}y=e^1=e,\ \lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}=e.$

## 15.2. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции

Необходимое и достаточное условие постоянства функции $y=f(x)$ выражается равенством $y'=0$, т. е.

$$y'=0\Leftrightarrow y=c. \tag{15.3}$$

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в промежутке $(a,b)$, если для любых двух значений $x_1$ и $x_2\in(a,b)$ из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (рис. 15.1, *а*).

Функция $y=f(x)$ называется убывающей в некотором промежутке, если для любых двух значений, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ (рис. 15.1, *б*).

Достаточное условие возрастания (убывания) функции выражается следующей теоремой.

Теорема 15.2. *Если в данном промежутке производная функции положительна, то функция возрастает в этом промежутке; если производная отрицательна, то функция убывает в соответствующем промежутке.*

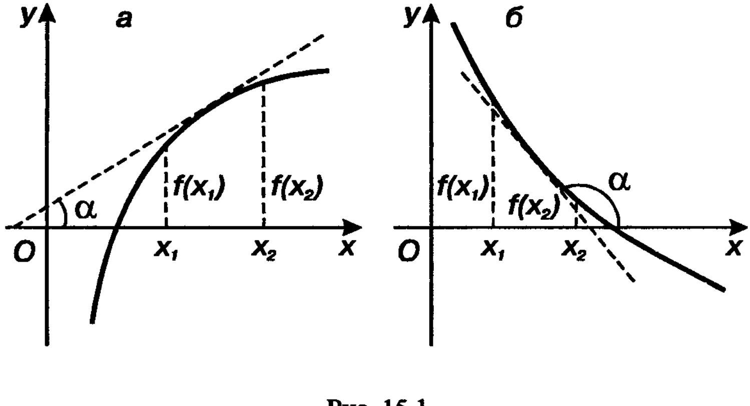


Рис. 15.1

Замечание. Теорема имеет простой геометрический смысл. Если в некотором промежутке касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью $Ox$ острый угол $\alpha$ ($\operatorname{tg}\alpha > 0$), то функция возрастает в этом промежутке (рис. 15.1, *а*). Если касательная к графику образует с осью $Ox$ тупой угол $\alpha$ ($\operatorname{tg}\alpha < 0$), то функция убывает (рис. 15.1, *б*).

Пример 15.6. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Находим производную функции и разлагаем на множители соответствующий квадратный трехчлен: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$, $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.

Если $x < 1$ и $x > 3$, то $f'(x) > 0$; функция возрастает в интервалах $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$. Если $1 < x < 3$, то $f'(x) < 0$; функция убывает в интервале $(1, 3)$.

## 15.3. Экстремум функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $(a, b)$.

Если можно указать такую $\delta$-окрестность точки $x_1$, принадлежащую промежутку $(a, b)$, что для всех $x \in O(x_1, \delta)$, $x \neq x_1$, выполняется неравенство

$$f(x_1) > f(x), \tag{15.4}$$

то $y_1 = f_1(x_1)$ называют максимумом функции $y = f(x)$ (рис. 15.2).

Максимум функции $y = f(x)$ обозначим через $\max f(x)$.

Если можно указать такую $\delta$-окрестность точки $x_2$, принадлежащую промежутку $(a, b)$, что для всех $x \in O(x_2, \delta)$, $x \neq x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_2) < f(x), \tag{15.5}$$

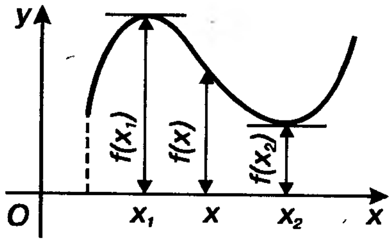

Рис. 15.2

то $y_2 = f(x_2)$ называют минимумом функции $y = f(x)$ (см. рис. 15.2).

Минимум функции $y = f(x)$ обозначим через $\min f(x)$.

Другими словами, максимумом (минимумом) функции $y = f(x)$ называют такое ее значение, которое больше (меньше) всех других значений, принимаемых в точках, достаточно близких к данной и отличных от нее.

Замечание 1. Максимум функции, определяемый неравенством (15.4), называется строгим максимумом; нестрогий максимум определяется неравенством $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Замечание 2. Максимум и минимум функции имеют локальный характер (это наибольшее и наименьшее значения функции в достаточно малой окрестности соответствующей точки); отдельные минимумы некоторой функции могут оказаться больше максимумов той же функции (рис. 15.3). Вследствие этого максимум (минимум) функции называют локальным максимумом (локальным минимумом) в отличие от абсолютного максимума (минимума) – наибольшего (наименьшего) значения в области определения функции.

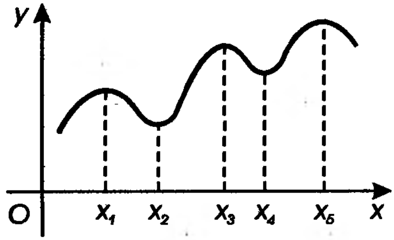


Рис. 15.3

Максимум и минимум функции называются экстремумом. Латинское *extremum* означает «крайнее» значение. Значение аргумента, при котором достигается экстремум, называется точкой экстремума. Необходимое условие экстремума выражается следующей теоремой.

Теорема 15.3. *В точке экстремума дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

Теорема имеет простой геометрический смысл: касательная к графику дифференцируемой функции в соответствующей точке параллельна оси *Ox* (см. рис. 15.2).

Замечание 3. Если $f'(x_0)=0$, то отсюда еще не следует, что $x_0$ – точка экстремума. Например, для функции $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$, $f'(0)=0$, но $x_0=0$ не является точкой экстремума, так как $f(x)>0$ при $x>0$ и $f(x)<0$ при $x<0$ (неравенство (15.4) или (15.5) здесь не выполняется).

Замечание 4. Функция может достигать экстремума также в точке, в которой производная не существует. Например, функция $y=-|x+4|$ не имеет производной в точке $x=-4$, но достигает в ней максимума: $y=0$ при $x=-4$, а для всякой другой точки $y<0$ (рис. 15.4, *а*). Функция $y= =-(1-x^{2/3})^{3/2}$ не имеет конечной производной в точке $x=0$, поскольку $y'=(1-x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}$ при $x=0$ обращается в бесконечность, но в этой точке функция имеет минимум: $f(0)=-1$, $f(x)>-1$ при $x\neq 0$ (рис. 15.4, *б*).

Говорят, что функция $y=f(x)$ меняет знак при переходе через точку $x=x_0$, если $f(x_1)\,f(x_2)<0$ для любых $x_1$ и $x_2$ из некоторой окрестности этой точки, удовлетво-

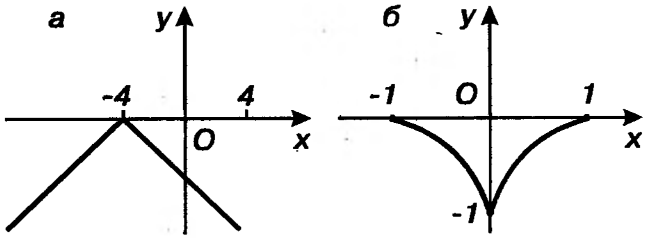


Рис. 15.4

ряющих неравенствам $x_1 < x_0 < x_2$; знак меняется с плюса на минус, если $f(x_1) > 0$, а $f(x_2) < 0$; знак меняется с минуса на плюс, если $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$.

Формулируя теоремы 15.4 и 15.5, будем предполагать, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$.

Теорема 15.4. *Если при $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и меняет знак при переходе через это значение, то $x_0$ является точкой экстремума, причем: 1) $x_0$ – точка максимума, если знак меняется с плюса на минус; 2) $x_0$ – точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс.*

Теорема имеет следующий геометрический смысл: если в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ графика дифференцируемой функции касательная параллельна оси *Ox*, в точках слева от $M_0$ образует тупой угол с осью *Ox*, в точках справа – острый, то $x_0$ – точка минимума (рис. 15.5, *а*); если в точках слева от $M_0$ касательная образует с осью *Ox* острый угол, а в точках справа – тупой, то $x_0$ – точка максимума (рис. 15.5, *б*).

Замечание. Теорема верна и в случае, если $x_0$ – точка непрерывности функции $f(x)$, производная в ней не существует и меняет знак при переходе через эту точку.

Достаточное условие экстремума можно выразить также с помощью второй производной.

Теорема 15.5. *Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то $x_0$ является точкой экстремума, причем: 1) $x_0$ – точка минимума, если $f''(x_0) > 0$; 2) $x_0$ – точка максимума, если $f''(x_0) < 0$.*

Теорема 15.6. *Пусть в точке $x_0$ первые n производные равны нулю, а $(n+1)$-я отлична от нуля и непрерывна в этой точке, тогда: 1) если $(n+1)$ – четное число, то $x_0$ – точка экстремума: точка максимума при $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ и точка минимума при $f^{(n+1)}(x_0) > 0$; 2) если $(n+1)$ – нечетное число, то $x_0$ не является точкой экстремума.*

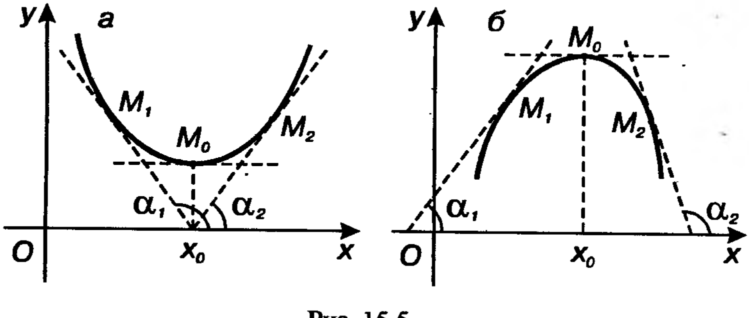


Рис. 15.5

Пример 15.7. Найти экстремумы функции $f(x)=x^4-10x^2+15$.

Поскольку $f'(x)=4x^3-20x=4x(x^2-5)$, то точками, для которых $f'(x)=0$, являются $x_1=-\sqrt{5}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{5}$. Исследуем знак второй производной $f''(x)=12x^2-20$ в этих точках: $f''(-\sqrt{5})=12\cdot 5-20>0$, $f''(\sqrt{5})=$ $=12\cdot 5-20>0$, $f''(0)=-20<0$.

Следовательно, $x_1=-\sqrt{5}$, $x_2=\sqrt{5}$ – точки минимума, $x_2=0$ – точка максимума; $\min f(x)=f(-\sqrt{5})=f(\sqrt{5})=25-10\cdot 5+15=-10$, $\max f(x)=f(0)=15$.

Пример 15.8. Вычислить значения экстремумов функции $f(x)=$ $=x^5-5x^4+5x^3+9$.

Первая производная $f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)$ обращается в нуль при $x_1$=0, $x_2$=1, $x_3$=3. Вторая производная $f''(x)=20x^3-60x^2+30x$ в этих точках принимает соответственно значения $f''(0)=0$, $f''(1)=-10<0$, $f''(3)=90>0$.

Следовательно, $x_2=1$ – точка максимума, $x_3=3$ – точка минимума, причем $\max f(x)=f(1)=10$, $\min f(x)=f(3)=-18$. Чтобы исследовать точку $x_1=0$, обратимся к третьей производной $f'''(x)=60x^2-120x+30$. Поскольку $f'''(0)=30\neq 0$, $n+1=3$, то $x_1=0$ не является точкой экстремума.

Пример 15.9. Найти точки экстремума функции $f(x)=x^4+4x^3+$ $+6x^2+4x+3$.

Первая производная $f'(x)=4x^3+12x^2+12x+4=4(x^3+3x^2+3x+1)$ равна нулю в единственной точке $x=-1$. Находим выражения последующих производных и их значения в критической точке $x=-1$: $f''(x)=12x^2+24x+12$, $f''(-1)=0$, $f'''(x)=24x+24$, $f'''(-1)=0$, $f^{\mathrm{IV}}(x)=24$. Поскольку $f^{\mathrm{IV}}(-1)>0$ и $n+1=4$ (четное число), то $x=-1$ – точка минимума, причем $\min f(x)=f(-1)=2$.

## 15.4. Направления выпуклости, точки перегиба

График функции $y=f(x)$ называется выпуклым вниз (вогнутым вверх) в данном промежутке, если он целиком расположен выше касательной в его произвольной точке (рис. 15.6, *а*).

График функции $y=f(x)$ называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) в данном промежутке, если он целиком расположен ниже касательной в его произвольной точке (рис. 15.6, *б*).

Теорема 15.7. *Если вторая производная функции $y=f(x)$ в данном промежутке положительна, то график ее является выпуклым вниз в этом промежутке; если $f''(x)<0$, то график функции является выпуклым вверх в соответствующем промежутке.*

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется такая его точка $M_0$ (рис. 15.7), в которой выпуклость меняется на вогнутость (по отношению к одному и тому же направлению: вверх или вниз).

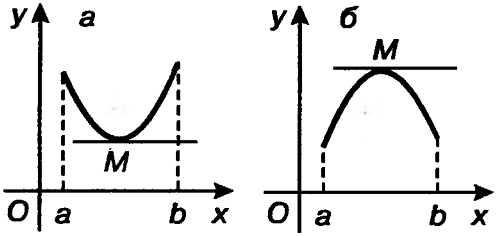


Рис. 15.6

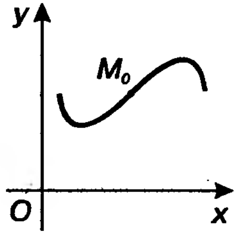


Рис. 15.7

Т е о р е м а 15.8. *Если вторая производная функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ обращается в нуль и меняет знак при переходе через $x_0$, то $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика этой функции.*

П р и м е р 15.10. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Поскольку вторая производная $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$ обращается в нуль при $x = 2$ и меняет знак при переходе через это значение, то $x = 2$ – абсцисса точки перегиба, ордината этой точки $y = f(2) = 3$, т. е. $M(2, 3)$ – точка перегиба.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < 2$ и $f''(x) > 0$ при $x > 2$, то график функции является выпуклым вверх в интервале $(-\infty, 2)$ и выпуклым вниз в интервале $(2, +\infty)$.

## 15.5. Асимптоты

Асимптотой линии называется прямая, к которой неограниченно приближается данная линия, когда ее точка неограниченно удаляется от начала координат.

По виду уравнений относительно выбранной декартовой системы координат различают асимптоты вертикальные (параллельные оси $Oy$) и наклонные (пересекающие ось $Oy$).

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ является бесконечным. Например, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = 8/(x-2)$, так как $\lim\limits_{x \to 2-0} 8/(x-2) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} 8/(x-2) = +\infty$.

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших (по модулю) значениях аргумента; для определенности будем рассматривать положительные значения аргумента.

Прямая

$$y = kx + b \tag{15.6}$$

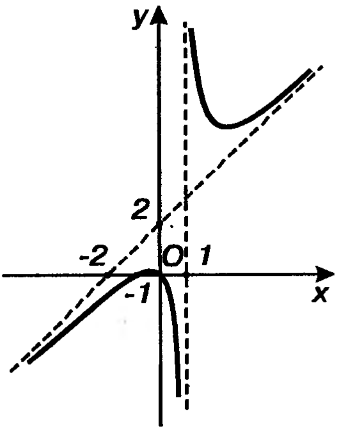


Рис. 15.8

называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если эта функция представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{15.7}$$

где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

График функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту (15.6) тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{15.8}$$

**Пример 15.11.** Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$.

Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой (рис. 15.8), так как $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$. Поскольку $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 1} = x + 2 + \dfrac{2}{x - 1}$ и $\lim\limits_{x \to 1} 2/(x - 1) = 0$, то график функции имеет и наклонную асимптоту $y = x + 2$.

## 15.6. Исследование функций и построение их графиков

Под исследованием функций понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента. На основании исследования функции строят ее график, предварительно изображая характерные точки.

Исследование функций и построение их графиков можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения.
3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания функции.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.
7. Найти асимптоты графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать исходя из конкретных особенностей данной функции.

Если рассматриваемая функция четная или нечетная, то ее достаточно исследовать при положительных значениях аргумента из области ее определения и принять во внимание, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – относительно начала координат.

Отметим также, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой, на которой лежит биссектриса первого координатного угла.

Пример 15.12. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ и построить ее график.

1. Функция не определена лишь при $x=-1$ и $x=1$. Следовательно, область определения состоит из трех интервалов: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$, два из которых являются бесконечными.

2. При стремлении аргумента к концам промежутков области определения соответственно получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1,\quad \lim_{x\to-1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1.$$

3. Находим производные данной функции:

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2},\quad f''(x)=\frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}.$$

Поскольку $f'(x)>0$ при $x<-1$ и $-1<x<0$, то функция возрастает в интервалах $(-\infty,-1)$ и $(-1,0)$. Так как $f'(x)<0$ при $0<x<1$ и $x>1$, то функция убывает в интервалах $(0,1)$ и $(1,+\infty)$.

Поскольку $f'(x)=0$ при $x_0=0$ и $f''(x_0)=f''(0)<0$, то $x_0=0$ – точка максимума.

Других критических точек нет, ибо $f'(x)$ не определена только при $x=-1$ и $x=1$, но в этих точках не определена и сама функция.

4. Вычисляем значение максимума функции $\max f(x)=f(0)=-1$.

5. Поскольку $f''(x)>0$ при $x<-1$ и $x>1$, то график функции является выпуклым вниз в интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$. Так как $f''(x)<0$ при $-1<x<1$, то график функции является выпуклым вверх в интервале $(-1,1)$.

Точек перегиба график данной функции не имеет, ибо вторая производная в нуль нигде не обращается и не определена в тех же точках, в которых не определена и сама функция.

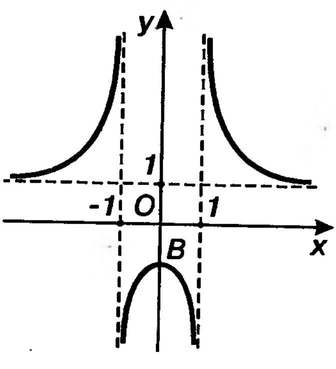

Рис. 15.9

6. График функции не пересекает ось $Ox$, так как уравнение $(x^2+1)/(x^2-1)=0$ не имеет действительных корней. Если $x=0$ (уравнение оси $Oy$), то $y=-1$, в точке $B(0,-1)$ график пересекает ось $Oy$.

7. Из п. 2 следует, что график функции имеет две вертикальные асимптоты $x=-1$ и $x=1$ и горизонтальную асимптоту $y=1$. Последнее вытекает также из того, что $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1+\dfrac{2}{x^2-1}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2-1}=0$.

Заметив еще, что $f(x)>0$ при $x<-1$ и $x>1$, $f(x)<0$ при $-1<x<1$, строим график функции (рис. 15.9).

## 15.7. Задачи на наибольшие и наименьшие значения

Наибольшим значением (абсолютным максимумом) функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называют такое ее значение, которое больше всех других значений, принимаемых функцией на данном отрезке. Чтобы найти наибольшее значение функции на отрезке, необходимо вычислить значения максимумов на этом отрезке, значения функции на концах отрезка, а также во всех точках отрезка, в которых производная не определена; из полученных чисел выбрать самое большое. Аналогично определяется и разыскивается наименьшее значение функции (абсолютный минимум).

В математике, физике, химии, технических и других науках, а также в повседневной жизни часто встречаются задачи на отыскание наибольших и наименьших значений некоторых функций.

Общая схема решения таких задач состоит в следующем. Сначала устанавливается зависимость рассматриваемой величины $y$ от некоторой независимой переменной величины $x$ (обозначения, разумеется, могут быть другими). Из условия задачи определяется промежуток, в котором может изменяться аргумент функции. Функция $y=f(x)$ исследуется с помощью теории, рассмотренной в предыдущих главах.

Пример 15.13. Найти наименьшее значение суммы двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно $a$.

Обозначим искомые числа через $x$ и $y$. По условию $xy=a$, где $a>0$, поэтому $y=a/x$. Сумма этих чисел $s=x+y$, $s(x)=x+a/x$ является функцией переменной $x$; в соответствии с условием $x>0$.

Находим производные функции $s(x)$: $s'(x)=1-a/x^2$, $s''=2a/x^3$.

Приравнивая нулю первую производную, получаем уравнение $1-a/x^2=0$, из которого находим критические точки $x_1=-\sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a}$; первое значение не принадлежит области изменения аргумента данной функции.

Поскольку $s''(\sqrt{a})>0$, то $x=\sqrt{a}$ – точка минимума, причем $\min s(x)=s(\sqrt{a})=2\sqrt{a}$.

**Пример 15.14.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-12x+7$ на отрезке $[0,3]$.

Найдем сначала экстремумы данной функции: $f'(x)=3x^2-12$, $f''(x)=6x$, $f'(x)=0$, $3x^2-12=0$, $x_1=-2$, $x_2=2$. Точка $x_1=-2$ не принадлежит данному отрезку. Так как $f''(2)>0$, то $x=2$ – точка минимума, причем $\min f(x)=f(2)=-9$. Находим значения функции на концах отрезка: $f(0)=7$, $f(3)=-2$. Сравнивая эти три числа, заключаем, что наибольшее значение данной функции на заданном отрезке равно 7, а наименьшее $-9$.

**Пример 15.15.** Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

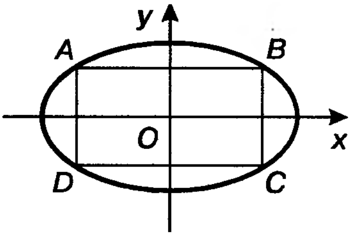

Рис. 15.10

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в данный эллипс (рис. 15.10), с основанием $2u$ и высотой $2v$. Площадь прямоугольника определяется формулой $s=2u\cdot 2v=4uv$, где $v=(b/a)\sqrt{a^2-u^2}$ (получено из уравнения эллипса). Следовательно, $s=(4b/a)\,u\,\sqrt{a^2-u^2}$ – функция переменной $u$. Так как $s'=(4b/a)(a^2-2u^2)/\sqrt{a^2-u^2}$, то $s'=0$ при $u=a/\sqrt{2}$. Поскольку $s'>0$ при $u<a/\sqrt{2}$ и $s'<0$ при $u>a/\sqrt{2}$, то $u=a/\sqrt{2}$ – точка максимума функции $s=s(u)$. Если $u=a/\sqrt{2}$, то $v=(b/a)\sqrt{a^2-u^2}=b/\sqrt{2}$. Следовательно, площадь прямоугольника будет наибольшей, когда его стороны равны $2a/\sqrt{2}$, $2b/\sqrt{2}$ (тогда площадь равна $2ab$).

## 15.8. Дифференциал длины дуги кривой

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана дифференцируемая функция $y=f(x)$, графиком которой является дуга $AB$ (рис. 15.11). Отрезок $[a,b]$ разобьем на $n$ частей точками $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$. Этим точкам будут соответствовать точки $M_1$, $M_2,\ldots,M_{n-1}$ дуги $AB$. Соединим их отрезками прямых. Ломаную $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ называют вписанной в дугу $AB$. Периметр этой ломаной обозначим через $l_n$, т.е.

$$l_n=\sum_{k=1}^{n}|M_{k-1}M_k|\quad (M_0\equiv A,\ M_n\equiv B).$$

Длиной дуги называется предел периметра вписанной в нее ломаной, когда число звеньев $M_{k-1}M_k$ неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} | M_{k-1} M_k |,$$

где $\lambda$ – длина наибольшего звена.

Будем отсчитывать длину дуги от некоторой ее точки, например, от точки $A$; пусть в точке $M(x, y)$ длина дуги $AM$ равна $l$, а в точке $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ длина дуги $AM'$ равна $l+\Delta l$, где $\Delta l$ – длина дуги $MM'$ (рис. 15.12). Очевидно, $l = l(x)$, бесконечно малая дуга линии и стягивающая ее хорда эквивалентны:

$$\lim_{M' \to M} \frac{\overset{\frown}{\Delta M'}}{| MM' |} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta l}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 1.$$

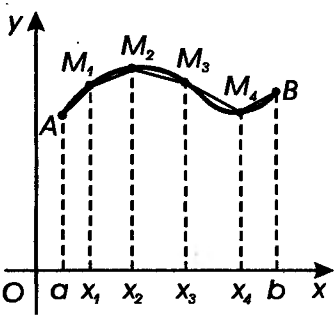


Рис. 15.11

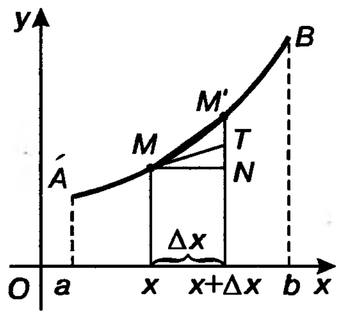


Рис. 15.12

Дифференциал длины дуги плоской кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, выражается формулой

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Эта формула имеет простой геометрический смысл: она выражает теорему Пифагора для бесконечно малого треугольника $MTN$ (рис. 15.12, $dl = MT$, $\Delta l = \overset{\frown}{MM'}$).

Дифференциал дуги пространственной кривой выражается формулой

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

## 15.9. Кривизна плоской кривой

Рассмотрим плоскую линию, определяемую уравнением $y = f(x)$. Проведем касательную к этой линии в ее точке $M_0(x_0, y_0)$; обозначим через $\alpha$ угол, образованный касательной с осью $Ox$ (рис. 15.13). Пусть касательная в точке $M$ образует с осью $Ox$ угол $\alpha+\Delta\alpha$.

Угол $\Delta\alpha$ между касательными в указанных точках называют углом смежности. Можно сказать, что при переходе из точки $M_0$ в точку $M$ данной линии касательная к ней повернулась на угол $\Delta\alpha$, которому будем приписывать соответствующий знак в зависимости от направления поворота.

Средней кривизной дуги $\overset{\frown}{M_0M}$ данной линии называется абсолютное значение отношения угла смежности $\Delta\alpha$ к длине $\Delta l$ дуги $\overset{\frown}{M_0M}$:

$$k_{\text{ср}}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|.$$

Кривизной линии в данной точке $M_0$ называется предел средней кривизны дуги $\overset{\frown}{M_0M}$ при $M\to M_0$:

$$k=\lim_{M\to M_0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|,\quad k=\lim_{\Delta l\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}\right|. \qquad (15.9)$$

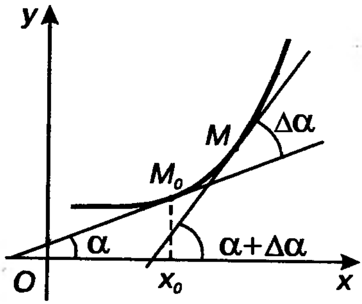


Рис. 15.13

Отметим, что для прямой $k=0$, а для окружности радиуса $R$ кривизна $k==1/R$.

Кривизна линии, заданной уравнением $y=f(x)$, в точке $M_0(x_0, y_0)$ вычисляется по формулам

$$k=\frac{|y''(x_0)|}{(1+(y'(x_0))^2)^{3/2}},\ \text{или}\ k=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y_x'^2)^{3/2}}.\quad \frac{y''_{xx}}{(1+y_x'^2)}^{3/2} \qquad (15.10)$$

Если линия задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то с учетом (14.20) и (14.22) формула (15.10) принимает вид

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}. \qquad (15.11)$$

Кривизна линии, заданной уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ в полярных координатах, вычисляется по формуле

$$k=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho'^2+\rho^2)^{3/2}}. \qquad (15.12)$$

Пример 15.16. Найти кривизну косинусоиды $y=\cos x$ в точке $M_0(0,1)$.

Поскольку $y'=-\sin x$, $y''=-\cos x$, кривизна косинусоиды в ее произвольной точке определяется формулой

$$k=\frac{|-\cos x|}{(1+\sin^2 x)^{3/2}}.$$

При $x=0$ получаем $k=1/(1+0)^{3/2}=1$.

## 15.10. Окружность кривизны. Центр и радиус кривизны. Эволюта и эвольвента

Радиусом кривизны данной лииии в данной ее точке называется величина $R$, обратная кривизне $k$ этой линии в рассматриваемой точке:

$$R = \frac{1}{k};\quad R = \frac{(1+y_x'^2)^{3/2}}{|y_{xx}''|}. \qquad (15.13)$$

На нормали к кривой в точке $M$ отложим отрезок $MC = R$ в сторону вогнутости кривой (рис. 15.14). Точка $C$ называется центром кривизны данной линии в точке $M$. Окружность радиуса $R$ с центром в точке $C$ называется окружностью кривизны этой линии в точке $M$. Очевидно, в данной точке $M$ кривизна кривой и кривизна окружности равны между собой.

Координаты центра кривизны определяются формулами

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad Y = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}. \qquad (15.14)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то формулы (15.14) с учетом равенств (14.20) и (14.22) примут вид

$$X = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'},\quad Y = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}. \qquad (15.15)$$

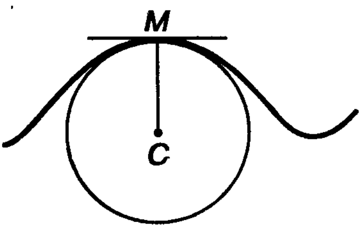


Рис. 15.14

Множество всех центров кривизны данной линии называется ее эволютой. По отношению к своей эволюте исходная линия называется эвольвентой (или разверткой).

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, то уравнения (15.14) можно рассматривать как параметрические уравнения ее эволюты (с параметром $x$).

В случае параметрического задания кривой уравнения (15.15) являются параметрическими уравнениями эволюты (входящие в правые части этих уравнений величины зависят от параметра $t$).

## 15.11. Переменная векторная величина. Вектор-функция скалярного аргумента

Рассмотрим точку $M(x, y, z)$, движущуюся по некоторой линии $\gamma$ в пространстве (рис. 15.15). Радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ точки $M$ будет иметь определенное направление и длину в фиксированный момент времени $t$. С течением времени направление и длина вектора $\mathbf{OM}$ будут изменяться.

Таким образом, здесь имеем дело с переменным вектором **OM** или с переменной векторной величнной

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \tag{15.16}$$

зависящей от времени $t$. Равенство (15.16) называется векторным уравнением движения точки $M$.

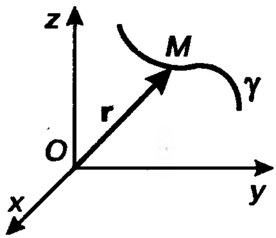

Рис. 15.15

Координаты переменного вектора $\mathbf{OM} = \mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ являются также переменными величинами (скалярными), зависящими от времени $t$:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{15.17}$$

Уравнения (15.17) являются параметрическимн уравнениямн рассматриваемой линии $\gamma$.

Переменная векторная величина $\mathbf{u}$ называется вектор-функцией (или векторной функцией) скалярного аргумента $t$, если каждому значению $t_0 \in T$, где $T$ – некоторое множество действительных чисел, соответствует определенный вектор $\mathbf{u}(t_0)$; в этом случае пишут $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$.

Если $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, то и проекции $u_x, u_y, u_z$ переменного вектора $\mathbf{u}$ на оси декартовой системы координат будут (скалярными) функциями аргумента $t$: $u_x = u_x(t)$, $u_y = u_y(t)$, $u_z = u_z(t)$.

Пример вектор-функции скалярного аргумента дает рассмотренный выше случай радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ точки, движущейся по некоторой линии в пространстве.

Годографом переменной векторной величины называется геометрическое место концов векторов всех ее отдельных значений при условии, что они отложены из одной точки. Годографом постоянного вектора является точка (конец вектора). Годограф вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ представляет собой некоторую линию. Если вектор сохраняет постоянную длину, то его годограф – линия, лежащая на сфере. Годографом радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ движушейся точки $M$ является траектория этой точки.

Пусть $\mathbf{a}$ – некоторый вектор (постоянный) и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ – вектор-функция, определенная в некоторой окрестности точки $t_0$, кроме, быть может, самой точки $t_0$.

Вектор $\mathbf{a}$ называется пределом вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ при $t \to t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\left|\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}\right| < \varepsilon$ для всех $t$, удовлетворяющих неравенству $\left|t - t_0\right| < \delta$, $t \neq t_0$ (рис. 15.16).

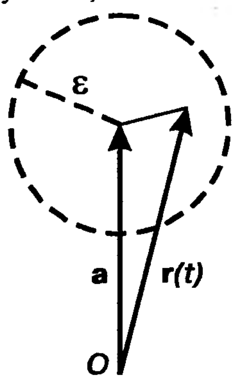

Рис. 15.16

Обозначения предела вектор-функции:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}, \tag{15.18}$$

$\mathbf{r}(t) \to \mathbf{a}$ при $t \to t_0$.

Очевидно, равенство (15.18) эквивалентно равенству

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0. \tag{15.19}$$

Если $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ и $a = (a_1, a_2, a_3)$, то равенство (15.18) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \ \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \ \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3.$$

Если вектор-функции $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$ определены в некоторой окрестности точки $t_0$ и существуют пределы

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{a}, \ \lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{b},$$

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_1(t) \lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \ [\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_1(t), \lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

скалярная функция $f(t)$ имеет предел при $t \to t_0$, то существуют также пределы

$$\lim_{t \to t_0} (\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\lim_{t \to t_0} (f(t)\mathbf{r}_1(t)) = \lim_{t \to t_0} f(t) \lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_1(t),$$

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

$$\lim_{t \to t_0} [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определенная в точке $t_0$ и некоторой ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если $\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$.

Из эквивалентности условий (15.18) и (15.19) следует, что вектор-функция $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ непрерывна в точке $t_0$ тогда и только тогда, когда непрерывны в ней функции $x(t), y(t), z(t)$.

## 15.12. Дифференцирование вектор-функций

Предел отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, называется производной вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$ в точке $v$:

$$\mathbf{u}'(v) = \frac{d\mathbf{u}}{dv} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{u(v + \Delta v) - u(v)}{\Delta v}.$$

Необходимым и достаточным условием существования производной вектор-функции

$$\mathbf{u}(v) = \{x(v), y(v), z(v)\} \tag{15.20}$$

в некоторой точке является дифференцируемость функций $x(v), y(v), z(v)$ в этой точке; причем в данном случае

$$\mathbf{u}'(v)=\{x'(v), y'(v), z'(v)\}.$$

Правила дифференцирования вектор-функции аналогичны правилам обычного дифференциального исчисления. Если $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_1(v)$, $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_2(v)$ – дифференцируемые вектор-функции скалярного аргумента $v$, $\mathbf{c}$ – постоянный вектор, $f(v)$ – дифференцируемая скалярная функция, $k$ – постоянная скалярная величина, $w$ – скалярный аргумент, связанный с $v$ формулой $w=w(v)$, где $w(v)$ – дифференцируемая функция, то эти правила дифференцирования выражаются следующими формулами:

$$1)\ \frac{d\mathbf{c}}{dv}=0,\quad 2)\ \frac{d(\mathbf{u}_1\pm\mathbf{u}_2)}{dv}=\frac{d\mathbf{u}_1}{dv}+\frac{d\mathbf{u}_2}{dv},$$

$$3)\ \frac{d(f\mathbf{u}_1)}{dv}=\frac{df}{dv}\mathbf{u}_1+f\frac{d\mathbf{u}_1}{dv},$$

$$3a)\ \frac{d(k\mathbf{u}_1)}{dv}=k\frac{d\mathbf{u}_1}{dv},\quad 3б)\ \frac{d(f\mathbf{c})}{dv}=\mathbf{c}\frac{df}{dv},$$

$$4)\ \frac{d(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)}{dv}=\mathbf{u}_1\frac{d\mathbf{u}_2}{dv}+\mathbf{u}_2\frac{d\mathbf{u}_1}{dv},\quad 4a)\ \frac{d(\mathbf{c}\mathbf{u}_1)}{dv}=\mathbf{c}\frac{d\mathbf{u}_1}{dv},$$

$$5)\ \frac{d[\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2]}{dv}=\left[\mathbf{u}_1,\frac{d\mathbf{u}_2}{dv}\right]+\left[\frac{d\mathbf{u}_1}{dv},\mathbf{u}_2\right],$$

$$6)\ \frac{d\mathbf{u}_1}{dv}=\frac{d\mathbf{u}_1}{dw}\frac{dw}{dv}.$$

Геометрический смысл производной $\mathbf{u}'(v)\neq 0$: производная вектор-функции в данной точке есть вектор, направленный по касательной к годографу данной вектор-функции в соответствующей точке (рис. 15.17).

Отметим, что при другом значении $v$ получим новое значение $\mathbf{u}'(v)$, т. е. производная вектор-функции также является вектор-функцией. Вектор-функция, имеющая производную, называется дифференцируемой.

Дифференциалом вектор-функции $\mathbf{u}=\mathbf{u}(v)$ называется произведение ее производной на дифференциал аргумента $d\mathbf{u}=\mathbf{u}'(v)\,dv$, где $dv=\Delta v$; отсюда $\mathbf{u}'=d\mathbf{u}/dv$.

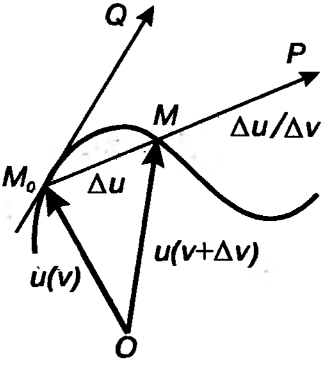


Рис. 15.17

Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \ \mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \ -$$

векторное уравнение движения точки $M$ в пространстве. Приращению $\Delta t$ времени $t$ соответствует приращение $\Delta\mathbf{r} = M_0M$ вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Отношение $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ называется вектором средней скорости, этот вектор направлен по прямой $M_0M$. Предел указанного отношения при $\Delta t \to 0$ называется вектором скорости в момент $t_0$ (или вектором мгновенной скорости), обозначим его через $\mathrm{v}$, т.е.

$$\mathrm{v} = \mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{15.21}$$

Следовательно, вектор мгновенной скорости (или вектор скорости) движущейся точки направлен по касательной к ее траектории. Вектор $\mathbf{r}'(t)$ характеризует направление и быстроту движения точки.

Если для вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в качестве параметра $t$ выбрать длину дуги $s$, отсчитываемой от некоторой точки $M_0$, то производная вектор-функции будет равна единичному вектору, направленному по касательной. Обозначив этот вектор через $\vec{\tau}$, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \vec{\tau}, \ |\vec{\tau}| = 1. \tag{15.22}$$

Второй производной вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$ называется производная от ее производной $\mathbf{u}'(v)$: $\mathbf{u}''(v) = (\mathbf{u}'(v))'$.

Для функции (15.20) имеем

$$\mathbf{u}''(v) = \{x''(v), y''(v), z''(v)\},$$

если существуют вторые производные функций $x(v), y(v), z(v)$.

Аналогично определяются производные более высокого порядка для вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$.

## 15.13. Уравнения касательной к пространственной линии. Кривизна пространственной линии

Рассмотрим пространственную линию $\gamma$ (рис. 15.18), заданную векторно-параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \ \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{15.23}$$

или параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t),$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – дифференцируемые функции переменной $t$. Зафиксируем значение $t_0$ параметра $t$, ему соответствует точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$.

Уравнения касательной к пространственной линии (15.24) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \qquad (15.25)$$

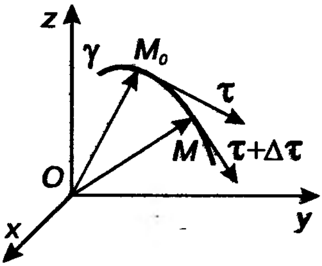


Рис. 15.18

Нормальной плоскостью к пространственной линии в данной ее точке $M$ называется плоскость, проходящая через точку $M$ и перпендикулярная касательной к данной кривой в той же точке.

Нормальная плоскость к линии (15.24) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет уравнение

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0. \qquad (15.26)$$

Если $s$ – длина дуги, то единичный вектор касательной $\vec{\tau}$ к линии $\gamma$ определяется формулой (15.22). Придав аргументу $t$ приращение $\Delta t$, получим точку $M$ линии $\gamma$ и соответствующий вектор касательной $\vec{\tau} + \Delta\vec{\tau}$. Степень изогнутости кривой можно характеризовать скоростью поворота вектора $\vec{\tau}$.

Кривизной $k$ линии $\gamma$ в точке $M_0$ называется модуль производной вектор-функции $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$ в данной точке, т. е.

$$k = \left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|. \qquad (15.27)$$

Это определение равносильно определению кривизны плоской кривой.

Кривизна линии, заданной уравнениями (15.24), выражается формулой

$$k = \frac{|[\mathbf{r}'', \mathbf{r}']|}{|\mathbf{r}'|^3}. \qquad (15.28)$$

Кривизну линии можно выразить в координатах. Поскольку $\mathbf{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $\mathbf{r}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$, $\mathbf{r}''(t) = \{x''(t), y''(t), z''(t)\}$, то

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \qquad (15.29)$$

и

$$k = \frac{\sqrt{(y'z''-y''z')^2 + (x'z''-x''z')^2 + (x'y''-x''y')^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}. \qquad (15.30)$$

Отметим, что формула (15.11) является частным случаем формулы (15.30).

Пример 15.17. Записать уравнения касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\mathbf{r}(t) = 2\sin^2 t\mathbf{i} + 2\cos^2 t\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}$ в точке, для которой $t_0 = \pi/4$.

Перейдем к параметрическим уравнениям данной линии

$$x = 2\sin^2 t, \ \ y = 2\cos^2 t, \ \ z = \sin 2t. \tag{I}$$

Найдем координаты точки $M_0$ $(x_0, y_0, z_0)$: $x_0 = x(t_0) = 2\sin^2(\pi/4) = 2(\sqrt{2}/2)^2 = 1$, $y_0 = y(t_0) = 2\cos^2(\pi/4) = 1$, $z_0 = z(t_0) = \sin 2(\pi/4) = 1$; $M_0(1,1,1)$.

Найдем производные функций (I) и их значения при $t_0 = \pi/4$:

$$x' = 2\cdot 2\sin t\cos t = 2\sin 2t, \ \ y' = -2\sin 2t, \ \ z' = 2\cos 2t; \tag{II}$$

$$x'(t_0) = 2\sin 2(\pi/4) = 2, \ \ y'(t_0) = -2\sin 2(\pi/4) = -2, \ \ z'(t_0) = 0.$$

В соответствии с равенствами (15.25) получаем уравнения касательной к данной линии

$$(x-1)/2 = (y-1)/(-2) = (z-1)/0, \text{ или } (x-1)/2 = (y-1)/(-2), \ \ z-1=0.$$

Подставляя соответствующие значения в формулу (15.26), находим уравнение нормальной плоскости: $1(x-1) - 1(y-1) + 0(z-1) = 0$, или $x - y = 0$.

Для вычисления кривизны линии в точке $M_0(1,1,1)$ нужны значения вторых производных функций (I) при $t_0 = \pi/4$. Так как $x'' = 4\cos 2t$, $y'' = -4\cos 2t$, $z'' = -4\sin 2t$, $x''(t_0) = 0$, $y''(t_0) = 0$, $z''(t_0) = -4$, то по формуле (15.30) находим

$$k = \frac{\sqrt{((-2)(-4) - 0\cdot 0)^2 + (2(-4) - 0\cdot 0)^2 + (2\cdot 0 - 0(-2))^2}}{(2^2 + (-2)^2 + 0^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{128}}{8^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 16.1. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных неопределенных интегралов

Функция $F(x)$, определенная в промежутке $(a, b)$, называется первообразной данной функции $f(x)$ в этом промежутке, если для любого значения $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \tag{16.1}$$

Например, функция $F(x) = x^5$ – первообразная функции $f(x) = 5x^4$ в промежутке $(-\infty, +\infty)$, поскольку $(x^5)' = 5x^4$ для всех $x$; функция $F(x) = \ln x$ – первообразная функции $f(x) = 1/x$ в промежутке $(0, +\infty)$, так как $(\ln x)' = 1/x$; функция $F(x) = \arccos x$ – первообразная функции $f(x) = \; = -1/\sqrt{1-x^2}$ в интервале $(-1, 1)$, ибо $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$.

Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{16.2}$$

где $C$ – произвольная постоянная, также является ее первообразной.

Выражение (16.2), в котором функция $F(x)$ удовлетворяет условию (16.1), определяет множество всех первообразных данной функции $f(x)$ в заданном промежутке $(a, b)$.

Неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{16.3}$$

где $F'(x) = f(x)$. Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла, функция $f(x)$ – подынтегральной функцией, выражение $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением.

Операция нахождения первообразной данной функции называется **интегрированием**.

Неопределенный интеграл обладает следующими основными свойствами.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \tag{16.4}$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{16.5}$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \tag{16.6}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (k = \text{const}, k \neq 0). \tag{16.7}$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем

$$\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{16.8}$$

Таблицу простейших неопределенных интегралов нетрудно получить, воспользовавшись тем, что интегрирование является операцией, обратной дифференцированию. Будем исходить из формулы (16.6), которую запишем следующим образом: если $dF(x) = f(x)\,dx$, то $\int f(x)\,dx = F(x)+C$. Например, поскольку $d(\sin x) = \cos x dx$, то $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Применяя аналогичное рассуждение к каждой из формул основных дифференциалов (см. п. 14.4), получаем следующие простейшие неопределенные интегралы:

1. $\int 1\cdot dx = \int dx = x + C,$

2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$

3. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0),$

5. $\int e^x dx = e^x + C,$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1,$

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$

13. $\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C,$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Отметим, что все указанные формулы справедливы в тех промежутках, в которых определены соответствующие функции. Например, формула 3 справедлива для любого промежутка, не содержащего точку $x = 0$; формула 10 – для интервала $(-1, 1)$ и т. п.

Замечание. В таблице основных интегралов вместо $x$ везде можно записать $u = u(x)$, где $u(x)$ – любая дифференцируемая функция независимой переменной $x$: $\int du = u + C$, $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ и т. д.

При использовании формул этой таблицы для преобразования подынтегрального выражения к виду $f(x)\,dx = g(u)\,du$ применяются простейшие преобразования дифференциалов: 1) $dx = d(x+b)$, где $b = \text{const}$, 2) $dx = = \frac{1}{a} d(ax)$, $a \neq 0$, 3) $dx = (1/a)\,d(ax+b)$, $a \neq 0$, 4) $xdx = (1/2)\,d(x^2+b)$, 5) $\sin x dx = d(-\cos x)$, 6) $\cos x dx = d(\sin x)$, 7) $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$.

Например,

$$\int \sin 5x dx = \int \sin 5x \frac{1}{5} d(5x) = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{\cos 5x}{5} + C,$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

К наиболее важным методам интегрирования относятся следующие: 1) непосредственное интегрирование; 2) метод замены переменной; 3) метод интегрирования по частям.

## 16.2. Непосредственное интегрирование

Непосредственное интегрирование основано на свойстве 4 неопределенного интеграла.

Если функции $f_1(x)$, $f_2(x), \dots, f_n(x)$ имеют первообразные в некотором промежутке, то функция $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\dots+f_n(x)$ также имеет первообразную в том же промежутке, причем

$$\int (f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\dots\int f_n(x)\,dx, \quad (16.9)$$

т.е. неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых.

Пример 16.1. Найти неопределенный интеграл

$$\int (x^3-6x^2+4x-5)\,dx.$$

Пользуясь свойствами неопределенного интеграла, формулой (16.9) и первыми двумя формулами простейших неопределенных интегралов, находим

$$\int (x^3-6x^2+4x-5)\,dx=\int x^3dx-\int 6x^2dx+\int 4xdx-\int 5dx=$$

$$=\int x^3dx-6\int x^2dx+4\int xdx-5\int dx=\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}-5x+C=$$

$$=\frac{x^4}{4}-2x^3+2x^2-5x+C.$$

Замечание. Постоянное слагаемое не записано при нахождении каждого интеграла алгебраической суммы, а лишь один раз, так как сумма произвольных постоянных величин есть величина постоянная.

Пример 16.2. Найти интеграл $\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^3dx.$

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь первыми тремя формулами неопределенных интегралов, получаем

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)^3dx=\int\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int dx+3\int\frac{dx}{x}+$$

$$+3\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^3}=\int dx+3\int\frac{dx}{x}+3\int x^{-2}dx+\int x^{-3}dx=$$

$$=x+3\ln|x|+3\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-2}}{-2}+C=x+3\ln|x|-\frac{3}{x}-\frac{1}{2x^2}+C.$$

Пример 16.3. Найти неопределенный интеграл $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)dx.$

С помощью формул 2 и 3 простейших интегралов (при $\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\alpha=-2$) получаем

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}+x^{-1/2}-x^{-2}\right)dx=\ln|x|+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+C.$$

Пример 16.4. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь формулами интегралов 1 и 8, находим

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$$

Пример 16.5. Найти интеграл $\int\frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x\sin^2 x}.$

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь формулами 9, 8, получаем

$$\int\frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$$

Пример 16.6. Найти интеграл $\int\cos^2(x/2)\,dx.$

Поскольку $\cos^2(x/2)=(1/2)(1+\cos x)$, то

$$\int\cos^2(x/2)\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos x dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

Пример 16.7. Найти интеграл $\int\frac{x^2dx}{x^2+1}.$

Преобразуя подынтегральную функцию, с помощью формул 1 и 11 простейших интегралов, находим

$$\int\frac{x^2dx}{x^2+1}=\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

## 16.3. Метод подстановки

Интегрирование путем введения новой переменной (метод подстановки) основано на формуле

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{16.10}$$

где $x=\varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменой $t$.

**Пример 16.8.** Найти интеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$.

Введем новую переменную $t$ по формуле $x^4=t$, откуда $4x^3dx=dt$, $x^3dx=\frac{1}{4}dt$, $x^8=(x^4)^2=t^2$.

Переходя к новой переменной и используя формулу 10 простейших интегралов, получаем

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\int \frac{\frac{1}{4}dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{4}\arcsin t+C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, находим

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}=\frac{1}{4}\arcsin x^4+C.$$

**Замечание.** Результат можно проверить дифференцированием. Так как

$$\left(\frac{1}{4}\arcsin x^4\right)'=\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-(x^4)^2}}(x^4)'=\frac{4x^3}{4\sqrt{1-x^8}}=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}},$$

то на основании формулы (16.4) заключаем, что пример решен верно.

**Пример 16.9.** Найти интеграл $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

В случае, когда подынтегральное выражение содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, целесообразно применить тригонометрическую подстановку $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$.

Положим $x=a\sin t$, тогда $dx=a\cos t dt$, поэтому

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{a^3\sin^3 t\cdot a\cos t dt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}}=\int \frac{a^3\sin^3 t\cdot a\cos t dt}{a\cos t}=$$

$$=a^3\int \sin^3 t dt=a^3\int \sin^2 t\sin t dt=-a^3\int (1-\cos^2 t)\,d\,(\cos t)=$$

$$=a^3\int (\cos^2 t-1)\,d\,(\cos t)=\frac{a^3\cos^3 t}{3}-a^3\cos t+C.$$

Заметив, что $\sin t=x/a$, $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2/a^2}=\sqrt{(a^2-x^2)}/a$, получим

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{(\sqrt{a^2-x^2})^3}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

**Пример 16.10.** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$.

Применим так называемую подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+\alpha}=t-x$, где $t$ –новая переменная. Переписав это равенство в виде $t=x+\sqrt{x^2+\alpha}$ и взяв дифференциалы от его обеих частей, получим

$$dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx=\frac{\sqrt{x^2+\alpha}+x}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=\frac{tdx}{\sqrt{x^2+\alpha}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\frac{dt}{t},$$

откуда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C.$$

Итак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C. \qquad (16.11)$$

## 16.4. Метод интегрирования по частям

Если $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции от $x$, то из формулы для дифференциала произведения двух функций $d(uv)=udv+vdu$ получается формула интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (16.12)$$

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет собой произведение алгебраической и трансцендентной функций. В качестве $u$ обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве $dv$ – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая $dx$, из которой можно определить $v$ путем интегрирования.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к одной из формул простейших интегралов формула (16.12) применяется несколько раз. Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью интегрирования по частям.

Пример 16.11. Найти интеграл $\int x\cdot 3^x dx$.

Полагаем $x=u$, $3^x dx=dv$, откуда $dx=du$, $v=3^x/\ln 3$ (по формуле 4 простейших интегралов). Подставляя эти выражения в формулу (16.12), получаем

$$\int x\cdot 3^x dx=x\frac{3^x}{\ln 3}-\int\frac{3^x}{\ln 3}dx=\frac{x3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+C.$$

З а м е ч а н и е. Результат можно проверить дифференцированием:

$$\left(\frac{x\cdot 3^x}{\ln 3}-\frac{3^x}{(\ln 3)^2}+C\right)'=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{x\cdot 3^x(\ln 3)}{(\ln 3)}-\frac{3^x\ln 3}{(\ln 3)^2}=x\cdot 3^x.$$

П р и м е р 16.12. Найти интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Полагая $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$, находим $du=dx/(1+x^2)$, $v=x$.

По формуле (16.12) получаем

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

П р и м е р 16.13. Найти интеграл $\int x^2 \sin x dx$.

Полагая $u=x^2$, $dv=\sin x dx = d\,(-\cos x)$, получаем $du=2xdx$, $v=-\cos x$. Следовательно,

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x)-\int(-\cos x)2xdx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx. \qquad \text{(I)}$$

Полученный интеграл снова находится интегрированием по частям. Его можно найти и не вводя явно функции $u$ и $v$:

$$\int x\cos x dx = \int x d\,(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x+\cos x + C_1.$$

Подставляя это выражение для интеграла в формулу (I), находим

$$\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = -x^2\cos x + 2\,(x\sin x+\cos x + C_1)=$$

$$=-x^2\cos x+2\,(x\sin x+\cos x)+C \quad (C=2C_1).$$

П р и м е р 16.14. Найти интеграл $\int (\arccos x)^2 dx$.

Полагая $u=(\arccos x)^2$, $dx=dv$, получаем $v=x$, $du=$ $=-2\arccos x dx/\sqrt{1-x^2}$. По формуле (16.12) имеем

$$\int(\arccos x)^2 dx = x\,(\arccos x)^2+2\int x\arccos x dx/\sqrt{1-x^2}.$$

Этот интеграл также находим методом интегрирования по частям:

$$u=\arccos x,\ dv=xdx/\sqrt{1-x^2},\ du=-dx/\sqrt{1-x^2},\ v=-\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}\arccos x-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + C_1.$$

Следовательно,

$$\int (\arccos x)^2 dx = x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + C.$$

Пример 16.15. Найти интеграл $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$.

Полагая $u = e^{\alpha x}$, $dv = \cos\beta x dx$, находим $du = \alpha e^{\alpha x}dx$, $v = (1/\beta)\sin\beta x$; следовательно,

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = e^{\alpha x}\frac{1}{\beta}\sin\beta x - \int \frac{1}{\beta}\sin\beta x \cdot \alpha e^{\alpha x}dx,$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx. \qquad \text{(I)}$$

Интеграл в правой части равенства (I) также находим методом интегрирования по частям:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \int e^{\alpha x}\frac{1}{\beta}d(-\cos\beta x) = -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \int \frac{1}{\beta}\cos\beta x \cdot \alpha e^{\alpha x}dx =$$

$$= -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx. \qquad \text{(II)}$$

Подставив выражение (II) в равенство (I), получим

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

Перенося интеграл в левую часть, получаем уравнение

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

из которого находим

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + C.$$

Пример 16.16. Найти интеграл $\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx$.

Положим $u = \sqrt{x^2+\alpha}$, $dx = dv$, отсюда $\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = du$, $v = x$. По формуле (16.12) получаем

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Преобразуем интеграл в правой части

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{(x^2+\alpha)-\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \int \frac{(x^2+\alpha)}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx - \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx - \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}},$$

откуда

$$2\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}},\quad \int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right).$$

Так как последний интеграл определяется формулой (16.11), то

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|\right) + C. \qquad (16.13)$$

Пример 16.17. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Применяя метод интегрирования по частям, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Поскольку

$$\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a},$$

то

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a},$$

откуда

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \qquad (16.14)$$

Замечание. Этот интеграл можно найти с помощью подстановки $x = a\sin t$.

## 16.5. Интегрирование рациональных дробей с квадратным трехчленом в знаменателе

Интеграл вида $I_1 = \int dx/(px^2+qx+r)$ путем дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата по формуле $px^2+qx+r = p((x+k)^2 \pm a^2)$ сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C, \tag{16.15}$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C, \tag{16.16}$$

где $u = x+k$.

Интеграл

$$I_2 = \int \frac{mx+n}{px^2+gx+r}dx \tag{16.17}$$

сводится к интегралу (16.15) или (16.16) и интегралу

$$\int \frac{udu}{u^2+\alpha} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\alpha\right|+C. \tag{16.18}$$

При нахождении неопределенного интеграла от рациональной функции с квадратным трехчленом в знаменателе, т. е.

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{P_2(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{ax^2+bx+c},$$

сначала производят деление; в результате получают $R(x)=Q_m(x)+(kx+l)/(ax^2+bx+c)$, где $Q_m(x)$ – многочлен, степень которого ниже степени многочлена $P_n(x)$.

Первообразная от многочлена $Q_m(x)$ находится непосредственно, а от остатка $(kx+l)/(ax^2+bx+c)$ – как интеграл вида (16.17).

Пример 16.18. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x-12}$.

Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и интегрируя на основании формулы (16.16) для случая, когда $u = x+2$, $a = 4$, находим

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-12} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)-4-12} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-16} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-4^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{(x+2)-4}{(x+2)+4}\right|+C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x+6}\right|+C.$$

**Пример 16.19.** Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+34}$.

Выделяя полный квадрат и применяя формулу (16.15) для случая, когда $u=x-3$, $a=5$, находим

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+34}=\int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9+34}=\int \frac{dx}{(x-3)^2+25}=$$

$$=\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+5^2}=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{5}\right)+C.$$

**Пример 16.20.** Найти $\int \frac{(x+8)\,dx}{x^2+4x+20}$.

Преобразуя подынтегральное выражение, получаем

$$\int \frac{(x+8)}{x^2+4x+20}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+16}{x^2+4x+20}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)+12}{x^2+4x+20}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+20}+6\int \frac{dx}{x^2+4x+20}=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+20)'\,dx}{x^2+4x+20}+$$

$$+6\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+4^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+20)+6\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+20)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C.$$

**Пример 16.21.** Найти $\int \frac{x^4+5x^3-3x^2+7x+3}{x^2+1}\,dx$.

Так как $\frac{x^4+5x^3-3x^2+7x+3}{x^2+1}=x^2+5x-4+\frac{2x+7}{x^2+1}$, то

$$\int \frac{x^4+5x^3-3x^2+7x+3}{x^2+1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-4x+\ln(x^2+1)+7\operatorname{arctg}x+C.$$

## 16.6. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим неопределенные интегралы вида $\int R(x)\,dx$, где $R(x)$ – правильная рациональная дробь, т. е.

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}\quad(n<m).$$

Нахождение указанных интегралов основано на разложении рациональной дроби в сумму элементарных дробей, т. е. дробей вида

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

где $\alpha, \beta$ – натуральные числа; $a, p, q, A, B, C$ – действительные числа; $p^2/4-q<0$ (корни трехчлена являются комплексными).

Это разложение определяется теоремой 8.5 (см. п. 8.7).

Пример 16.22. Найти $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}\,dx.$

Так как $\frac{7x^2-x+1}{x^3+1}=\frac{3}{x+1}+\frac{4x-2}{x^2-x+1}$ (см. пример 8.18), то

$$\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}\,dx=3\int \frac{d\,(x+1)}{x+1}+2\int \frac{(x^2-x+1)'\,dx}{x^2-x+1}=$$

$$=3\ln|x+1|+2\ln\left|x^2-x+1\right|+C.$$

Пример 16.23. Найти $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}\,dx.$

Поскольку

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}=\frac{1}{3\,(x+2)}+\frac{2}{3\,(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(см. пример 8.19), то

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{d\,(x+2)}{x+2}+\frac{2}{3}\int \frac{d\,(x-1)}{x-1}+\int \frac{d\,(x-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\,(x+2)\,(x-1)^2\,\right|-\frac{1}{x-1}+C.$$

Пример 16.24. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}.$

Разлагая знаменатель на множители, получаем $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-$ $-1=x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)\,(x^4+2x^2+1)=(x-1)\,(x^2+1)^2$. В данном случае разложение в сумму элементарных дробей должно иметь вид

$$\frac{1}{(x-1)\,(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

откуда

$$1=A\,(x^2+1)^2+(Bx+C)\,(x-1)\,(x^2+1)+(Dx+E)\,(x-1).$$

Полагая в этом тождестве $x=1$, находим $1=A\cdot 4$, т. е. $A=1/4$. Придавая $x$ соответственно значения $x=0$, $x=-1$, $x=i=\sqrt{-1}$, получаем уравнения

$1=A-C-E;$ $\quad 1=4A+4B-4C+2D-2E;$ $\quad 1=(Di+E)(i-1),$ или $1=$ $=-D-Di+Ei-E,$ т. е. $1=-D-E+(E-D)\,i,$ откуда $1=-D-E,$ $E-D=0.$

Решив полученные уравнения, найдем $B=-1/4$, $C=-1/4$, $D=-1/2$, $E=-1/2$.
Таким образом,

$$\int\frac{dx}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x+1}=\int\left(\frac{1}{4\,(x-1)}-\frac{x+1}{4\,(x^2+1)}-\frac{x+1}{2\,(x^2+1)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\,(x-1)}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln(x^2+1)-$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\int\frac{d\,(x^2+1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4\cdot 2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}-$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2}+C=\frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1-x}{4\,(x^2+1)}+C.$$

З а м е ч а н и е. Интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ найден с помощью подстановки $x=\operatorname{tg}t$. Так как $dx=dt/\cos^2 t$, то

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{dt/\cos^2 t}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+C$$

$$\left(\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t=2\operatorname{tg}t\cos^2 t=2x\frac{1}{1+x^2}\right).$$

## 16.7. Интегрирование простейших иррациональных функций

Неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$ выделением полного квадрата в подкоренном выражении и введением новой переменной $u=x+b$ в зависимости от знака $A$ приводится к одному из интегралов:

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C, \qquad (16.19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2+\alpha} \right| + C. \qquad (16.20)$$

Неопределенный интеграл $\int \sqrt{Ax^2+Bx+C}dx$ в зависимости от знака $A$ приводится к одному из интегралов:

$$\int \sqrt{u^2+\alpha}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln\left| u+\sqrt{u^2+\alpha} \right| + C, \qquad (16.21)$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C \qquad (16.22)$$

(см. формулы (16.13) и (16.14)).

Неопределенный интеграл $\int \frac{ax+b}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$ приводится к интегралам вида

$$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C, \qquad (16.23)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int (f(x))^{-1/2}df(x) = \frac{(f(x))^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{f(x)} + C. \qquad (16.24)$$

Интеграл вида

$$I = \int R\left( x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k} \right)dx, \qquad (16.25)$$

где $R$ – рациональная функция и $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ – целые числа, с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \qquad (16.26)$$

где $n$ – наименьшее общее кратное чисел $q_1, q_2, \ldots, q_k$, приводится к интегралу от рациональной функции.

Интеграл от дифференциального бинома

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \qquad (16.27)$$

где $m, n, p$ – рациональные числа; $a, b$ – постоянные, отличные от нуля, сводится к интегралу от рациональной функции в трех случаях:

1) когда $p$ – целое число, – разложением на слагаемые по формуле бинома Ньютона при $p > 0$; подстановкой $x = t^N$, где $N$ – общий знаменатель дробей $m$ и $n$;

2) когда $(m+1)/n$ – целое число, – подстановкой $a + bx^n = t^s$, где $s$ – знаменатель дроби $p$;

3) когда $(m+1)/n + p$ – целое число, – подстановкой $ax^{-n} + b = t^s$.

Пример 16.25. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}$.

Так как $3x^2+6x+4=3(x^2+2x+1)-3+4=3(x+1)^2+1=3((x+1)^2+\ 1/3)$, то, положив $x+1=u$, по формуле (16.20) получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+4}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1/3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+1/3}\right|+C.$$

Пример 16.26. Найти $\int\sqrt{x^2+6x+13}dx$.

Поскольку $x^2+6x+13=(x^2+6x+9)+4=(x+3)^2+4$, то, полагая $u=\ =x+3$, по формуле (16.21) находим

$$\int\sqrt{x^2+6x+13}dx=\frac{x+3}{2}\sqrt{(x+3)^2+4}+\frac{4}{2}\ln\left|(x+3)+\sqrt{(x+3)^2+4}\right|+C=$$

$$=\frac{x+3}{2}\sqrt{x^2+6x+13}+2\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+C.$$

Пример 16.27. Найти $\int\frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}}dx$.

Поскольку $(5+8x-4x^2)'=8-8x=-8(x-1)$, $9-4x=-4x+4+5=-4(x-1)+5$, $5+8x-4x^2=-4((x^2-2x+1)-1)+5=-4(x-1)^2+9=4\times\ \times(9/4-(x-1)^2)$, то на основании формул (16.19) и (16.24) получаем

$$\int\frac{9-4x}{\sqrt{5+8x-4x^2}}dx=\int\frac{-4(x-1)+5}{\sqrt{5+8x-4x^2}}dx=\int\frac{-4(x-1)\,dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}+$$

$$+\int\frac{5dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{-8(x-1)\,dx}{\sqrt{5+8x-4x^2}}+5\int\frac{d(x-1)}{2\sqrt{9/4-(x-1)^2}}=$$

$$=\sqrt{5+8x-4x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2(x-1)}{3}+C.$$

Пример 16.28. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

Перейдем к новой переменной $t$ по формуле $x-1=1/t$, откуда $dx=$ $=-dt/t^2$, $x^2-2=(1+2t-t^2)/t^2$.

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=-\int\frac{d(t-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(t-1)^2}}=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Возвращаясь к переменной $x$, находим

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=\arcsin\frac{\sqrt{2}(x-2)}{2(x-1)}+C.$$

Пример 16.29. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

Это интеграл вида (16.25), причем $a=1$, $b=3$, $c=0$, $d=1$, $p_1/q_1= \ =1/2$, $p_2/q_2=2/3$, $n=6$. Подстановка (16.26) принимает вид $x+3=t^6$. Отсюда следует, что $x=t^6-3$, $dx=6t^5dt$, $\sqrt{(x+3)}=(x+3)^{1/2}=(t^6)^{1/2}=t^3$, $\sqrt[3]{(x+3)^2}=t^4$, $t=(x+3)^{1/6}$, $t^2=(x+3)^{1/3}$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}=\int \frac{6t^5dt}{t^3+t^4}=6\int \frac{t^5dt}{t^3(1+t)}=6\int \frac{t^2dt}{1+t}=$$

$$=6\int \frac{(t^2-1)+1}{1+t}\,dt=6\int (t-1)\,dt+6\int \frac{d\,(1+t)}{1+t}=$$

$$=6\frac{t^2}{2}-6t+6\ln|1+t|+C=3\,(x+3)^{1/3}-6\,(x+3)^{1/6}+\ 6\ln\left|\ 1+(x+3)^{1/6}\right|+C.$$

Пример 16.30. Найти $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Переписав интеграл в виде $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx$ и сравнив с интегралом (16.27), заключаем, что $m=-2/3$, $n=1/3$, $p=1/2$. Так как $(m+1)/n= =(-2/3+1)/(1/3)=1$ есть целое число, то имеем второй случай интегрируемости дифференциального бинома. Подстановка $a+bx^n=t^s$ в данном случае примет вид $(1+x^{1/3})=t^2$, откуда $x^{1/3}=t^2-1$, $(1/3)\,x^{-2/3}dx=2tdt$, $x^{-2/3}dx= \ =6tdt$. Подставив эти выражения в интеграл, получим

$$\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx=\int (1+x^{1/3})^{1/2}x^{-2/3}dx=\int t\cdot 6tdt=6\int t^2dt=$$

$$=6\frac{t^3}{3}+C=2\,(1+x^{1/3})^{3/2}+C.$$

## 16.8. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

Неопределенные интегралы вида

$$\int \sin ax\sin bxdx,\quad \int \cos ax\cos bxdx,\quad \int \sin ax\cos bxdx \tag{16.28}$$

с помощью тригонометрических формул

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

приводятся к интегралам

$$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C; \quad \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C.$$

Неопределенные интегралы вида $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$, где $m$ и $n$ – натуральные числа, находятся с помощью тригонометрических формул $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$, $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, $\sin x \cos x = (\sin 2x)/2$, если $m$ и $n$ четные.

Если хотя бы одно из чисел $m$ и $n$ – нечетное, то от нечетной степени отделяется множитель и вводится новая переменная. В частности, если $n = 2k+1$, то

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k d(\sin x) = \int u^m (1-u^2)^k du.$$

Последний интеграл находится непосредственно (как интеграл от алгебраического многочлена).

Неопределенный интеграл $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, путем введения новой переменной по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \tag{16.29}$$

приводится к интегралу

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\, dt,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция переменной $t$.

П р и м е р 16.31. Найти интеграл $\int \sin 14x \sin 6x dx$.

Это первый из интегралов типа (16.28), в данном случае $a = 14$, $b = 6$.

Применяя первую из приведенных выше тригонометрических формул, преобразуем подынтегральную функцию и интегрируем:

$$\int \sin 14x \sin 6x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 20x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 8x dx - \frac{1}{2}\int \cos 20x dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{40}\sin 20x + C.$$

Пример 16.32. Найти интеграл $\int \cos 10x \cos 7x dx$.

Преобразуя подынтегральное выражение, находим

$$\int \cos 10x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x + \cos 17x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 3x dx + \frac{1}{2}\int \cos 17x dx = \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin 17x}{34} + C.$$

Пример 16.33. Найти $\int \sin^6 x \cos^5 x dx$.

Поскольку одна из степеней является нечетной ($n = 5$), то интеграл можно найти следующим образом:

$$\int \sin^6 x \cos^5 x dx = \int \sin^6 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^6 x\,(1 - \sin^2 x)^2\, d\,(\sin x) =$$

$$= \int \sin^6 x\,(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\, d\,(\sin x) = \int (\sin^6 x - 2\sin^8 x + \sin^{10} x)\, d\,(\sin x) =$$

$$= \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2\sin^9 x}{9} + \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

Пример 16.34. Найти $\int \frac{5 - \sin x + 3\cos x}{3 + \sin x - 3\cos x}\, dx.$

Преобразуя подынтегральное выражение, получаем

$$\int \frac{5 - \sin x + 3\cos x}{3 + \sin x - 3\cos x}\, dx = \int \frac{8 - (3 + \sin x - 3\cos x)}{3 + \sin x - 3\cos x}\, dx =$$

$$= 8\int \frac{dx}{3 + \sin x - 3\cos x} - \int dx.$$

Чтобы найти первый интеграл, применим подстановку (16.29):

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x - 3\cos x} = \int \frac{2/(1+t^2)}{3 + 2t/(1+t^2) + 3\,(t^2 - 1)/(1+t^2)}\, dt = \int \frac{dt}{3t^2 + t} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{3t+1}\right) dt = \ln|t| - \ln|3t+1| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{3\operatorname{tg}(x/2) + 1}\right| + C_1.$$

Следовательно,

$$\int \frac{5 - \sin x + 3\cos x}{3 + \sin x - 3\cos x}\, dx = 8\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{3\operatorname{tg}(x/2) + 1}\right| - x + C.$$

## Глава 17

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 17.1. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства

**Понятие определенного интеграла.** Пусть дана функция $y=f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, где $a<b$. Отрезок $[a,b]$ точками $a=x_0<$ $<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ разобьем на $n$ элементарных отрезков $[a,x_1]$, $[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},b]$, длины которых обозначим через $\Delta x_k$, т. е. $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots,n,\ x_0=a,\ x_n=b)$. В каждом из элементарных отрезков $[x_{k-1},x_k]$ выберем произвольно одну точку $\xi_k$, значение функции в этой точке $f(\xi_k)$ умножим на длину отрезка $\Delta x_k$, получим произведение $f(\xi_k)\,\Delta x_k$. Составим сумму всех таких произведений

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{17.1}$$

Сумма (17.1) называется интегральной суммой для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Обозначим через $\lambda$ длину наибольшего из элементарных отрезков $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$, т. е. $\lambda=\max\Delta x_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Число $S$ называется пределом интегральной суммы (17.1), если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать такое число $\delta>0$, что при $\lambda<\delta$ выполняется неравенство $\left|S_n-S\right|<\varepsilon$ независимо от выбора точек $\xi_k$ на отрезках $[x_{k-1},x_k]$.

Определенным интегралом от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется конечный предел ее интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю. Определенный интеграл обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читается: определенный интеграл от $a$ до $b$); $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $x$ – переменной интегрирования, $a$ – нижним, $b$ – верхним пределами интегрирования.

Следовательно, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{17.2}$$

Из определения следует, что величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \cdots = \int_a^b f(u)\,du. \tag{17.3}$$

Функция, для которой существует предел суммы (17.1), называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Очевидно, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она и ограничена на этом отрезке. Обратное утверждение не верно: существуют ограниченные функции, не являющиеся интегрируемыми. К ним относится функция Дирихле, равная единице в рациональных точках и нулю – в иррациональных. На любом отрезке $[a, b]$ эта функция ограничена, но не является интегрируемой на нем.

Соответственно по определению

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{17.4}$$

где $f(x)$ – любая функция;

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{17.5}$$

где $f(x)$ – функция, интегрируемая на отрезке $[b, a]$ $(b < a)$.

Справедливы следующие утверждения.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она и интегрируема на этом отрезке.

3. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то она интегрируема на $[a, b]$.

**Геометрический смысл определенного интеграла.** Если $a < b$, $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = S,$$

т.е. определенный интеграл от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$, $x = b$, снизу – отрезком оси $Ox$ (рис. 17.1).

Если $a < b$ и $f(x) \leq 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = -S,$$

т. е. определенный интеграл от функции, принимающей неположительные значения, равен площади соответствующей криволинейной трапеции, взятой со знаком минус (рис. 17.2).

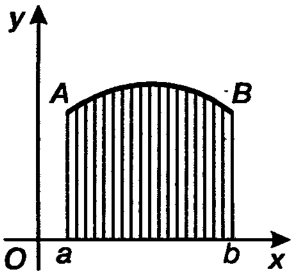


Рис. 17.1

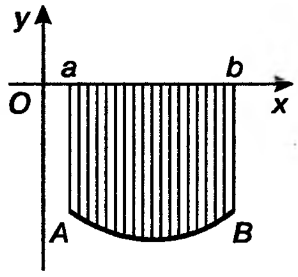


Рис. 17.2

Если $a<b$ и $f(x)$ меняют знак на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций (рис. 17.3):

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_1 - S_2 + S_3.$$

**Основные свойства определенного интеграла.** Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

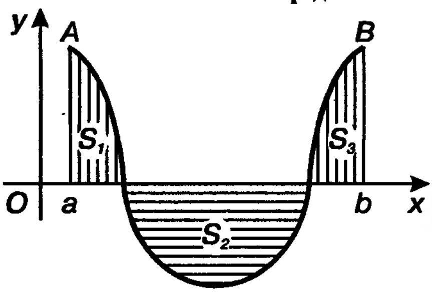


Рис. 17.3

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$, то она интегрируема на двух отрезках, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

при любом расположении точек $a,b,c$.

2. Если функция $f\,(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $k\,f(x)$, где $k=\text{const}$, также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма и разность также интегрируемы на этом отрезке, причем

$$\int_a^b (f(x)\pm\varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, и $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

5. Если функции $f(x)$, $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, где $a<b$, и $f(x)\leq\varphi(x)$ для всех $x\in[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, где $a<b$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

## 17.2. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a, b]$. Если $x\in[a, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема также на любом отрезке $[a, x]$. Предположим, что $x$ меняется на отрезке $[a, b]$, тогда на этом отрезке определена функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \tag{17.6}$$

(Переменную интегрирования обозначили буквой $t$, переменный верхний предел – буквой $x$).

Теорема 17.1. *Если функция $y=f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция* (17.6) *непрерывна на этом отрезке.*

Теорема 17.2. *Если подынтегральная функция непрерывна, то производная определенного интеграла с переменным верхним пределом существует и равна значению подынтегральной функции для этого предела, т.е.*

$$\Phi'(x)=f(x), \text{ или } \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x).$$

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то при любом $x$*

$$\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'_x = -f(x), \text{ или } \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x).$$

С л е д с т в и е 2. *Определенный интеграл с переменным верхним пределом является одной из первообразных для непрерывной подынтегральной функции.*

Другими словами, для любой непрерывной функции существует первообразная.

З а м е ч а н и е. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования используется при определении многих функций. К таким функциям относятся, например:

1) $\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (интегральный синус);

2) $\operatorname{Ci}(x)=-\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ (интегральный косинус);

3) $\operatorname{li}(x)=\int\limits_{-0}^x \frac{dt}{\ln t}$ (интегральный логарифм);

4) $\operatorname{Ei}(x)=\int\limits_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt$ (интегральная показательная функция);

5) $S(x)=\int\limits_0^x \sin t^2 dt,\ C(x)=\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ (интегралы Френеля);

6) $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ (интеграл вероятностей).

Эти функции не являются элементарными; первообразные указанных подынтегральных функций не выражаются через элементарные функции.

Все приведенные функции хорошо изучены, для них составлены таблицы значений, эти функции находят широкое применение.

Связь между определенными и неопределенными интегралами выражает следующая теорема Ньютона – Лейбница, называемая основной теоремой интегрального исчисления.

Т е о р е м а 17.3. *Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной для верхнего и нижнего предела интегрирования:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a), \tag{17.7}$$

*где* $F'(x)=f(x)$.

Формула (17.7) называется формулой Ньютона – Лейбница; ее можно переписать в виде

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b,\ \ F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

левая часть второй формулы читается так: «двойная подстановка от $a$ до $b$ для функции $F(x)$».

Пример 17.1. Вычислить интеграл $\int_2^4 (32+28x-9x^2)\,dx.$

Принимая во внимание свойства определенного интеграла, получаем

$$\int_2^4 (32+28x-9x^2)\,dx = \int_2^4 32dx + \int_2^4 28xdx - \int_2^4 9x^2dx =$$

$$= 32\int_2^4 dx + 28\int_2^4 xdx - 9\int_2^4 x^2dx = 32x\,\Big|_2^4 +$$

$$+28\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 - 9\frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = 32(4-2)+14(4^2-2^2)-3(4^3-2^3)=64.$$

Пример 17.2. Вычислить интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi.$

Переменная интегрирования обозначена буквой $\varphi$. Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\cos^4\varphi = \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi).$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi + \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2\varphi d\,(2\varphi) + \frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$\frac{1}{4}\varphi\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{8}\varphi\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{32}\sin 4\varphi\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{8}\pi.$$

## 17.3. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Теорема 17.4. *Если выполнены условия: 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) отрезок $[a, b]$ является множеством значений функции $x=\varphi(t)$, определенной на отрезке $\alpha \le t \le \beta$ и имеющей на нем непрерывную производную; 3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{17.8}$$

Теорема 17.5. *Если функции* $u = u(x)$, $v = v(x)$ *имеют непрерывные производные на отрезке* $[a, b]$, *то справедлива формула*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{17.9}$$

Пример 17.3. Вычислить интеграл $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$.

Введем новую переменную по формуле $t = \sqrt{2-x}$, из которой получим $t^2 = 2-x$, $x = 2-t^2$, $dx = -2t\,dt$.

Вычислим новые пределы интегрирования с помощью формулы $t = \sqrt{2-x}$. Поскольку при $x = 1$ $t = \sqrt{2-1} = 1$, то $\alpha = 1$; далее, при $x = 2$ $t = 0$, поэтому $\beta = 0$.

Формула (17.8) принимает вид

$$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \int_1^0 (2-t^2)\,t\,(-2t\,dt) = \int_1^0 (2t^4 - 4t^2)\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл, находим

$$\int_1^0 (2t^4 - 4t^2)\,dt = 2\int_1^0 t^4\,dt - 4\int_1^0 t^2\,dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_1^0 - 4\frac{t^3}{3}\Big|_1^0 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{14}{15}.$$

Следовательно, $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = 14/15$.

Пример 17.4. Вычислить интеграл $\int_{\sqrt{2}}^2 x^2\sqrt{8-2x^2}\,dx$.

Введем новую переменную по формуле $x = 2\sin t$. Поскольку $dx = 2\cos t\,dt$, $t = \arcsin(x/2)$, $t_1 = \pi/4$ при $x = \sqrt{2}$, $t_2 = \pi/2$ при $x = 2$, то

$$\int_{\sqrt{2}}^2 x^2\sqrt{8-2x^2}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\sin t)^2\sqrt{8-2(2\sin t)^2}\,2\cos t\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{8-8\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\sqrt{2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\sqrt{2}\sin^2 2t\,dt = 2\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = 2\sqrt{2}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

П р и м е р 17.5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x \sin(x/2)\, dx$.

Интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_0^{2\pi} x \sin\frac{x}{2}\, dx = -2\int\limits_0^{2\pi} x d\left(\cos\frac{x}{2}\right) = -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+2\int\limits_0^{2\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx = -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} + 4\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

П р и м е р 17.6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt$.

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt = -\int\limits_0^{\pi/2} t^2 d(\cos t) = -t^2\cos t\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} 2t\cos t dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} t d(\sin t) = 2t\sin t\Big|_0^{\pi/2} - 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin t dt = \pi + 2\cos t\Big|_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

## 17.4. Оценка определенного интеграла. Теорема о среднем

Т е о р е м а 17.6. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, и для всех $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $m \le f(x) \le M$, то*

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\, dx \le M(b-a). \qquad (17.10)$$

С помощью неравенств (17.10) можно оценить определенный интеграл, т.е. указать границы, между которыми заключено его значение. Неравенства (17.10) выражают оценку определенного интеграла.

Т е о р е м а 17.7. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и для всех $x\in[a,b]$ выполняются неравенства $m \le f(x) \le M$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \mu(b-a), \qquad (17.11)$$

*где $m \le \mu \le M$.*

Эта теорема называется теоремой о среднем.

Замечание. В случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, равенство (17.11) принимает вид

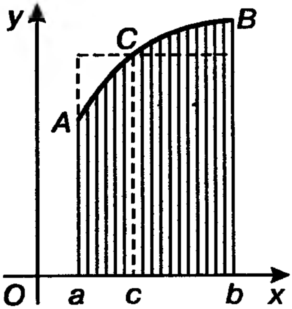

Рис. 17.4

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \qquad (17.12)$$

где $c \in [a, b]$.

Число $\mu = f(c)$, определяемое формулой (17.12), называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Равенство (17.12) имеет следующий геометрический смысл: площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной линией $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0$), равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной ординате некоторой точки этой линии (рис. 17.4).

Пример 17.6. Оценить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+(9/16)\sin^2 t}}$.

Поскольку подынтегральная функция $f(t) = 1\big/\sqrt{1+(9/16)\sin^2 t}$ в данном промежутке $[0, \pi]$ имеет наименьшее значение $m = 4/5$ и наибольшее $M = 1$, то в соответствии с формулой (17.10) получаем

$$\frac{4}{5}\pi \le \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+(9/16)\sin^2 t}} \le \pi.$$

## 17.5. Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла предполагалось, что выполняются условия: 1) пределы интегрирования $a$ и $b$ являются конечными; 2) подынтегральная функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$. В этом случае определенный интеграл называют собственным. Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интеграл называют несобственным.

**Интегралы с бесконечными пределами.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при любом $x \ge a$. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом:

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (17.13)$$

Предположим, что при $b \to +\infty$ функция (17.13) имеет конечный предел; этот предел называется сходящимся несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$ и обозначается так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (17.14)$$

Если предел (17.14) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл называется расходящимся.

Геометрически несобственный интеграл от неотрицательной функции выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева – отрезком прямой $x=a$, снизу – осью $Ox$ (рис. 17.5); в случае сходящегося интеграла эта площадь является конечной, в случае расходящегося – бесконечной.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)) = F(+\infty)-F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

и несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где $c$ – любая точка из интервала $(-\infty, +\infty)$.

Теорема 17.8. *Если при* $x \ge a$ *выполнены неравенства* $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ *и* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, то сходится и* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, *причем* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$; *если* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ *расходится, то расходится и* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Геометрическое значение этой теоремы иллюстрируется на рис. 17.6.

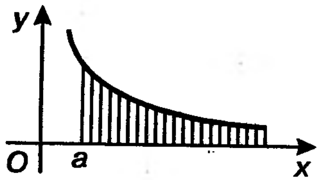


Рис. 17.5

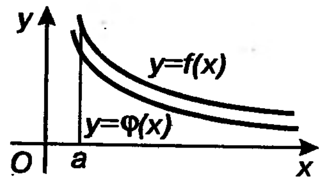


Рис. 17.6

Теорема 17.9. *Если в промежутке* $(a,+\infty)$ *функция* $f(x)$ *меняет знак и* $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *сходится, то сходится также* $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$.

**Интегралы от неограниченных функций.** Если функция $y=f(x)$ неограниченна в окрестности точки $c$ отрезка $[a,b]$ и непрерывна при $a\le x<c$ и $c<x\le b$, то несобственный интеграл от этой функции определяется формулой

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx, \tag{17.16}$$

где $\varepsilon>0$, $\eta>0$. В случае $c=b$ или $c=a$ получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx, \tag{17.17}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^b f(x)\,dx. \tag{17.18}$$

Несобственные интегралы (17.17) и (17.18) называются сходящимися, если существует конечный предел соответствующего определенного интеграла; в противном случае интегралы называются расходящимися.

Несобственный интеграл (17.16) называется сходящимся, если существуют оба предела в правой части.

Для интегралов от неограниченных функций справедливы теоремы, аналогичные теоремам 17.8 и 17.9. Они применяются для исследования вопроса о сходимости несобственных интегралов и оценки их значений.

Пример 17.7. Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$.

Преобразуем подынтегральную функцию, выделив в знаменателе полный квадрат:

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}.$$

Применяя формулы (16.15) и (17.15), находим

$$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{d\,(x+1/2)}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}\Bigg|_{-1}^{+\infty}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}\frac{-1+1/2}{\sqrt{3}/2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Итак несобственный интеграл сходится и его значение равно $4\pi/3\sqrt{3}$ ($\approx$2,4184).

**Пример. 17.8.** Исследовать при каких значениях $\alpha > 0$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(b > a)$.

Если $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln(b-a) - \ln(a+\varepsilon-a)) = \ln(b-a) - \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Следовательно, при $\alpha = 1$ несобственный интеграл расходится. Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b (x-a)^{-\alpha} d(x-a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha} (x-a)^{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}((b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

Этот предел будет бесконечным при $1-\alpha<0$, или $\alpha>1$; он будет равен постоянной $(b-a)^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ при $1-\alpha>0$, или $\alpha<1$. Итак, данный интеграл сходится при $\alpha<1$.

**Пример 17.9.** Исследовать, сходится ли несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^8}}$.

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{1}{\sqrt{x^8(1+1/x^8)}} = \frac{1}{x^4\sqrt{1+1/x^8}} < \frac{1}{x^4}$$

и

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{3},$$

то сходится и данный интеграл.

**Пример 17.10.** Исследовать, при каких $\alpha$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Если $\alpha \neq 1$, то

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{-\alpha+1} - 1).$$

Следовательно,

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \text{ при } \alpha > 1, \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty \text{ при } \alpha < 1.$$

В случае $\alpha = 1$ $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \ln x \Big|_1^\infty = \infty$. Итак несобственный интеграл сходится при $\alpha > 1$.

## 17.6. Интегралы Эйлера

Гамма-функция, или эйлеров интеграл второго рода, определяется формулой

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx. \quad (17.19)$$

Этот интеграл является несобственным, так как верхний предел бесконечен; кроме того, при $p-1<0$ подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x=0$. Интеграл (17.19) сходится при $p>0$. Каждому положительному значению $p$ соответствует вполне определенное значение $\Gamma(p)$. Функция $\Gamma(p)$ не является элементарной.

С помощью метода интегрирования по частям можно доказать, что

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (17.20)$$

При $p=1$ интеграл находится непосредственно:

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Подставляя в формулу (17.20) значения $p = 1, 2, \ldots, n$, получаем $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = 1!$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1 = 3!$,

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!. \quad (17.21)$$

Итак, при натуральных значениях аргумента гамма-функция совпадает с факториалом, т. е. с функцией $f(n) = n!$. Но гамма-функция определена не только при натуральных $n$, но и при любых положительных значениях аргумента. Из формулы (17.21) следует, что можно считать $0! = \Gamma(1) = 1$. График гамма-функции изображен на рис. 17.7.

Гамма-функция определяется и при отрицательных значениях $p$. В этот случае необходимо применить формулу (17.21), переписав ее в виде

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \quad (17.22)$$

Если $-1 < p < 0$, то $0 < p+1 < 1$, поэтому правая часть формулы (17.22) имеет смысл, ею и определяется $\Gamma(p)$ при этих значениях $p$; отметим, что в таком случае $\Gamma(p) < 0$. Продолжая аналогичные рассуждения, убеждаемся в том, что гамма-функция определена для всех отрицательных значений $p$, кроме $p = -k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, и кроме $p = 0$.

График гамма-функции при отрицательных значениях $p$ изображен на рис. 17.8.

Гамма-функция определена и для комплексных значений аргумента, кроме $p=-k,\ \ k=0,1,2,\dots$

Бета-функция, или эйлеров интеграл первого рода, определяется формулой

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{17.23}$$

Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x=0$ при $p-1<0$ и в окрестности точки $x=1$ при $q-1<0$.

Интеграл (17.23) сходится при $p>0,\ q>0$.

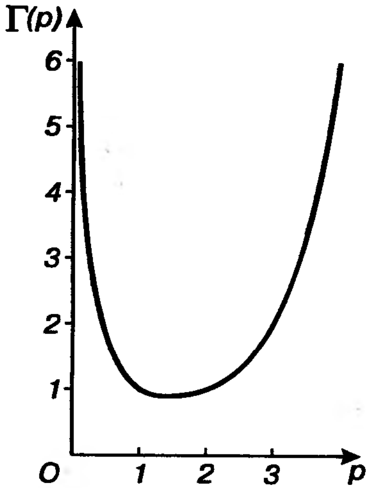


Рис. 17.7

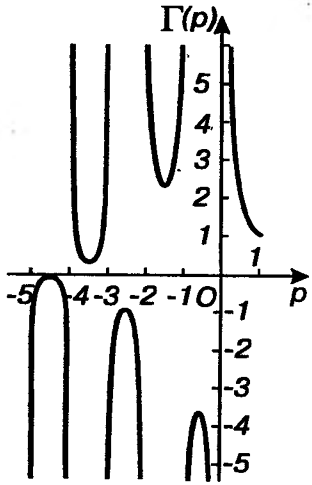


Рис. 17.8

Значения бета-функции при различных значениях параметров $p$ и $q$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p);\ \ \mathrm{B}(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1),\ \ q>1;$$

справедлива формула $\mathrm{B}(p,1-p)=\pi/\sin p\pi,\ \ 0<p<1$.

В случае комплексных $p$ и $q$ интеграл (17.23) сходится, когда $\mathrm{Re}\,p>0$, $\mathrm{Re}\,q>0$.

Между бета- и гамма-функциями существует связь, выражаемая формулой

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ \ (p>0,q>0). \tag{17.24}$$

Пример 17.11. Вычислить $\Gamma(1/2)$ с помощью формулы (17.24).

Полагая в формуле (17.24) $p=q=1/2$, получаем

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int_0^1\frac{d(x-1/2)}{\sqrt{(1/4)-(x-1/2)^2}}=\arcsin(2x-1)\Big|_0^1=\pi,\ \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

Так как $\Gamma(p)>0$ при $p>0$, то $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\approx1{,}772$.

Пример 17.12. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

При вычислении этого интеграла используем результаты примера 17.11.

Полагая $x=\sqrt{t}$, находим

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{-1/2}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{(1/2)-1}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{17.25}$$

## 17.7. Площадь криволинейной фигуры

Площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, слева и справа – прямыми $x=a$ и $x=b$ соответственно, снизу – осью $Ox$ (рис. 17.9), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{17.26}$$

Площадь криволинейно трапеции $cCDd$ (рис. 17.10), ограниченной справа графиком функции $x=\varphi(y)$, сверху и снизу – соответственно прямыми $y=d$, $y=c$, слева – осью $Oy$, определяется формулой

$$S=\int_c^d\varphi(y)\,dy. \tag{17.27}$$

Площадь криволинейной фигуры $A_1A_2B_2B_1$, ограниченной сверху графиком функции $y_2=f_2(x)$, снизу – графиком функции $y_1=f_1(x)$, слева и справа – прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 17.11), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \qquad (17.28)$$

Площадь фигуры $C_1D_1D_2C_2$, ограниченной слева и справа соответственно гра-

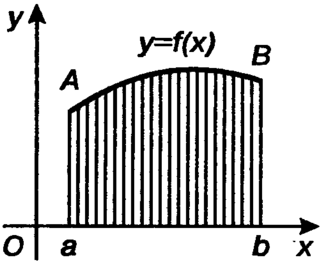


Рис. 17.9

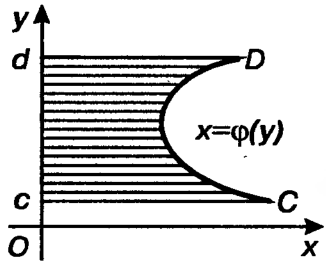


Рис. 17.10

фиками функций $x_1=\varphi_1(y)$, $x_2=\varphi_2(y)$, снизу и сверху – прямыми $y=c$, $y=d$ (рис. 17.12), определяется формулой

$$S=\int_c^d (\varphi_2(y)-\varphi_1(y))\,dy. \qquad (17.29)$$

Если линия, ограничивающая криволинейную трапецию сверху, задана параметрическими уравнениями $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$, где $\alpha\le t\le\beta$, $\varphi_1(\alpha)=a$, $\varphi_1(\beta)=b$, то

$$S=\int_\alpha^\beta \varphi_2(t)\,\varphi_1'(t)\,dt. \qquad (17.30)$$

Площадь сектора $OAB$ (рис. 17.13), ограниченного дугой линии, заданной уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, и двумя полярными радиусами $OA$

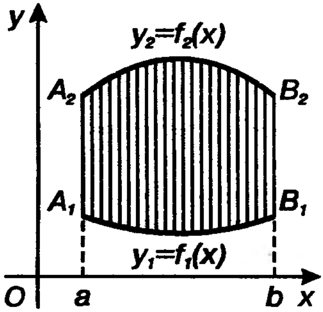


Рис. 17.11

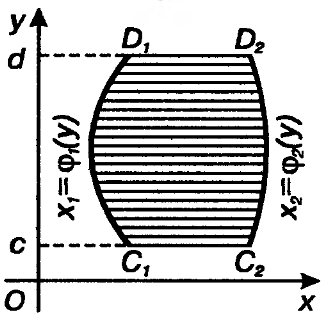


Рис. 17.12

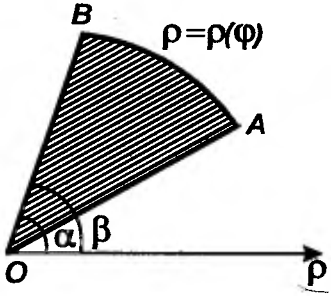

Рис. 17.13

и $OB$, соответствующими значениям $\varphi_1=\alpha$, $\varphi_2=\beta$, определяется формулой

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi. \qquad (17.31)$$

Пример 17.13. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y=2x-x^2+8$ и осью $Ox$.

Чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения линии (параболы) с осью $Ox$ (рис. 17.14). Решая систему уравнений $y=2x-x^2+8,\quad y=0,$ получаем $x_1=-2$, $x_2=4$; следовательно, $a=-2$, $b=4$.

По формуле (17.26) находим

$$S=\int_{-2}^{4}(2x-x^2+8)\,dx=2\int_{-2}^{4}xdx-\int_{-2}^{4}x^2dx+8\int_{-2}^{4}dx=$$

$$=x^2\Big|_{-2}^{4}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4}+8x\Big|_{-2}^{4}=(16-4)-\frac{1}{3}(64+8)+8(4+2)=36.$$

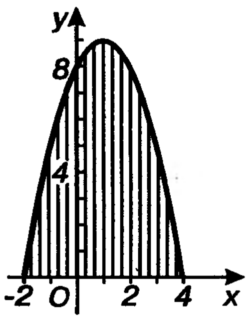

Рис. 17.14

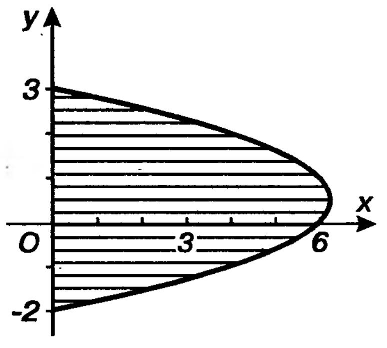

Рис. 17.15

Пример 17.14. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x=$ $=y-y^2+6$ и осью $Oy$.

Данная фигура представляет собой криволинейную трапецию, прилежащую к оси $Oy$ (см. рис. 17.15). Найдем точки пересечения линии с осью $Oy$, для чего решим систему уравнений $x=y-y^2+6$, $x=0$. Из этой системы получаем $y_1=-2$, $y_2=3$; это означает, что в формуле (17.27), которой здесь необходимо пользоваться, нужно положить $c=-2$, $d=3$.

Следовательно,

$$S=\int_{-2}^{3}(y-y^2+6)\,dy=\frac{y^2}{2}\bigg|_{-2}^{3}-\frac{y^3}{3}\bigg|_{-2}^{3}+6y\Big|_{-2}^{3}=$$

$$\frac{1}{2}(9-4)-\frac{1}{3}(27+8)+6(3+2)=20\frac{5}{6}.$$

Пример 17.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+4y^2=8,\ x^2-4y=0$.

Данная фигура ограничена сверху дугой эллипса $x^2+4y^2=8$, снизу – дугой параболы $x^2=4y$ (рис. 17.16).

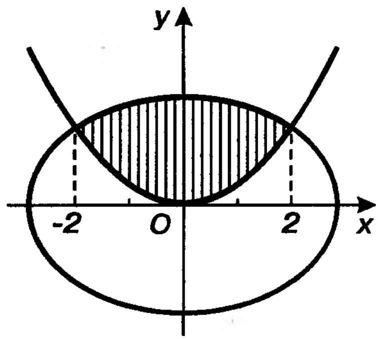

Рис. 17.16

Площадь вычислим по формуле (17.28). Решая систему уравнений $x^2+4y^2=8$, $x^2=4y$, находим $x_1=-2$, $x_2=2$ – абсциссы точек пересечения заданных линий; следовательно, $a=-2, b=2$. Каждое из уравнений разрешаем относительно $y$: $y_1=x^2/4$, $y_2=\sqrt{8-x^2}/2$.

(В формуле (17.28) через $y_2=f_2(x)$ обозначена функция, график которой ограничивает фигуру сверху.)

Таким образом, искомая площадь

$$S=\int_{-2}^{2}\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}x^2dx.$$

Для вычисления первого интеграла применим подстановку $x=2\sqrt{2}\sin t$, тогда $dx=2\sqrt{2}\cos t\,dt$, $\alpha=-\pi/4$, $\beta=\pi/4$.

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{8-8\sin^2 t}\,2\sqrt{2}\,dt=$$

$$=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\pi+2.$$

Поскольку

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{1}{4}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2}^{2}=\frac{1}{12}(8+8)=\frac{4}{3},$$

то $S=S_1-S_2=\pi+2-4/3=\pi+2/3$.

**Пример 17.16.** Вычислить площадь области, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

В силу симметрии эллипса относительно координатных осей достаточно вычислить площадь части области, лежащей в первой четверти, и результат умножить на 4. Заметим, что в этом случае $x$ меняется от 0 до $a$, поэтому $t$ будет меняться от $\pi/2$ до 0. По формуле (17.30) находим

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0}(b\sin t)(-a\sin t)\,dt = 4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \pi ab,\; S = \pi ab.$$

**Замечание.** В частном случае, когда $a = b = R$, получаем $S = \pi R^2$ – площадь круга радиуса $R$.

**Пример 17.17.** Вычислить площадь области, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$.

Принимая во внимание симметрию линии относительно ее оси (см. п. 2.10), по формуле (17.31) получаем

$$\frac{1}{4}S = \int_{0}^{\pi/4}\frac{1}{2}a^2\sin 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}a^2\int_{0}^{\pi/4}\sin 2\varphi\,d(2\varphi) =$$

$$= -\frac{a^2}{4}\cos 2\varphi\,\Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4},\quad S = a^2.$$

## 17.8. Длина дуги кривой

Если линия задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi_1(t),\; y = \varphi_2(t),\; z = \varphi_3(t) \quad (\alpha \le t \le \beta), \tag{17.32}$$

где $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – дифференцируемые функции аргумента $t$, то дифференциал длины ее дуги выражается формулой

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \tag{17.33}$$

Интегрируя равенство (17.33) по промежутку $[\alpha, \beta]$, получаем формулу для вычисления длины дуги линии (17.32):

$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt. \tag{17.34}$$

Если линия (17.32) лежит в плоскости $Oxy$, то $z = 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$, поэтому

$$s = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{17.35}$$

В случае, когда плоская линия задана уравнением $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$, где $f(x)$ – дифференцируемая функция, последняя формула принимает вид

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (17.36)$$

Если плоская линия задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ в полярных координатах, то

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \qquad (17.37)$$

Пример 17.18. Вычислить длину дуги линии $y=\ln\sin x$ между точками, для которых $x_1=\pi/3$, $x^2=\pi/2$.

Искомую длину вычисляем по формуле (17.36).

Поскольку $y=\ln\sin x$, $y'=\cos x/\sin x$, то

$$s=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{1+(\cos x/\sin x)^2}\,dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x}=$$

$$=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x dx}{\sin^2 x}=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|_{\pi/3}^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3\approx 0{,}5493.$$

Пример 17.19. Найти длину дуги линии $x=4(\cos t+t\sin t)$, $y=$ $=4(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le\pi/2)$.

Применяем формулу (17.35), полагая в ней $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$.

Так как $x'=4(-\sin t+\sin t+t\cos t)=4t\cos t$, $y'=4(\cos t-\cos t+t\sin t)=$ $=4t\sin t$, $\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{16t^2\cos^2 t+16t^2\sin^2 t}=4t$, то

$$s=\int_0^{\pi/2}4t\,dt=2t^2\Big|_0^{\pi/2}=\pi^2/2.$$

Пример 17.20. Вычислить длину дуги винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ между точками, для которых $t=0$, $t=\beta$.

Поскольку $x'=-a\sin t$, $y'=a\cos t$, $z'=b$, $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{a^2+b^2}$, то по формуле (17.34) находим

$$s=\int_0^\beta\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t\Big|_0^\beta=\sqrt{a^2+b^2}\,\beta.$$

П р и м е р 17.21. Найти длину кардиоды $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$.

Так как $\rho' = 2a\sin\varphi$, $\rho^2 + \rho'^2 = 4a^2\sin^2\varphi + 4a^2(1-\cos\varphi)^2 = 8a^2(1-$ $-\cos\varphi) = 16a^2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$, то по формуле (17.37) получаем

$$s = 2\int_0^{\pi} 4a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 16a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -16a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 16a.$$

## 17.9. Объем тела. Площадь поверхности вращения

Если задана функция $S = S(x)$ $(a \le x \le b)$, определяющая площадь поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{17.38}$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 17.17), где $AB$ – дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx, \text{ или } V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{17.39}$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 17.18), где $CD$ – дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется формулой

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy, \text{ или } V_y = \pi\int_a^b \varphi^2(y)\,dy. \tag{17.40}$$

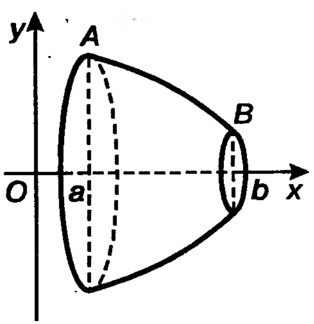


Рис. 17.17

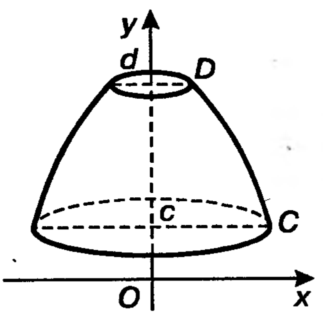


Рис. 17.18

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ дуги кривой $y=f(x)$ $(a \le x \le b)$, определяется формулой

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{17.41}$$

Пример 17.22. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ дуги линии $y=\operatorname{ch}x$, где $0 \le x \le 1$ (поверхность эта называется катеноидом).

Так как $y' = \operatorname{sh}x$, то по формуле (17.41) с учетом равенства $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ получаем

$$S = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch}x\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch}x \operatorname{ch}x\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2x+1)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^1 \operatorname{ch}2x\,dx + \pi \int_0^1 dx = \frac{\pi \operatorname{sh}2x}{2}\Bigg|_0^1 + \pi x\Big|_0^1 = \frac{\pi \operatorname{sh}2}{2} + \pi \approx 8{,}84.$$

Пример 17.23. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 6x$, прямой $x=2$ и осью $Ox$.

В соответствии с условием задачи находим пределы интегрирования $a=0$, $b=2$ (рис. 17.19).

По формуле (17.39) получаем

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 6x\,dx = 3\pi x^2 \Big|_0^2 = 12\pi.$$

Пример 17.24. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 4y$, прямой $y=4$ и осью $Oy$.

Замечая, что пределы интегрирования $c=0, d=4$, по формуле (17.40) находим

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y\,dy = 2\pi y^2 \Big|_0^4 = 32\pi.$$

Пример 17.25. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy=6$, прямыми $y=1$, $y=6$ и осью $Oy$ (см. рис. 17.20).

Из уравнения кривой $xy = 6$ находим $x = 6/y$, $x^2 = 36/y^2$.

Принимая во внимание, что $c = 1$, $d = 6$, по формуле (17.40) получаем

$$V = \pi \int_1^6 \frac{36}{y^2} dy = 36\pi \int_1^6 \frac{dy}{y^2} = -\frac{36\pi}{y}\Big|_1^6 = -36\pi\left(\frac{1}{6} - 1\right) = 30\pi.$$

Пример 17.26. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ вокруг оси $Ox$ (это тело ограничено эллипсоидом вращения).

Из уравнения эллипса находим выражение для $y^2 : y^2 = b^2 - b^2x^2/a^2$. По формуле (17.39) получаем

$$V = \pi \int_{-a}^{a}\left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a} x^2 dx =$$

$$= \pi b^2 x\Big|_{-a}^{a} - \frac{\pi b^2}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a} = \pi b^2(a - (-a)) - \frac{\pi b^2}{3a^2}(a^3 - (-a)^3) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Следовательно, $V = (4/3)\pi ab^2$. При $a = b = R$ получаем $V = (4/3)\pi R^3$ (объем шара).

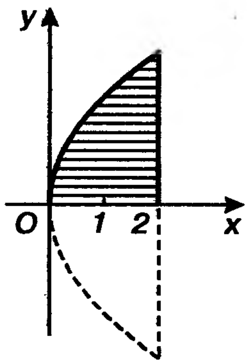


Рис. 17.19

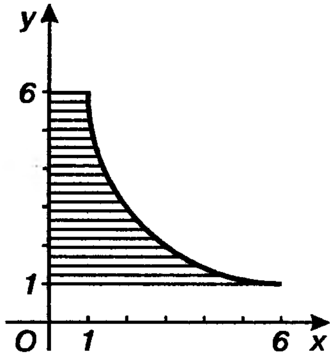


Рис. 17.20

## Глава 18

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## 18.1. Множества в $n$-мерном пространстве

Упорядоченную совокупность $n$ действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют точкой, а сами эти числа – ее координатами. Запись $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает, что точка $M$ имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Множество всевозможных точек называется арифметическим (координатным) $n$-мерным пространством и обозначается символом $A^n$ или $A_n$.

Арифметическое $n$-мерное пространство $A^n$ называется $n$-мерным евклидовым пространством, если для любых двух точек $M'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $M''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$, принадлежащих $A^n$, определено расстояние по формуле

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1''-x_1')^2 + (x_2''-x_2')^2 + \ldots + (x_n''-x_n')^2}.$$

Евклидово $n$-мерное пространство обозначается через $E^n$ или $E_n$.

Примеры множеств в $n$-мерном евклидовом пространстве $E^n$.

1. Если для координат всех точек множества $\{M\}$ выполняется неравенство $\rho(M, M_0) < R$, или

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 < R^2,$$

то $\{M\}$ называется открытым $n$-мерным шаром.

2. Множество $\{M\}$ точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенству $\rho(M, M_0) \le R$, или

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 \le R^2,$$

называется замкнутым $n$-мерным шаром радиуса $R$ с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

3. Множество $\{M\}$ точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых $\rho(M, M_0) = R$, или

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 = R^2,$$

называется $(n-1)$-мерной сферой радиуса $R$ с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

4. Множество точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых заданы как непрерывные функции $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$, называется непрерывной кривой в пространстве $E^n$. Аргумент $t$ называется параметром кривой. Точка $A(x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a))$ называется началом, точка $B(x_1(b), x_2(b), \ldots, x_n(b))$ – концом данной кривой.

Множество точек $M$ $n$-мерного евклидова пространства $E^n$, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки $M_0$ меньше $\varepsilon > 0$, называется $\varepsilon$-окрестностью точки $M_0$. Другими словами, $\varepsilon$-окрестностью точки $M_0$ называется $n$-мерный открытый шар радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $M_0$.

Пусть $\{M\}$ – некоторое множество точек $n$-мерного евклидова пространства $E^n$. Точка $A$ называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества $\{M\}$, если любая ее окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества, отличную от $A$. Предельная точка может принадлежать или не принадлежать ему. Например, точки $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ являются предельными для отрезка $[3, 7]$ и интервала $(3, 7)$, но первому они принадлежат, а второму не принадлежат. Множество, содержащее все свои предельные точки, называется замкнутым. Если существует окрестность точки $B$ множества $\{M\}$, не содержащая никаких других точек этого множества, кроме самой точки $B$, то эта точка называется изолированной точкой множества $\{M\}$.

Точка $M$ множества $\{M\}$ называется внутренней точкой этого множества, если существует такая ее $\varepsilon$-окрестность, все точки которой принадлежат множеству $\{M\}$. Открытым множеством называется множество, все точки которого внутренние. Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить в нем непрерывной кривой. Областью называется открытое связное множество. Точка $M$ называется граничной точкой множества $\{M\}$, если любая ее $\varepsilon$-окрестность содержит как точки множества $\{M\}$, так и точки, не принадлежащие ему.

Совокупность всех граничных точек множества $\{M\}$ называется его границей. Если к области присоединить его границу, то полученное множество называется замкнутой областью. Например, множество точек $M(x, y)$ плоскости $Oxy$, для которых $x^2 + y^2 \le 1$, является замкнутой областью; к области, определяемой неравенством $x^2 + y^2 < 1$, присоединены все его граничные точки, т.е. точки окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Множество называется ограниченным, если все его точки находятся внутри некоторого $n$-мерного шара.

Диаметром ограниченного множества $\{M\}$ называется верхняя грань расстояний между его любыми двумя точками.

Число $A$ называется верхней гранью числового множества $\{X\}$, если: 1) $x \le A$ для всех $x \in X$; 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \in X$, что

$x_\varepsilon > A-\varepsilon$. Верхняя грань множества $X$ обозначается через $\sup X$ или $\sup\limits_{x\in X} x$. Например, для сегмента $X=[1,8]$ $\sup x = 8$; для интервала $X=(2,9)$ $\sup X = 9$.

Число $a$ называется нижней гранью числового множества $X$, если: 1) $x \geq a$ для всех $x \in X$; 2) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon < a+\varepsilon$. Нижняя грань множества $X$ обозначается через $\inf X$ или $\inf\limits_{x\in X} x$. Например, если $X=(4,5)$, то $\inf X = 4$; если $X=[6,7]$, то $\inf X = 6$.

Всякое непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет конечную верхнюю грань, а ограниченное снизу – конечную нижнюю грань. У всякого множества действительных чисел верхняя (нижняя) грань единственна.

## 18.2. Понятие функции нескольких переменных

Функция, определенная на некотором множестве $X$ арифметического $n$-мерного пространства, называется функцией $n$ аргументов

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ данного множества. В этом случае говорят, что задана функция точки $M$, и пишут $y=f(M)$, или $y=f(x)$, где $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рассмотрим случаи, когда $n=2$ и $n=3$. Предположим, что $X$ – некоторое множество точек плоскости, $Y$ – подмножество множества всех действительных чисел. Так как в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат $Ox_1x_2$ каждой точке $M$ соответствует упорядоченная пара действительных чисел $x_1, x_2$ – ее координаты, то функция, заданная на указанном множестве $X$, является функцией двух аргументов, т.е. $y=f(x_1,x_2)$, где $x_1, x_2$ – координаты точки $M(x_1, x_2)$. Если координаты точки $M$ обозначить буквами $x$ и $y$, а функцию – буквой $z$, то $z=f(x,y)$. Переменные $x$ и $y$ при этом называются аргументами функции $z$ или независимыми переменными. Значение функции $z=f(x,y)$, которое она принимает при $x=a$, $y=b$, обозначается через $f(a,b)$.

Область определения функции двух переменных представляет собой некоторое множество точек плоскости.

Графиком функции $z=f(x,y)$ называется множество точек $N(x,y,f(x,y))$, т.е. некоторое множество точек пространства. Например, график функции $z=x-y$ представляет собой плоскость в пространстве, проходящую через начало координат и пересекающую координатную плоскость $Oxy$ по прямой, образующей равные углы с осями $Ox$ и $Oy$; геометрическим изображением функции $z=x^2+y^2$ является поверхность параболоида вращения, а функции $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ – полусфера радиуса $R=3$ с центром в начале координат, расположенная выше плоскости $Oxy$. Отметим, что первые две функции определены на всей плоскости $Oxy$, третья – в круге радиуса $R=3$ с центром в начале координат, т.е. в области, заданной неравенством $x^2+y^2 \leq 9$.

Функцию

$$z=f(x,y) \tag{18.1}$$

можно представить так: $z-f(x,y)=0$, или в более общем виде

$$F(x,y,z)=0. \tag{18.2}$$

Функция, заданная формулой (18.1), называется явной, функция, определяемая уравнением (18.2), называется неявной.

Действительная функция, определенная на некотором множестве $\{X\}$ точек пространства, т.е. точек $M(x,y,z)$, где $x,y,z$ – декартовы координаты, называется функцией трех переменных $x,y,z$. Функцию трех переменных $x,y,z$ обозначим буквой $u$, тогда $u=f(x,y,z)$. Значение функции $u=f(x,y,z)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c$ обозначается через $f(a,b,c)$. Областью определения функции трех переменных является некоторое множество точек пространства. Например, область определения функции $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ представляет собой шар радиуса $R=1$ с центром в начале координат, областью определения функции $u=1/\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ является множество точек, лежащих внутри указанного шара (граничные точки, т.е. точки сферы $x^2+y^2+z^2=1$, исключаются).

## 18.3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Полное приращение функции двух переменных $z=f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ определяется формулой

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y), \tag{18.3}$$

а ее частные приращения (по $x$ и $y$ соответственно) в той же точке – формулами

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x,y), \tag{18.4}$$

$$\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x,y), \tag{18.5}$$

$x$, $y$, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ принадлежат области определения функции.

Аналогично определяются полное и частные приращения функции большего числа переменных.

Замечание. Частное приращение функции по одному из аргументов есть разность между двумя ее значениями, когда приращение получает только данный аргумент; полное приращение функции – разность между двумя значениями, когда приращения получают все ее аргументы.

Число $A$ называется пределом функции $u = f(M)$ при $M$, стремящемся к $M_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $M$, расстояние которых до точки $M_0$ меньше $\delta$, т.е.

$$0 < \rho(M, M_0) < \delta, \tag{18.6}$$

выполняется неравенство

$$|f(M) - A| < \varepsilon. \tag{18.7}$$

Функция $u = f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0$, если выполняется условие

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0). \tag{18.8}$$

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $u = f(M)$ в точке $M_0$ выражается равенством

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta u = 0, \text{ или } \lim_{\Delta\rho \to 0} (f(M) - f(M_0)) = 0,$$

где $\Delta\rho = \rho(M, M_0)$, $\Delta u = f(M) - f(M_0)$.

Теорема 18.1. (об устойчивости знака непрерывной функции).
*Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке $M_0 \in X$ и $f(M_0) \neq 0$, то существует $\delta$-окрестность точки $M_0$, в которой $f(M)$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(M_0)$.*

Теорема 18.2. *Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она ограничена в этой области и достигает в ней своего наименьшего и наибольшего значения.*

Если в некоторой точке $M_0$ не выполнено условие (18.8), то эта точка называется точкой разрыва функции $u = f(M)$.

Точки разрыва функции двух переменных могут заполнять отдельные линии (линии разрыва). Например, для функции $u = 1/(x^2 + y^2 - 1)$ линией разрыва является окружность $x^2 + y^2 - 1 = 0$ в плоскости $Oxy$. Точки разрыва функции трех переменных могут заполнять отдельные поверхности (поверхность разрыва). Так, для функции $u = 1/(z - x^2 - y^2)$ поверхностью разрыва является параболоид вращения $z = x^2 + y^2$.

## 18.4. Частные производные функции нескольких переменных

Частной производной функции нескольких переменных по одной из них в фиксированной точке называется предел отношения соответствующего частного приращения этой функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции $z=f(x,y)$ частные производные в точке $M_0(x_0,y_0)$ по $x$ и $y$ соответственно определяются формулами:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

Употребляются и другие обозначения: $z'_x(x_0,y_0)$, $f'_x(x_0,y_0)$, $z'_y(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$.

Частная производная функции $z=f(x,y)$ по переменной $x$ выражает скорость изменения функции в данном направлении $(y=y_0)$ или скорость изменения функции $f(x,y_0)$ одной переменной.

Частные производные функции $z=f(x,y)$ имеют следующую геометрическую интерпретацию:

$$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha,\quad f'_y(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\beta,$$

где $\alpha$ – угол между осью $Ox$ и касательной в точке $N\ (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности $z=f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$, $\beta$ – угол между осью $Oy$ и касательной в той же точке к линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x=x_0$ (рис 18.1).

Очевидно,

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{df(x,y_0)}{dx}\right|_{x=x_0},\quad f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{df(x_0,y)}{dy}\right|_{y=y_0},$$

т.е. частная производная в данной точке равна производной функции одной переменной, вычисленной при соответствующем значении аргумента, поэтому при нахождении частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования.

При переходе от точки $M_0(x_0,y_0)$ к точке $M\ (x,y)$ получим новые значения частных производных. Следовательно, частные производные функции $f(x,y)$ также являются некоторыми функциями двух переменных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y).$$

П р и м е р 18.1. Найти значения частных производных функции $z=f(x,y)=2x^3+3x^2y+6xy-y^3$ в точке $M_0(-1,2)$.

Считая $y$ постоянной и дифференцируя $z$, как функцию $x$, находим

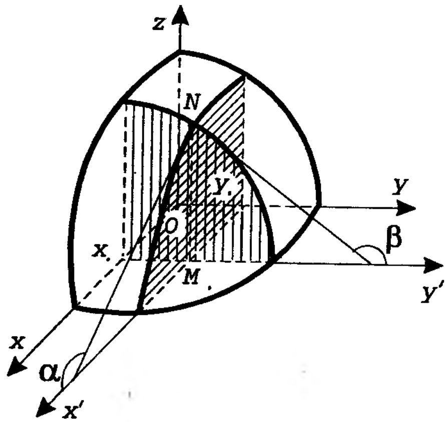


Рис. 18.1

частную производную по $x$, вычисляем ее значение в точке $M_0$:
$z'_x = (2x^3)'_x + (3x^2y)'_x + (6xy)'_x - (y^3)'_x = 6x^2 + 6xy + 6y - 0 = 6(x^2 + xy + y)$;
$f'_x(-1, 2) = 6((-1)^2 + (-1)2 + 2) = 6.$

Считая $x$ постоянной и дифференцируя $z$, как функцию $y$, находим частную производную по $y$ и ее значение в точке $M_0$:
$z'_y = (2x^3)'_y + (3x^2y)'_y + (6xy)'_y - (y^3)'_y = 0 + 3x^2 + 6x - 3y^2 = 3(x^2 + 2x - y^2)$;
$f'_y(-1, 2) = 3((-1)^2 + 2(-1) - 2^2) = -15.$

## 18.5. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Если полное приращение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ представимо в виде

$$\Delta z = P\Delta x + Q\Delta y + \varepsilon\Delta\rho,$$

где $P$, $Q$ – постоянные, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\varepsilon \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$, то $P\Delta x + Q\Delta y$ называют полным дифференциалом данной функции в этой точке и обозначают через $dz$: $dz = P\Delta x + Q\Delta y$. Следовательно,

$$\Delta z = dz + \varepsilon\Delta\rho,\ \varepsilon \to 0 \text{ при } \Delta\rho \to 0. \qquad (18.9)$$

Полный дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты $z$ касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к поверхности, являющейся графиком этой функции, когда аргументы $x$ и $y$ получают приращения $\Delta x$ и $\Delta y$ (рис 18.2, $\Delta z = KM$, $dz = KN$).

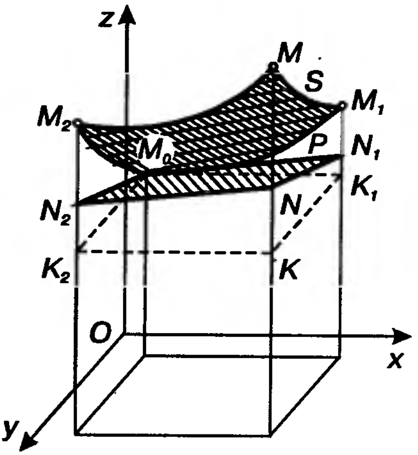


Рис. 18.2

Функция, обладающая непрерывными частными производными, имеет полный дифференциал, причем

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y. \qquad (18.10)$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ является функцией $x$, $y$ при фиксированных $dx$ и $dy$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \text{ или } dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется дифференцируемой. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в ней.

Из формулы (18.9) следует, что $\Delta z \approx dz$, или

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y, \qquad (18.11)$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\,\Delta y. \qquad (18.12)$$

Если все первые частные производные функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывны, то полный дифференциал выражается формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n. \qquad (18.13)$$

Каждое слагаемое правой части этой формулы называется частным диффереципалом.

В частности, полный дифференциал функции трех переменных вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \qquad (18.14)$$

Пример 18.2. Дана функция $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - 6x$ и две точки $A(4; 1)$, $B(3{,}96; 1{,}03)$. Требуется: 1) вычислить значение $z$ функции в точке $B$; 2) вычислить приближенное значение $z_1$ функции в точке $B$ исходя из значения $z_0$ функции в точке $A$, заменив приращение функции при переходе от точки $A$ к точке $B$ дифференциалом.

Вычисляем значения данной функции в точках $A$ и $B$: $z_0 = f(A) = f(x_0, y_0) = f(4, 1) = 4^2 + 3 \cdot 1 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 4$, $z = f(B) = f(x_1, y_1) = $ $= f(3{,}96; 1{,}03) = (3{,}96)^2 + 3 \cdot 3{,}96 \cdot 1{,}03 - 6 \cdot 3{,}96 = 4{,}158$.

Находим приращения аргументов: $\Delta x = x_1 - x_0 = 3{,}96 - 4{,}00 = -0{,}04$, $\Delta y = y_1 - y_0 = 1{,}03 - 1{,}00 = 0{,}03$; значения частных производных $f'_x(x, y) = 2x + 3y - 6$, $f'_y = 3x$ в точке $A$: $f'_x(x_0, y_0) = f'_x(4, 1) =$ $= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 - 6 = 5$, $f'_y(x_0, y_0) = f'_y(4, 1) = 3 \cdot 4 = 12$; значение дифференциала в точке $A$ по формуле (18.10): $dz = 5(-0{,}04) + 12 \cdot 0{,}03 = 0{,}16$; значение функции в точке $B$ по формуле (18.12): $z_1 = f(x_1, y_1) = f(3{,}96; 1{,}03) \approx 4 + 0{,}16 = 4{,}16$.

Пример 18.3. Вычислить приближенно $e^{(1,1)^2 - (0,9)^2}$.

Рассмотрим функцию $z = e^{x^2 - y^2}$. Искомое число можно считать приращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$. Поскольку $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} = e^0 = 1$, $\Delta z \approx dz = 2e^{x^2 - y^2}(xdx - ydy) = 2e^0(0{,}1 + 0{,}1) = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$, то $e^{(1,1)^2 - (0,9)^2} \approx e^{1-1} + \Delta z = 1 + 0{,}4 = 1{,}4$.

Пример 18.4. Вычислить полный дифференциал функции $u = xyz$ при переходе от точки $M(6; 4; 2)$ к точке $N(5{,}92; 3{,}95; 2{,}07)$.

Так как $u'_x = yz$, $u'_y = xz$, $u'_z = xy$, то в соответствии с формулой (18.14) $du = yzdx + xzdy + xydz$. Подставив в эту формулу значения $x = 6$, $y = 4$, $z = 2$, $dx = \Delta x = 5{,}92 - 6 = -0{,}08$, $dy = \Delta y = 3{,}95 - 4 = -0{,}05$, $dz = \Delta z = 2{,}07 - 2 = 0{,}07$, получим $du = 4 \cdot 2(-0{,}08) + 6 \cdot 2(-0{,}05) + 6 \cdot 4 \cdot 0{,}07 = -0{,}64 - 0{,}6 + 1{,}68 = 0{,}44$.

Пример 18.5. Как изменится диагональ прямоугольника со сторонами $a = 8$ см, $b = 6$ см, если сторону $a$ уменьшить на 3 мм, а сторону $b$ увеличить на 7 мм?

Диагональ прямоугольника $l$ через его стороны $a$ и $b$ выражается формулой $l=\sqrt{a^2+b^2}$. Введем в рассмотрение функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Поскольку $x=8$, $y=6$, $\Delta x=-0{,}3$, $\Delta y=0{,}7$, $dz=\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $dz=\dfrac{8\,(-0{,}3)+6\cdot 0{,}7}{\sqrt{8^2+6^2}}=\ =0{,}18.$

Следовательно, диагональ увеличится на 0,18 см.

## 18.6. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Частные производные функции нескольких переменных называют также частными производными первого порядка или первыми частными производными.

Частными производными второго порядка (или вторыми частными производными) данной функции называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных.

Для функции $z=f(x,y)$ по определению имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=(f'_x(x,y))'_x=f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=(f'_y(x,y))'_y=f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=(f'_x(x,y))'_y=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=(f'_y(x,y))'_x=f''_{yx}(x,y).$$

Вторые частные производные обозначаются также символами $z''_{xx}$, $z''_{xy}$, $z''_{yx}$, $z''_{yy}$. Производные $z''_{xy}$, $z''_{yx}$ называются смешанными частными производными.

Частные производные появились в трудах И. Ньютона, Г. Лейбница, Я. Бернулли и И. Бернулли. Обозначения $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ввел Лежандр (1786), $f'_x$, $z'_x$ – Ж. Лагранж (1797, 1801), $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ – К. Якоби (1837).

Теорема 18.3. *Если функция $z=f(x,y)$ и ее смешанные производные $z''_{xy}$, $z''_{yx}$ определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и непрерывны в этой точке, то $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.*

Дифференцируя частные производные второго порядка как по $x$, так и по $y$, получаем частные производные третьего порядка или третьи частные производные:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Вообще, частная производная $n$-го порядка функции $z=f(x,y)$ есть первая частная производная от ее частной производной $(n-1)$ -го порядка.

Аналогично определяются и вычисляются частные производные второго и высших порядков от функции трех и большего числа переменных.

Полным дифференциалом второго порядка некоторой функции называется полный дифференциал от ее полного дифференциала.

Полным дифференциалом $n$-го порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$ -го порядка. Если $z=f(x,y)$, $dz=z'_x dx+z'_y dy$, то

$$d^2z=d\,(dz)=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2,$$

$$d^3z=d\,(d^2z)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,\ldots,$$

$$d^nz=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k\left(C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\right).$$

Эту формулу записывают и в следующем символическом виде:

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)}z.$$

Формула Тейлора для функции двух переменных

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^kf(a,b)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)}{(n+1)!},\qquad(18.15)$$

или

$$f(M)=f(M_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^kf(M_0)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(M')}{(n+1)!},\qquad(18.16)$$

где $M'(a+\theta\Delta x,b+\theta\Delta y)$ – точка области $S$.

Формула Тейлора для функции большего числа переменных $u=f(M)$, $M\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, аналогична формуле (18.16).

З а м е ч а н и е . При $n=1$ формула (18.15) принимает вид

$$f(x,y)=f(a,b)+(f'_x(a,b)\,\Delta x+f'_y(a,b)\,\Delta y)+$$
$$+\frac{1}{2}(f''_{xx}(\xi,\eta)\,\Delta x^2+2f''_{xy}(\xi,\eta)\,\Delta x\Delta y+f''_{yy}(\xi,\eta)\,\Delta y^2),$$

где $\xi=a+\theta\Delta x$, $\eta=b+\theta\Delta y$, $0<\theta<1$.

П р и м е р 18.6. Дана функция $z=x^3+2x^2y-8xy^2+y^3$. Найти ее частные производные второго порядка. Находим сначала первые производные: $z'_x=3x^2+4xy-8y^2$, $z'_y=2x^2-16xy+3y^2$.

Пользуясь определениями и правилами дифференцирования, получаем $z''_{xx} = 6x+4y$, $z''_{xy} = 4x-16y$, $z''_{yx} = 4x-16y$, $z''_{yy} = -16x+6y$.

Пример 18.7. Дана функция $u = x^2 y\cos 3t + y^2 z^5$. Найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^5 u}{\partial z^5}$.

Дифференцируя по одной из переменных, считаем все другие постоянными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\cos 3t,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 2x\cos 3t,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t} = -6x\sin 3t;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cos 3t + 2yz^5,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2z^5,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial z} = 10z^4,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2} 40z^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 5y^2z^4,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 20y^2z^3,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 60y^2z^2,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 120y^2 z,\quad \frac{\partial^5 u}{\partial z^5} = 120y^2.$$

Пример 18.8. Дана функция $z = \ln(x^2+y^2+2x+1)$. Показать, что $z''_{xx} + z''_{yy} \equiv 0$.

Найдем частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+2x+1)'_x}{x^2+y^2+2x+1} = \frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2+2x+1)'_y}{x^2+y^2+2x+1} = \frac{2y}{x^2+y^2+2x+1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x+2}{x^2+y^2+2x+1}\right)'_x = \frac{2(x^2+y^2+2x+1)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+y^2+2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+2x+1}\right) = \frac{2(x^2+y^2+2x+1)-2y2y}{(x^2+y^2+2x+1)^2} = \frac{2x^2-2y^2+4x+2}{(x^2+y^2+2x+1)^2}.$$

Составим сумму $z''_{xx} + z''_{yy}$ вторых частных производных и убедимся, что она тождественно равна нулю:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2y^2-2x^2-4x-2}{(x^2+y^2+2x+1)^2} + \frac{2x^2-2y^2+4x+2}{(x^2+y^2+2x+1)^2} \equiv 0.$$

## 18.7. Дифференцирование неявных и сложных функций

Функция $n$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется неявной, если она задана уравнением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \qquad (18.17)$$

не разрешенным относительно $u$.

Частные производные неявной функции, заданной уравнением (18.17), находятся по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_u}, \ \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_u}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_u}.$$

В частности, если $y$ – функция одной переменной $x$, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, то

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}; \qquad (18.18)$$

если $z$ – функция двух переменных $x, y$, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Если $u = F(v_1, v_2, \dots, v_n)$, где $v_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, v_n = f_n(x_1, x_2, \dots x_n)$, то функция $u$ называется сложной функцией независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Переменные $v_1, v_2, \dots, v_n$ называются промежуточными аргументами.

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по данной независимой переменной:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_2}, \qquad (18.19) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial u}{\partial x_n} &= \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Если все промежуточные аргументы являются функциями одной независимой переменной $t$, то функция будет сложной функцией от $t$. Полная производная этой функции находится по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{dv_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{dv_n}{dt}.$$

## 18.8. Экстремум функции нескольких переменных

Максимумом (минимумом) функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется такое ее значение $f(x_0, y_0)$, которое больше (меньше) всех других ее значений, принимаемых в точках $M(x, y)$, достаточно близких к точке $M_0$ и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называется ее экстремумом. Точка, в которой достигается экстремум, называется точкой экстремума.

Экстремум функции трех и большего числа переменных определяется аналогично.

**Необходимые условия экстремума.** В точке экстремума дифференцируемой функции нескольких переменных частные производные ее равны нулю.

Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x,y)$, то

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{18.20}$$

Из этой системы уравнений находятся стационарные точки. Система (18.20) эквивалентна одному уравнению

$$df(x_0, y_0) = 0. \tag{18.21}$$

В общем случае в точке экстремума $M_0(x_0, y_0)$ функции $z = f(x, y)$ выполняется равенство (18.21) или $df(x_0, y_0)$ не существует.

**Достаточные условия экстремума.** Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка, т.е. точка, для которой выполняется равенство (18.21):

1) если

$$d^2 f(x_0, y_0) < 0 \text{ (при } dx^2 + dy^2 > 0), \tag{18.22}$$

то $f(x_0, y_0)$ – максимум функции $z = f(x, y)$;

2) если

$$d^2 f(x_0, y_0) > 0 \text{ (при } dx^2 + dy^2 > 0), \tag{18.23}$$

то $f(x_0, y_0)$ – минимум функции $z = f(x, y)$.

Эти условия эквивалентны следующим: пусть $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ и

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),\ B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{yy}(x_0, y_0), \tag{18.24}$$

$$\Delta = AC - B^2, \tag{18.25}$$

тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0$: максимум при $A < 0$ (или $C < 0$), минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то экстремума в точке $M_0$ нет.

Для функции трех и большего числа переменных необходимые условия экстремума аналогичны условиям (18.20), а достаточные условия аналогичны условиям (18.22), (18.23).

**Пример 18.9.** Найти экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17$.

Поскольку $f'_x = 2x - 4, f'_y = 2y + 6, f''_{xx} = 2, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = 2, f'_x = 0, f'_y = 0$ при $x = 2, y = -3$, $\Delta = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$, $A = 2 > 0$, то в точке $M_0(2,-3)$ функция имеет минимум, причем $\min f(x, y) = f(2,-3) = 4$.

**Пример 18.10.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y) = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств: $x \le 1$, $y \ge 0$, $y \le x$.

Область представляет собой треугольник $OAB$ (рис. 18.3), причем $O(0,0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$. Находим экстремум функции: $f'_x = -4x - y$, $f'_y = -x - 2y$; $f'_x = 0, f'_y = 0$ при $x = 0$, $y = 0$; $f''_{xx} = -4, f''_{xy} = f''_{yx} = -1, f''_{yy} = -2$, $\Delta = AC - B^2 = (-4)(-2) - (-1)^2 = 7 > 0$, $A = -4 < 0$, в точке $(0, 0)$ функция достигает максимума: $\max f(x, y) = f(0, 0) = 3$. Найдем экстремумы на границе области: на стороне $OA$ $(y = 0)$ функция $z = f(x, 0) = 3 - 2x^2 = \varphi(x)$ зависит от одной переменной $x$; $\varphi'(x) = -4x$, $\varphi''(x) = -4$, $\varphi'(x) = 0$ при $x = 0$; $\varphi''(0) = -4 < 0$, $x = 0$ – точка максимума: $\varphi(0) = f(0, 0) = 3$. На прямой $AB$ $(x = 1)$ функция $z = f(1, y) = 3 - 2 - y - \ - y^2 = 1 - y - y^2 = \psi(y)$ зависит только от $y$; $\psi'(y) = -1 - 2y$, $\psi'(y) = 0$ при $y = -1/2$, но эта точка не принадлежит отрезку $AB$. На стороне $OB$ $(y = x)$ функция зависит только от $x$: $z = f(x, x) = \ = 3 - 2x^2 - x^2 - x^2 = 3 - 4x^2 = \varphi(x)$, $\varphi'(x) = -8x$, $\varphi''(x) = -8$, $\varphi = 0$ при $x = 0$, $\varphi''(0) = -8 < 0$, $f(0, 0) = 3$. Вычисляем значения функции в точках $A$ и $B$: $f(A) = f(1, 0) = 1$, $f(B) = f(1, 1) = -1$. Следовательно, в заданной области наименьшее значение данной функции равно $-1$, а наибольшее равно 3.

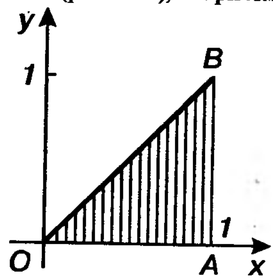

Рис. 18.3

**Пример 18.11.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

Данная функция имеет минимум в точке $M(1, 1)$, лежащей в заданной области, причем $\min(x, y) = f(1, 1) = 2$.

Исследуем изменение функции на границе области, т.е. на окружности $x^2 + y^2 = 4$. Воспользуемся параметрическими уравнениями этой окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$. На данной окружности функция становится функцией одной переменной $t$: $z = z(t) = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 4\cos t - 4\sin t + 4 = \ = 8 - 4\cos t - 4\sin t$. Поскольку $z'(t) = 4\sin t - 4\cos t$, $z'(t) = 4\sin t - 4\cos t = 0$, $\operatorname{tg} t = 1$, $t_1 = \pi/4$, $t_2 = (5/4)\pi$, $z''(t) = 4\cos + 4\sin t$, $z''(t_1) > 0$, $z''(t_2) < 0$, то $t_1$ –

точка минимума, $t_2$ – точка максимума, причем $\min z(t) = z(\pi/4) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}344$, $\max z(t) = z((5/4)\pi) = 8 + 4\sqrt{2} \approx 13{,}656$.

Рассматривая полученные экстремальные значения функции, заключаем, что в указанном круге наибольшее значение функции равно $8 + 4\sqrt{2} \approx 13{,}656$, достигается оно в точке $N(-2, -2)$, лежащей на границе окружности; наименьшее значение функции равно 2, достигается в точке минимума $M(1, 1)$.

## 18.9. Условный экстремум

Если разыскивается экстремум функции многих переменных, которые связаны между собой одним или несколькими уравнениями (число уравнений должно быть меньше числа переменных), то говорят об условном экстремуме. При решении задачи можно пользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа.

Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$, составляют функцию Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{18.26}$$

где $\lambda$ – неопределенный постоянный множитель, и ищут ее экстремум. Необходимые условия экстремума функции (18.26) выражаются системой трех уравнений с тремя неизвестными $x, y, \lambda$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0. \tag{18.27}$$

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$ для испытуемой системы значений $x, y, \lambda$, полученной из системы (18.27) при условии, что $dx$ и $dy$ связаны уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

Функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, если $d^2F < 0$, и условный минимум, если $d^2F > 0$.

Аналогично находится условный экстремум функции трех или большего числа переменных при наличии уравнений связи.

Если, например, требуется найти экстремум функции $f(x, y, z)$ при условиях

$$\varphi(x, y, z) = 0, \ \psi(x, y, z) = 0, \tag{18.28}$$

то вводят функцию

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

и к уравнениям (18.28) присоединяют еще три уравнения: $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$.

Пример 18.12. Найти экстремум функции $z = 9 - 8x - 6y$ при условии, что ее аргументы удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 25$.

Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты $z$ точек пересечения плоскости $z = 9 - 8x - 6y$ с круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 25$.

Составляем функцию Лагранжа, определяемую формулой (18.26): $F(x, y) = 9 - 8x - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 25)$, находим ее частные производные $F'_x = -8 + 2\lambda x$, $F'_y = -6 + 2\lambda y$. Система уравнений (18.27) принимает вид

$$-8 + 2\lambda x = 0, \ -6 + 2\lambda y = 0, \ x^2 + y^2 = 25,$$

или

$$\lambda x - 4 = 0, \ \lambda y - 3 = 0, \ x^2 + y^2 = 25.$$

Решив эту систему, получим: 1) $\lambda_1 = 1$, $x_1 = 4$, $y_1 = 3$; 2) $\lambda_2 = -1$, $x_2 = -4$, $y_2 = -3$. Находим вторые частные производные: $F''_{xx} = 2\lambda$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 2\lambda$ и второй дифференциал $d^2F = \lambda(dx^2 + dy^2)$. Так как $d^2F > 0$ при $\lambda_1 = 1$, $x_1 = 4$, $y_1 = 3$, то функция $f(x; y)$ в точке $(4, 3)$ имеет условный минимум, причем $\min f(x, y) = f(4, 3) = -41$. Поскольку $d^2F < 0$ при $\lambda_2 = -1$, $x_2 = -4$, $y_2 = -3$, то в точке $(-4, -3)$ функция имеет условный максимум $f(-4, -3) = 59$.

## 18.10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке $M$ (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания. Координаты вектора нормали $\mathbf{n} = (a, b, c)$ к поверхности

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (18.29)$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пропорциональны значениям соответствующих частных производных функции $F(x, y, z)$ в этой точке: $a = \lambda(F'_x)_0$, $b = \lambda(F'_y)_0$, $c = \lambda(F'_z)_0$, где $(F'_x)_0 = F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $(F'_y)_0 = F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $(F'_z)_0 = F'_z(x_0, y_0, z_0)$.

Координаты вектора $\mathbf{n}$ входят в уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$(F'_x)_0(x - x_0) + (F'_y)_0(y - y_0) + (F'_z)_0(z - z_0) = 0, \qquad (18.30)$$

а также в уравнение нормали к данной поверхности в той же точке:

$$\frac{x-x_0}{(F'_x)_0}=\frac{y-y_0}{(F'_y)_0}=\frac{z-z_0}{(F'_z)_0}. \tag{18.31}$$

Пример 18.13. Записать уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(1,-2,5)$.

Поскольку $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$, $F'_x=2x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-1$, $x_0=1$, $y_0=-2$, $z_0=5$, $F'_x(x_0,y_0,z_0)=2$, $F'_y(x_0,y_0,z_0)=-4$, то на основании уравнений (18.30), (18.31) получаем $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$, $2x-4y-z-5=0$ (уравнение касательной плоскости), $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-5}{-1}$ (уравнения нормали).

## 18.11. Семейства линий и их огибающие. Семейства поверхностей и их огибающие

Однопараметрическим семейством линий, лежащих в плоскости $Oxy$, называется множество линий, определяемое уравнением

$$F(x,y,C)=0, \tag{18.32}$$

в котором параметр $C$ может принимать различные действительные значения (при каждом фиксированном значении $C$ получаем определенную линию семейства).

Огибающей семейства линий называется такая линия, которая в каждой точке касается некоторой линии семейства.

Множество всех точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$F(x,y,C)=0,\ F'_c(x,y,C)=0, \tag{18.33}$$

называется дискриминантной линией семейства (18.32).

Если в точках дискриминантной линии частные производные $F'_x$ и $F'_y$ одновременно в нуль не обращаются, то дискриминантная линия совпадает с огибающей семейства.

Множество линий, определяемое уравнением

$$F(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0,$$

где $C_1,C_2,\dots,C_n$ – независимые параметры, называется $n$-параметрическим семейством линий (параметры называются независимыми или существенными, если их число нельзя уменьшить путем введения новых параметров).

Однопараметрическим семейством поверхностей называется множество поверхностей, определяемое уравнением

$$F(x, y, z, C) = 0. \tag{18.34}$$

Огибающей семейства поверхностей называется поверхность, которая в каждой своей точке касается некоторой поверхности семейства.

Огибающая семейства поверхностей (18.34) удовлетворяет системе уравнений

$$F(x, y, z, C) = 0,\ F'_C(x, y, z, C) = 0. \tag{18.35}$$

Пример 18.14. Найти огибающую однопараметрического семейства линий $x^2 + (y - C)^2 = R^2$.

Система уравнений (18.33) запишется так:

$$x^2 + (y - C)^2 - R^2 = 0,\ 2(y - C) = 0.$$

Из этой системы находим, что $x^2 - R^2 = 0$, или $x = -R$, $x = R$.

Прямые $x = -R$, $x = R$ являются огибающей данного однопараметрического семейства линий – множества окружностей радиуса $R$ с центрами на оси $Oy$ (рис 18.4).

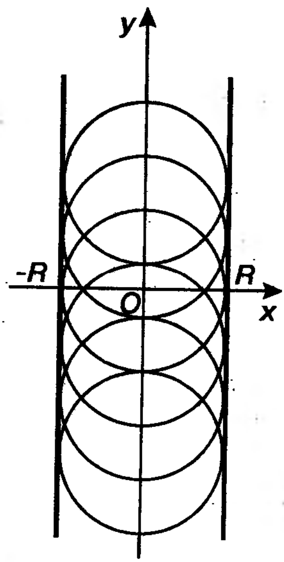

Рис. 18.4

Пример 18.15. Найти огибающую однопараметрического семейства поверхностей $x^2 + y^2 + (z - C)^2 = R^2$.

Система уравнений (18.35) принимает вид

$$x^2 + y^2 + (z - C)^2 - R^2 = 0,\ 2(z - C) = 0,$$

откуда следует, что $x^2 + y^2 = R^2$.

Круговой цилиндр радиуса $R$, ось которого совпадает с осью $Oz$, является огибающей данного однопараметрического семейства сфер радиуса $R$, центр каждой из которых находится на оси $Oz$.

*Глава 19*

# ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

## 19.1. Понятие двойного интеграла, его геометрический и механический смысл

На плоскости $Oxy$ рассмотрим область $S$ площади $S$, ограниченную замкнутой кривой $\gamma$ (рис 19.1). Пусть в области $S$ определена функция $z = f(x, y)$. Разобьем область $S$ сетью линий на конечное число областей $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$, площади которых $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. В каждой $i$-й элементарной области $(\Delta S_i)$ выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$, значение функции в этой точке $f(x_i, y_i)$ умножим на площадь $\Delta S_i$ соответствующей области и все произведения сложим. Полученная сумма

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i$$

называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области $S$.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области $S$ называется конечный предел $I$ интегральной суммы $I_n$ при $\lambda \to 0$, где $\lambda$ – наибольший из диаметров элементарных областей $(\Delta S_i)$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i. \tag{19.1}$$

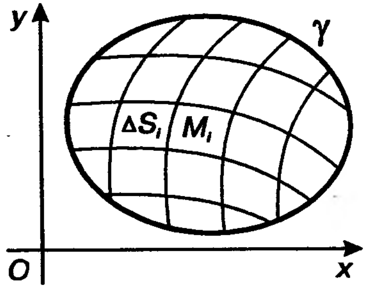


Рис. 19.1

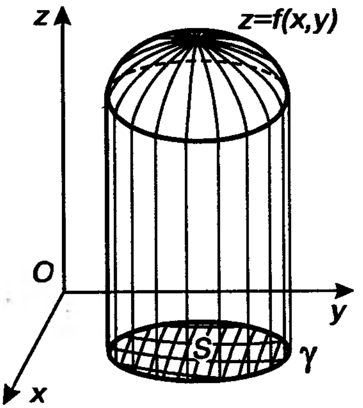


Рис. 19.2

Обозначения двойного интеграла: $I = \iint\limits_S f(x, y)\, dS$, $I = \iint\limits_S f(x, y) dxdy$.

Функция $z = f(x, y)$, для которой предел (19.1) существует и конечен, называется интегрируемой.

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области $S$, то она интегрируема в этой области.

**Геометрический смысл двойного интеграла.** Если $f(x, y) > 0$, то двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области $S$ равен объему тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $Oz$, а направляющей служит контур $\gamma$ фигуры $S$, снизу – плоскостью $z = 0$ (рис 19.2).

**Механический смысл двойного интеграла.** Двойной интеграл от функции $z = f(x, y) > 0$ по области $S$ представляет собой массу фигуры $S$, если подынтегральную функцию $f(x, y)$ считать плотностью этой фигуры в точке $M(x, y)$.

**Свойства двойного интеграла.**

1. $\iint\limits_S cf(x, y)\, dS = c \iint\limits_S f(x, y)\, dS$ ($c = \text{const}$).

2. $\iint\limits_S (f(x, y) \pm (\varphi(x, y))dS = \iint\limits_S f(x, y)\, dS \pm \iint\limits_S \varphi(x, y)\, dS$.

3. Если $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$, то $\iint\limits_S f(x, y)\, dS \leq \iint\limits_S \varphi(x, y)\, dS$.

4. $\left| \iint\limits_S f(x, y)\, dS \right| \leq \iint\limits_S |f(x, y)|\, dS$.

5. $\iint\limits_S f(x, y)\, dS = \iint\limits_{S_1} f(x, y)\, dS + \iint\limits_{S_2} f(x, y)\, dS$,

где $S_1$ и $S_2$ – области, на которые разбита область $S$.

6. Если в области $S$ $m \leq f(x, y) \leq M$, то

$$mS \leq \iint\limits_S f(x, y)\, dS \leq MS, \tag{19.2}$$

откуда

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dS = \mu S \; (m \leq \mu \leq M).$$

Пример 19.1. Оценить двойные интегралы

$$I_1 = \iint\limits_{S_1} \frac{dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}},\; I_2 = \iint\limits_{S_2} \frac{dxdy}{25 + \sin^2(x + y) + \cos^2 y},$$

где $S_2$ – квадрат $|x|+|y|\le 5$, $S_1$ – круг $x^2+y^2\le 16$.

Оценим первый интеграл. Областью интегрирования является круг радиуса $R=4$, площадь которого $S=16\pi$. Так как в данной области функция $f(x,y)=1/\sqrt{25-x^2-y^2}$ удовлетворяет соотношениям $1/\sqrt{25-0}\le$ $\le 1/\sqrt{25-x^2-y^2}\le 1/\sqrt{25-16}$, т.е. $1/5\le 1/\sqrt{25-x^2-y^2}\le 1/3$, то в соответствии с неравенствами (19.2) получаем $(16/5)\,\pi\le I_1\le(16/3)\,\pi$.

Переходим к оценке второго интеграла. Областью интегрирования является квадрат с вершинами $A(-5,0)$, $B(0,5)$, $C(5,0)$, $D(0,-5)$. Длина его стороны $a=5\sqrt{2}$, а площадь S=50. Поскольку $1/27\le 1/(25+\sin^2(x+y)+\cos^2 y)\le$ $\le 1/25$, то $1{,}85\le I_2\le 2$.

## 19.2. Вычисление двойного интеграла в декартовых прямоугольных координатах

Различают два основных вида области интегрирования:

1) область первого вида $S_1$, т.е. область $A_1A_2B_2B_1$, ограниченную слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ соответственно, снизу – кривой $y=\varphi_1(x)$, сверху – кривой $y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)\le\varphi_2(x))$, каждая из которых пересекается с вертикалью $x=\alpha$ $(a\le\alpha\le b)$ только в одной точке (рис. 19.3);

2) область второго вида $S_2$, т.е. область $C_1D_1D_2C_2$, ограниченную снизу и сверху прямыми $y=c$, $y=d$ соответственно, слева – кривой $x=\psi_1(y)$, справа – кривой $x=\psi_2(y)$ $(\psi_1(y)\le\psi_2(y))$, каждая из которых пересекается с горизонталью $y=\beta$ $(c\le\beta\le d)$ только в одной точке (рис. 19.4).

Замечание. В некоторых случаях точки $A_1$ и $A_2$, $B_1$ и $B_2$, $C_1$ и $C_2$, $D_1$ и $D_2$ могут сливаться в одну.

Если для функции $f(x,y)$, определенной в области $S_1$, существует двойной интеграл, а при каждом постоянном значении $x$ из $[a,b]$ простой интеграл

$$I(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

то существует также и повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy=\int\limits_a^b\{\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\}\,dx$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dS=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \qquad (19.3)$$

В случае области второго рода $S_2$

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \tag{19.4}$$

в предположении, что наряду с двойным интегралом существует определенный интеграл по $x$ при постоянном $y$.

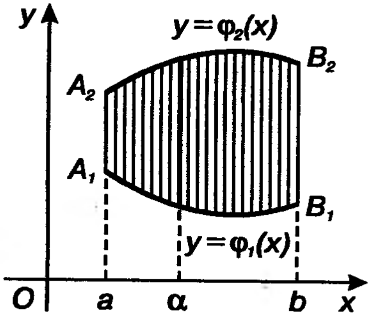


Рис. 19.3

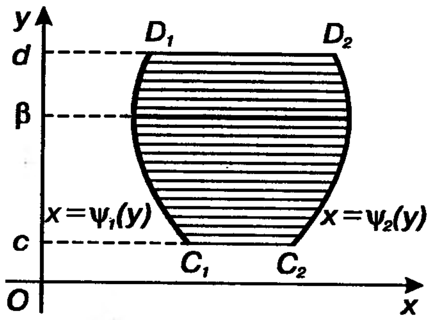


Рис. 19.4

Если область $S$ можно рассматривать как область первого вида $S_1$ и как область второго вида $S_2$, то при выполнении указанных условий применимы обе формулы (19.3) и (19.4), поэтому

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

По этой формуле осуществляется изменение порядка интегрирования при вычислении соответствующего двойного интеграла.

Пусть область $S$ является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, причем $a \le x \le b,\ c \le y \le d$ (рис. 19.5), обозначим его так: $S = [a, b; c, d]$.

Если функция $f(x, y)$, удовлетворяет в этом прямоугольнике условиям, о которых говорилось выше, то

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy, \tag{19.5}$$

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{19.6}$$

Если функция $f(x, y)$, интегрируемая в прямоугольнике $S=[a, b; c, d]$, может быть представлена в виде произведения функции только от $x$ на функцию только от $y$: $f(x, y)=\varphi(x)\psi(y)$, то

$$\iint\limits_S \varphi(x)\psi(y)\,dxdy=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\int\limits_c^d \psi(y)\,dy. \qquad (19.7)$$

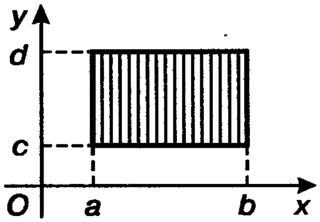


Рис. 19.5

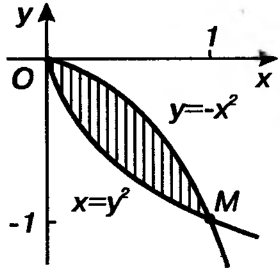


Рис. 19.6

**Пример 19.2.** Вычислить $\iint\limits_S xydxdy$, где область $S$ является прямоугольником $[4, 8; 1, 2]$.

Задача сводится к вычислению повторного интеграла с помощью формулы (19.5). По этой формуле интегрирование выполняется сначала по $y$, в пределах от $c$ до $d$, при произвольном постоянном $x$, а потом – по $x$, в пределах от $a$ до $b$.

Формула (19.5) в данном случае принимает вид

$$\iint\limits_S xydxdy=\int\limits_4^8 dx\int\limits_1^2 xydy.$$

Так как

$$\int\limits_1^2 xydy=x\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2=\frac{x}{2}(4-1)=\frac{3}{2}x,$$

то

$$\int\limits_4^8 dx\int\limits_1^2 xydy=\int\limits_4^8 \frac{3}{2}xdx=\frac{3}{2}\int\limits_4^8 xdx=\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_4^8=\frac{3}{4}(64-16)=36.$$

Следовательно, $\iint\limits_S xydxdy=36.$

**Замечание.** Тот же результат можно получить и по формуле (19.6).

Действительно,

$$\int_4^8 xydx = y\frac{x^2}{2}\Big|_4^8 = \frac{y}{2}(64-16) = 24y,$$

поэтому

$$\int_1^2 dy \int_4^8 xydx = \int_1^2 24ydy = 12y^2\Big|_1^2 = 12(4-1) = 36.$$

Пример 19.3. Вычислить $\iint\limits_S x^2ydxdy$, $S$ – область, ограниченная линиями $y=-x^2$, $x=y^2$.

Данные линии пересекаются в двух точках $O(0,0)$, $M(1,-1)$ (рис. 19.6). Область $S$ можно рассматривать как область первого вида $S_1$ и как область второго вида $S_2$. Рассматривая ее как область первого вида, получаем следующие пределы интегрирования $a=0$, $b=1$, $y=\varphi_1(x)=-\sqrt{x}$, $y=\varphi_2(x)=-x^2$. По формуле (19.3) имеем

$$\iint\limits_S x^2ydxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} x^2ydy.$$

Так как

$$\int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} x^2ydy = \frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_{y=-\sqrt{x}}^{y=-x^2} = \frac{x^2(-x^2)^2}{2} - $$

$$-\frac{x^2(-\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{2},$$

то

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} x^2ydy = \int_0^1 \left(\frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = \left(\frac{x^7}{14} - \frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{14} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{56}.$$

Следовательно, $\iint\limits_S x^2ydxdy = -\frac{3}{56}$.

Замечание. Рассматривая данную область как область второго вида, находим следующие пределы интегрирования: $c=-1$, $d=0$, $x=\psi_1(y)=y^2$, $x=\psi_2(y)=\sqrt{-y}$, поэтому

$$\iint\limits_S x^2ydxdy = \int_{-1}^0 dy \int_{y^2}^{\sqrt{-y}} x^2ydx.$$

Вычислив повторный интеграл, получим тот же результат.

Пример 19.4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S x^2y^3dxdy$, где $S$ – прямоугольник [1, 3; 2, 4].

Подынтегральная функция представляет собой произведение функции только от $x$ на функцию только от $y$, т.е. $x^2y^3 = \varphi(x)\,\psi(y)$, где $\varphi(x) = x^2$, $\psi(y) = y^3$, поэтому при вычислении двойного интеграла можно пользоваться формулой (19.7):

$$\iint\limits_S x^2y^3dxdy = \int\limits_1^3 dx\int\limits_2^4 x^2y^3dy = \int\limits_1^3 x^2dx\int\limits_2^4 y^3dy =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 \frac{y^4}{4}\Bigg|_2^4 = \frac{1}{3}(27-1)(64-4) = 520.$$

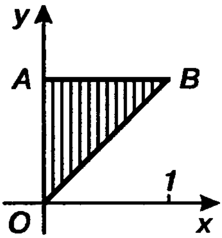

Рис. 19.7

Пример 19.5. Вычислить $\iint\limits_S e^{-y^2}dxdy$, где $S$ – треугольник с вершинами $O\,(0, 0)$, $A\,(0, 1)$, $B\,(1, 1)$.

Данная область ограничена прямыми $y = x$, $x = 0$, $y = 1$ (рис. 19.7). Рассматривая ее как область первого вида, находим

$$\iint\limits_S e^{-y^2}dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 e^{-y^2}dy.$$

Интеграл $\int e^{-y^2}dy$ является «неберущимся» интегралом. Мы не можем выразить его через элементарные функции.

Поменяв порядок интегрирования, получим

$$\iint\limits_S e^{-y^2}dxdy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^y e^{-y^2}dx.$$

Так как $\int\limits_0^y e^{-y^2}dx = xe^{-y^2}\Big|_0^y = ye^{-y^2}$, то

$$\iint\limits_S e^{-y^2}dxdy = \int\limits_0^1 ye^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{2e}+\frac{1}{2} \approx 0{,}3161.$$

## 19.3. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах

**Криволинейные координаты на плоскости.** Рассмотрим непрерывно дифференцируемые функции $u$ и $v$ прямоугольных декартовых координат $x$ и $y$:

$$u = \varphi(x, y),\quad v = \psi(x, y). \tag{19.8}$$

Предположим, что уравнения (19.8) однозначно разрешимы относительно $x$ и $y$:

$$x = \varphi_1(u, v),\ y = \psi_1(u, v), \tag{19.9}$$

где $\varphi_1(u, v), \psi_1(u, v)$ – непрерывно дифференцируемые функции $u$ и $v$.

Придавая поочередно $u$ и $v$ различные (возможные для них) постоянные значения, получаем два семейства линий на плоскости (рис. 19.8, *а*); эти линии называют координатными линиями. Положение точки $M$ на плоскости определяется парой чисел $(x, y)$ или парой чисел $u$, $v$, где $u$ и $v$ выражены формулами (19.8). Числа $u$, $v$ называются криволинейными координатами точки $M$ на плоскости. Примером криволинейных координат являются полярные координаты, в этом случае $u = \rho$, $v = \varphi$; координатные линии – концентрические окружности и полупрямые, исходящие из начала координат (рис. 19.6, *б*). Прямоугольные координаты – также частный случай криволинейных $u = x$, $v = y$, координатные линии – прямые, параллельные осям координат (рис. 19.8, *в*).

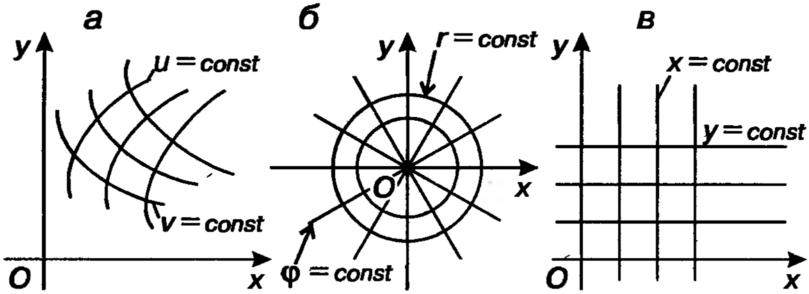


Рис. 19.8

**Замена переменных в двойных интегралах.** Если непрерывно дифференцируемые функции (19.9) осуществляют взаимно однозначное отображение области $S$ плоскости $Oxy$ на область $G$ плоскости $Ouv$ (рис. 19.9), то

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_G f(\varphi_1(u, v), \psi_2(u, v))\, |J|\, dudv, \tag{19.10}$$

где $J(u, v)$ – функциональный определитель (якобиан):

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{19.11}$$

В случае перехода к полярным координатам $\rho$, $\varphi$ ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) формула (19.10) принимает вид

$$\iint\limits_S f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho d\rho d\varphi, \tag{19.12}$$

так как $|J| = \rho$.

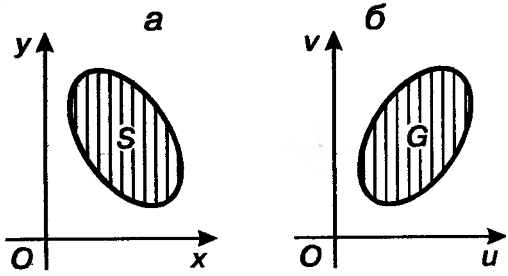


Рис. 19.9

Если область $G$ (рис. 19.10) ограничена лучами, образующими с полярной осью углы $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, и кривыми $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi))$, то

$$\iint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \qquad (19.13)$$

Если область $G$ охватывает начало координат, то

$$\iint_G f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho. \qquad (19.14)$$

Пример 19.6. Вычислить $\iint_S (x^2+y^2)\,dxdy$, где область $S$ ограничена линиями $y = x$, $y = \sqrt{3x}$ и дугой окружности $x^2+y^2=8$, лежащей в первой четверти (рис. 19.11).

Применим формулы (19.12), (19.13), предварительно выразив уравнения границ области и подынтегральную функцию в полярных координатах. Так как $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то уравнения границ области принимают вид $\rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi_1 = \pi/4$; $\rho\sin\varphi = \sqrt{3}\,\rho\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$, $\varphi_2 = \pi/3$;

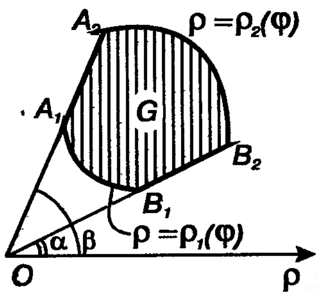


Рис. 19.10

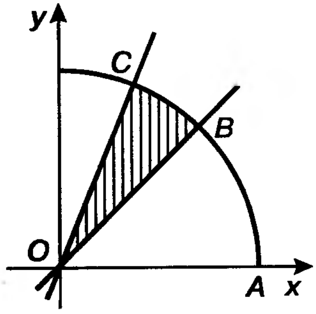


Рис. 19.11

$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=8$, $\rho=\sqrt{8}$, а подынтегральная функция $x^2+y^2=$ $=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$. Следовательно,

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}\rho^2\rho d\rho=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{8}}\rho^3 d\rho=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{8}}d\varphi=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}16d\varphi=16\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=16\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}\pi.$$

Пример 19.7. Вычислить $\iint\limits_S\sqrt{k^2-x^2/a^2-y^2/b^2}\,dxdy$, где $S$ – область, ограниченная линиями $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $x^2/k^2a^2+y^2/b^2k^2=1$, $k>1$.

Для вычисления данного двойного интеграла введем так называемые обобщенные полярные координаты:

$$x/a=\rho\cos\varphi,\ \ y/b=\rho\sin\varphi,\ \ \text{или}\ \ x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi. \tag{I}$$

Найдем якобиан данного преобразования (считая $\rho=u$, $\varphi=v$). Так как $x'_\rho=a\cos\varphi$, $x'_\varphi=-a\rho\sin\varphi$, $y'_\rho=b\sin\varphi$, $y'_\varphi=b\rho\cos\varphi$, то, по формуле (19.11) получим

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\rho.$$

Подынтегральная функция и уравнения границ области $S$ примут вид

$$\sqrt{k^2-x^2/a^2-y^2/b^2}=\sqrt{k^2-\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\sqrt{k^2-\rho^2},$$

$$x^2/a^2+y^2/b^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2,\ \rho^2=1,\ \rho_1=1,$$

$$x^2/k^2a^2+y^2/k^2b^2=1,\ x^2/a^2+y^2/b^2=k^2,\ \rho^2=k^2,\ \rho_2=k.$$

Итак, область $S$, ограниченную эллипсами, преобразование (I) переводит в другое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $\rho=1$ и $\rho=k$ с центром в точке O, угол $\varphi$ меняется от 0 до $2\pi$. По формуле (19.14) находим

$$\iint\limits_S\sqrt{k^2-x^2/a^2-y^2/b^2}\,dxdy=\iint\limits_G\sqrt{k^2-\rho^2}\,d\rho d\varphi=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^k\sqrt{k^2-\rho^2}\,\rho d\rho=$$

$$=ab\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^k (k^2-\rho^2)^{1/2}\left[-\frac{1}{2}d\,(k^2-\rho^2)\right]\right\}d\varphi=$$

$$=ab\int_0^{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}\frac{(k^2-\rho^2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^k\right\}d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{3}[0-(k^2-1)^{3/2}]\,ab\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2\pi ab}{3}(k^2-1)^{3/2}.$$

## 19.4. Вычисление площадей плоских областей

Площадь $S$ плоской области $S$ выражается формулой

$$S=\iint\limits_S ds,\ \text{или}\ S=\iint\limits_S dxdy. \tag{19.15}$$

В криволинейных координатах этот интеграл имеет вид

$$S=\iint\limits_\sigma |J\,(u,v)|\,dudv, \tag{19.16}$$

в полярных координатах

$$S=\iint\limits_\sigma \rho d\rho d\varphi. \tag{19.17}$$

Пример 19.8. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $x=y^2+1$, $x=5$.

Данная область ограничена параболой $x=y^2+1$ и прямой $x=5$ (рис. 19.12). Решая систему уравнений $x=y^2+1$, $y=0$, находим точку $A\,(1,0)$ пересечения параболы с осью $Ox$. Из системы уравнений $x=y^2+1$, $x=5$ находим две точки пересечения параболы с прямой $x=5$: $B\,(5,2)$, $C\,(5,-2)$. Область $ABC$ можно рассматривать как область первого вида и как область второго вида.

Применяя формулу (19.15) и рассматривая область $ABC$ как область первого вида, находим

$$S=\iint dxdy=\int_1^5 dx\int_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}}dy=\int_1^5 y\Big|_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}}dx=$$

$$=\int_1^5(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1})\,dx=2\int_1^5\sqrt{x-1}\,dx=2\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^5=$$

$$=\frac{4}{3}[\,(5-1)^{3/2}-(1-1)^{3/2}]=10\frac{2}{3}.$$

З а м е ч а н и е. Рассматривая область $ABC$ как область второго вида, получаем

$$S=\int_{-2}^{2}dy\int_{y^2+1}^{5}dx=\int_{-2}^{2}(5-y^2-1)\,dy=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy=$$

$$=4y\Big|_{-2}^{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=16-\frac{16}{3}=10\frac{2}{3}.$$

П р и м е р 19.9. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $y=2-x^2$, $y^3=x^2$.

По формуле (19.15) получаем

$$S=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^{2/3}}^{2-x^2}dy=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^{2/3})\,dx=\ 2x\Big|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}-\frac{3x^{5/3}}{5}\Big|_{-1}^{1}=2\frac{2}{15}.$$

П р и м е р 19.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

В силу симметрии кривой относительно осей координат достаточно вычислить площадь одной четверти данной фигуры. Переходим к полярным координатам, полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Полярное уравнение лемнискаты имеет вид $\rho^2=2a^2\cos2\varphi$, или $\rho=a\sqrt{2\cos2\varphi}$. Для части фигуры расположенной в первом координатном углу, имеем $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi/4$, $\rho_1=0$, $\rho_2=a\sqrt{2\cos2\varphi}$.

Обозначая площадь этой фигуры через $S_1$, по формуле (19.17) получаем:

$$S_1=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}}\rho d\rho=\int_0^{\pi/4}\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{a\sqrt{2\cos2\varphi}}d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/4}\cos2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{2},\ S=4S_1=2a^2.$$

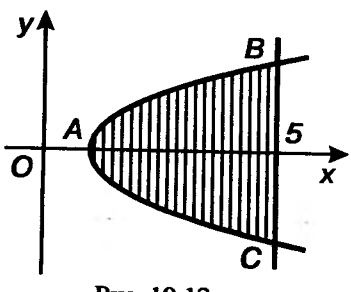


Рис. 19.12

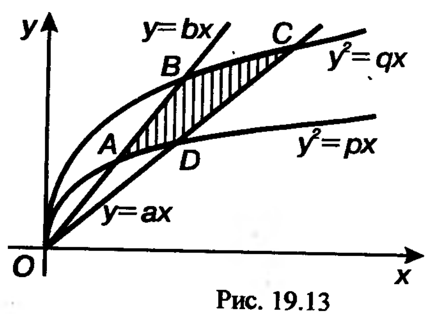


Рис. 19.13

Пример 19.11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $y = ax$, $y = bx$ $(0 < p < q,\ 0 < a < b)$.

Фигура представляет собой криволинейный четырехугольник, ограниченный двумя параболами и двумя прямыми, проходящими через начало координат (рис. 19.13). Введем новые криволинейные координаты $u$, $v$, связанные с координатами $x$ и $y$ формулами

$$u = y^2/x,\ v = y/x,\ (p \le u \le q,\ a \le v \le b). \qquad (1)$$

Эта замена переменных подсказана видом области интегрирования (в качестве новых переменных взяты параметры, входящие в уравнения линий, ограничивающих данную фигуру). Из уравнений (1) выражаем $x$ и $y$ через $u$ и $v$:

$$x = u/v^2,\ y = u/v. \qquad (2)$$

Находим якобиан преобразования (2):

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v^2} & -\dfrac{2u}{v^3} \\ \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{v^4} + \frac{2u}{v^4} = \frac{u}{v^4}.$$

По формуле (19.16) получаем

$$S = \iint_\sigma \frac{u}{v^4}\, dudv = \int_a^b dv \int_p^q \frac{u}{v^4}\, du = \int_a^b \frac{q^2 - p^2}{2v^4}\, dv =$$

$$= \frac{q^2 - p^2}{2} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{v^3}\right)\Bigg|_a^b = \frac{q^2 - p^2}{6}\left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{a^3}\right) = \frac{(q^2 - p^2)(b^3 - a^3)}{6a^3b^3}.$$

## 19.5. Вычисление объемов тел

Объём цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей из плоскости $Oxy$ область $S$ (см. рис. 19.2), вычисляется по формуле

$$V = \iint_S f(x, y)\, dxdy. \qquad (19.18)$$

Пример 19.12. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $x + 2y - z = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $z = 0$.

Данное тело ограничено сверху плоскостью $x + 2y - z = 0$, или

$$z = x + 2y, \qquad (1)$$

с боков плоскостями

$$2x + 3y - 18 = 0,\ x - 2y - 2 = 0,\ x = 3, \qquad (2)$$

параллельными оси $Oz$ (уравнения не содержат координаты $z$), и снизу – плоскостью $z = 0$ (плоскостью $Oxy$).

В плоскости $Oxy$ ($z=0$) уравнения (2) являются уравнениями прямых, по которым плоскости (2) пересекают плоскость $Oxy$. Решая каждые два из них, находим три точки пересечения: $A(3,4)$, $B(6,2)$, $C(3,1/2)$. Следовательно, плоскости (2) вырезают в плоскости $Oxy$ область $S$, которая является треугольником $ABC$ (рис. 19.14). На плоскости (1) точкам $A$, $B$, $C$ будут соответствовать точки $P(3,4,11)$, $Q(6,2,10)$, $R(3,1/2,4)$ – вершины данного тела.

Так как в данном случае $z=f(x,y)=x+2y$, пределы интегрирования по $x$: $x_1=3$, $x_2=6$, пределы интегрирования по $y$: $y_1=6-2x/3$, $y_2=x/2-1$ (получено из уравнений прямых $AB$ и $BC$), то по формуле (19.18) находим

$$V=\iint\limits_S (x+2y)\,dxdy=\int\limits_3^6 dx\int\limits_{x/2-1}^{6-2x/3}(x+2y)\,dy=\int\limits_3^6 (xy+y^2)\Bigg|_{y=x/2-1}^{y=6-2x/3}dx=$$

$$=\int\limits_3^6\left\{x\left(6-\frac{2}{3}x\right)+\left(6-\frac{2}{3}x\right)^2-\left[x\left(\frac{1}{2}x-1\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\right]\right\}dx=\int\limits_3^6\left(35-\frac{35}{36}x^2\right)dx=35\int\limits_3^6\left(1-\frac{x^2}{36}\right)dx=$$

$$=35\left(x-\frac{x^3}{36\cdot 3}\right)\Bigg|_3^6=43{,}75.$$

Пример 19.13. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2-z=0$, координатными плоскостями и плоскостями $x=a$, $y=b$, $(a>0,\ b>0)$.

Данная поверхность является параболоидом вращения с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью $Oz$. Тело, ограниченное этой поверхностью и указанными плоскостями, изображено на рис. 19.15. Область $S$, вырезаемая плоскостями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, является прямоугольником $OACB$.

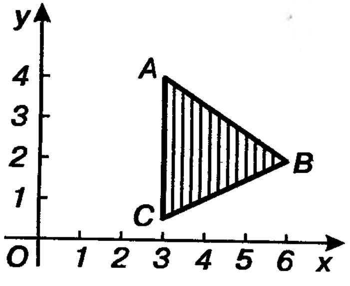


Рис. 19.14

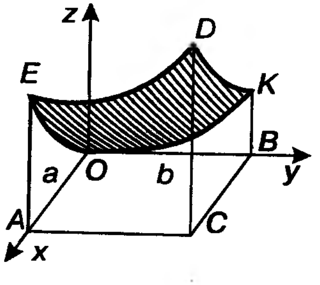


Рис. 19.15

Так как $z=x^2+y^2$, то по формуле (19.18) имеем

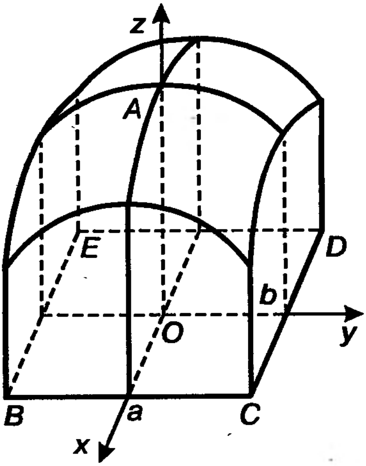


Рис. 19.16

$$V=\iint_S (x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^a dx\int_0^b (x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int_0^a \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b} dx=\int_0^a \left(x^2b+\frac{b^3}{3}\right)dx=$$

$$\left(\frac{bx^3}{3}+\frac{b^3}{3}x\right)\Bigg|_0^a=\frac{ba^3+b^3a}{3}=\frac{ab}{3}(a^2+b^2).$$

Пример 19.14. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z=c^2-x^2-y^2$ и плоскостями $x=\pm a,\ y=\pm b\ (a^2+b^2<c^2)$.

Поверхность, ограничивающая цилиндрическое тело сверху, является параболоидом вращения с вершиной в точке $A\,(0,0,c)$, область интегрирования – прямоугольник $BCDE$ со сторонами $2a,\ 2b$ и центром в начале координат (рис. 19.16).

Объем тела

$$V=\int_{-a}^{a} dx\int_{-b}^{b}(c^2-x^2-y^2)\,dy=\int_{-a}^{a}\left(c^2y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-b}^{y=b} dx=$$

$$=2\int_{-a}^{a}\left(c^2b-x^2b-\frac{b^3}{3}\right)dx=2\left(c^2bx-\frac{x^3b}{3}-\frac{b^3x}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4ab}{3}(3c^2-(a^2+b^2)).$$

Замечание. Исходя из соображений симметрии, данный объем можно вычислить по формуле

$$V=4\int_0^a dx\int_0^b (c^2-x^2-y^2)\,dy=4\int_0^a\left(c^2b-x^2b-\frac{b^3}{3}\right)dx=\frac{4ab}{3}(3c^2-(a^2+b^2)).$$

Пример 19.15. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2+z-4=0$ и плоскостью $z=0$.

Разрешая первое уравнение относительно $z$, получаем $z=4-x^2-y^2$. Это уравнеиие определяет параболоид вращения с вершиной в точке $A\,(0,0,4)$, являющейся высшей точкой поверхности (рис. 19.17). Параболоид $z=4-x^2-y^2$ и плоскость $z=0$ пересекаются по окружности, уравнение которой в плоскости $Oxy$ имеет вид $x^2+y^2=4$.

Формула (19.18) в данном случае запишется так:

$$V = \iint_S (4 - x^2 - y^2)\, dxdy,$$

где область $S$ ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 4$.

Чтобы вычислить интеграл, перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Так как $4 - x^2 - y^2 = 4 - \rho^2$, $J(\rho, \varphi) = \rho$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 = 2\pi$, то

$$\iint_S (4 - x^2 - y^2)\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - \rho^2)\, \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( 2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Bigg|_0^2 d\varphi = 8\pi.$$

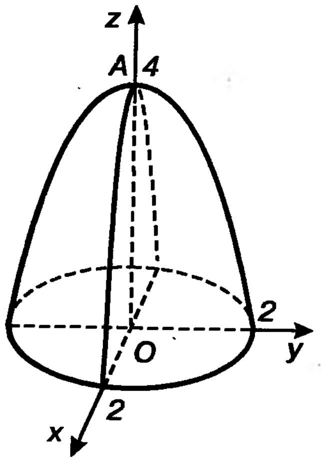


Рис. 19.17

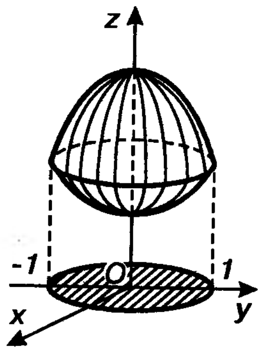


Рис. 19.18

Пример 19.16. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 3z - 7 = 0$.

Данное тело ограничено двумя параболоидами (рис. 19.18). Линии пересечения параболоидов определяются системой уравнений $z = 1 + x^2 + y^2$, $3z = 7 - x^2 - y^2$. Исключая из этих уравнений $z$, получаем $x^2 + y^2 = 1$. Из первого уравнения при $x^2 + y^2 = 1$ имеем $z = 2$. Итак, линией пересечения является окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ (пересечение прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и плоскости $z = 2$). Проекция этой линии на плоскость $Oxy$ также является окружностью

$x^2+y^2=1$, $z=0$. Искомый объем равен разности объемов двух цилиндрических тел с одним основанием и ограниченных сверху и снизу соответственно поверхностям: $z=(7-x^2-y^2)/3$, $z=1+x^2+y^2$, т.е.

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_S \frac{1}{3}(7-x^2-y^2)\,dxdy-\iint\limits_S (1+x^2+y^2)\,dxdy,$$

где область $S$ есть круг $x^2+y^2\le 1$.

Переходя к полярным координатам, находим

$$V=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \frac{1}{3}(7\rho-\rho^3)\,d\rho-\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1(\rho+\rho^3)\,d\rho=\frac{2}{3}\pi.$$

## 19.6. Вычисление площадей поверхностей

**Случай явного задання поверхности.** Площадь $S$ гладкой поверхности $z=z(x,y)$ выражается формулой

$$S=\iint\limits_P \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy, \qquad (19.19)$$

где $P$ – проекция данной поверхности на плоскость $Oxy$.

Если поверхность имеет уравнение вида $y=y(x,z)$, то

$$S=\iint\limits_{P_1} \sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz, \qquad (19.20)$$

где $P_1$ – проекция поверхности на ось $Oxz$.

Если поверхность задана уравнением $x=x(y,z)$, то

$$S=\iint\limits_{P_2} \sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz, \qquad (19.21)$$

где $P_2$ – проекция поверхности на ось $Oyz$.

**Случай неявного задання поверхности.** Площадь $S$ поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, выражается интегралом

$$S=\iint\limits_P \frac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{|F_z'|}\,dxdy, \qquad (19.22)$$

где $P$ – проекция поверхности на плоскость $Oxy$.

**Случай параметрнческого задания поверхности.** Если поверхность задана параметрическими уравнениями

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v), \qquad (19.23)$$

где $(u,v)\in P$ и $P$ – ограниченная замкнутая квадрируемая область, в которой функции $x, y, z$ непрерывно дифференцируемы, то

$$S=\iint\limits_P \sqrt{EG-F^2}\,dudv, \tag{19.24}$$

где

$$E=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2,\ G=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2,\ F=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'. \tag{19.25}$$

Пример 19.17. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2-Rx=0$, заключенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (боковая поверхность «тела Вивиани», рис. 19.19).

Применим формулу (19.20). Поскольку плоскостью $Oxz$ цилиндр разделяется на две равные части, то можно вычислить половину искомой площади поверхности. Вычислим площадь той части поверхности, уравнение которой $y=\sqrt{Rx-x^2}$. Для определения области интегрирования $P$ следует спроецировать на плоскость $Oxz$ линию пересечения поверхностей, уравнение которой находится исключением $y$ из данных уравнений. Вычитая одно уравнение из другого, получаем $z^2=R^2-Rx$. Это уравнение параболы, лежащей в плоскости $Oxz$, с вершиной на оси $Ox$ на расстоянии $R$ от начала координат и пересекающей ось $Oz$ в точках $z=R, z=-R$. Дуга указанной параболы вместе с соответствующим отрезком оси $Oz$ составляют границу области.

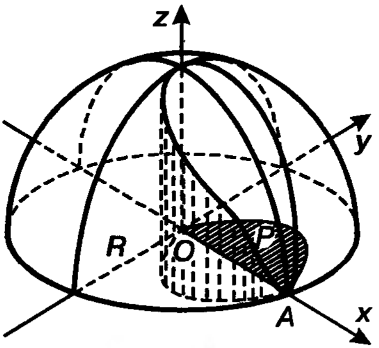

Рис. 19.19

Так как

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{R-2x}{2\sqrt{Rx-x^2}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=0,\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{(R-2x)^2}{4(Rx-x^2)}}=\frac{R}{2\sqrt{Rx-x^2}},$$

то

$$\frac{1}{2}S=\int\limits_0^R\int\limits_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}}\frac{R}{2\sqrt{Rx-x^2}}\,dxdz=\frac{R}{2}\int\limits_0^R\frac{1}{\sqrt{Rx-x^2}}\,z\Bigg|_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}}dx=$$

$$=R\int\limits_0^R\frac{\sqrt{R^2-Rx}}{\sqrt{Rx-x^2}}\,dx=R\int\limits_0^R\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{x}}\,dx=2R\sqrt{R}\sqrt{x}\Big|_0^R=2R^2,\ S=4R^2.$$

Пример 19.18. Вычислить площадь поверхности конуса $x^2+y^2-z^2=0$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2-2ax=0$.

Цилиндр отсекает на поверхности конуса две части, симметричные относительно плоскости $Oxy$. На рис. 19.20 изображена только верхняя часть $(z \ge 0)$. Вычислим площадь $S$ этой части, проекция которой на плоскость $Oxy$ есть круг $x^2+y^2 \le 2ax$.

Так как для рассматриваемой части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}$, то по формуле (19.19) получаем $S_1=\iint\limits_P \sqrt{2}\,dxdy$, где $P$ – окружность $x^2+y^2-2ax=0$.

Переходя к полярным координатам, находим

$$S_1=\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho d\rho = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi =$$

$$=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} 4a^2\cos^2\varphi d\varphi = 2a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$=2a^2\sqrt{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2a^2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\pi a^2\sqrt{2}.$$

Следовательно, вся искомая площадь $S=2S_1=2\pi a^2\sqrt{2}$.

Пример 19.19. Найти площадь поверхности, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=r^2$ из сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(r<R)$.

Цилиндр вырезает из сферы две части, верхняя из них изображена на рис. 19.21. Вычислим площадь $S_1$ поверхности этой сферы. Для верхней полусферы

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Следовательно, $S_1=\iint\limits_P \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,dxdy$, $P$ – круг $x^2+y^2 \le r^2$.

Переходя к полярным координатам, находим

$$S_1=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r}\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r}(R^2-\rho^2)^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}d\,(R^2-\rho^2)\right)=$$

$$=-R\int_0^{2\pi}(R^2-\rho^2)^{1/2}\Bigg|_0^r d\varphi=-2\pi R\,((R^2-r^2)^{1/2}-R)=2\pi R\,(R-\sqrt{R^2-r^2}).$$

Итак, $S=2S_1=4\pi R\,(R-\sqrt{R^2-r^2})$.

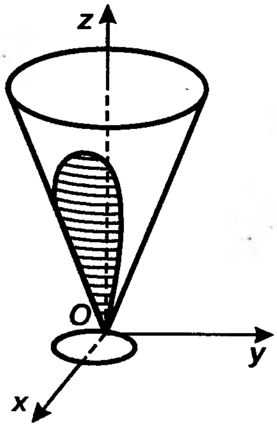


Рис. 19.20

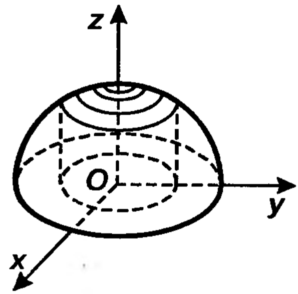


Рис. 19.21

Пример 19.20. Вычислить площадь частей сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, вырезанных из нее цилиндром $x^2+y^2=Rx$, воспользовавшись параметрическими уравнениями сферической поверхности: $x=R\sin u\cos v$, $y=R\sin u\sin v$, $z=R\cos u$ $(0\le u\le\pi,\ 0\le v\le 2\pi)$.

Здесь идет речь о вычислении площади верхнего и нижнего оснований «тела Вивиани» (см. рис. 19.19). Воспользуемся формулой (19.24), для чего предварительно найдем коэффициенты $E$, $F$, $G$. Так как $x'_u=R\cos u\cos v$, $y'_u=R\cos u\sin v$, $z'_u=-R\sin u$, $x'_v=-R\sin u\sin v$, $y'_v=R\sin u\cos v$, $z'_v=0$, то по формулам (19.25) находим $E=R^2$, $F=0$, $G=R^2\sin^2 u$. Следовательно, $\sqrt{EG-F^2}=R^2\sin u$.

Ограничимся рассмотрением четверти изучаемой поверхности, лежащей в первом октанте. Для точек «кривой Вивиани», т.е. кривой пересечения сферы и цилиндра (в пределах первого октанта), $u+v=\pi/2$. Действительно подставляя выражения $y$ и $x$ через $u$ и $v$ в уравнение цилиндра $x^2+y^2=Rx$, получаем $\sin u=\cos v$, и поскольку для рассматриваемых точек, очевидно, $0\le u\le\pi/2$, $0\le v\le\pi/2$, то отсюда следует, что $u+v=\pi/2$.

Установив на основании сказанного пределы изменения $u$ и $v$, по формуле (19.24) получим

$$S = 4R^2 \int_0^{\pi/2} dv \int_0^{\pi/2-v} \sin u\, du = 4R^2 \int_0^{\pi/2} (-\cos u)\Big|_0^{\pi/2-v} dv =$$

$$= 4R^2 \int_0^{\pi/2} (1-\sin v)\, dv = 4R^2 (\pi/2 - 1).$$

## 19.7. Приложения двойных интегралов в механике

**Масса и статические моменты пластинки.** Если $S$ – область плоскости $Oxy$, занятая пластинкой, а $p(x,y)$ – поверхностная плотность в точке $P(x,y)$, то масса пластинки $m$ выражается формулой

$$m = \iint_S p(x,y)\, dxdy, \tag{19.26}$$

а статические моменты $M_x$ и $M_y$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ определяются двойными интегралами

$$M_x = \iint_S yp(x,y)\, dxdy,\ M_y = \iint_S xp(x,y)\, dxdy. \tag{19.27}$$

Если пластинка однородна, то $p(x,y) = \text{const}$; эту постоянную часто полагают равной 1.

**Координаты центра тяжести пластинки.** Если $C(x_0, y_0)$ – центр тяжести пластинки, то

$$x_0 = M_y/m,\ y_0 = M_x/m, \tag{19.28}$$

где $m$ – масса пластинки, $M_x$, $M_y$ – ее статические моменты относительно осей координат, определяемые соответственно формулами (19.26) и (19.27).

В случае однородной пластинки формулы (19.28) с учетом формул (19.26), (19.27) принимают вид

$$x_0 = \iint_S xdxdy \Big/ \iint_S dxdy,\ y_0 = \iint_S ydxdy \Big/ \iint_S dxdy. \tag{19.29}$$

(В формулах (19.29) знаменатель дроби – площадь пластинки, центр тяжести которой отыскивается).

**Момент инерции пластинки.** Моменты инерции пластинки относительно осей $Ox$ и $Oy$ соответственно определяются формулами:

$$I_x = \iint_S y^2 p(x,y)\, dxdy,\ I_y = \iint_S x^2 p(x,y)\, dxdy, \tag{19.30}$$

момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,p(x,y)\,dxdy=I_x+I_y. \tag{19.31}$$

Полагая $p(x,y)=1$ в формулах (19.30) и (19.31), получаем геометрические моменты инерции плоской фигуры.

**Координаты центра тяжести тела.** Если $C(x_0,y_0,z_0)$ – центр тяжести однородного вертикального цилиндрического тела, имеющего своим основанием область $S$ на плоскости $Oxy$ и ограниченного поверхностью $z=f(x,y)$, то

$$x_0=M_{yz}/m,\ y_0=M_{xz}/m,\ z_0=M_{xy}/m, \tag{19.32}$$

где $m$ – масса тела, а $M_{yz}$, $M_{xz}$, $M_{xy}$ – статические моменты тела относительно плоскостей $Oyz$, $Oxz$, $Oxy$, определяемые формулами:

$$M_{yz}=\iint\limits_S xzdxdy,\ M_{xz}=\iint\limits_S yzdxdy,\ M_{xy}=\frac{1}{2}\iint\limits_S z^2dxdy. \tag{19.33}$$

**Моменты инерции цилиндрического тела.** Моменты инерции цилиндрического тела, ограниченного поверхностью $z=f(x,y)$, ее проекцией $S$ на плоскость $Oxy$ и проецирующим цилиндром с образующими, параллельными оси $Oz$, относительно этой оси и относительно плоскостей $Ozx$, $Oyz$ выражаются формулами

$$I_z=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,zdxdy, \tag{19.34}$$

$$I_{zx}=\iint\limits_S y^2zdxdy,\ I_{yz}=\iint\limits_S x^2zdxdy. \tag{19.35}$$

При вычислении двойных интегралов в формулах (19.26) – (19.35) во многих случаях целесообразно перейти к полярным координатам.

Пример 19.21. Найти массу круглой пластинки радиуса $R$, если поверхностная плотность $p(x,y)$ материала пластинки в каждой точке $P(x,y)$ пропорциональна расстоянию точки $P$ от центра круга.

Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в центре круга, тогда координаты любой его точки удовлетворяют соотношению $x^2+y^2\le R^2$. Расстояние от точки $P(x,y)$ до начала координат определяется формулой $d=\sqrt{x^2+y^2}$, поэтому в соответствии с условием будем иметь $p(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$, где $k$ – коэффициент пропорциональности.

По формуле (19.26) имеем $m=\iint\limits_S k\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где $S$ – круг $x^2+y^2\le R^2$.

Переходя к полярным координатам, находим

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R k\rho\rho d\rho=k\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^R d\varphi=\frac{kR^3}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{2}{3}k\pi R^3.$$

**Пример 19.22.** Найти статические моменты $M_x$ и $M_y$ фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ и координатными осями, если в каждой точке фигуры плотность пропорциональна произведению координат этой точки.

По условию имеем $p(x,y)=kxy$, где $k$ – коэффициент пропорциональности, поэтому формулы (19.27) для данного случая примут вид

$$M_x=\iint_S kxyydxdy,\ M_y=\iint_S kxyxdxdy,$$

где $S$ – область, ограниченная дугой эллипса $y=(b/a)\sqrt{a^2-x^2}$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$ и координатными осями.

Найдем сначала статический момент данной фигуры относительно оси $Ox$:

$$M_x=\iint_S kxy^2dxdy=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} kxy^2dy.$$

Так как $\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} kxy^2dy=kx\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{kx}{3}\frac{b^3}{a^3}(\sqrt{a^2-x^2})^3$, то

$$M_x=\int_0^a\frac{kx}{3}\frac{b^3}{a^3}(\sqrt{a^2-x^2})^3dx=\frac{kb^3}{3a^3}\int_0^a x(a^2-x^2)^{3/2}dx=$$

$$=\frac{kb^3}{3a^3}\int_0^a(a^2-x^2)^{3/2}\left(-\frac{1}{2}d(a^2-x^2)\right)=-\frac{kb^3}{6a^3}\frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^a=\frac{kb^3a^2}{15}.$$

Аналогично находим статический момент фигуры относительно оси $Oy$:

$$M_y=\iint_S kx^2ydxdy=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} kyx^2dy=\int_0^a kx^2\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=\int_0^a\frac{kx^2}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{kb^2}{2}\int_0^a x^2dx-\frac{kb^2}{2a^2}\int_0^a x^4dx=$$

$$=\frac{kb^2}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^a-\frac{kb^2}{2a^2}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^a=\frac{kb^2a^3}{15}.$$

**Пример 19.23.** Найти центр тяжести фигуры, указанной в примере 19.22.

Координаты центра тяжести плоской фигуры определяются формулами (19.28). Статические моменты $M_x$, $M_y$ найдены в примере 19.22, осталось вычислить массу данной фигуры.

По формуле (19.26) находим

$$m=\iint_S kxy\,dx\,dy=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} kxy\,dy=\int_0^a kx\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dx=$$

$$=\int_0^a \frac{kx}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\int_0^a \frac{kb^2}{2}x\,dx-\int_0^a\frac{kb^2}{2a^2}x^3dx=$$

$$=\frac{kb^2}{2}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a-\frac{kb^2}{2a^2}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^a=\frac{kb^2a^2}{8}.$$

Так как $M_x=kb^3a^2/15$, $M_y=kb^2a^3/15$, то по формулам (19.28) имеем $x_0=M_y/m=8a/15$, $y_0=M_x/m=8b/15$.

**Пример 19.24.** Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболой $y^2=4ax+4a^2$ и прямой $y=2a-x$.

Воспользуемся формулами (19.29), для чего вычислим предварительно входящие в них двойные интегралы.

Найдем сначала интеграл, стоящий в знаменателе; он выражает площадь данной фигуры. Решая совместно уравнения $y^2=4ax+4a^2$, $y=2a-x$, находим точки $A(0,2a)$, $B(8a,-6a)$ пересечения параболы и прямой (рис. 19.22).

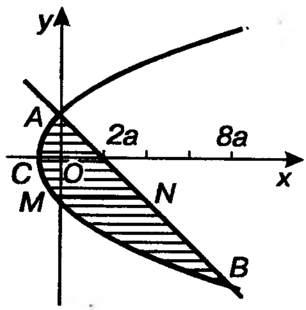


Рис. 19.22

В области $ABC$ при фиксированном $y$ $x$ меняется от $(y^2-4a^2)/4a$ (абсцисса точки $M$) до $2a-y$ (абсцисса точки $N$; выражения для абсцисс точек $M$ и $N$ получены из уравнений линий решением относительно $x$), а $y$ меняется от $-6a$ (ордината точки $B$) до $2a$ (ордината точки $A$). Следовательно,

$$\iint_S dx\,dy=\int_{-6a}^{2a}\int_{(y^2-4a^2)/4a}^{2a-y}dx\,dy=\int_{-6a}^{2a}\left(2a-y-\frac{y^2-4a^2}{4a}\right)dy=\frac{64}{3}a^2.$$

Вычисляем интегралы, стоящие в числителях формул (19.29):

$$\iint_S x\,dx\,dy=\int_{-6a}^{2a}\int_{(y^2-4a^2)/4a}^{2a-y}x\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-6a}^{2a}\frac{1}{2}x^2\Bigg|_{(y^2-4a^2)/4a}^{2a-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-6a}^{2a}\left(3a^2-4ay+\frac{3}{2}y^2-\frac{y^4}{16a^2}\right)dy=\frac{256}{5}a^3,$$

$$\iint_S ydxdy=\int_{-6a}^{2a}\int_{(y^2-4a^2)/4a}^{2a-y}ydydx=\int_{-6a}^{2a}\left(3ay-y^2-\frac{y^3}{4a}\right)dy=-\frac{128}{3}a^3.$$

По формулам (19.29) находим координаты центра тяжести:

$$x_0=\frac{(256/5)\,a^3}{(64/3)a^2}=\frac{12a}{5},\ y_0=\frac{-(128/3)a^3}{(64/3)a^2}=-2a.$$

## 19.8. Несобственные двойные интегралы

**Интегралы, распространенные на неограниченую область.** Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную в неограниченной области $S$. Предположим, что функция $f(x,y)$ интегрируема в любой конечной части $S'$ области $S$, т.е. существует двойной интеграл

$$I=\iint_{S'}f(x,y)\,dxdy. \tag{19.36}$$

Кривую $\gamma$, отсекающую область $S'$, всеми ее точками станем удалять в бесконечность так, чтобы наименьшее расстояние $R$ от ее точек до начала координат неограниченно возрастало, а отсекаемая ею переменная область $S'$ постепенно охватывала все точки области $S$.

Несобственным интегралом от функции $f(x,y)$ в неограниченной области $S$ называется предел (конечный или бесконечный) интеграла (19.36) при $R\to\infty$:

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy=\lim_{R\to\infty}\iint_{S'}f(x,y)\,dxdy. \tag{19.37}$$

В случае существования конечного предела интеграл (19.37) называется сходящимся, а в противном случае – расходящимся.

Функция, для которой интеграл (19.37) сходится, называется интегрируемой (в несобственном смысле) в области $S$.

**Приведение двойного интеграла к повторному.** Путь функция $f(x,y)$ задана в неограниченной области любого вида. Полагая ее равной нулю вне этой области, всегда можно свести дело к случаю неограниченной прямоугольной области – одному из прямоугольников: $P_1=[a,b;c,\infty]$, $P_2=[a,\infty;c,d]$, $P=[a,\infty;b,\infty]$.

Если в каждом конечном прямоугольнике $[a, b; c, d]$ (при любых $b > a$, $d > c$) существует в собственном смысле двойной интеграл от данной неотрицательной функции $f(x, y)$ и простой интеграл по $y$, то

$$\iint_P f(x, y)\,dxdy = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy, \ (P = [a, \infty; c, \infty]), \tag{19.38}$$

где

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy = \lim_{\substack{b \to \infty \\ d \to \infty}} \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy \tag{19.39}$$

в предположении, что повторный интеграл сходится.

Если функция $f(x, y)$ меняет знак в бесконечной области $S$, то формула (19.28) верна при дополнительном условии сходимости повторного интеграла от абсолютной величины данной функции:

$$\int_a^\infty dx \int_b^\infty |f(x, y)|\,dy. \tag{19.40}$$

**Двойные интегралы от неограниченных функций.** Пусть функция $f(x, y)$ задана в ограниченной области $S$, но оказывается неограниченной в окрестности некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$, а в любой части области $S$, не содержащей этой точки, она является интегрируемой в собственном смысле.

Выделим особую точку $M_0$, окружив ее кривой $\gamma_0$. Если удалить из области $S$ окрестность, ограниченную кривой $\gamma_0$, то получим область $S'$, для которой существует двойной интеграл

$$I = \iint_{S'} f(x, y)\,dxdy. \tag{19.41}$$

Станем «стягивать» кривую $\gamma_0$ в точку $M_0$ так, чтобы диаметр $d$ области, ограниченной $\gamma_0$, стремился к нулю.

Несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x, y)$ по области $S$ называется предел интеграла (19.41) при $d \to 0$:

$$\iint_S f(x, y)\,dxdy = \lim_{d \to 0} \iint_{S'} f(x, y)\,dxdy. \tag{19.42}$$

Если указанный предел существует и конечен, то интеграл (19.42) называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, когда имеется несколько отдельных особых точек или указанные точки заполняют особую линию.

**Замена переменных в несобственных двойных интегралах.** В плоскости $Oxy$ и $Ouv$ рассмотрим ограниченные области $S$ и $\sigma$, связанные формулами преобразования: $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \psi_1(u, v)$ или обратными им: $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ с соблюдением условий о которых шла речь в п. 19.3 (см. формулы (19.8) и (19.9)).

Пусть в области $S$ задана функция $f(x, y)$, непрерывная всюду, за исключением конечного числа отдельных точек или даже кривых, где она обращается в бесконечность.

В этом случае выполняется равенство

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\sigma f(\varphi_1(u,v),\psi_1(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv, \qquad (19.43)$$

если сходится один из этих интегралов (сходимость другого следует отсюда).

Формула (19.43) верна и для случая неограниченных областей. Замена переменных наряду с переходом к повторному интегралу – удобное средство для установления сходимости несобственных двойных интегралов.

Пример 19.25. Исследовать, сходится ли двойной интеграл $\iint\limits_S \frac{dxdy}{x^3y^2}$, где область $S$ определена неравенствами $x \ge 1$, $xy \ge 1$.

Данный двойной интеграл является несобственным, так как область интегрирования – бесконечная часть первого квадранта, ограниченная слева прямой $x=1$ и снизу гиперболой $xy=1$ (рис. 19.23, *а*). Рассмотрим конечную часть области $S$ – область $S'$, ограниченную линиями $x=1, x=b, y=1/x$; $y=d$ (рис. 19.23, *б*, область *MDAB*). В области $S'$ двойной интеграл существует в собственном смысле (при любых $b>1$, $d>1$):

$$\iint\limits_{S'} \frac{dxdy}{x^3y^2} = \int_1^b dx \int_{1/x}^d \frac{dy}{x^3y^2} = \int_1^b \left(-\frac{1}{x^3y}\right)\Bigg|_{y=1/x}^{y=d} dx =$$

$$= \int_1^b \left(-\frac{1}{dx^3}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_1^b \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{d}\int_1^b x^{-3}dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b + \frac{2}{dx^2}\Bigg|_1^b = \left(1-\frac{1}{b}\right)+\frac{2}{d}\left(\frac{1}{b^2}-1\right).$$

Поскольку подынтегральная функция положительна во всей области $S$, то в соответствии с формулами (19.38) и (19.39) имеем

$$\iint\limits_S \frac{dxdy}{x^3y^2} = \int_1^\infty dx \int_{1/x}^\infty \frac{dy}{x^3y^2} = \lim_{\substack{b\to\infty \\ d\to\infty}} \int_1^b dx \int_{1/x}^d \frac{dx}{x^3y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{b\to\infty \\ d\to\infty}} \left(\left(1-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{b^2}-1\right)\right) = 1.$$

Следовательно, данный несобственный двойной интеграл сходится и равен единице.

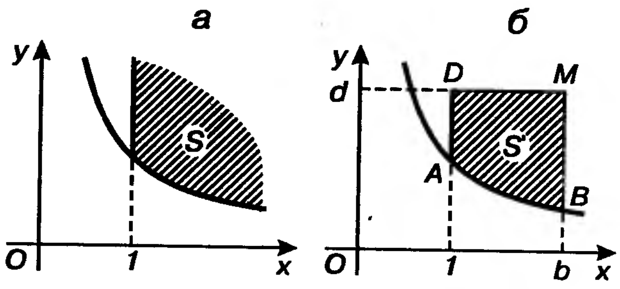


Рис. 19.23

Пример 19.26. Исследовать, сходится ли $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, где $S$ – круг $x^2+y^2 \le R^2$.

Данный двойной интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция не ограничена в данной области (на границе области, т.е. на окружности $x^2+y^2=R^2$, она обращается в бесконечность). Для решения вопроса о сходимости интеграла перейдем к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Имеем $1\big/\sqrt{R^2-x^2-y^2}=1\big/\sqrt{R^2-\rho^2}$, $J(\rho,\varphi)=\rho$, пределы интегрирования: $\alpha=0$, $\beta=2\pi$, $\rho_1(\varphi)=0$, $\rho_2(\varphi)=R$.

Формула (19.43) в данном случае принимает вид

$$\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\iint\limits_\sigma \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

Так как

$$\iint\limits_\sigma \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (R^2-\rho^2)^{-1/2}\left(-\frac{1}{2}d(R^2-\rho^2)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2-\rho^2)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R} d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} Rd\varphi=2\pi R,$$

то

$$\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=2\pi R,$$

т.е. двойной несобственный интеграл сходится и равен $2\pi R$.

Пример 19.27. Установить условия сходимости интеграла $\iint\limits_S \frac{dxdy}{x^\alpha y^\beta}$ ($\alpha>0$, $\beta>0$), где область $S$ определена неравенствами $y\ge 1$, $xy \ge 1$.

Областью интегрирования является бесконечная часть первого квадранта, ограниченная прямой $y=1$ и гиперболой $xy=1$.

Рассмотрим конечную часть $S'$ данной области, ограниченную линиями $x=1/y$, $x=b$, $y=1$, $y=d$ $(b>1,\ d>1)$; двойной интеграл по области $S'$ существует. Действительно,

$$\int_1^d dy\int_{1/y}^b \frac{dx}{x^\alpha y^\beta}=\int_1^d dy\int_{1/y}^b x^{-\alpha}y^{-\beta}dx=\int_1^d y^{-\beta}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{x=1/y}^{x=b}dy=$$

$$=\int_1^d y^{-\beta}\left(\frac{b^{-\alpha+1}-(1/y)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)dy=\int_1^d\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{1-\alpha}y^{-\beta}-\frac{y^{-\beta}}{y^{-\alpha+1}(1-\alpha)}\right)dy=$$

$$=\int_1^d\left(\frac{b^{-\alpha+1}}{1-\alpha}y^{-\beta}+\frac{y^{-\beta+\alpha-1}}{\alpha-1}\right)dy=\frac{b^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\left.\frac{y^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right|_1^d+$$

$$+\left.\frac{y^{-\beta+\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-\beta)}\right|_1^d=\frac{b^{-\alpha+1}}{(1-\alpha)(1-\beta)}(d^{-\beta+1}-1)+\frac{(d^{-\beta+\alpha}-1)}{(\alpha-1)(\alpha-\beta)}.$$

Предел этого интеграла при $b\to\infty,\ d\to\infty$ существует, когда $-\alpha+1<0$, $-\beta+\alpha<0$, т.е. $\alpha>1$, $\beta>\alpha$. При выполнении этих условий ( $(\beta>\alpha>1)$

$$\iint_S x^{-\alpha}y^{-\beta}dxdy=1/(\beta-\alpha)(\alpha-1).$$

Пример 19.28. Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Рассмотрим квадрат этого интеграла, для чего воспользуемся формулами (17.3), (19.7) и перейдем к полярным координатам при вычислении полученного двойного интеграла:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^\infty d(e^{-\rho^2})=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-\rho^2}\Big|_0^\infty d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $\left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\frac{\pi}{4}$, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

*Глава 20*

# ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

## 20.1. Понятие тройного интеграла. Оценка тройного интеграла

Рассмотрим замкнутую пространственную область $(V)$ и функцию $f(x,y,z)$, определенную в этой области. Область $(V)$ разобьем произвольным способом на $n$ элементарных областей $(\Delta V_1)$, $(\Delta V_2),\dots,(\Delta V_n)$ с диаметрами $d_1$, $d_2,\dots,d_n$ и объемами $\Delta V_1$, $\Delta V_2,\dots,\Delta V_n$. Наибольший из диаметров обозначим буквой $d$. В каждой элементарной области $(\Delta V_k)$ выберем произвольно одну точку $M_k(x_k,y_k,z_k)$ и образуем произведение $f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k$.

Интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ по области $V$ называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k$.

Тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области $V$ называется конечный предел ее интегральной суммы при $d\to 0$:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k.$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в ограниченной области $V$, то указанный предел существует и конечен (он не зависит от способа разбиения области $V$ на элементарные и от выбора точек $M_k$).

В прямоугольных декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$.

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Если в области $V$ $m\le f(x,y,z)\le M$, то

$$mV\le\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV\le MV, \tag{20.1}$$

где $V$ – объем области $V$. Эти неравенства выражают оценку тройного интеграла.

Пример 20.1. Оценить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}}$, где область $V$ определена неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \geq 9$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.

В данном случае область $V$ ограничена двумя сферами: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, ее объем равен разности объемов двух шаров радиусов $R_1 = 3$ и $R_2 = 4$ с центрами в начале координат

$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi\,(4^3 - 3^3) = \frac{148}{3}\pi.$$

Подынтегральная функция принимает наибольшее значение на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, причем $M = 1/\sqrt{25-16} = 1/3$, а наименьшее – на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $m = 1/\sqrt{25-9} = 1/4$.

Следовательно, в соответствии с соотношениями (20.1) имеем

$$\frac{1}{4}\frac{148}{3}\pi \leq I \leq \frac{1}{3}\frac{148}{3}\pi, \text{ или } \frac{37}{3}\pi \leq I \leq \frac{148}{9}\pi.$$

## 20.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых прямоугольных координатах

Если область интегрирования $V$ определяется неравенствами $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ – непрерывные функции своих аргументов, то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz; \qquad (20.2)$$

область $V$ ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x,y)$, снизу – поверхностью $z = z_1(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $Oz$ (рис. 20.1), вырезающей на плоскости $Oxy$ область $S_{xy}$, определенную неравенствами $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$.

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен; тройной интеграл можно вычислить шестью различными способами (в формуле (20.2) первое интегрирование совершается по $z$, второе – по $y$, третье – по $x$; оставив первое интегрирование по $z$, можно поменять местами второе и третье; далее, можно совершить первым интегрирование по $x$, а так же по $y$).

В частном случае, если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ являются постоянными $y_1, y_2, z_1, z_2$, область интегрирования представляет собой прямоугольный параллелепипед, и формула (20.2) принимает вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz. \qquad (20.3)$$

П р и м е р 20.2. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x+y+z)\,dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^3 \left[ \int_0^2 (x+y+z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Это интеграл вида (20.3). Пределы интегрирования в каждом из интегралов постоянные. Область интегрирования – прямой прямоугольный параллелепипед с измерениями $a$=1, $b$=3, $c$=2, одна из вершин которого находится в начале координат. Вычисляем сначала внутренний интеграл, заключенный в квадратные скобки, считая $x$ и $y$ постоянными:

$$\int_0^2 (x+y+z)\,dz = \left( xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=0}^{z=2} = 2x+2y+2 = 2\,(x+y+1).$$

Второй интеграл, находящийся в фигурных скобках, принимает вид

$$\int_0^3 \left[ \int_0^2 (x+y+z)\,dz \right] dy =$$

$$= \int_0^3 2\,(x+y+1)dy = 2\int_0^3 (x+y+1)dy;$$

находим этот интеграл, считая $x$ постоянным:

$$2\int_0^3 (x+y+1)\,dy =$$

$$= 2\left( xy + \frac{y^2}{2} + y \right)\Bigg|_{y=0}^{y=3} =$$

$$= 2\,(3x + 9/2 + 3) = 6x + 15.$$

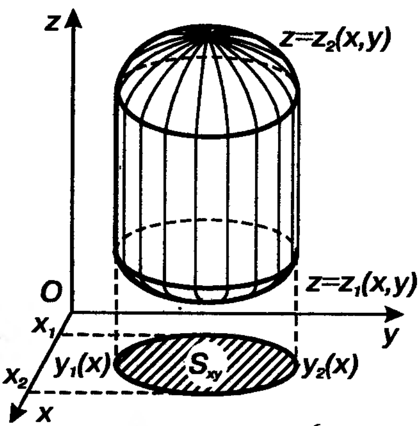

Рис. 20.1

Вычислим, наконец, внешний интеграл:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^3 \left[ \int_0^2 (x+y+z)\,dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 (6x+15)\,dx = (3x^2+15x)\Big|_0^1 = 18.$$

З а м е ч а н и е . Интегрирование можно производить и в другом порядке. В частности,

$$\int_0^2 dz \int_0^3 dy \int_0^1 (x+y+z)\,dx = \int_0^2 dz \int_0^3 \left( y + z + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^2 (6+3z)\,dz = 18.$$

**Пример 20.3.** Вычислить интеграл $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$, где $V$ – треугольная пирамида, ограниченная плоскостью $2x+y+z-4=0$ и плоскостями координат (рис. 20.2, *а*).

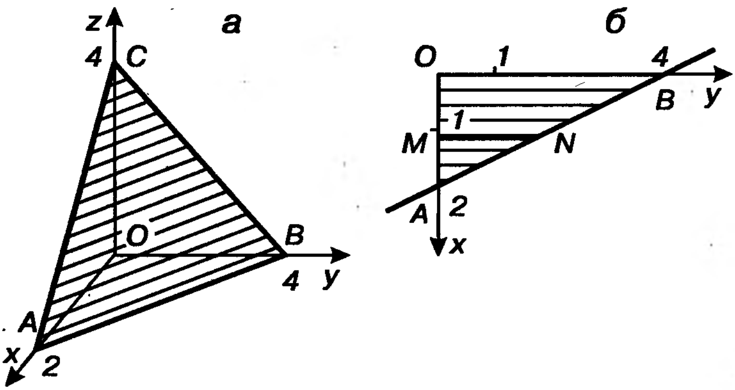


Рис. 20.2

Прежде всего расставим пределы интегрирования в данном тройном интеграле. Плоскость $2x+y+z-4=0$ пересекает плоскость $Oxy$ по прямой $2x+y+z-4=0$, $z=0$, или $2x+y-4=0$, $z=0$. В плоскости $Oxy$ эта прямая, проходящая через точки $A$ и $B$ (рис. 20.2, *б*), определяется уравнением $2x+y-4=0$. Треугольник $OAB$ и его внутренние точки являются областью $S_{xy}$ изменения переменных $x$ и $y$ (в эту область проектируется данная пирамида на плоскость $Oxy$). Очевидно, $x$ изменяется в промежутке $[0, 2]$, т.е. $0 \le x \le 2$, при фиксированном $x$ из этого промежутка (абсцисса точки $M$) $y$ будет изменяться от 0 (ордината точки $M$) до $4-2x$ (ордината точки $N$; получена из уравнения прямой $2x+y-4=0$). При фиксированных $x$ и $y$ из области $S_{xy}$ $z$ будет изменяться от 0 до $4-y-2x$ (получено из уравнения плоскости $2x+y+z-4=0$).

Таким образом,

$$\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} dy \int\limits_0^{4-y-2x} y\,dz.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^{4-y-2x} y\,dz = yz\Big|_{z=0}^{z=4-y-2x} = y\,(4-y-2x) = 4y-y^2-2xy,$$

$$\int\limits_0^{4-2x} (4y-y^2-2xy)\,dy = \left(2y^2-\frac{y^3}{3}-xy^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4-2x} = y^2\left(2-\frac{y}{3}-x\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4-2x} =$$

$$= (4-2x)^2\left(2-\frac{4-2x}{3}-x\right)=\frac{1}{6}(4-2x)^3,$$

то

$$\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-y-2x} ydz = \int_0^2 \frac{1}{6}(4-2x)^3 dx = -\frac{1}{6\cdot 2}\int_0^2 (4-2x)^3 d\,(4-2x) =$$

$$= -\frac{1}{12}\frac{(4-2x)^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{12}\frac{4^4}{4} = \frac{16}{3}.$$

Замечание. Тот же результат можно получить, меняя порядок интегрирования. В частности, проецируя пирамиду на плоскость $Oyz$, сводим данный тройной интеграл к следующему:

$$\iiint_V ydxdydz = \int_0^4 dz \int_0^{4-z} dy = \int_0^{(4-y-z)/2} ydx = \frac{16}{3}.$$

## 20.3. Замена переменных в тройном интеграле

Если ограниченная замкнутая область $V$ пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область $V_1$ пространства $O_1uvw$ с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x\,(u, v, w),\ y = y\,(u, v, w),\ z = z\,(u, v, w) \tag{20.4}$$

и якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{20.5}$$

в области $V_1$ не обращается в нуль, т.е. $J \neq 0$, то замена переменных в тройном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint_V f\,(x, y, z)\; dxdydz =$$

$$= \iiint_{V_1} f(x\,(u, v, w), y\,(u, v, w), z\,(u, v, w))\,\big|J\big|\,dudvdw\,. \tag{20.6}$$

В частности, при переходе от декартовых координат $x$, $y$, $z$ к цилиндрическим координатам $\rho$, $\varphi$, $z$ (см. п. 1.14), связанным с $x, y, z$ формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z \quad (0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty), \tag{20.7}$$

якобиан преобразования $J=\rho$, поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{V_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (20.8)$$

При переходе от декартовых координат $x$, $y$, $z$ к сферическим $\rho$, $\varphi$, $\theta$, связанным с $x$, $y$, $z$ соотношениями

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta \qquad (20.9)$$
$$(0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\theta\le\pi),$$

якобиан преобразования $J=\rho^2\sin\theta$ и формула (20.6) принимает вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{V_1} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \qquad (20.10)$$

Пример 20.4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, где область $V$ есть шар $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Перейдем к сферическим координатам по формулам (20.9). В области $V_1$, являющейся образом области $V$, при преобразовании (20.9) переменные $\rho$, $\varphi$ и $\theta$ меняются в следующих пределах: $\rho$ от 0 до $R$, $\varphi$ от 0 до $2\pi$, $\theta$ от 0 до $\pi$. Так как подынтегральная функция $x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+$ $+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2$, а якобиан преобразования (20.9) равен $\rho^2\sin\theta$, то по формуле (20.10) получим

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=\int\limits_0^R d\rho\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_0^{2\pi}\rho^2\rho^2\sin\theta d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^R \rho^4 d\rho\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{4\pi R^5}{5}.$$

Пример 20.5. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, где $V$ – область, ограниченная верхней частью конуса $(x^2+y^2)/R^2=z^2/h^2$ и плоскостью $z=h$ $(h>0)$.

Введем цилиндрические координаты по формулам (20.7). Уравнение конуса принимает вид $\rho^2/R^2=z^2/h^2$, или $z=\pm(h/R)\rho$.

Новые переменные в области $V_1$ изменяются в следующих пределах: $\rho$ от 0 до $R$, $\varphi$ от 0 до $2\pi$, $z$ от $\frac{h}{R}\rho$ до $h$.

По формуле (20.8) получаем

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{h\rho/R}^{h} \rho z dz = \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_{h\rho/R}^{h} \rho z dz \right] d\varphi \right\} d\rho =$$

$$= \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \rho \frac{z^2}{2} \Bigg|_{z=h\rho/R}^{z=h} d\varphi \right\} d\rho =$$

$$= \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left( \frac{h^2}{2} - \frac{h^2\rho^2}{2R^2} \right) \rho d\varphi \right\} d\rho =$$

$$= \frac{\pi h^2}{R^2} \int_0^R (R^2 - \rho^2)\,\rho d\rho = \pi h^2 \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^R - \frac{\pi h^2}{R^2} \frac{\rho^4}{4} \Bigg|_0^R = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Пример 20.6. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2}\,dxdydz$, где область $V$ ограничена эллипсоидом $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

Введем так называемые обобщенные сферические координаты по формулам

$$x = a\rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = c\rho \cos\theta. \qquad (20.11)$$

Якобиан преобразования (20.11), определяемый формулой

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -c\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix},$$

равен $abc\rho^2\sin\theta$. Подынтегральная функция по формулам (20.11) преобразуется к виду $\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2} = \sqrt{1-\rho^2}$, а уравнение эллипсоида запишется так: $\rho^2=1$, или $\rho=1$.

В области $V_1$ переменные $\rho$, $\theta$, $\varphi$ изменяются в следующих пределах: $\rho$ от 0 до 1, $\theta$ от 0 до $\pi$, $\varphi$ от 0 до $2\pi$.

По формуле (20.6) получаем

$$\iiint\limits_V \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,abc\rho^2 \sin\theta d\rho =$$

$$= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho^2 d\rho.$$

С помощью подстановки $\rho=\sin t$ находим первый интеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho^2 d\rho = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \cos t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\, dt = \frac{\pi}{16}.$$

Далее, $\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 2$, поэтому

$$\iiint_V \sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2-z^2/c^2}\, dxdydz = abc\frac{\pi}{16}2\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

Пример 20.7. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x^2+y+z^2)^3\, dxdydz$, где область $V$ ограничена цилиндром $x^2+z^2=1$ и плоскостями $y=0$, $y=1$.

Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$, $y=y$, тогда уравнение цилиндра $x^2+z^2=1$ примет вид $\rho^2=1$, $\rho=1$, а подынтегральная функция запишется так:

$$(x^2+y+z^2)^3 = (\rho^2+y)^3 = \rho^6+3\rho^4 y+3\rho^2 y^2+y^3.$$

При таком переходе к цилиндрическим координатам замена переменных в тройном интеграле будет осуществляться по формуле

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{V'} f(\rho\cos\varphi, y, \rho\sin\varphi)\, \rho d\rho d\varphi dy$$

Следовательно,

$$\iiint_V (x^2+y+z^2)^3\, dxdydz = \iiint_{V'} (\rho^2+y)^3 \rho d\rho d\varphi dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dy \int_0^1 (\rho^7+3\rho^5 y+3\rho^3 y^2+\rho y^3)\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{\rho^8}{8}+\frac{3\rho^6}{6}y+\frac{3\rho^4}{4}y^2+\frac{\rho^2}{2}y^3\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{2}y^3\right) dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}y+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}y^3+\frac{1}{8}y^4\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Пример 20.8. Исследовать, сходится ли несобственный тройной интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}}$, где $(V)$ – шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Данный интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция не ограничена в рассматриваемой области (она обращается в бесконечность на границе области, т.е. на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$).

Выражаем этот интеграл в сферических координатах. Так как в данном случае $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, то по формуле (20.10) получаем

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}} = \iiint\limits_{V_1} \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}} =$$

$$= \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

Последний интеграл (несобственный) вычислим с помощью подстановки $\rho = R\sin t$:

$$\int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{R^2\sin^2 t}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}} R\cos t dt = \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\, dt = \frac{R^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{R^2}{4}\sin 2t\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{R^2\pi}{4}.$$

Итак,

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}} = 4\pi \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 4\pi \frac{R^2\pi}{4} = \pi^2 R^2.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится и равен $\pi^2 R^2$.

## 20.4. Приложения тройных интегралов

Объем $V$ области $V$ выражается формулой

$$V = \iiint\limits_V dxdydz. \tag{20.12}$$

В сферических координатах этот интеграл имеет вид

$$V = \iiint\limits_{V_1} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi, \tag{20.13}$$

а в цилиндрических координатах

$$V = \iiint\limits_{V_2} \rho d\rho d\varphi dz. \tag{20.14}$$

Если тело занимает объем $V$ и $p=p(x,y,z)$ – плотность его в точке $M(x,y,z)$, то масса тела равна

$$m=\iiint_V p(x,y,z)\,dxdydz. \tag{20.15}$$

Координаты центра тяжести тела вычисляются по формулам

$$x_0=\frac{1}{m}\iiint_V p(x,y,z)\,xdxdydz,\ y_0=\frac{1}{m}\iiint_V p(x,y,z)\,ydxdydz,$$
$$z_0=\frac{1}{m}\iiint_V p(x,y,z)\,zdxdydz, \tag{20.16}$$

где $m$ – масса тела.

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей определяются интегралами

$$I_{xy}=\iiint_V pz^2dxdydz,\ I_{xz}=\iiint_V py^2dxdydz,\ I_{yz}=\iiint_V px^2dxdydz.$$

Момент инерции тела относительно оси $Ou$ определяется интегралом

$$I_u=\iiint_V pr^2dxdydz,$$

где $r$ – расстояние точки $N(x,y,z)$ тела от оси $Ou$. В частности, моменты инерции тела относительно координатных осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ определяются формулами

$$I_x=\iiint_V p\,(y^2+z^2)\,dxdydz,\ I_y=\iiint_V p\,(x^2+z^2)\,dxdydz,$$
$$I_z=\iiint_V p\,(x^2+y^2)\,dxdydz. \tag{20.17}$$

Момент инерции тела относительно начала координат определяется формулой

$$I_0=\iiint_V p\,(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz.$$

Очевидно, верны следующие соотношения: $I_x=I_{xy}+I_{xz}$, $I_y=I_{yx}+I_{yz}$, $I_z=I_{zx}+I_{zy}$, $I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{xz}$.

Ньютоновым потенциалом тела в точке $P(\xi,\eta,\zeta)$ называется интеграл

$$u(\xi,\eta,\zeta)=\iiint_V p(x,y,z)\,\frac{dxdydz}{r}, \tag{20.18}$$

где $V$ – объем тела, $p=p(x,y,z)$ – плотность тела, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

Материальная точка массы $m$ притягивается телом с силой, проекции которой $F_x$, $F_y$, $F_z$ на оси координат $Ox$, $Oy$, $Oz$ равны:

$$F_x=km\frac{\partial u}{\partial\xi}=km\iiint_V p\,\frac{x-\xi}{r^3}\,dxdydz,$$

$$F_y = km\frac{\partial u}{\partial \eta} = km\iiint\limits_V p\frac{y-\eta}{r^3}\,dxdydz, \qquad (20.19)$$

$$F_z = km\frac{\partial u}{\partial \zeta} = km\iiint\limits_V p\frac{z-\zeta}{r^3}\,dxdydz.$$

Пример 20.9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(0<a<b)$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.

Данное тело ограничено сферами радиусов $a$ и $b$ с центрами в начале координат и конусом с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью $Oz$. Оно расположено над плоскостью $Oxy$. Сечение этого тела плоскостью $Oyz$ изображено на рис. 20.3.

Для вычисления объема тела перейдем к сферическим координатам по формулам (20.9). Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ примет вид $\rho=a$, так как $x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi+$ $+\sin^2\varphi)+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\rho^2$. Аналогично преобразуется уравнение второй сферы $\rho=b$. Уравнение конуса $x^2+y^2=z^2$ примет вид $\theta=\pi/4$, потому что $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\theta$, $z^2=\rho^2\cos^2\theta$, $\rho^2\sin^2\theta=\rho^2\cos^2\theta$, откуда $\mathrm{tg}^2\theta=1$.

По формуле (20.13) находим

$$V=\iiint\limits_V \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int_a^b\rho^2 d\rho\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{b^3-a^3}{3}(2-\sqrt{2})\,\pi.$$

Пример 20.10. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=3z$.

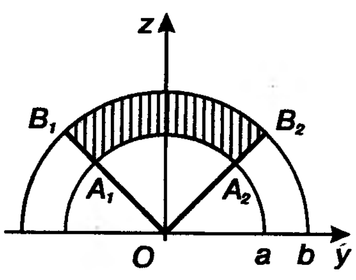


Рис. 20.3

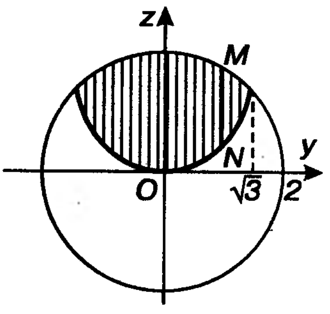


Рис. 20.4

Данное тело ограничено сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом вращения $x^2+y^2=3z$; сечение тела плоскостью $Oyz$ изображено на рис. 20.4. Для вычисления объема тела перейдем к цилиндрическим координатам по формулам (20.7). В цилиндрических координатах получаем $\rho^2+z^2=4$ (уравнение сферы), $\rho^2=3z$

(уравнение параболоида). Отметим, что при постоянных значениях $\rho$ и $\varphi$ внутри тела z изменяется от $\rho^2/3$ (для точки $N$ пересечения с поверхностью параболоида) до $z=\sqrt{4-\rho^2}$ (для точки $M$ пересечения с верхней частью поверхности сферы). При постоянном $\varphi$ $\rho$ изменяется от 0 (для точек, лежащих на оси $Oz$) до наибольшего значения в точках линии пересечения данных поверхностей, так как с возрастанием z $\rho$ для поверхности параболоида возрастает, а для шара убывает (что видно из уравнений поверхностей). Для линии пересечения поверхностей $x^2+y^2+z^2=4$ и $x^2+y^2=3z$ имеем $z^2+3z-4=0$, откуда $z_1=1, z_2=-4$ (второй корень дает мнимые значения для $\rho$). Следовательно, для точек линии пересечения $z=1$, $\rho=\sqrt{3}$; внутри тела $\rho$ изменяется от 0 до $\sqrt{3}$. Заметив еще, что $\varphi$ изменяется от 0 до $2\pi$, по формуле (20.14) получим

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\rho\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^3}{3}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2}-\frac{\rho^4}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{19}{6}\pi.$$

П р и м е р 20.11. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

При наличии выражения $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2$ в уравнении поверхности полезен переход к обобщенным сферическим координатам по формулам (20.11). Якобиан в этом случае равен $abc\rho^2\sin\theta$.

Уравнение данной поверхности в новых координатах примет вид $\rho=1$ (ибо $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2$), поэтому для данного тела $\rho$ изменяется от 0 до 1. Заметив, что $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, по формуле (20.6) получим

$$V=\iiint_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 abc\rho^2\sin\theta d\rho=$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin\theta d\theta=\frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}d\varphi=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Итак, $V=(4/3)\pi abc$; в частном случае, при $a=b=c=R$, получаем объем шара $x^2+y^2+z^2=R^2$, $V=(4/3)\pi R^3$.

З а м е ч а н и е. Поскольку эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей, то можно найти объем 1/8 части данного тела. При вычислении интеграла нужно иметь в виду, что в этом случае $0\le\rho\le 1$,

$0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, т.е. верхние пределы интегрирования по $\theta$ и $\varphi$ отличны от предыдущих.

Пример 20.12. Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию ее до начала координат.

Пусть $N\,(x, y, z)$ – произвольная точка данного шара, тогда ее расстояние $d$ до начала координат выражается формулой $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, поэтому плотность $p$ в соответствии с условием задачи определяется формулой $p\,(x, y, z) = k\big/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где $k$ – коэффициент пропорциональности. По формуле (20.15) имеем

$$m = \iiint\limits_V \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dxdydz,$$

где область $V$ ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$. Для вычисления данного интеграла перейдем к сферическим координатам по формулам (20.9). Подынтегральная функция $k\big/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k/\rho$, а уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ примет вид $\rho = 2R\cos\theta$.

По формуле (20.10) находим

$$m = \iiint\limits_V \frac{kdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint\limits_{V_1} \frac{1}{\rho}\,\rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho \sin\theta\, d\rho = k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} 2R^2 \cos^2\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= 2kR^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{2}{3}kR^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi k R^2.$$

Пример 20.13. Найти центр тяжести шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке его обратно пропорциональна расстоянию до начала координат.

Воспользуемся формулами (20.16). Масса $m$ была определена в предыдущей задаче (см. пример 20.12). Из соображений симметрии следует, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Найдем $z_0$:

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_V \frac{kzdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Вычислим этот интеграл, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_V \frac{kzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \frac{1}{\rho}\rho^2 \sin\theta\rho\cos\theta d\rho =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^2 d\rho = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{8R^3\cos^3\theta}{3}\sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{8kR^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\theta d(\cos\theta) = -\frac{8kR^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{16}{15}\pi kR^3.$$

Следовательно,

$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \frac{kzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{(4/3)\,\pi kR^2}\,\frac{16}{15}\pi kR^3 = \frac{4}{5}R.$$

Замечание. Координаты $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ можно получить с помощью первых двух формул (20.16).

Пример 20.14. Вычислить момент инерции однородного куба относительно одного из его ребер.

Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в одной из вершин куба, а оси направим вдоль трех взаимно перпендикулярных ребер. Обозначим через $a$ ребро куба и найдем его момент инерции относительно оси $Oz$, воспользовавшись третьей из формул (20.17). Так как куб является однородным, то в указанных формулах можно положить $p = 1$:

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz = \int\limits_0^a \int\limits_0^a \int\limits_0^a (x^2+y^2)\,dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a (x^2+y^2)\,dz = a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= a\int\limits_0^a \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=a} dx = a\int\limits_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\right)dx =$$

$$= a\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^5.$$

*Глава 21*

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## 21.1. Криволинейные интегралы первого рода

Рассмотрим пространственную кусочно-гладкую кривую, ограниченную точками $A$ и $B$ (рис. 21.1), и определенную на ней непрерывную функцию $f(x, y, z) = f(M)$, где $M(x, y, z)$ – точка кривой. Дугу $AB$ разобьем точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на $n$ элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $M_0 = A$, $M_n = B$), длины которых обозначим соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$, а наибольшую из этих длин – через $\lambda$. На каждой из элементарных дуг $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно одну точку $M_i'(x_i', y_i', z_i')$ и составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i', z_i')\,\Delta l_i, \qquad (21.1)$$

называемую интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по длине дуги кривой $AB$.

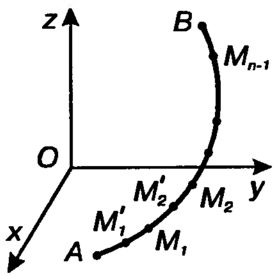

Рис. 21.1

Криволинейным интегралом первого рода или криволинейным интегралом по дуге кривой $AB$ от функции $f(x, y, z)$ называется предел интегральной суммы (21.1) при $\lambda \to 0$:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i', z_i')\,\Delta l_i.$$

На кривой $AB$, целиком лежащей на плоскости $Oxy$, функция $f$ от координаты $z$ не зависит, поэтому по определению имеем

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i', y_i')\,\Delta l_i.$$

Если подынтегральную функцию $f(x, y, z) > 0$ рассматривать как линейную плотность кривой $AB$, то криволинейный интеграл первого рода представляет собой массу этой кривой.

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода следующие.

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} f(M)\,dl = \int_{BA} f(M)\,dl.$$

2. $\int\limits_{AB}(f_1(M)\pm f_2(M))\,dl=\int\limits_{AB}f_1(M)\,dl\pm\int\limits_{AB}f_2(M)\,dl.$

3. $\int\limits_{AB}cf(M)\,dl=c\int\limits_{AB}f(M)\,dl \quad (c=\text{const}).$

4. Если путь интегрирования $L$ разбит на части $L_1, L_2, \ldots, L_n$, то

$$\int\limits_{L}f(M)\,dl=\int\limits_{L_1}f(M)\,dl+\int\limits_{L_2}f(M)\,dl+\ldots+\int\limits_{L_n}f(M)\,dl.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная кривая $L$ задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$, то

$$\int\limits_{L}f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt. \qquad (21.2)$$

Если кривая $L$ лежит в плоскости $Oxy$, то

$$\int\limits_{L}f(x,y)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt. \qquad (21.3)$$

В частности, для плоской кривой, заданной уравнением $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$, имеем

$$\int\limits_{L}f(x,y)\,dl=\int\limits_{a}^{b}f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2}\,dx. \qquad (21.4)$$

Если плоская кривая задана уравнением $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\le\varphi\le\beta)$ в полярных координатах, то

$$\int\limits_{L}f(x,y)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi. \qquad (21.5)$$

Если кривая задана уравнением $x=\varphi(y)$ $(c\le y\le d)$, то криволинейный интеграл вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L}f(x,y)\,dl=\int\limits_{c}^{d}f(\varphi(y),y)\sqrt{1+x'^2}\,dy. \qquad (21.6)$$

Пример 21.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{L}(x^5+8xy)\,dl$, где $L$ – дуга кривой $4y=x^4$ между точками, для которых $x=0$, $x=1$.

Поскольку $y'=x^3$, $dl=\sqrt{1+x^6}\,dx$ и на дуге кривой $4y=x^4$ функция $f(x,y)=$ $=(x^5+8xy)=x^5+4y\cdot 2x=x^5+x^4\cdot 2x=3x^5$, то по формуле (21.4) находим

$$\int_L (x^5+8xy)\,dl=\int_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}\,dx=3\int_0^1 (1+x^6)^{1/2}\frac{1}{6}\,d\,(1+x^6)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1+x^6)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Пример 21.2. Вычислить $\int_L y\sqrt{y^2+1}dl$, где $L$ – дуга кривой $x=\ln y$ между точками, для которых $y=1$, $y=4$.

Применяем формулу (21.6). В данном случае $c=1$, $d=4$, $x=\varphi(y)=\ln y$, $x'_y=1/y$, $dl=\sqrt{1+x'^2}dy=\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}\,dy=\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}dy$, поэтому

$$\int_L y\sqrt{y^2+1}\,dl=\int_1^4 y\sqrt{y^2+1}\,\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}\,dy=$$

$$=\int_1^4 (y^2+1)\,dy=\left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=24.$$

Пример 21.3. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L (2x+y)\,dl$, где $L$ – контур треугольника $ABO$ (рис. 21.2) с вершинами $A(1,0)$, $B(0,2)$, $O(0,0)$.

В соответствии со свойством 4) криволинейного интеграла первого рода имеем

$$\int_L (2x+y)\,dl=\int_{AB}(2x+y)\,dl+\int_{BO}(2x+y)\,dl+\int_{OA}(2x+y)\,dl.$$

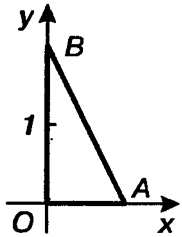

Рис. 21.2

На отрезке $AB$ $y$=-2$x$+2, поэтому $y'$=-2, $dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{5}dx$. На отрезке $BO$ $x=0$, $x'=0$, $dl=\sqrt{1+x'^2}\,dy=dy$, на отрезке $OA$ $y=0$, $y'=0$, $dl=\sqrt{1+y'^2}\,dx=dx$. Принимая во внимание свойство 1) криволинейного интеграла, используя формулы (21.4) и (21.6), получаем

$$\int_L (2x+y)\,dl=\int_0^1 2\sqrt{5}\,dx+\int_0^2 ydy+\int_0^1 2xdx=2\sqrt{5}x\,\Big|_0^1+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2+x^2\Big|_0^1=3+2\sqrt{5}.$$

Пример 21.4. Вычислить $\int_L (x+y)\,dl$, где $L$ – лепесток лемнискаты $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенный в первом координатном углу.

Линия $L$ задана уравнением в полярных координатах, поэтому здесь целесообразно воспользоваться формулой (21.5).

Так как $\rho' = a\cos 2\varphi / \sqrt{\sin 2\varphi}$, то

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{a^2 \sin 2\varphi + (a^2 \cos^2 2\varphi)/\sin 2\varphi} = a/\sqrt{\sin 2\varphi} = a^2/\rho.$$

Заметив еще, что $0 \le \varphi \le \pi/2$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, по формуле (21.5) получим

$$\int_L (x+y)\,dl = \int_0^{\pi/2} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\frac{a^2 d\varphi}{\rho} =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = a^2(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = 2a^2.$$

Пример 21.5. Вычислить $\int\limits_L (2x+4y-4z+7)\,dl$, где $L$ – отрезок прямой между точками $M_1(8,9,3)$, $M_2(6,10,5)$.

Составим сначала уравнения прямой, проходящей через точки $M_1$ и $M_2$:

$$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-9}{10-9} = \frac{z-3}{5-3}, \text{ или } \frac{x-8}{-2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-3}{2} = t.$$

Таким образом, получаем параметрические уравнения прямой:

$$x = 8-2t,\ y = 9+t,\ z = 3+2t.$$

Точка $M$ пробегает отрезок $M_1M_2$, когда $t$ изменяется от 0 до 1, т.е. $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Так как $x' = -2$, $y' = 1$, $z' = 2$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{4+1+4}\,dt = 3dt$.

По формуле (21.2) находим

$$\int_L (2x+4y-4z+7)\,dt = \int_0^1 (2(8-2t) + 4(9+t) - 4(3+2t) + 7)\,3dt =$$

$$= 3\int_0^1 (47-8t)\,dt = 3(47t - 4t^2)\Big|_0^1 = 3(47-4) = 129.$$

Пример 21.6. Вычислить $\int\limits_L xy\,dl$, где $L$ – дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, ограниченной точками, для которых $t = 0$, $t = \pi/2$.

Применяем формулу (21.2). Поскольку $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ и

$$\int_L xy\,dl = \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot b\sin t\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= ab\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\cos t\,\sin t\,dt = ab\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\sin t\,d(\sin t) =$$

$$= ab\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

## 21.2. Криволинейные интегралы второго рода

Пусть дана дуга пространственной кусочно-гладкой кривой, ограниченная точками $A$ и $B$ (см. рис. 21.1), и определенная на ней непрерывная вектор-функция

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}. \qquad (21.7)$$

Дугу $AB$ разобьем на $n$ элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ $(i=1,2,\ldots,n;\ A_0=A,\ A_n=B)$ точками $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2),\ldots,A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})$. На каждой дуге $A_{i-1}A_i$ выберем произвольно точку $M_i(x_i',y_i',z_i')$ значения функций в точке $P(x_i',y_i',z_i')=P(M_i)$, $Q(x_i',y_i',z_i')=Q(M_i)$, $R(x_i',y_i',z_i')=R(M_i)$ умножим на проекции этой дуги соответственно на оси $Ox$, $Oy$, $Oz$, которые обозначим через $\Delta x_i$, $\Delta y_i$, $\Delta z_i$, причем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Из полученных произведений составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right), \qquad (21.8)$$

называемую интегральной суммой по координатам для вектор-функции (21.7). Обозначим через $\lambda$ длину наибольшей из проекций $\Delta x_i$, $\Delta y_i$, $\Delta z_i$.

Криволинейным интегралом второго рода или криволинейным интегралом по координатам $x, y, z$ называется предел интегральной суммы (21.8) при $\lambda \to 0$:

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right).$$

На кривой $L$, целиком лежащей в плоскости $Oxy$, функции $P$, $Q$, $R$ не зависят от $z$, $\Delta z_i = 0$, $dz = 0$, поэтому

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i\right).$$

Если функции $P, Q, R$ рассматривать как проекции некоторой переменной силы $\mathbf{F}$ на координатные оси, то криволинейный интеграл второго рода выражает работу силы $\mathbf{F}=(P, Q, R)$, точка приложения которой описывает кривую $L$.

Криволинейный интеграл второго рода зависит от выбора направления обхода кривой; если изменить направление обхода, то интеграл меняет знак:

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=-\int\limits_{BA} Pdx+Qdy+Rdz.$$

Криволинейные интегралы первого и второго рода связаны формулой

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{AB}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dl,$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы между осями координат и направлением касательной к линии $AB$, отвечающим направлению интегрирования для интеграла в левой части.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода также сводится к вычислению определенного интеграла.

Если линия $L$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z=z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ и значению $\alpha$ соответствует точка $A$, значению $\beta$ – точка $B$, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$

$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)+Q[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t)+$$

$$+R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}dt. \tag{21.9}$$

В частности, для кривой $L$, лежащей в плоскости $Oxy$, получаем

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),y(t)]\,x'(t)+Q[x(t),y(t)]\,y'(t)\}dt. \tag{21.10}$$

Если плоская кривая $L$ задана уравнением $y=y(x)$ $(a\le x\le b)$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_{a}^{b}\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]\,y'(x)\}dx. \tag{21.11}$$

Пример 21.7. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{L} x^2dx+xy^2dy$, где $L$ – отрезок прямой от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,2)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки $A$ и $B$, имеет вид $y=x+1$, поэтому на отрезке $AB$ $dy=dx$. Подставляя в подынтегральную функцию вместо $y$ его выражение через $x$ $(y=x+1)$ и замечая, что при перемещении от $A$ к $B$ $x$ меняется от 0 до 1, по формуле (21.11) получаем

$$\int\limits_{L} x^2dx+xy^2dy=\int\limits_{0}^{1} x^2dx+x(x+1)^2dx=\int\limits_{0}^{1}(x^2+x(x^2+2x+1))dx=$$

$$= \int_0^1 (x^3 + 3x^2 + x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{4}.$$

Пример 21.8. Вычислить $\int\limits_L (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy$, где $L$ – ломаная $ABC$ (рис. 21.3), причем $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 5)$.

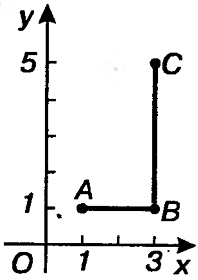


Рис. 21.3

Так как контур интегрирования $L$ состоит из двух отрезков $AB$ и $BC$, то

$$\int\limits_L (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy = \int\limits_{AB} (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{BC} (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy.$$

На отрезке $AB$, уравнение которого $y = 1$, имеем $dy = 0$; на отрезке $BC$, уравнение которого $x = 3$, имеем $dx = 0$, поэтому

$$\int\limits_L (x^3 + y)\,dx + (x + y^3)\,dy = \int_1^3 (x^3 + 1)\,dx + (x^2 + 1)\,0 +$$

$$+ \int_1^5 (3^3 + y)\,0 + (3 + y^3)\,dy = \int_1^3 (x^3 + 1)\,dx + \int_1^5 (3 + y^3)\,dy =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + x\right)\Bigg|_1^3 + \left(3y + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_1^5 = 190.$$

Пример 21.9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L y^2 dx + (x^2 + z)\,dy + (x + y + z^2)\,dz$, где $L$ – отрезок прямой в пространстве от точки $A(1, 0, 2)$ до точки $B(3, 1, 4)$.

Составим сначала уравнения прямой, проходящей через точки $A$ и $B$:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-2}{4-2}.$$

Из параметрических уравнений прямой $x = 1 + 2t$, $y = t$, $z = 2 + 2t$ получаем $dx = 2dt$, $dy = dt$, $dz = 2dt$.

Из этих же уравнений видно, что при перемещении от точки $A$ к точке $B$ параметр $t$ меняется от 0 до 1, т.е. пределы интегрирования в формуле (21.10), которой воспользуемся, равны соответственно $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

По формуле (21.10) находим

$$\int\limits_L y^2 dx + (x^2 + z)\,dy + (x + y + z^2)\,dz =$$

$$=\int_0^1 t^2 2dt + ((1+2t)^2 + (2+2t))\,dt + ((1+2t)+t+(2+2t)^2)\,2dt =$$

$$=\int_0^1 [2t^2 + (1+4t+4t^2+2+2t) + 2\,(1+3t+4+8t+4t^2)\,]\,dt =$$

$$=\int_0^1 (14t^2+28t+13)\,dt = \left(\frac{14t^3}{3} + 14t^2 + 13t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{95}{3}.$$

Пример 21.10. Вычислить $\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx - yzdy + xdz$, где $L$ – дуга винтовой линии $x=t$, $y=2\cos t$, $z=2\sin t$ $(0 \le t \le \pi/2)$.

Поскольку $dx=dt$, $dy=-2\sin tdt$, $dz=2\cos tdt$, то

$$\int_L (y^2+z^2)\,dx - yzdy + xdz =$$

$$=\int_0^{\pi/2} (4\cos^2 t + 4\sin^2 t)\,dt - 4\sin t\cos t\,(-2\sin tdt) + 2t\cos tdt =$$

$$=\int_0^{\pi/2} (2t\cos t + 8\sin^2 t\cos t + 4)\,dt = 2\int_0^{\pi/2} t\cos tdt +$$

$$+8\int_0^{\pi/2} \sin^2 td\,(\sin t) + 4\int_0^{\pi/2} dt = 2t\sin t\,\Big|_0^{\pi/2} + 2\cos t\,\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+\frac{8}{3}\sin^3 t\,\Bigg|_0^{\pi/2} + 4t\,\Big|_0^{\pi/2} = 3\pi + \frac{2}{3}.$$

Замечание. Интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} t\cos tdt$ вычислен с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi/2} t\cos tdt = \int_0^{\pi/2} td\,(\sin t) = t\sin t\,\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$-\int_0^{\pi/2} \sin tdt = t\sin t\,\Big|_0^{\pi/2} + \cos t\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

## 21.3. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Если $L$ – кусочно гладкий контур, ограничивающий на плоскости $Oxy$ область $S$, а $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – функции, заданные в замкнутой области $S$ и имеющие в ней непрерывные частные производные, то справедлива формула Грина

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{21.12}$$

где обход контура выбирается так, чтобы область $S$ оставалась слева.

Криволинейный интеграл $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$, где контур $L$ целиком лежит внутри односвязной области $S$, в которой функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{21.13}$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=dU(x,y)$ и

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=U(x_2,y_2)-U(x_1,y_1), \tag{21.14}$$

где $M_1(x_1,y_1)$ – начальная, $M_2(x_2,y_2)$ – конечная точки пути интегрирования.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0.$$

Криволинейный интеграл

$$I=\int_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz, \tag{21.15}$$

где $L$ – контур, целиком лежащий в односвязной области $(V)$, в которой функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}. \tag{21.16}$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=dU(x,y,z)$$

и

$$\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} Pdx+Qdy+Rdz=U(x_2,y_2,z_2)-U(x_1,y_1,z_1). \qquad (21.17)$$

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру в таком случае равен нулю:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=0.$$

Пример 21.11. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $I=\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\,(\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})+xy)\,dy$, где $L$ – контур прямоугольника с вершинами $A(3,2)$, $B(6,2)$, $C(6,4)$, $D(3,4)$.

Преобразуем этот интеграл по формуле Грина. Поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\{[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,y\}}{\partial x}=y\,\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

то по формуле (21.12) имеем

$$I=\iint\limits_S\left(y\,\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=\iint\limits_S y^2dxdy,$$

где $S$ – область, ограниченная контуром $L$, в данном случае прямоугольник $ABCD$ (рис. 21.4).

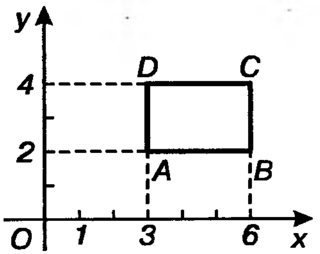

Рис. 21.4

Вычисляем полученный двойной интеграл по прямоугольнику $ABCD$:

$$\iint\limits_S y^2dxdy=\int\limits_3^6 dx\int\limits_2^4 y^2dy=\int\limits_3^6\frac{y^3}{3}\Bigg|_2^4dx=\frac{56}{3}x\Bigg|_3^6=56.$$

Пример 21.12. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I=\int\limits_L(12xy+4z^2)\,dx+(6x^2-15y^2z)\,dy+(8xz-5y^3)\,dz$ по пути $L$ с началом в точке $O(0,0,0)$ и концом в точке $B(1,1,1)$, предварительно установив, что он не зависит от пути интегрирования.

Это интеграл вида (21.15), для которого $P=12xy+4z^2$, $Q=6x^2-15y^2z$, $R=8xz-5y^3$.

Так как $P'_y = 12x$, $Q'_x = 12x$, $P'_z = 8z$, $R'_x = 8z$, $Q'_z = -15y^2$, $R'_y = -15y^2$, то $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $Q'_z = R'_y$, т.е. выполнены условия (21.16).

Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования. Вычислим его по отрезку прямой, проходящей через точки $O$ и $B$. Параметрические уравнения прямой имеют вид $x = t$, $y = t$, $z = t$, поэтому $dx = dt$, $dy = dt$, $dz = dt$. Так как на отрезке $OB$ $0 \le t \le 1$, то

$$I = \int_0^1 (12t^2 + 4t^2 + 6t^2 - 15t^3 + 8t^2 - 5t^3)\,dt = \int_0^1 (30t^2 - 20t^3)\,dt =$$

$$= (10t^3 - 5t^4)\Big|_0^1 = 5.$$

З а м е ч а н и е. Этот пример можно решить и с помощью формулы (21.17). Действительно, так как выполнены условия (21.16), то подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции

$$dU = (12xy + 4z^2)\,dx + (6x^2 - 15y^2z)\,dy + (8xz - 5y^3)\,dz.$$

С другой стороны,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Сравнивая два выражения для $dU$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 12xy + 4z^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 - 15y^2z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 8xz - 5y^3.$$

Из первого равенства, считая $y$ и $z$ постоянными, находим $U = 6x^2y + 4z^2x + C_1$; постоянная интегрирования $C_1$ является постоянной по отношению к $x$, но она зависит от $y$ и $z$, т.е. $C_1 = \varphi(y, z)$.

Итак, $U = 6x^2y + 4z^2x + \varphi(y, z)$. Находя частную производную по $y$ от функции $U$: $U'_y = 6x^2 + \varphi'_y(y, z)$ и сравнивая с выражением $U'_y = 6x^2 - 15y^2z$, получаем $6x^2 + \varphi'_y(y, z) = 6x^2 - 15y^2z$, откуда $\varphi'_y(y, z) = -15y^2z$, т.е. $\varphi(y, z) = -5y^3z + \psi(z)$, поэтому $U(x, y, z) = 6x^2y + 4z^2x - 5y^3z + \psi(z)$.

Поскольку $U'_z = 8xz - 5y^3 + \psi'(z)$ и $U'_z = 8xz - 5y^3$, то $\psi'(z) = 0$, т.е. $\psi(z) = C$. Следовательно, $U(x, y, z) = 6x^2y + 4z^2x - 5y^3z + C$. По формуле (21.17) находим

$$\int_L (12xy + 4z^2)\,dx + (6x^2 - 15y^2z)\,dy + (8xz - 5y^3)\,dz = U(1, 1, 1) - U(0, 0, 0) = 5.$$

## 21.4. Приложения криволинейных интегралов

Длина $l$ дуги $AB$ плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$l = \int_{AB} dl.$$

Если пространственная линия задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \quad (21.18)$$

Площадь $S$ фигуры, расположенной в плоскости $Oxy$ и ограниченной замкнутой линией $L$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (21.19)$$

Масса $m$ материальной дуги $L$ определяется формулой

$$m = \int_L p(x, y, z)\, dl, \quad (21.20)$$

где $p(x, y, z)$ – линейная плотность вещества в точке $M(x, y, z)$ этой дуги.

Прямоугольные координаты центра тяжести материальной дуги находятся по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_L x p(x, y, z)\, dl,$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_L y p(x, y, z)\, dl, \quad z_0 = \frac{1}{m} \int_L z p(x, y, z)\, dl, \quad (21.21)$$

где $m$ определяется формулой (21.20).

Если $\mathbf{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\, \mathbf{i} + Y(x, y, z)\, \mathbf{j} + Z(x, y, z)\, \mathbf{k}$ – переменная сила, совершающая работу $W$ вдоль пути $L$, и функции $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ непрерывны, то

$$W = \int_L X dx + Y dy + Z dz. \quad (21.22)$$

Пусть сила $\mathbf{F}$ имеет потенциал, т.е. существует функция $U(x, y, z)$ такая, что выражение $X dx + Y dy + Z dz$ является ее полным дифференциалом $dU = X dx + Y dy + Z dz$, тогда работа независимо от пути $L$ равна

$$W = \int_{M_1}^{M_2} X dx + Y dy + Z dz = \int_{M_1}^{M_2} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – начальная, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – конечная точки пути.

Замечание. Если линия $L$ лежит в плоскости $Oxy$, то формулы (21.18), (21.20) – (21.22) упрощаются.

Пример 21.13. Найти массу материальной дуги кривой $2y = x^2$ между точками $A(0, 0)$, $B(1, 1/2)$, если линейная плотность вещества в точке $M(x, y)$ пропорциональна абсциссе этой точки.

Найдем выражения линейной плотности $p(x, y)$ и дифференциала дуги. Из условия следует, что линейная плотность выражается формулой $p(x, y) = kx$, где $k$ – коэффициент пропорциональности. Из уравнения линии $y = 1/2\, x^2$ находим $y' = x$, поэтому $dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{1 + x^2}\, dx$. Согласно формуле (21.20), имеем

$$m = \int_L p(x, y)\, dl = \int_0^1 kx \sqrt{1 + x^2}\, dx = k \int_0^1 (1 + x^2)^{1/2} \frac{1}{2}\, d(1 + x^2) =$$

$$= \frac{k}{2} \frac{(1 + x^2)^{3/2}}{3/2} \bigg|_0^1 = \frac{k}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Пример 21.14 Найти центр тяжести дуги винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt\ (0 \le t \le \pi/2)$, если линейная плотность в точке $M(x, y, z)$ пропорциональна произведению первых двух координат.

Так как $x' = -a\sin t,\ y' = a\cos t,\ z' = b$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, dt.$

Согласно условию, линейная плотность выражается формулой $p(x, y, z) = kxy$, где $k$ – коэффициент пропорциональности.

По формуле (21.20) находим массу данной дуги

$$m = \int_L p(x, y, z)\, dl = \int_L kxy\,dl = \int_L ka^2 \cos t \sin t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt =$$

$$= ka^2\sqrt{a^2 + b^2} = \int_0^{\pi/2} \sin t\, d(\sin t) = ka^2\sqrt{a^2 + b^2}\, \frac{\sin^2 t}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{ka^2\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Итак, $m = ka^2\sqrt{a^2 + b^2}\big/2$.

Вычислим интегралы каждой из формул (21.21), обозначив их через $I_1, I_2, I_3$ соответственно:

$$I_1 = \int_L xp(x, y, z)\, dl = \int_L xkxy\,dl = k\int_L x^2 y\,dl =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\, a\sin t \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = -ka^3\sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, d(\cos t) =$$

$$= -ka^3\sqrt{a^2 + b^2}\, \frac{\cos^3 t}{3}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^3 k\sqrt{a^2 + b^2}}{3},$$

$$I_2 = \int_L yp(x, y, z)\, dl = \int_L ykxy\,dl = k\int_L xy^2\,dl =$$

$$=k\int_0^{\pi/2} a\cos t\, a^2\sin^2 t\sqrt{a^2+b^2}\,dt = a^3k\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\, d(\sin t) =$$

$$=a^3k\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3k\sqrt{a^2+b^2}}{3},$$

$$I_3=\int_L zp(x,y,z)\,dl=\int_L zkxydl = k\int_L xyzdl =$$

$$=k\int_0^{\pi/2} a\cos t\cdot a\sin t\cdot bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int_0^{\pi/2} t\sin 2tdt =$$

$$=\frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left(-\frac{t\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{\sin 2t}{4}\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{2}\,\frac{\pi}{4}.$$

По формулам (21.21) находим координаты центра тяжести:

$$x_0=\frac{I_1}{m}=\frac{a^3k\sqrt{a^2+b^2}}{3}:\frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{2a}{3};$$

$$y_0=\frac{I_2}{m}=\frac{a^3k\sqrt{a^2+b^2}}{3}:\frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{2a}{3};$$

$$z_0=\frac{I_3}{m}=\frac{\pi ka^2b\sqrt{a^2+b^2}}{8}:\frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{\pi b}{4}.$$

Таким образом, искомый центр тяжести находится в точке $C(2a/3, 2a/3, \pi b/4)$.

Пример 21.15. Найти работу, производимую силой $\mathbf{F}=4x^6\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$ вдоль дуги кривой $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Проекции силы $X$ и $Y$ на координатные оси соответственно равны $X(x,y)=4x^6$, $Y(x,y)=xy$. Чтобы найти работу, необходимо воспользоваться частным случаем формулы (21.22):

$$W=\int_L X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy.$$

По этой формуле получаем

$$W=\int_L 4x^6dx+xydy=\int_0^1(4x^6+xx^3 3x^2)dx=\int_0^1 7x^6dx=x^7\Big|_0^1=1.$$

*Глава 22*

# ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

## 22.1. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть дана функция $f(x,y,z)$, непрерывная на некоторой гладкой поверхности $(\sigma)$. Разобьем поверхность $(\sigma)$ сетью произвольно проведенных кривых (рис. 22.1) на ряд частей $(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \dots, (\Delta\sigma_n)$. В каждой из этих частей $(\Delta\sigma_i)$ выберем произвольно одну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, вычислим значение данной функции в этой точке и, умножив его на площадь соответствующей части поверхности, составим сумму всех таких произведений

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i, \qquad (22.1)$$

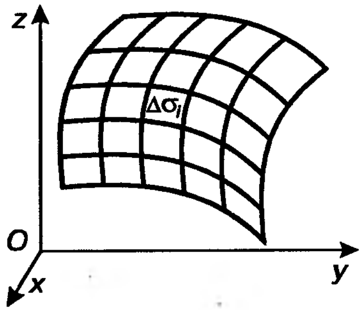

Рис. 22.1

называемую интегральной суммой. Обозначим через $d_i$ диаметр элементарной части поверхности $(\Delta\sigma_i)$, $d$ – наибольший из указанных диаметров.

Интегралом первого рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности $(\sigma)$ называется предел интегральной суммы (22.1) при $d \to 0$, где $d$ – наибольший из диаметров области $\Delta\sigma_i$:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\sigma_i. \qquad (22.2)$$

Интеграл первого рода обладает свойствами, аналогичными свойствам криволинейных интегралов первого рода.

Если $f(x,y,z) > 0$ и функцию $f$ рассматривать как поверхностную плотность массы материальной поверхности $(\sigma)$, то интеграл (22.2) определяет массу этой поверхности.

Когда поверхность задана уравнением $z = z\,(x, y)$, интеграл (22.2) вычисляется по формуле

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{S} f(x,y,z\,(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy. \qquad (22.3)$$

Если $(\sigma)$ – кусочно-гладкая двусторонняя поверхность $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ $((u, v) \in \Omega)$, а функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в точках поверхности $(\sigma)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du dv, \tag{22.4}$$

где

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, \quad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2, \quad F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'. \tag{22.5}$$

Формула (22.3) является частным случаем формулы (22.4) при $z = z(x, y)$.

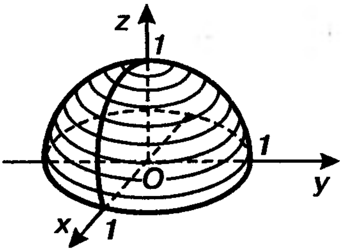


Рис. 22.2

Пример 22.1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, d\sigma$, где $\sigma$ – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$ (рис. 22.2).

Проекцией рассматриваемой части данного параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$ на плоскость $Oxy$ является область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (получено из уравнений поверхности и плоскости). Следовательно, областью $S$ в формуле (22.3) является круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Так как $z_x' = -2x$, $z_y' = -2y$, то в соответствии с формулой (22.3) получаем

$$\iint_{\sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, d\sigma = \iint_{S} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx dy =$$

$$= \iint_{S} (1 + 4x^2 + 4y^2)\, dx dy.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. Замечая, что в области $S$ $\varphi$ меняется от 0 до $2\pi$ и $\rho$ – от 0 до 1, находим

$$\iint_{S} (1 + 4x^2 + 4y^2)\, dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 + 4\rho^2)\, \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + 4\rho^3)\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\rho^2}{2} + \rho^4 \right) \Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = 3\pi.$$

Пример 22.2. Вычислить $\iint_{\sigma} (3x^2 + 5y^2 + 3z - 2)\, d\sigma$, где $\sigma$ – часть поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = b$.

Поверхность задана уравнением, разрешенным относительно $y$. Для вычисления интеграла по поверхности первого рода воспользуемся формулой

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{S_2} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dxdz,$$

где $S_2$ – проекция поверхности $\sigma$ на плоскость $Oxz$.

Поскольку $y_x' = x\big/\sqrt{x^2+z^2}$, $y_z' = z\big/\sqrt{x^2+z^2}$, то

$$\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2} = \sqrt{1+x^2/(x^2+z^2)+z^2/(x^2+z^2)} = \sqrt{2}.$$

Проекцией $s_2$ данной поверхности на плоскость $Oxz$ является круг $x^2+z^2 \le b^2$ (рис. 22.3), поэтому при переходе к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ будем иметь $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le b$.

По указанной формуле находим

$$\iint\limits_{\sigma}(3x^2+5y^2+3z^2-2)\,d\sigma = \iint\limits_{S_2}[3(x^2+z^2)+5(x^2+z^2)-2]\sqrt{2}dxdz =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^b(8\rho^2-2)\,\rho d\rho = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^b(8\rho^3-2\rho)\,d\rho =$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(2\rho^4-\rho^2)\Big|_0^b d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(2b^4-b^2)\,d\varphi = 2\sqrt{2}\pi\,(2b^4-b^2).$$

П р и м е р 22.3. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} x(y+z)\,d\sigma$, где $\sigma$ – часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{b^2-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=c$.

Так как поверхность задана уравнением, разрешенным относительно $x$, то необходимо воспользоваться формулой

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{S_1} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2+x_y'^2}\,dydz,$$

где $S_1$ – проекция поверхности $\sigma$ на плоскость $Oyz$.

Поскольку $x_y' = -y\big/\sqrt{b^2-y^2}$, $x_z' = 0$, то $\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2} = \sqrt{1+y^2/(b^2-y^2)} = b\big/\sqrt{b^2-y^2} = b/x$.

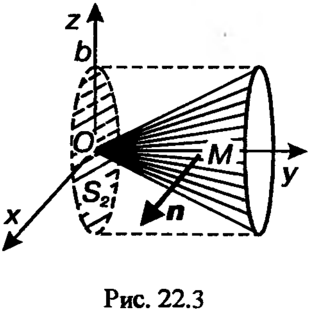

Рис. 22.3

Заметив еще, что в данном случае область $S_1$ представляет собой прямоугольник $ABCD$ (рис. 22.4), определяемый неравенствами $-b \le y \le b$, $0 \le z \le c$, по указанной формуле найдем:

$$\iint_{\sigma} x(y+z)\,d\sigma=\iint_{S_1} x(y+z)\frac{b}{x}\,dydz=b\iint_{S_1}(y+z)\,dydz=$$

$$=b\int_{-b}^{b}dy\int_{0}^{c}(y+z)\,dz=b\int_{-b}^{b}\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=c}dy=b\int_{-b}^{b}\left(cy+\frac{c^2}{2}\right)dy=$$

$$=bc\int_{-b}^{b}ydy+\frac{bc^2}{2}\int_{-b}^{b}dy=\frac{bc}{2}y^2\Bigg|_{-b}^{b}+\frac{bc^2}{2}y\Bigg|_{-b}^{b}=b^2c^2.$$

## 22.2. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть в точках двусторонней поверхности $\sigma$ задана непрерывная функция $f(x,y,z)$. Выберем на поверхности определенную сторону. Разобьем поверхность $\sigma$ сетью произвольно проведенных кривых на части $\Delta\sigma_1$; $\Delta\sigma_2,\ldots,\Delta\sigma_n$.

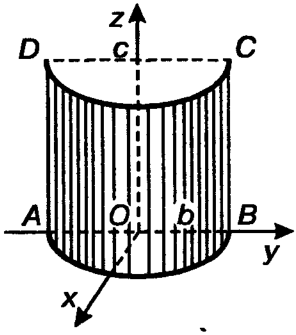


Рис. 22.4

В каждой части $(\Delta\sigma_i)$ выберем по произвольной точке $M_i(x_i,y_i,z_i)$, вычислим в ней значение данной функции. Это значение $f(x_i,y_i,z_i)$ умножим на проекцию $\Delta S_i$ части $(\Delta\sigma_i)$ на плоскости $Oxy$ (а не на площадь $\Delta\sigma_i$, как это было в случае интеграла первого рода). При этом числу $\Delta S_i$ приписывается определенный знак, а именно если в точках $(\Delta\sigma_i)$ нормаль, отвечающая выбранной стороне поверхности составляет с осью $Oz$ острый угол, то через $\Delta S_i$ обозначаем площадь проекции $\Delta\sigma_i$, взятую со знаком плюс, если упомянутая нормаль составляет с осью $Oz$ тупой угол, то под $\Delta S_i$ будем понимать площадь этой проекции, взятую со знаком минус. Составим сумму всех таких произведений:

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S_i. \qquad (22.6)$$

Интегралом второго рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности $\sigma$ называется предел суммы (22.6) при $d\to 0$, где $d$ – наибольший из диаметров элементарных областей $\Delta\sigma_i$:

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,dxdy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta S_i. \qquad (22.7)$$

Аналогично определяются интегралы

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dxdz\,, \quad \iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dydz\,,$$

причем для выбора знака проекции элемента служит угол между нормалью, отвечающей выбранной стороне, и осью $Oy$ или $Ox$.

Наиболее общим видом интеграла второго рода служит интеграл

$$I = \iint_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz + Q(x, y, z)\, dxdz + R(x, y, z)\, dxdy\,,$$

где $P$, $Q$, $R$ – функции от $x$, $y$, $z$, определенные и непрерывные в точках двусторонней поверхности $\sigma$.

Интеграл второго рода обладает всеми свойствами интеграла первого рода за исключением одного: при изменении стороны поверхности интеграл (22.7) меняет знак.

Интегралы первого и второго рода связаны формулой

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали, направленной в ту сторону поверхности, по которой берется интеграл второго рода.

Интегралы второго рода вычисляются следующим образом. Если поверхность $\sigma$ однозначно проецируется в область $S$ плоскости $Oxy$ и $z = f(x, y)$ – ее уравнение, то

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)\, dxdy = \pm \iint_{S_1} R(x, y, f(x, y))\, dxdy\,, \qquad (22.8)$$

где знак плюс берется в том случае, когда на выбранной стороне поверхности $\cos\gamma > 0$, и знак минус, когда $\cos v < 0$. Аналогично, если $\sigma$ однозначно проецируется в область $S_2$ (или $S_3$) на плоскости $Oxz$ (или $Oyz$), т.е. может быть задана уравнением $y = \varphi(x, z)$ (или $x = \psi(y, z)$), то

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)\, dxdz = \pm \iint_{S_2} Q(x, \varphi(x, z), z)\, dxdz\,, \qquad (22.9)$$

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)\, dydz = \pm \iint_{S_3} P(\psi(y, z), y, z)\, dydz\,, \qquad (22.10)$$

где в случае (22.9) берется знак $\cos\beta$, а в случае (22.10) – знак $\cos\alpha$.

Пример 22.4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2)\, dxdy$, где $\sigma$ – верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, отсеченной плоскостями $y = 0$, $y = b$ (рис. 22.5, $a$).

Нормаль **n** в точке $M$, соответствующая указанной стороне поверхности, составляет с осью $Oz$ острый угол (точнее $0 \le \alpha \le \pi/2$), поэтому в формуяе (22.8), которой следует воспользоваться, нужно взять знак плюс. Проекцией $S_1$ данной поверхности на плоскость $Oxy$ является прямоугольник $ABCD$ (рис. 22.5, *б*), определяемый неравенствами $-a \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

По формуле (22.8) находим

$$\iint\limits_{\sigma} (y^2+z^2)\,dxdy = \iint\limits_{S_1} (y^2+(\sqrt{a^2-x^2})^2)\,dxdy = \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{0}^{b} (y^2+a^2-x^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{y^3}{3}+a^2y-x^2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b} dx = \int\limits_{-a}^{a} \left(\frac{b^3}{3}+a^2b-x^2b\right) dx =$$

$$= \left(\frac{b^3}{3}x+a^2bx-b\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2}{3}ab\,(b^2+2a^2).$$

П р и м е р 22.5. Вычислить $\iint\limits_{\sigma} (x^2+z^2+ay^2)\,dxdz$, где $\sigma$ – внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=b$ (см. рис. 22.3).

Нормаль к поверхности в точке $M$ образует с осью $Oy$ тупой угол, поэтому в формуле (22.9) следует взять знак минус.

Проекцией $S_2$ данной поверхности на плоскость $Oxz$ является круг $x^2+z^2 \le b^2$. По формуле (22.9) получаем

$$\iint\limits_{\sigma} (x^2+z^2+ay^2)\,dxdz = -\iint\limits_{S_2} (x^2+z^2+a\,(\sqrt{x^2+z^2})^2)\,dxdz =$$

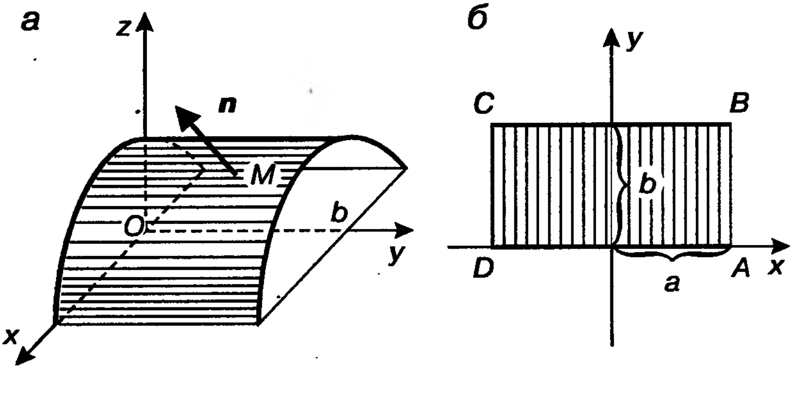


Рис. 22.5

$$= -\iint_{S_2} (x^2+z^2)(a+1)\,dxdz = -(a+1)\iint_{S_2} (x^2+z^2)\,dxdz.$$

Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, находим

$$\iint_{S_2} (x^2+z^2)\,dxdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \rho^2\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^b d\varphi = \frac{2\pi b^4}{4} = \frac{\pi b^4}{2}.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} (x^2+z^2+ay^2)\,dxdz = -(a+1)\iint_{S_2} (x^2+z^2)\,dxdz = -\frac{\pi(a+1)b^4}{2}.$$

Пример 22.6. Вычислить $\iint_{\sigma} (ax^2+by^2+bz^2)\,dydz$, где $\sigma$ – внутренняя сторона части полусферы $x = \sqrt{R^2-y^2-z^2}$, вырезанная конусом $x = \sqrt{y^2+z^2}$.

В формуле (22.10), которой воспользуемся, следует взять знак минус, так как нормаль, соответствующая выбранной стороне поверхности, составляет с положительным направлением оси $Ox$ тупой угол:

$$\iint_{\sigma} (ax^2+by^2+bz^2)\,dydz = -\iint_{S_3} (a(R^2-y^2-z^2)+by^2+bz^2)\,dydz =$$

$$= -\iint_{S_3} (aR^2+(b-a)(y^2+z^2))\,dydz.$$

Так как $S_3$ есть круг $y^2+z^2 \le R^2/2$ (получено из уравнений $x = \sqrt{R^2-y^2-z^2}$, $x = \sqrt{y^2+z^2}$), то, переходя к полярным координатам, находим

$$\iint_{S_3} (aR^2+(b-a)(y^2+z^2))\,dydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\sqrt{2}} (aR^2+(b-a)\rho^2)\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\sqrt{2}} (aR^2\rho+(b-a)\rho^3)\,d\rho = \int_0^{2\pi} \left(aR^2\frac{\rho^2}{2}+(b-a)\frac{\rho^4}{4}\right)\bigg|_0^{R/\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= 2\pi\left(\frac{aR^4}{4}+(b-a)\frac{R^4}{16}\right) = \frac{\pi R^4}{8}(b+3a).$$

Итак, $\iint_{\sigma} (ax^2+by^2+bz^2)\,dydz = -\dfrac{\pi R^4}{8}(b+3a)$.

## 22.3. Формула Стокса. Формула Остроградского

Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы и $L$ – замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно-гладкую двустороннюю поверхность $\sigma$, то справедлива формула Стокса

$$\oint_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$
$$= \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma, \qquad (22.11)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности $\sigma$, причем направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура $L$ совершался против часовой стрелки (в правой системе координат).

Формула Стокса может быть записана в следующем символическом виде:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma.$$

Если $\sigma$ – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая объем $V$, и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в области $V + \sigma$, то справедлива формула Остроградского

$$\iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz, \qquad (22.12)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности $\sigma$.

Пример 22.7. С помощью формулы Стокса вычислить криволинейный интеграл $I = \oint_L ydx + zdy + xdz$, где $L$ – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси $Ox$.

В данном примере $P(x, y, z) = y$, $Q(x, y, z) = z$, $R(x, y, z) = x$, поэтому $R'_y = 0$, $Q'_z = 1$, $P'_z = 0$, $R'_x = 1$, $Q'_x = 0$, $P'_y = 1$.

По формуле (22.11) имеем

$$\oint_L ydx + zdy + xdz = \iint_\sigma (-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma)\,d\sigma,$$

где $\sigma$ – часть плоскости $x + y + z = 0$, ограниченная данной окружностью. Приводя уравнение плоскости $x + y + z = 0$ к нормальному виду, находим $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3}$.

Таким образом, $\oint\limits_L ydx+zdy+xdz=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint\limits_\sigma d\sigma=-\pi a^2\sqrt{3}$, где $a$ – радиус круга, ограниченного указанной окружностью.

Пример 22.8. С помощью формулы Остроградского вычислить $\iint\limits_\sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma$, где $\sigma$ – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к этой поверхности.

Формула Остроградского применима в случае замкнутой поверхности. Чтобы получить замкнутую поверхность, присоединим к поверхности конуса соответствующую часть плоскости $z=h$, $x^2+y^2\le z^2$. Обозначив эту часть плоскости через $\sigma_1$, по формуле Остроградского получим

$$\iint\limits_\sigma (x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma=$$

$$=\iiint\limits_V (2x+2y+2z)\,dxdydz.$$

Чтобы решить задачу, достаточно вычислить второй и третий интегралы. В случае области $\sigma_1$ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – косинусы углов с осями координат нормали к плоскости $z=h$, а именно: $\cos\alpha=0$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=1$, поэтому

$$\iint\limits_{\sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}z^2\cos\gamma d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}h^2d\sigma=h^2\pi h^2=\pi h^4,$$

так как на плоскости $\sigma_1$ $z=h$ и двойной интеграл равен площади круга радиуса $h$, получающегося при пересечении конуса с плоскостью.

Вычисляем третий интеграл, производя в нем сначала интегрирование по $z$ от $z=\sqrt{x^2+y^2}$ до $z=h$, а затем двойной интеграл по области $S$ в плоскости $Oxy$ (эта область является кругом $x^2+y^2\le h^2$, $z=0$; она получается проецированием объема $V$ на плоскость $Oxy$).

Таким образом,

$$\iiint\limits_V (2x+2y+2z)\,dxdydz=2\iint\limits_S\left[\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}(x+y+z)\,dz\right]dxdy=$$

$$=2\iint\limits_S\left[(x+y)\,z+\frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=h}dxdy=$$

$$=2\iint\limits_S\left[(x+y)\,(h-\sqrt{x^2+y^2})+\frac{1}{2}(h^2-x^2-y^2)\right]dxdy.$$

Обозначая последний интеграл через $I$ и переходя к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, находим

$$I=2\int_0^{2\pi}\int_0^{h}\left[\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)(h-\rho)+\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}\rho^2\right]\rho d\rho d\varphi=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{h^4}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)-\frac{h^4}{4}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{h^4}{4}-\frac{h^4}{8}\right]d\varphi=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{h^4}{12}(\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{h^4}{8}\right]d\varphi=$$

$$=\left[\frac{h^4}{6}(\sin\varphi-\cos\varphi)+\frac{h^4\varphi}{4}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi h^4}{2}.$$

Итак, $\iint\limits_{\sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,d\sigma=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}$.

## 22.4. Приложения интегралов по поверхности

Площадь $\sigma$ поверхности $(\sigma)$ вычисляется по формуле

$$\sigma=\iint\limits_{\sigma}d\sigma. \qquad (22.13)$$

Если $p=p(x,y,z)$ – поверхностная плотность массы материальной поверхности $(\sigma)$, то масса всей этой поверхности определяется интегралом

$$m=\iint\limits_{\sigma}p(x,y,z)\,d\sigma. \qquad (22.14)$$

Координаты центра тяжести $C_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности $\sigma$ вычисляются по формулам

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma}xp(x,y,z)\,d\sigma,\ y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma}yp(x,y,z)\,d\sigma,$$

$$z_0=\frac{1}{m}\iint\limits_{\sigma}zp(x,y,z)\,d\sigma, \qquad (22.15)$$

где $m$ определяется формулой (22.14).

Моменты инерции $I_x$, $I_y$, $I_z$ относительно координатных осей $Ox$, $Oy$, $Oz$ находятся соответственно по формулам

$$I_x = \iint_\sigma (z^2+y^2)\, p(x,y,z)\, d\sigma,\ I_y = \iint_\sigma (x^2+z^2)\, p(x,y,z)\, d\sigma,$$
$$I_z = \iint_\sigma (x^2+y^2)\, p(x,y,z)\, d\sigma. \qquad (22.16)$$

Моменты инерции $I_x$, $I_y$, $I_z$ относительно координатных плоскостей $Oxy$, $Oxz$, $Oyz$ вычисляются соответственно по формулам

$$I_{xy} = \iint_\sigma z^2 p(x,y,z)\, d\sigma,\ I_{xz} = \iint_\sigma y^2 p(x,y,z)\, d\sigma,\ I_{yz} = \iint_\sigma x^2 p(x,y,z)\, d\sigma. \qquad (22.17)$$

**Пример 22.9.** Вычислить массу части поверхности $z = xy$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$, вырезанной цилиндром $(x^2+y^2)^2 = 8xy$, если поверхностная плотность $p(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2}$.

Так как $z'_x = y$, $z'_y = x$, $d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, то

$$m = \iint_\sigma \sqrt{1+x^2+y^2}\, d\sigma = \iint_S \sqrt{1+x^2+y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}\, dxdy =$$
$$= \iint_S (1+x^2+y^2)\, dxdy,$$

где $S$ – лепесток лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = 8xy$, для которого $x \ge 0$, $y \ge 0$.

В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ уравнение границы области имеет вид $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$, поэтому

$$\iint_S (1+x^2+y^2)\, dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} (1+\rho^2)\rho\, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} (\rho+\rho^3)\, d\rho =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4\sin 2\varphi}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{16\sin^2 2\varphi}{4}\right) d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \cdot \frac{1}{2}\, d(2\varphi) + 4\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\varphi}{2}\, d\varphi =$$
$$= -\cos 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} + 2\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 4\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = 2+\pi;\ m = \pi+2.$$

**Пример 22.10.** Найти массу части цилиндрической поверхности $y = \sqrt{9-z^2}$, отсеченной плоскостями $x = 0$, $x = 2$, если поверхностная плотность $p(x,y,z) = ky(x+z)$.

По формуле (22.14) находим

$$m=\iint_{\sigma} ky\,(x+z)\,d\sigma=k\iint_{S} y\,(x+z)\,\frac{3}{y}\,dxdz=3k\int_{-3}^{3}dz\int_{0}^{2}(x+z)\,dx=$$

$$=3k\int_{-3}^{3}(x^2/2+xz)\Big|_{x=0}^{x=2}dz=3k\int_{-3}^{3}(2+2z)\,dz=3k\,(2z+z^2)\Big|_{-3}^{3}=36k.$$

Пример 22.11. Вычислить момент инерции относительно оси $Oz$ части однородной поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, для которой $x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0$.

Так как поверхность однородная, т.е. $p\,(x,y,z)=\mathrm{const}$, то в формулах (22.16) можно положить $p=1$.

Третья из формул (22.16) принимает вид

$$I_z=\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

Поскольку в данном случае $F\,(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$,

$$d\sigma=\frac{dxdy}{\cos\gamma}=\frac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{F_z'}\,dxdy,$$

то

$$d\sigma=\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Следовательно,

$$I_z=\iint_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma=R\iint_{S}\frac{(x^2+y^2)\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

где $S$ – четверть круга $x^2+y^2\le R^2$ при $x\ge 0, y\ge 0$.

Переходя к полярным координатам получаем

$$\iint_{S}\frac{(x^2+y^2)\,dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\int_{0}^{\pi/2}d\varphi\int_{0}^{R}\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{\pi R^3}{3}.$$

(Последний интеграл вычислен с помощью подстановки $\rho=R\sin t$). Итак, $I_z=R\pi R^3/3=\pi R^4/3$.

*Глава 23*

# ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

## 23.1. Основные понятия. Необходимый признак сходимости

Рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$ – последовательность чисел или функций. Слагаемые $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$ называются членами ряда. Если все члены ряда являются числами, то ряд называется числовым, если члены ряда – функции, то ряд называется функциональным.

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{23.1}$$

Ряд (23.1) задан, если известен его общий член $a_k = \varphi(k)$, т.е. известно правило, по которому каждому номеру $k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ставится в соответствие вполне определенный член ряда.

Суммой конечного числа $n$ первых членов ряда называется его $n$-й частичной суммой:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Конечный или бесконечный предел частичной суммы при $n \to \infty$ называется суммой ряда:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Ряд, имеющий конечную сумму, называется сходящимся. Если ряд (23.1) сходится и его сумма равна $S$, то используют запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Если предел частичной суммы не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся.

Ряд, члены которого неотрицательны, называется положительным. Положительный ряд всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной (и, следовательно, ряд – сходящимся), если его частичные суммы ограничены сверху, и бесконечной (а ряд – расходящимся), если суммы сверху не ограничены.

Если в ряде (23.1) отбросить первые $m$ членов, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k} = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots, \tag{23.2}$$

называемый остатком ряда (23.1) после $m$-го члена.

Теорема 23.1. *Если сходится ряд* (23.1), *то сходится и любой из его остатков* (23.2); *обратно, их сходимости остатка* (23.2) *вытекает сходимость исходного ряда* (23.1).

Теорема 23.2. *Если ряд (23.1) сходится, то сумма* $r_m$ *его остатка* (23.2) *после m-го члена с возрастанием m стремится к нулю:* $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$.

Теорема 23.3 (необходимый признак сходимости). *Если ряд* (23.1) *сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е.*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{23.3}$$

Следствие. *Если общий член ряда к нулю не стремится, то ряд расходится.*

Примеры числовых рядов: геометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots, \tag{23.4}$$

гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \tag{23.5}$$

Отметим, что геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$; его сумма определяется формулой $S = a/(1-q)$; гармонический ряд расходится.

Замечание. Условие (23.3) не является достаточным для сходимости ряда (23.1).

Пример 23.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(c+k)(c+k+1)} = \frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{1}{(c+2)(c+3)} + \frac{1}{(c+3)(c+4)} + \dots,$$

где $c$ – постоянная $(c \ne -k,\ k = 1, 2, 3, \dots)$.

Составим $n$-ю сумму данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{1}{(c+2)(c+3)} + \frac{1}{(c+3)(c+4)} + \dots + \frac{1}{(c+n)(c+n+1)}.$$

Чтобы упростить выражение для $S_n$, преобразуем формулу общего члена ряда, разлагая $a_k$ на элементарные дроби. Положим

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+1)} = \frac{A}{c+k} + \frac{B}{c+k+1},$$

отсюда

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+1)}=\frac{(A+B)\,k+(A+B)\,c+A}{(c+k)(c+k+1)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $k$ в числителях обеих частей равенства, получаем $A+B=0$, $(A+B)c+A=1$, откуда $A=1$, $B=-1$, поэтому

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+1)}=\frac{1}{c+k}-\frac{1}{c+k+1}.$$

Выражение для $S_n$ принимает вид

$$S_n=\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+2}\right)+\left(\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+3}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{c+n-1}-\frac{1}{c+n}\right)+\left(\frac{1}{c+n}-\frac{1}{c+n+1}\right).$$

Приводя подобные члены и переходя к пределу, получаем

$$S_n=\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+n+1},\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{c+1}.$$

Следовательно, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k)(c+k+1)}=\frac{1}{c+1}.$

Замечание. В частных случаях при $c=0$, $c=\pi$, $c=1$, $c=\sqrt{2}$ по этой формуле получаем соответственно:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\pi+k)(\pi+k+1)}=\frac{1}{\pi+1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}+k)(\sqrt{2}+k+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

Пример 23.2. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k)(c+k+2)}=\frac{1}{(c+1)(c+3)}+\frac{1}{(c+2)(c+4)}+$$

$$+\frac{1}{(c+3)(c+5)}+\ldots+\frac{1}{(c+k)(c+k+2)}+\ldots,$$

где $c=\text{const}$ $(c\neq-k,\ k=1,2,3,\ldots)$.

Разложив общий член $a_k$ на элементарные дроби, получим

$$\frac{1}{(c+k)(c+k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+k}-\frac{1}{c+k+2}\right).$$

Составим $n$-ю частичную сумму данного ряда и преобразуем ее:

$$S_n=\frac{1}{(c+1)(c+3)}+\frac{1}{(c+2)(c+4)}+\frac{1}{(c+3)(c+5)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{(c+n)(c+n+2)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+3}\right)+\left(\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+4}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{c+3}-\frac{1}{c+5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{c+n-2}-\frac{1}{c+n}\right)+\left(\frac{1}{c+n-1}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{c+n+1}\right)+\left(\frac{1}{c+n}-\frac{1}{c+n+2}\right)\right],$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}-\frac{1}{c+n+1}-\frac{1}{c+n+2}\right).$$

Следовательно,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+1}+\frac{1}{c+2}\right),\ S=\frac{2c+3}{2(c+1)(c+2)}.$$

В частном случае при $c=0$ находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{4}.$$

Пример 23.3. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k-1)(c+k)(c+k+1)}\quad (c=\text{const};\ c\neq -k,\ k=1,2,3,\ldots).$$

Разлагая общий член ряда на элементарные дроби, получаем

$$\frac{1}{(c+k-1)(c+k)(c+k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+k-1}-\frac{2}{c+k}+\frac{1}{c+k+1}\right).$$

Составляя $n$-ю частную сумму и преобразуя ее, находим

$$S_n=\frac{1}{c(c+1)(c+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)(c+3)}+\ldots+\frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{c+1}+\frac{1}{c+2}\right)+\left(\frac{1}{c+1}-\frac{2}{c+2}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{c+3}\Bigg)+\left(\frac{1}{c+2}-\frac{2}{c+3}+\frac{1}{c+4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{c+n-3}-\frac{2}{c+n-2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c+n-1}\right)+\left(\frac{1}{c+n-2}-\frac{2}{c+n-1}+\frac{1}{c+n}\right)+\left(\frac{1}{c+n-1}-\frac{2}{c+n}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{c+n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c+n}+\frac{1}{c+n+1}\right).$$

Переходя к пределу, получаем

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+1}\right),\ S=\frac{1}{2c\,(c+1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(c+k-1)\,(c+k)\,(c+k+1)}=\frac{1}{2c\,(c+1)}.$$

В частности, при $c=1$ из последней формулы находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 23.4. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{k}{k+1}+\ldots$$

Общий член ряда выражается формулой $a_k=\frac{k}{k+1}$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{1+1/k}=1$, т.е. общий член к нулю не стремится, то на основании следствия из необходимого признака заключаем, что данный ряд расходится.

Пример 23.5. Исследовать, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\arccos(1/2k)$.

Общий член ряда определяется формулой $a_k=\arccos(1/2k)$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}\arccos(1/2k)=\arccos 0=\pi/2$, т.е. предел общего члена не равен нулю, то на основании следствия из необходимого признака сходимости заключаем, что данный ряд расходится.

## 23.2. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости. Признаки сравнения. Интегральный признак Коши

Рассмотрим числовые ряды с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{23.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{23.7}$$

Теорема 23.4 (первый признак сравнения). *Если для всех* $k \ge k_0$

$$a_k \le b_k \tag{23.8}$$

*и ряд* (23.7) *сходится, то сходится и ряд* (23.6).

*Если для всех* $k \ge k_0$

$$a_k \ge b_k \tag{23.9}$$

*и ряд* (23.7) *расходится, то расходится и ряд* (23.6).

Теорема 23.5 (второй признак сравнения). *Если существует конечный и отличный от нуля предел*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \ne 0, \tag{23.10}$$

*то ряды* (23.6) *и* (23.7) *сходятся или расходятся одновременно.*

Теорема 23.6 (интегральный признак Коши). *Если* $f(x)$ – *неотрицательная невозрастающая функция при* $x > 0$, *то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \quad a_k = f(k) \tag{23.11}$$

*сходится или расходится одновременно с интегралом*

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{23.12}$$

Замечание. Нижним пределом интегрирования в интеграле (23.12) может быть любое другое положительное число из области определения функции $f(x)$.

Пример 23.6. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$1 + \frac{2}{1+2^2} + \frac{2^2}{1+2^4} + \frac{2^3}{1+2^6} + \ldots + \frac{2^k}{1+2^{2k}} + \ldots$$

Все члены данного ряда положительны, общий член определяется формулой $a_k = 2^k/(1+2^k)$. Сравним данный ряд с геометрическим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots, \quad b_k = \frac{1}{2^k}.$$

Так как

$$\frac{2^k}{1+2^{2k}} \le \frac{2^k}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k} \quad (a_k \le b_k, \;\; k = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

т.е. выполнено условие (23.8) и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/2^k$ сходится (геометрический ряд, для которого $q = 1/2 < 1$), то на основании первого признака сравнения заключаем, что исходный ряд также сходится.

Пример 23.7. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{4}} + \ldots$$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом (23.5).

Поскольку

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \left( \frac{1}{k\sqrt[k]{k}} : \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k\sqrt[k]{k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1,$$

т.е. выполнено условие (23.10), то из расходимости гармонического ряда следует расходимость данного ряда.

Пример 23.8. С помощью интегрального признака Коши доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+1} + \ldots$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 1/(x^2+1)$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши: она принимает положительные значения и убывает с возрастанием $x$, причем $f(k) = 1/(k^2+1) = a_k$. Исследуем сходимость интеграла (23.12) для данного случая:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \,\Big|_1^{\infty} = \lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как интеграл сходится, то сходится и данный ряд.

Пример 23.9. С помощью интегрального признака Коши исследовать, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^2}$.

Функция $f(x) = (x+2)/x^2$ удовлетворяет условиям теоремы 23.6.

Поскольку

$$\int_1^{\infty}\frac{x+2}{x^2}dx=\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left(\ln x-\frac{2}{x}\right)\Bigg|_1^{\infty}=\infty,$$

т.е. интеграл вида (23.12) расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 23.10. Исследовать, сходится или расходится данный ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$.

Применим интегральный признак, рассмотрим функцию $f(x)=1/x\ln x$ ($x\geq 3$). Так как

$$\int_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\,\Big|_3^{\infty}=\infty,$$

т.е. интеграл расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 23.11. Исследовать, при каких $p$ сходится ряд Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots \qquad (23.13)$$

Если $p\leq 0$, то общий член ряда не стремится к нулю, $a_k=1/k^p=k^{-p}\geq 1$, поэтому ряд расходится (на основании следствия из необходимого признака сходимости). В случае $p>0$ применим интегральный признак Коши. Функция $f(x)=1/x^p$ положительна и не возрастает при $x\geq 1$. Пусть $p>1$. Положив $p=1+h$ $(h>0)$, получим

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+h}}=-\frac{1}{hx^h}\Bigg|_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{hx^h}\right)-\left(-\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{h}.$$

Поскольку интеграл вида (23.12) сходится, то сходится и ряд Дирихле. Если $p=1$, то

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\,\Big|_1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и ряд Дирихле (при $p=1$ получаем гармонический ряд).

Итак, ряд Дирихле сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

Замечание. Сходимость многих рядов может быть исследована сравнением с соответствующим рядом Дирихле. Вопрос о сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_m(k)}{Q_n(k)}, \qquad (23.14)$$

где $P_m(k)$ и $Q_n(k)$ – многочлены от $k$ степени $m$ и $n$ соответственно, решается сравнением с рядом Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$, где $p = m - n$. При этом целесообразно применять второй признак сравнения.

Пример 23.12. Доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)\,3k}$.

Преобразуем формулу для общего члена данного ряда:

$$a_k = \frac{1}{(3k-1)\,3k} = \frac{1}{(3k)^2(1-1/3k)} = \frac{1}{9k^2(1-1/3k)} = \frac{1}{9k^2}\,\frac{1}{(1-1/3k)}.$$

Рассмотрим ряд с общим членом $b_k = 1/9k^2$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится, ибо это ряд вида (23.13), где $p = 2$. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{9k^2}\,\frac{1}{(1-1/3k}:\frac{1}{9k^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-1/3k} = 1,$$

т.е. выполнено условие (23.10), то данный ряд также сходится.

Пример 23.13. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k-3}{k^4+5k^3+4k^2+7}$.

Это ряд вида (23.14), причем $P_m(k) = k^2 + 2k - 3$, $m = 2$, $Q_n(k) = k^4 + 5k^3 + 4k^2 + 7$, $n = 4$. Так как $p = m - n = 2 - 4 = -2$, сравним данный ряд с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, который является рядом Дирихле и сходится, ибо $p > 1$.

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2+2k-3}{k^4+5k^3+4k^2+7}:\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{k^4+2k^3-3k^2}{k^4+5k^3+4k^2+7} = 1,$$

т.е. выполнено условие (23.10), то данный ряд сходится.

## 23.3. Признак Д'Аламбера. Признак Коши. Другие признаки

Рассмотрим числовой ряд с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (23.15)$$

Т е о р е м а 23.7 (признак Д'Аламбера). *Пусть для ряда* (23.15) *существует*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=q. \tag{23.16}$$

*Если* $q<1$, *то ряд* (23.15) *сходится; если* $q>1$, *то ряд расходится.*

З а м е ч а н и е. Если $q=1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Т е о р е м а 23.8 (признак Коши). *Пусть для ряда* (23.15) *существует*

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=q. \tag{23.17}$$

*Если* $q<1$, *то ряд сходится; если* $q>1$, *то ряд расходится.*

Т е о р е м а 23.9 (признак Раабе). *Пусть для ряда* (23.15) *существует*

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=p. \tag{23.18}$$

*Если* $p>1$, *то ряд сходится; если* $p<1$, *то ряд расходится.*

Т е о р е м а 23.10 (признак Гаусса). *Пусть для ряда* (23.15)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k^m+b_1k^{m-1}+2\ \ +b_m}{k^m+c_1k^{m-1}+2\ \ +c_m}. \tag{23.19}$$

*Если* $c_1-b_1>1$, *то ряд сходится; если* $c_1-b_1\le 1$, *то ряд расходится.*

П р и м е р 23.14. Доказать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{2^3}+\frac{\sqrt{4}}{2^4}+\frac{\sqrt{5}}{2^5}+2$$

Общий член ряда определяется формулой $a_k=\sqrt{k}/2^k$. Заменяя в этой формуле $k$ на $k+1$, получаем последующий член $a_{k+1}=\sqrt{k+1}/2^{k+1}$. Составим отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\sqrt{k+1}}{2^{k+1}}:\frac{\sqrt{k}}{2^k}=\frac{\sqrt{k+1}\,2^k}{\sqrt{k}\,2^{k+1}}=\frac{\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}}.$$

Найдем предел (23.16):

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{k+1}}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}.$$

Так как $q=1/2<1$, то на основании признака Д'Аламбера заключаем, что ряд сходится.

П р и м е р 23.15. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^k\sin^k\frac{1}{2k}$.

Применяем признак Коши. Поскольку $a_k=k^k\sin^k(1/2k)$, $\sqrt[k]{a_k}=k\sin(1/2k)$,

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}k\sin(1/2k)=\lim_{k\to\infty}\frac{\sin(1/2k)}{1/k}=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{\sin(1/2k)}{1/2k}=\frac{1}{2},$$ т.е. $q=1/2<1$, то ряд сходится.

З а м е ч а н и е. Сходимость данного ряда также можно установить с помощью признака Д'Аламбера.

П р и м е р 23.16. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{1}{4}+\ldots\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{k}+\ldots$$

Общий член данного ряда определяется формулой

$$a_k=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{k}.$$

Заменяя в этой формуле $k$ на $k+1$, получаем формулу

$$a_{k+1}=\frac{(2(k+1)-1)!!}{(k+1)(2(k+1))!!}=\frac{(2k+1)!!}{(k+1)(2k+2)!!}.$$

Составляем отношение последующего члена к предыдущему:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(2k+1)!!}{(k+1)(2k+2)!!}:\frac{(2k-1)!!}{k(2k)!!}=\frac{(2k+1)!!(2k)!!k}{(2k-1)!!(2k+2)!!(k+1)}=$$

$$=\frac{(2k+1)k}{(2k+2)(k+1)}=\frac{2k^2+k}{2k^2+4k+2}.$$

Находим предел (23.16):

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k^2+k}{2k^2+4k+2}=\frac{2}{2}=1.$$

Поскольку $q=1$, то признак Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Обратимся к признаку Раабе. Найдем предел (23.18):

$$\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{2k^2+4k+2}{2k^2+k}-1\right)=\lim_{k\to\infty}k\left(\frac{2k^2+k+3k+2}{2k^2+k}-1\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}k\left(1+\frac{3k+2}{2k^2+2}-1\right)=\lim_{k\to\infty}k\frac{3k+2}{2k^2+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{3k^2+2k}{2k^2+2}=\frac{3}{2}.$$

Так как в данном случае $p=3/2>1$, то на основании признака Раабе заключаем, что ряд сходится.

П р и м е р 23.17. Исследовать условия сходимости гипергеометрического ряда

$$\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+$$

$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)(\alpha+k)\beta\ldots(\beta+k)}{(k+1)!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k)},$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$.

Общий член данного ряда определяется формулой

$$a_k=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}.$$

Поскольку

$$a_{k+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)(\alpha+k)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)(\beta+k)}{(k+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)(\gamma+k)},$$

то

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}=\frac{k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta}{k^2+(\gamma+1)k+\gamma}.$$

Из последнего выражения видно, что применение к данному ряду признака Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости $\left(\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=1\right)$.

Применим признак Гаусса. Так как в данном случае $b_1=\alpha+\beta$, $c_1=\gamma+1$, то при $c_1-b_1=\gamma+1-\alpha-\beta>1$ ряд сходится, при $c_1-b_1=\gamma+1-\alpha-\beta\le 1$ ряд расходится. Преобразуя полученные неравенства, заключаем, что ряд сходится при $\gamma-\alpha-\beta>0$ и расходится при $\gamma-\alpha-\beta\le 0$.

## 23.4. Знакопеременные ряды

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным. Знакопеременный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k=b_1+b_2+b_3+\ldots \tag{23.20}$$

сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т.е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|=|b_1|+|b_2|+|b_3|+\ldots \tag{23.21}$$

Ряд (23.20) в этом случае называется абсолютно сходящимся. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Если ряд (23.20) сходится, а ряд (23.21) расходится, то ряд (23.20) называется условно (неабсолютно) сходящимся. Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки его членов можно сделать равной любому данному числу, конечному или равному $+\infty$.

Ряд (23.21) является рядом с положительными членами, поэтому для исследования вопроса о его сходимости можно применять ранее рассмотренные признаки (признаки сравнения, интегральный признак, признак Коши, Д'Аламбера и др.).

Замечание 1. Из расходимости ряда (23.21) в общем случае не следует расходимость ряда (23.20).

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакочередующимся.

Теорема 23.12 (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+\ldots+(-1)^{k+1}a_k+\ldots\ (a_k>0)$$

*сходится, если выполнены условия:*

$$a_k \geq a_{k+1} \ (k=1,2,3,\dots,\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots), \tag{23.22}$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{23.23}$$

При замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой $n$ его первых членов ошибка не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов, т.е.

$$|r_n| \leq a_{n+1}. \tag{23.24}$$

Теорема 23.13 (признак Дирихле). *Знакопеременный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{23.25}$$

*сходится, если: 1) частные суммы* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *ограничены, т.е.* $|B_n| \leq C$ $(n=1,2,3,\dots)$; *2) числа* $a_k$ $(k=1,2,3,\dots)$ *образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю.*

Замечание 2. Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле. В самом деле, если $a_k$, монотонно убывая, стремится к нулю, а $b_k = (-1)^{k-1}$, то ряд (23.25) принимает вид $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$, для которого выполнены условия признака Лейбница.

Теорема 23.14 (признак Абеля). *Ряд (23.25) сходится, если: 1) сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$; *2) числа* $a_k$ $(k=1,2,3,\dots)$ *образуют монотонную и ограниченную последовательность.*

Пример 23.18. Исследовать сходимость знакопеременного ряда

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{3^6}-\frac{1}{3^7}+\dots+\frac{(-1)^{k(k-1)/2}}{3^k}+\dots$$

Составляем ряд из модулей членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\dots+\frac{1}{3^k}+\dots$$

Последний ряд сходится, как геометрический ряд со знаменателем Следовательно, данный ряд также сходится; он является абсолютно сходящимся рядом (в соответствии с определением абсолютной сходимости ряда).

Пример 23.19. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k^3}$.

Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin k|}{k^3} = \frac{|\sin 1|}{1^3}+\frac{|\sin 2|}{2^3}+\frac{|\sin 3|}{3^3}+\dots \tag{1}$$

Так как $|\sin k| \le 1$, то каждый член не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots \tag{2}$$

(ряд (2) является рядом Дирихле, т.е. рядом вида (23.13), где $p = 3 > 1$). Согласно первому признаку сравнения ряд (1) сходится, поэтому сходится и данный ряд, причем абсолютно.

Пример 23.20. Исследовать характер сходимости знакочередующегося ряда

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} + \ldots$$

Поскольку ряд, составленный из модулей членов данного ряда, т.е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, расходится (ряд Дирихле; $p = 1/2 < 1$), то о сходимости ряда пока ничего нельзя сказать (см. замечание 1). Применим к данному знакочередующемуся ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница здесь выполнены:

$$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из модулей расходится, то данный ряд сходится условно (неабсолютно).

Пример 23.21. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} + \ldots,$$

чтобы вычислить его сумму с точностью до $0{,}001$?

Данный ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница

$$1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^3} > \frac{1}{4^3} > \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^3} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, причем абсолютно, так как ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \frac{1}{k^3} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

является сходящимся (ряд Дирихле; $p > 1$).

Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше $0{,}001$, т.е.

$$\frac{1}{k^3} < 0{,}001, \text{ или } \frac{1}{k^3} < \frac{1}{1000}.$$

Последнее неравенство выполняется, когда $k^3 > 1000$, или $k > 10$. Следовательно, нужно взять 10 членов данного ряда. Так как $a_{11} = 1/11^3 < 1/10^3 = 0{,}001$, то по формуле (23.24) получаем следующую оценку для остатка ряда: $r_{10} \le a_{11} < 0{,}001$.

Пример 23.22. Исследовать характер сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{(k-1)(k-2)/2}}{k}+\ldots$$

Ряд, составленный из модулей членов данного ряда, является гармоническим рядом, который расходится. Сравнение данного ряда с гармоническим не решает вопрос о его сходимости (см. замечание 1).

Применим признак Дирихле. Данный ряд можно представить в виде

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, где $a_k = 1/k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$, $b_k = (-1)^{(k-1)(k-2)/2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$, т.е. $b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = -1,\ b_4 = -1,\ b_5 = 1,\ b_6 = 1,\ b_7 = -1,\ b_8 = -1, \ldots$

Поскольку $a_k$ монотонно стремится к нулю $\left(1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots,\ \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0\right)$, частные суммы $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ ограничены ($B_n \le 2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, ибо $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3 = 1$, $B_4 = 0$, $B_5 = 1$, $B_6 = 2$, $B_7 = 1$, $B_8 = 0, \ldots$, $B_{4k-3} = 1$, $B_{4k-2}=2$, $B_{4k-1}=1$, $B_{4k}=0,\ldots$), то, согласно признаку Дирихле, ряд сходится. Так как ряд из модулей его членов расходится, то данный ряд сходится условно (неабсолютно).

Пример 23.23. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{1}{3^k\left(1+\frac{3}{k}\right)^k}.$$

Применим признак Абеля. Этот ряд можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \left(a_k = \frac{1}{(1+3/k)^k},\ b_k = (-1)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \frac{1}{3^k}\ (k = 1, 2, 3, \ldots)\right).$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится $\left(\text{ибо сходится ряд } \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}\right)$, а числа $a_k$ образуют монотонную ограниченную последовательность $\left(\frac{1}{e^3} < a_k < \frac{1}{4},\ a_k > a_{k+1},\right.$ так как $\left(1+\frac{3}{k}\right)^k < \left(1+\frac{3}{k+1}\right)^{k+1}$, $\left.\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}(1+3/k)^k} = \frac{1}{e^3}\right)$, то, согласно признаку Абеля, данный ряд сходится.

## 23.5. Действия над рядами

Суммой двух рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{23.26}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{23.27}$$

называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots \tag{23.28}$$

Аналогично определяется разность двух рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \ldots \tag{23.29}$$

Ряды (23.28) и (23.29) сходятся, если сходятся оба ряда (23.26), (23.27).

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A,\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = B$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B,\quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) = A - B.$$

Произведением ряда (23.26) на число $c$ называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots \tag{23.30}$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = A$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k = cA$.

Произведением рядов (23.26) и (23.27) называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_k + \ldots, \tag{23.31}$$

где

$$c_k = a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \ldots + a_k b_1 \ (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{23.32}$$

Если ряды (23.26) и (23.27) сходятся абсолютно, то ряд (23.31) также сходится абсолютно и его сумма равна произведению сумм данных рядов.

З а м е ч а н и е. Если из двух сходящихся рядов (23.26) и (23.27) хоть один сходится абсолютно, то их произведение – сходящийся ряд.

Пример 23.24. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4^k}+\frac{(-1)^k}{5^k}\right]$.

Этот ряд является суммой двух рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^k}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{5^k}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+\ldots$$

Каждый из этих рядов есть геометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}=\frac{a}{1-q}\quad (|q|<1).$$

Для первого ряда $a=1,\ q=1/4$, поэтому $S_1=\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}$. Для второго ряда $a=1,\ q=-1/5$, поэтому $S_2=\frac{1}{1-(-1/5)}=\frac{5}{6}$.

Следовательно, сумма исходного ряда

$$S=S_1+S_2=4/3+5/6=13/6.$$

Пример 23.25. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^k}-\frac{(-1)^k}{3^k}\right]$.

Данный ряд является разностью двух сходящихся геометрических рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots,\quad S_1=\frac{1}{1-1/2}=2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\ldots,\quad S_2=\frac{1}{1-(-1/3)}=\frac{3}{4}.$$

Значит исходный ряд имеет сумму $S=S_1-S_2=2-3/4=5/4$.

## 23.6. Некоторые числовые ряды и их суммы

1. $\sum_{k=0}^{\infty}(a+kr)\,q^k=\frac{a}{1-q}+\frac{rq}{(1-q)^2}\quad (|q|<1).$

2 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+1)}=1.$

3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+2)}=\frac{3}{4}.$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(k+3)}=\frac{11}{18}.$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\,(2k+1)}=\frac{1}{2}.$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$

7. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{3}{4}.$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{12}.$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[1+(k-1)h][1+kh]} = \frac{1}{h}.$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[a+(k-1)h](a+kh)} = \frac{1}{ah}.$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}.$

12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}.$

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$

14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(2k-1)!} = \sin 1 = \sin 57^\circ 17' 45'' = 0{,}84147\ldots$

15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{1}{(2k)!} = \cos 1 = \cos 57^\circ 17' 45'' = 0{,}54030\ldots$

16. $\displaystyle\sum_{k=1,\, k\neq m}^{\infty} \frac{1}{(m+k)(m-k)} = -\frac{3}{4m^2}$ ($m$ – целое число).

17. $\displaystyle\sum_{k=1,\, k\neq m}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(m-k)(m+k)} = \frac{3}{4m^2}$ ($m$ – четное число).

18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$

22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$

23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}.$

24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1.$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2{,}71828\ldots$

26. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} = 0{,}36787\ldots$

27. $\displaystyle 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!} = \frac{1}{e}.$

28. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = 1{,}54308\ldots$

29. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = 1{,}17520\ldots$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2 = 0{,}6931\ldots$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln 2.$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k3^k} = \ln 3 = 1{,}0986\ldots$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k2^k} = 1 + \ln 2.$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)\,2^k}{k3^k} = 2 + \ln 3.$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \ln 2.$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(4k^2-1)} = 2\ln 2 - 1.$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(9k^2-1)} = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1).$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{12k^2-1}{k\,(4k^2-1)^2} = 2\ln 2.$

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(4k^2-1)^2} = \frac{3}{2} - \ln 2.$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

41. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)\,2k\,(2k+1)} = \frac{1}{2}(1 - \ln 2).$

42. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln 2\right).$

43. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{3k-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2\right).$

44. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2.$

45. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{m^{2k}} = \frac{m^2}{m^2+1}.$

46. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(8k-1)\,(8k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}(\sqrt{2}+1).$

47. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{4k-3} = \frac{1}{4\sqrt{2}}[\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)].$

48. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(m+k-1)!} = \frac{1}{(m-2)\,(m-1)!}.$

49. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(36k^2-1)} = -3 + \frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2.$

50. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)\,(3k+2)\,(3k+3)\,(3k+4)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$

*Глава 24*

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

## 24.1. Сходимость функциональных рядов

Пусть дан функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots, \tag{24.1}$$

т.е. ряд, члены которого $u_k(x)$ – некоторые функции от $x$.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (24.1) становится числовым рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots \tag{24.2}$$

Если ряд (24.2) сходится, то значение аргумента $x = x_0$ называется точкой сходимости ряда (24.1). Множество всех точек сходимости $x$ функционального ряда (24.1) называется его областью сходимости, а функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_n(x)$$

– суммой данного ряда. Функция

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) \tag{24.3}$$

называется остатком ряда (24.1).

Если ряд (24.2) расходится, то значение $x = x_0$ называется точкой расходимости ряда (24.1).

В простейших случаях для определения области сходимости ряда (24.1) можно применять к нему известные признаки сходимости, считая $x$ фиксированным. В частности, при применении признака Д'Аламбера или Коши случай, когда $q = 1$, исследуется особо, с помощью других признаков сходимости.

Функциональный ряд (24.1) называется абсолютно сходящимся на множестве $X$, если при всех $x \in X$ сходится ряд из модулей его членов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)| = |u_1(x)| + |u_2(x)| + |u_3(x)| + \ldots$$

Пример 24.1. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x-1}{x+1} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k + \ldots$$

Данный ряд является геометрическим рядом со знаменателем $q=(x-1)/(x+1)$. Геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$. Следовательно, данный ряд сходится лишь в случае $|(x-1)/(x+1)|<1$. Последнему неравенству равносильны неравенства $-1<(x-1)/(x+1)<1$. Если $(x+1)>0$, то $-x-1<x-1<x+1$, т.е. $-x-1<x-1$ и $x-1<x+1$. Второе из этих неравенств выполняется для всех $x$, первое верно только для $x>0$. Если $(x+1)<0$, то $-x-1>x-1>x+1$, т.е. $x+1<x-1$ и $x-1<-x-1$. Первое из полученных равенств противоречиво, второе выполняется при $x<0$. Но при $x<0$ $|q|>1$.

Таким образом, ряд сходится при $x>0$, т.е. областью его сходимости является открытый промежуток $(0,+\infty)$. (При $x=0$, как и следовало ожидать, получаем расходящийся ряд $-1+1-1+\ldots$).

Пример 24.2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+x^2}+\frac{x^2}{2+x^4}+\ldots+\frac{x^k}{2+x^{2k}}+\ldots$$

Общий член данного ряда определяется формулой $u_k(x)=x^k/(2+x^{2k})$. Так как $|x^k/(2+x^{2k})|=|x^k|/(2+x^{2k})\le|x|^k$ при $|x|<1$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^k$ сходится при $|x|<1$, то и данный ряд сходится для $|x|<1$. Поскольку $\left|\frac{x^k}{2+x^{2k}}\right|\le\frac{|x^k|}{|x^{2k}|}=\frac{1}{|x|^k}$ при $|x|>1$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^{-k}$ сходится при $|x|>1$, то данный ряд сходится и для $|x|>1$. Если $x=\pm1$, то $|u_k(1)|=1/3$; ряд расходится. Итак, данный ряд сходится при всех $x$, кроме $x=\pm1$.

Пример 24.3. При каких $x$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1+1/k)^k 2^{kx}$?

Применим к данному ряду признак Коши, для чего сначала найдем предел $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k|}=q$. Так как $u_k=(1+1/k)^k 2^{kx}$, $\sqrt[k]{|u_k|}=(1+1/k)\,2^x$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k|}=\lim\limits_{k\to\infty}(1+1/k)\,2^x=2^x$.

Найдем значения $x$, при которых этот предел меньше 1, для чего решим неравенство $2^x<1$. Последнее неравенство выполняется для $x<0$. При $x=0$ данный ряд принимает вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$. Этот ряд расходится, так как для него не выполнен необходимый признак сходимости (общий член к нулю не стремится: $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}(1+1/k)^k=e$). Итак, ряд сходится при $x<0$.

## 24.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Функциональный ряд (24.1) называется равномерно сходящимся в некотором промежутке, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $N$, не зависящее от $x$, что при $n > N$ для всех $x$ из данного промежутка выполняется неравенство

$$\left|R_n(x)\right| < \varepsilon,$$

где $R_n(x)$ – остаток ряда, определяемый формулой (24.3).

Теорема 24.1 (признак Вейерштрасса). *Функциональный ряд (24.1) сходится абсолютно и равномерно в некотором промежутке, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \qquad (24.4)$$

*такой, что*

$$\left|u_k(x)\right| \le a_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \qquad (24.5)$$

*для всех* $x$ *из данного промежутка.*

Ряд (24.4) в этом случае называется мажорантным рядом для ряда (24.1).

Свойства функциональных рядов выражаются следующими теоремами.

Теорема 24.2. *Сумма равномерно сходящегося ряда функций, непрерывных в замкнутом промежутке* $[a, b]$, *есть функция, непрерывная в данном промежутке.*

Теорема 24.3. *Если члены сходящегося ряда* (24.1) *имеют непрерывные производные при* $a \le x \le b$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ *сходится равномерно в замкнутом промежутке* $[a, b]$, *то ряд* (24.1) *в этом промежутке можно дифференцировать почленно:*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x), \text{ или } \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right)' = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u'_k(x). \qquad (24.6)$$

Теорема 24.4. *Если члены ряда* (24.1) *непрерывны при* $a \le x \le b$ *и ряд этот сходится равномерно в замкнутом промежутке* $[a, b]$, *то его можно интегрировать почленно в данном промежутке:*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\, dx.$$

Теорема 24.5. *Если ряд* (24.1) *сходится равномерно в некоторой области, и каждый член ряда имеет конечный предел* $\lim\limits_{x\to\alpha} u_k(x) = c_k$, *где* $\alpha$ – *точка сгущения данной области, то к пределу можно перейти почленно, т.е.*

$$\lim_{x\to\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to\alpha}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k.$$

П р и м е р 24.4. Исследовать, равномерно ли сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{3^k}$.

Так как $|\cos kx|\le 1$ для всех $x$, то $|\cos kx/3^k|\le 1/3^k$ $(k=1,2,3,\ldots)$, т.е. каждый член данного ряда не превышает соответствующего члена сходящегося числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(1/3^k)$ (геометрический ряд, $q=1/3$). Последний ряд является мажорантным для данного ряда. В соответствии с признаком Вейерштрасса заключаем, что данный ряд сходится абсолютно и равномерно для всех $x$, т.е. на всей действительной оси.

П р и м е р 24.5. Доказать, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx/k^2$ является непрерывной функцией при всех $x$.

Прежде всего каждый член данного ряда $u_k(x)=\sin kx/k^2$ $(k=1,2,3,\ldots)$ есть функция, непрерывная при всех $x$. Ряд сходится равномерно при всех $x$, поскольку $|\sin kx/k^2|\le 1/k^2$ и для данного ряда существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ – сходящийся числовой ряд с положительными членами (ряд Дирихле; $p=2>1$). Согласно теореме 24.2, сумма данного ряда есть функция, непрерывная при всех $x$ (как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций).

П р и м е р 24.6. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx/k^4$ в области его сходимости?

Каждый член данного ряда есть функция $u_k(x)=\sin kx/k^4$, дифференцируемая при всех $x$, причем $u_k'=\cos kx/k^3$.

Составим ряд производных $\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx/k^3$. Каждый член нового ряда – непрерывная функция $u_k(x)=\cos kx/k^3$. Так как $|u_k(x)|=|\cos kx|/k^3\le 1/k^3$ $(k=1,2,3,\ldots)$, то для него существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^3)$.

Следовательно, ряд производных равномерно сходится при всех $x$, поэтому, согласно теореме 24.3, исходный ряд можно дифференцировать почленно. По формуле (24.6) получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^4}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kx}{k^4}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^3}.$$

Пример 24.7. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2^k \pi x}{2^k}$?

Этот ряд сходится равномерно при всех $x$, ибо для него существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/2^k)$ (так как $\left|\sin 2^k \pi x/2^k\right| \le 1/2^k$). Каждый член ряда $u_k(x)=\sin 2^k \pi x/2^k$ есть функция дифференцируемая, причем $u_k'(x)=$ $=\pi \cos 2^k \pi x$. Ряд производных $\pi\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2^k \pi x$ расходится в каждой точке, ибо ни в одной точке не выполняется необходимый признак сходимости (общий член к нулю не стремится). Следовательно, исходный ряд почленно дифференцировать нельзя.

Пример 24.8. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum_{k=1}^{\infty}1/(x^2+k^2)$?

Каждый член данного ряда $u_k(x)=1/(x^2+k^2)$ есть функция, непрерывная для всех $x$, ряд сходится равномерно на всей числовой оси. Действительно, так как для всех $x$ выполняется неравенство $1/(x^2+k^2)<1/k^2$, то для данного ряда существует мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$.

Таким образом, согласно теореме 24.4, данный ряд можно интегрировать по любому промежутку из его области сходимости, в частности по промежутку $[0,x]$. Интегрируя, получаем

$$\int_0^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{dx}{x^2+k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}.$$

## 24.3. Степенные ряды. Действия над степенными рядами

Степенным называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots,\qquad(24.7)$$

где $a_k$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$ – постоянные числа, называемые коэффициентами ряда. При $a=0$ ряд принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\qquad(24.8)$$

Теорема 24.6 (признак Абеля). *Если степенной ряд* (24.8) *сходится при* $x=x_0$ $(x_0\ne 0)$, *то он сходится абсолютно и равномерно при любом* $x$, *для которого* $|x|<|x_0|$.

Радиусом сходимости ряда (24.8) называется число $R$ такое, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ расходится. Интервал $(-R, R)$ в этом случае называется интервалом сходимости указанного ряда. На концах промежутка $[-R, R]$ ряд может или сходится или расходится.

Если степенной ряд (24.8) сходится на всей числовой оси, то полагают, $R=\infty$, если он сходится только при $x=0$, полагают $R=0$. Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Аналогично определяется радиус и интервал сходимости для ряда (24.7): если при $|x-a|<R$ этот ряд сходится, а при $|x-a|>R$ расходится, то $R$ – радиус его сходимости, $(a-R, a+R)$ – интервал сходимости.

Радиус сходимости степенного ряда находится с помощью признака Д'Аламбера или признака Коши.

Радиус сходимости можно вычислить по одной из формул:

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|},\quad R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \tag{24.9}$$

если соответствующий предел существует.

Простейшим примером степенного ряда является геометрический ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots$ Этот ряд сходится при $q=|x|<1$. Следовательно, для данного ряда радиус сходимости $R=1$, а интервал сходимости $(-1, 1)$. Сумма этого ряда равна $S(x)=1/(1-x)$ (в соответствии с формулой $S=a/(1-q)$, $a=1$, $q=x$), поэтому для функции $f(x)=1/(1-x)$ имеем следующее разложение в степенной ряд:

$$1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots+x^k+\ldots\quad (|x|<1). \tag{24.10}$$

**Действия над степенными рядами.** Рассмотрим степенные ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots, \tag{24.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\ldots \tag{24.12}$$

с общим интервалом сходимости $(a-R, a+R)$.

Сумма (разность) рядов (24.11) и (24.12) определяется соответственно формулами

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)(x-a)^k, \tag{24.13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k-\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)(x-a)^k, \tag{24.14}$$

а их произведение – формулой

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-a)^k\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k, \tag{24.15}$$

где

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0. \qquad (24.16)$$

Ряды (24.13) – (24.15) имеют тот же радиус сходимости $R$, что и ряды (24.11) и (24.12).

В частном случае, если ряды (24.11) и (24.12) совпадают, формула (24.15) обращается в формулу для возведения ряда в квадрат:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 a_k + a_1 a_{k-1} + a_2 a_{k-2} + \ldots + a_k a_0)\,(x-a)^k.$$

Степенной ряд в пределах промежутка сходимости можно возводить в степень с любым натуральным показателем $m$.

Степенной ряд (24.11) внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1} (x-a)^k, \qquad (24.17)$$

$$\int\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + C. \qquad (24.18)$$

Ряды (24.17) и (24.18) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (24.11).

Теорема 24.7. *Если ряды* (24.11) *и* (24.12) *в окрестности точки* $x = a$ *имеют одну и ту же сумму, то они тождественны, т.е.* $a_k = b_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Эта теорема устанавливает единственность разложения функции в степенной ряд.

Пример 24.9. Найти радиус сходимости степенного ряда $1 + 3x + {}$ $+ 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 + \ldots + 3^k x^k + \ldots$

Это степенной ряд вида (24.8), все коэффициенты его отличны от нуля. Воспользуемся первой из формул (24.9). Так как $a_k = 3^k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3^k} = 3$, $1/R = 3$, то радиус сходимости данного ряда $R = 1/3$, а интервал сходимости $(-1/3, 1/3)$.

Замечание. Данный ряд является геометрическим рядом со знаменателем $q = 3x$. Геометрический ряд сходится при $|q| < 1$, т.е. при $|3x| < 1$, или при $-1/3 < x < 1/3$.

Пример 24.10. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (kx)^k = x + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \ldots + (kx)^k + \ldots$$

Применим вторую из формул (24.9). Поскольку

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \frac{1}{k+1},$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/k}\right)^k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{e}\, 0 = 0,$$

то радиус сходимости ряда равен нулю. Ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

Замечание. Тот же результат можно получить и по первой формуле (24.9): $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|k^k|}=\lim_{k\to\infty}k=\infty,\quad 1/R=\infty,\quad R=0.$

Пример 24.11. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$.

Так как $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k!}:\frac{1}{(k+1)!}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{k!}=\lim_{k\to\infty}(k+1)=\infty$, то $R=\infty$. Ряд сходится при всех $x$, т.е. в интервале $(-\infty,+\infty)$.

Пример 24.12. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}=\frac{x-2}{1}+\frac{(x-2)^3}{8}+\frac{(x-2)^5}{27}+\ldots$$

Применим признак Д'Аламбера, для чего найдем предел $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=q$. В данном случае

$$u_k=\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3},\quad u_{k+1}=\frac{(x-2)^{2(k+1)-1}}{(k+1)^3}=\frac{(x-2)^{2k+1}}{(k+1)^3},$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{(x-2)^{2k+1}}{(k+1)^3}:\frac{(x-2)^{2k-1}}{k^3}=\frac{(x-2)^{2k+1}k^3}{(x-2)^{2k-1}(k+1)^3}=(x-2)^2\frac{k^3}{(k+1)^3},$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}(x-2)^2\left(\frac{k}{k+1}\right)^3=(x-2)^2.$$

Так как при $(x-2)^2<1$, или $|x-2|<1$, ряд сходится, а при $(x-2)^2>1$, или $|x-2|>1$, ряд расходится, то в соответствии с определением радиус сходимости данного ряда $R=1$. Неравенство $|x-2|<1$ равносильно неравенствам $-1<x-2<1$ или $1<x<3$; интервалом сходимости является интервал $(1, 3)$. Этот интервал можно найти, полагая $a=2$, $R=1$ в общем выражении $(a-R, a+R)$. Исследуем сходимость ряда на концах этого интервала. При $x=3$ получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3-2)^{2k-1}}{k^3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

Этот ряд сходится (ряд Дирихле; $p=3>1$). При $x=1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-2)^{2k-1}}{k^3}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k-1}}{k^3}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

Этот ряд также сходится. Следовательно, данный ряд сходится при $1\le x\le 3$, т.е. областью его сходимости является отрезок $[1, 3]$.

Пример 24.13. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2k}}{k}$.

Применяем признак Д'Аламбера. В данном случае

$$u_{k+1}=\frac{(x+3)^{2(k+1)}}{k+1},\quad u_k=\frac{(x+3)^{2k}}{k},$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{(x+3)^{2k+2}}{k+1}:\frac{(x+3)^{2k}}{k}=\frac{k\,(x+3)^{2k+2}}{(k+1)\,(x+3)^{2k}}=\frac{k}{k+1}(x+3)^2,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{k+1}(x+3)^2\right|=(x+3)^2.$$

Поскольку при $(x+3)^2<1$, т.е. при $|x+3|<1$, ряд сходится, а при $(x+3)^2>1$, т.е. при $|x+3|>1$, ряд расходится, то радиус сходимости данного ряда $R=1$, а интервал сходимости $(-4,-2)$. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $[-4,-2]$. При $x=-4$ получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-4+3)^{2k}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Этот ряд расходится (гармонический ряд). При $x=-2$ также получаем расходящийся гармонический ряд. Следовательно, областью сходимости данного ряда является интервал $(-4,-2)$.

Пример 24.14. Найти область сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+2)^k}{k\,(5^k+1)}$.

Применяем признак Д'Аламбера, считая $x$ фиксированным. Поскольку

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\left|\frac{(x+2)^{k+1}}{(k+1)\,(5^{k+1}+1)}:\frac{(x+2)^k}{k\,(5^k+1)}\right|=\frac{|x+2|\,k\,(5^k+1)}{(k+1)\,(5^{k+1}+1)},$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{k\,(5^k+1)\,|x+2|}{(k+1)\,(5^{k+1}+1)}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+1/k}\,\frac{(1+5^{-k})\,|x+2|}{(5+5^{-k})}=\frac{|x+2|}{5}.$$

Ряд сходится, когда полученный предел меньше единицы, т.е. $|x+2|/5<1$, или $|x+2|<5$. Так как при $|x+2|<5$ ряд сходится, а при $|x+2|>5$ ряд расходится, то радиус сходимости $R=5$; интервал $(-7,3)$ является интервалом сходимости. Исследуем поведение ряда на концах промежутка $[-7,3]$. При $x=-7$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-7+2)^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-5)^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\,(1+5^{-k})}.$$

Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому он сходится. При $x=3$ получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3+2)^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{k\,(5^k+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,(1+5^{-k})}.$$

Полученный ряд расходится, так как каждый его член больше соответствующего члена расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/(k+1)$, т.е. $1/k\,(1+5^{-k})>1/(k+1)$, ибо $k\,(1+5^{-k})<k+1$.

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуоткрытый промежуток $[-7,3)$.

## 24.4. Ряд Тейлора. Ряд Маклорена

Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_k(x-a)^k+\ldots$$

в некоторой окрестности точки $a$, т.е. в интервале $(a-h,a+h)$, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$c_0=f(a),\ c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ (k=1,2,3,\ldots). \tag{24.19}$$

Следовательно,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\ldots \tag{24.20}$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (24.20), называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

Равенство (24.20) выполняется (ряд Тейлора сходится к $f(x)$ в интервале $(a-h,a+h)$), если остаток ряда Тейлора

$$r_n(x)=\left(f(x)-f(a)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

стремится к нулю при неограниченном возрастании $n$:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$$

при всех $x$ из интервала $(a-h,a+h)$.

**Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.** Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в интервале $(a-h,a+h)$ и ее производные равномерно ограничены в этом интервале, т.е. существует такое положительное число $C$ (не зависящее от $n$), что

$$\left|f^{n}(x)\right| \le C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

при всех $x$ из $(a - h, a + h)$, то верно равенство (24.20) во всем интервале $(a - h, a + h)$.

Формула (24.20) в частном случае при $a = 0$ определяет разложение функции в ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots \qquad (24.21)$$

При разложении функций в степенные ряды часто используется формула (24.10) и разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \quad (|x| < \infty),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (|x| < \infty),$$

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (|x| < \infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \le 1),$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (|x| < \infty),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (|x| < \infty);$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$$
$$(-1 < x < 1).$$

Пример 24.15. Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x) = 1/(1+x)$.

Воспользуемся разложением (24.10). В формуле $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^k + \dots$ запишем $(-x)$ вместо $x$:

$$1/(1-(-x)) = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4 + \dots + (-x)^k + \dots$$

Таким образом, получено следующее разложение данной функции в степенной ряд:

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^k x^k + \dots \qquad (24.22)$$

Этот ряд сходится при $|x| < 1$.

Замечание. Формулу (24.22) можно получить и другим путем. Ряд $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k x^k + \dots$ является геометрическим рядом со знаменателем

$q=-x$; он сходится при $|x|<1$, его сумма $S(x)=1/(1+x)$ (получено по формуле $S=a/(1-q)$, $a=1$, $q=-x$).

Пример 24.16. Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x) = 1/(1-x^2)$.

В формуле (24.22) вместо $x$ запишем $-x^2$:

$$1/(1-x^2)=1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2k}+\ldots$$

Полученный ряд сходится при $|x|<1$.

Замечание. Этот пример можно решить и другим способом. Так как

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right),$$

то в соответствии с разложениями (24.10) и (24.22) по определению суммы степенных рядов (формула (24.13)) получаем

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}[\,(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)+(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)\,]=$$

$$=\frac{1}{2}[\,(1+1)+(-x+x)+(x^2+x^2)+(-x^3+x^3)+(x^4+x^4)+\ldots]=$$

$$=\frac{1}{2}(2+2x^2+2x^4+\ldots)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2k}+\ldots$$

Пример 24.17. Разложить в ряд по степеням $(x+2)$ функцию $f(x)=1/(1-x)$.

Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-(x+2)+2}=\frac{1}{3-(x+2)}=\frac{1}{3\,(1-(x+2)/3)}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-(x+2)/3}.$$

Введем новую переменную $t$, полагая $x+2=t$; воспользуемся разложением (24.10), записывая в нем $t/3$ вместо $x$:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-(x+2)/3)}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{(1-t/3)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+\frac{t}{3}+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^3+\ldots\right], \qquad (1)$$

или

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x+2}{3}+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+\left(\frac{x+2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x+2}{3}\right)^k+\ldots\right],$$

т.е.

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{3}+\frac{x+2}{3^2}+\frac{(x+2)^2}{3^3}+\frac{(x+2)^3}{3^4}+\ldots+\frac{(x+2)^k}{3^{k+1}}+\ldots \qquad (2)$$

Ряд (1) сходится при $|t/3|<1$, т.е. при $|t|<3$, или $-3<t<3$, а ряд (2) сходится при $-3<x+2<3$, или при $-5<x<1$.

**Пример 24.18.** Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x)=\dfrac{4}{(1+x)(1-3x)}$.

Разлагая данную функцию в сумму элементарных дробей, получаем

$$\frac{4}{(1+x)(1-3x)}=\frac{1}{1+x}+\frac{3}{1-3x}.$$

Так как

$$1/(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+(-1)^k x^k+\ldots, \tag{3}$$

$$1/(1-3x)=1+3x+(3x)^2+(3x)^3+(3x)^4+\ldots+(3x)^k+\ldots, \tag{4}$$

то по формуле (24.13) находим

$$\frac{4}{(1+x)(1-3x)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k+3\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k=\sum_{k=0}^{\infty}[\,(-1)^k+3^{k+1}]\,x^k. \tag{5}$$

Ряд (3) сходится при $|x|<1$, ряд (4) сходится при $|x|<1/3$, поэтому ряд (5) также сходится при $|x|<1/3$, т.е. в интервале $(-1/3,1/3)$.

**Пример 24.19.** Найти разложение в степенной ряд функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$ с помощью степенного ряда для $\varphi(x)=1/(1+x^2)$.

Прежде всего напишем степенной ряд для функции $\varphi(x)$, записывая в формуле (24.10) $x^2$ вместо $(-x)$, получаем

$$1/(1+x^2)=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots$$

Этот ряд сходится при $|x|<1$, т.е. в интервале $(-1,1)$; следовательно, его можно интегрировать почленно по любому промежутку, содержащемуся в указанном интервале. Интегрируя ряд по промежутку $[0,x]$, где $0<x<1$, находим

$$\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x(1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots+(-1)^k x^{2k}+\ldots)\,dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x$, то

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\ldots$$

Этот ряд имеет радиус сходимости $R=1$. На концах промежутка $[-1,1]$ ряд также сходится. В частности, при $x=1$ получаем ряд

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

## 24.5. Применения рядов в приближенных вычислениях

С помощью рядов можно вычислить значения тригонометричеких функций, логарифмов чисел, корней, определенных интегралов.

Значения тригонометрических функций (синуса и косинуса) можно вычислить с помощью их разложений в степенные ряды.

Для вычисления натуральных логарифмов чисел применяется формула

$$\ln\frac{N+1}{N}=\ln(N+1)-\ln N=2\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5}+\ldots\right), \quad (24.23)$$

которая получается из формулы

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+\ldots\right) \quad (|x|<1)$$

при $x=1/(2N+1)$.

Погрешность при замене суммы ряда (24.23) суммой его $n$ первых членов определяется формулой

$$\alpha_n=2\left(\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{2n+3}\frac{1}{(2N+1)^{2n+3}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{2n+5}\frac{1}{(2N+1)^{2n+5}}+\ldots\right).$$

Очевидно,

$$\alpha_n<\beta_n=\frac{2}{2n+1}\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\ldots\right),$$

или

$$\alpha_n<\frac{1}{2(2n+1)}\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}}\frac{1}{N(N+1)}.$$

Для вычисления корней применяют биномиальный ряд, т.е. степенной ряд для функции $f(x)=(1+x)^\alpha$. Предположим, что нужно вычислить $\sqrt[m]{A}$, причем уже известно приближенное значение $a$ этого корня, но требуется улучшить его. Если $A/a^m=1+x$, где $x$ – небольшая правильная дробь, то можно преобразовать корень следующим образом:

$$\sqrt[m]{A}=a\sqrt[m]{\frac{A}{a^m}}=a\,(1+x)^{1/m} \quad (24.24)$$

и применить биномиальный ряд при $\alpha=1/m$.

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, соответствующий определенный интеграл можно вычислить приближенно.

Пример 24.20. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до 0,0001.

Преобразование (23.24) в данном случае принимает вид

$$\sqrt{17}=\sqrt{16+1}=\sqrt{16\,(1+1/16)}=4\,(1+1/16)^{1/2}.$$

Воспользуемся биномиальным рядом. Полагая в нем $x=1/16$, $\alpha=1/2$, получаем

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2}\frac{1}{16}+\frac{1/2\,(1/2-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1/2\,(1/2-1)(1/2-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{16}\right)^3+$$
$$+\frac{1/2\,(1/2-1)\,(1/2-2)\,(1/2-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{16}\right)^4+\ldots,$$

т.е.

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}+\frac{1}{2^4\cdot 16^3}-\frac{5}{2^7\cdot 16^4}+\ldots$$

Полученный ряд (если не принимать во внимание первый член) является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим условиям признака Лейбница. Погрешность при вычислении его суммы не превышает первого отброшенного члена. Так как

$$\frac{1}{2^4\cdot 16^3}=\frac{1}{66536}<\frac{1}{10000}=0{,}0001,$$

то достаточно взять сумму первых трех членов ряда, чтобы получить искомое значение корня с заданной точностью:

$$\sqrt{17}\approx 4\left(1+\frac{1}{2\cdot 16}-\frac{1}{2^3\cdot 16^2}\right)\approx 4{,}1230.$$

## 24.6. Ряды Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{24.25}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,2,3,\ldots), \tag{24.26}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,3,\ldots). \tag{24.27}$$

**Ряды Фурье периода** $2\pi$. Если функция $f(x)$ с периодом $2\pi$ кусочно-дифференцируема в промежутке $[-\pi,\pi]$, то ее ряд Фурье сходится в любой точке $x_0$ и имеет сумму

$$S\,(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}. \tag{24.28}$$

В частности, в точке непрерывности функции $f(x)$ сумма ее ряда Фурье равна значению самой функции $f(x)$. На концах промежутка $[-\pi, \pi]$ имеем $S(-\pi) = f(-\pi)$, $S(\pi) = f(\pi)$, если функция $f(x)$ непрерывна в точках $x = \pm\pi$, и $S(\pm\pi) = f(-\pi+0)/2 + f(-\pi+0)/2$, если она разрывна в этих точках.

Ряд Фурье четной функции содержит только члены с косинусами; ряд Фурье нечетной функции содержит только члены с синусами.

Кусочно-дифференцируемая функция, заданная на полупериоде $[0, \pi)$, может быть продолжена в промежуток $[-\pi, 0)$ либо как четная, либо как нечетная, в соответствии с чем ее можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам кратных дуг.

**Ряды Фурье периода $2l$.** Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ в промежутке $[-l, l]$ либо непрерывны, либо имеют лишь конечное число точек разрыва первого рода, то во всех точках непрерывности этого промежутка справедливо разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{24.29}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{24.30}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{24.31}$$

В точках разрыва функции $f(x)$ и на концах $x = \pm l$ промежутка $[-l, l]$ сумма ряда Фурье определяется формулой (24.28).

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $[a; a+2l]$ длины $2l$ пределы интегрирования в формулах (24.30), (24.31) следует заменить соответственно через $a$ и $a+2l$.

Ряд Фурье (24.25) можно представить в комплексной форме

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Аналогично представляется в комплексной форме и ряд Фурье в правой части формулы (24.29).

Пример 24.21. В промежутке $(-\pi, \pi)$ разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

По формулам (24.26), (24.27) находим коэффициенты

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}x+5\right)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{4}+5x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4}+5\pi-\frac{\pi^2}{4}+5\pi\right)=10,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}x+5\right)\cos nx dx=\frac{1}{2\pi}\left[\left(x\frac{\sin nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]+\frac{5}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}(\pi\sin n\pi+\pi\sin(-n\pi))+\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+$$

$$+\frac{5}{\pi n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi n^2}(\cos n\pi-\cos(-n\pi))-\frac{5}{\pi n}(\sin n\pi-\sin(-n\pi))=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}x+5\right)\sin nx dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx+\frac{5}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right]+\frac{5}{n}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left[\pi\frac{\cos n\pi}{n}+\pi\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right]+\frac{1}{2\pi n^2}\sin x\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\frac{5}{\pi n}[\cos n\pi-\cos(-n\pi)]=-\frac{2\pi\cos n\pi}{2\pi n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}x+5=5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Пример 24.22. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x \text{ при } -\pi\le x\le 0;\\ 0 \text{ при } 0<x<\pi.\end{cases}$$

С помощью полученного разложения показать, что

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots$$

По формулам (24.26) и (24.27) находим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0dx=-\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0dx=$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = -\frac{1}{\pi n} x \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} \sin nx dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi n^2}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{1}{\pi n^2}[\,(-1)^n - 1],$$

т.е. $a_n = -\dfrac{2}{\pi n^2}$ при $n$ нечетном, $a_n = 0$ при $n$ четном;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi} x \frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}dx = \frac{1}{\pi n}[0\cdot\cos 0 - (-\pi)\cos n(-\pi)\,] - \frac{1}{\pi n}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi\cos n\pi}{\pi n} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi \le x < \pi).$$

При $x = 0$ получаем

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Пример 24.23. Функцию $f(x)=x$ в промежутке $[0,\pi]$ разложить по косинусам.

В данном случае требуется получить разложение функции в промежутке $[0, \pi]$ длины $\pi$ (а не $2\pi$). Продолжая функцию в промежуток $[-\pi, 0]$ четным образом, заключаем, что ее разложение в ряд Фурье содержит только косинусы, т.е. все $b_n = 0$. Коэффициенты $a_n$ находим по формулам, получающимся из формул (24.26) для этого случая:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}x^2\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(\pi\sin n\pi - 0\sin 0) + \frac{2}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}[\,(-1)^n - 1],$$

т.е. $a_{2k} = 0$, $a_{2k-1} = -4/\pi(2k-1)^2$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Следовательно,

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\quad(0\le x\le\pi).$$

Пример 24.24. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^3$ в промежутке (-1,1).

Данная функция является нечетной, поэтому разложение (24.29) будет содержать только члены с синусами, все $a_n=0$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$. Коэффициенты $b_n$ в этом случае можно определять по формуле

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\text{ или } b_n=2\int_0^1 x^3\sin n\pi x dx\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

Найдем эти коэффициенты:

$$b_n=2\int_0^1 x^3 d\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)=-2x^3\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^1+\frac{6}{n\pi}\int_0^1 x^2\cos n\pi x dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}(1\cdot\cos n\pi-0\cdot\cos 0)+\frac{6}{n\pi}\int_0^1 x^2 d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)=$$

$$=-\frac{(-1)^n 2}{n\pi}+\frac{6}{n^2\pi^2}x^2\sin n\pi x\bigg|_0^1-\frac{12}{(n\pi)^2}\int_0^1 x\sin n\pi x dx=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+\frac{6}{n^2\pi^2}\sin n\pi+\frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^1 xd\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+\frac{12}{n^3\pi^3}x\cos n\pi x\bigg|_0^1-\frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^1\frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+\frac{12}{n^3\pi^3}\cos n\pi-\frac{12}{n^3\pi^3}\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^1=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}+(-1)^n\frac{12}{n^3\pi^3}=(-1)^n\frac{2}{n\pi}\left(-1+\frac{6}{n^2\pi^2}\right)\quad(n=1,2,3,\ldots).$$

Следовательно, при $-1<x<1$ получаем

$$x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{(-1)^n 6}{n^3\pi^3}\right]\sin n\pi x=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{(-1)^n 6}{n^3\pi^2}\right]\sin n\pi x.$$

## 24.7. Степенные ряды с комплексной переменной

Рассмотрим две комплексные переменные величины $z = x + iy$ и $w = u + iv$, где $x$, $y$, $u$, $v$ – действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Если каждому значению переменной $z$ из некоторого множества соответствует единственное значение переменной $w$, то говорят, что $w$ есть функция от $z$:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – действительные функции от $x$ и $y$; задание одной функции от одной комплексной переменной означает задание двух действительных функций от двух действительных переменных.

Комплексным функциональным рядом называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots, \qquad (24.32)$$

члены которого являются функциями комплексной переменной.

Значения $z$, при которых ряд (24.32) сходится, называются точками сходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости этого ряда. Для каждого числа $z$ из области сходимости

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z),$$

где $S_n(z)$ – частная сумма ряда (24.32), а $S(z)$ – его сумма.

Ряд (24.32) сходится, если сходится ряд из модулей его членов.

Степенным рядом с комплексными членами называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots, \qquad (24.33)$$

где $z$ – комплексная переменная, $z_0$ – данное комплексное число, коэффициенты $a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – данные комплексные числа.

В частном случае, при $z_0 = 0$, получаем комплексный степенной ряд, расположенный по степеням $z$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad (24.34)$$

Для каждого степенного ряда (24.33) существует круг радиуса $R$ с центром в точке $M_0$ (т.е. $|z - z_0| < R$), внутри которого данный ряд сходится, а вне его расходится (т.е. при $|z - z_0| > R$). Этот круг называется кругом сходимости. Его радиус называется радиусом сходимости степенного ряда ($R = \infty$, если степенной ряд сходится во всей плоскости, $R = 0$, если он сходится лишь в центре круга, в точке $M_0$). Во всех точках внутри круга сходимости степенной ряд абсолютно сходится.

При отыскании радиуса сходимости степенного ряда могут применяться признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. В частности, радиус сходимости степенного ряда (24.33) можно вычислить по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{24.35}$$

Показательная и тригонометрические функции комплексной переменной определяются формулами

$$e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots, \tag{24.36}$$

$$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots, \tag{24.37}$$

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots \tag{24.38}$$

Ряды в правых частях формул (24.36) – (24.38) сходятся при всех комплексных $z$ $(R=\infty)$.

Связь между этими функциями устанавливают формулы Эйлера:

$$\begin{gathered} e^{iz}=\cos z+i\sin z,\quad e^{-iz}=\cos z-i\sin z; \\ \cos z=\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)/2,\quad \sin z=\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)/2i. \end{gathered} \tag{24.39}$$

Отметим, что

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2},\quad e^{z+2\pi i}=e^z,\quad e^z=e^x(\cos y-i\sin y), \tag{24.40}$$

$$z=re^{i\varphi}, \tag{24.41}$$

где $z=x+iy$.

Вторая из формул (24.40) означает, что функция $e^z$ имеет период $2\pi i$. Формула (24.41) представляет комплексное число $z=x+iy$ в показательной форме ($r$ – модуль, $\varphi$ – аргумент).

Пример 24.25. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ и его сумму.

Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|z|^n=1+|z|+|z|^2+\ldots$$

Полученный ряд является рядом с действительными членами, он представляет собой геометрический ряд. Следовательно, этот ряд сходится, когда $|z|<1$, т.е. в круге радиуса $R=1$ с центром в начале координат. Таким образом, данный ряд также сходится в круге $|z|<1$, который и является его областью сходимости.

Так как частная сумма ряда выражается формулой

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1} z^k=\frac{1-z^n}{1-z}$$

и $z^n \to 0$ при $n\to\infty$ $(|z|<1,\ z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi))$, то сумма ряда

$$S(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\frac{1}{1-z}.$$

Итак, получено следующее разложение:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z|<1).$$

Пример 24.26. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|z|^n}=1+\frac{1}{|z|}+\frac{1}{|z|^2}+\frac{1}{|z|^3}+\ldots$$

Этот ряд является геометрическим. Так как $q=1/|z|$, то ряд сходится при $|q|<1$, т.е. при $(1/|z|)<1$, или при $|z|>1$.

Итак, областью сходимости является множество точек, лежащих вне круга радиуса $R=1$ с центром в начале координат.

Пример 24.27. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

Поскольку $a_n=1/2^n$, $a_{n+1}=1/2^{n+1}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n}:\frac{1}{2^{n+1}}\right|=2.$$

Итак, радиус сходимости данного ряда $R=2$.

Пример 24.28. Найти область сходимости ряда $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

Поскольку $a_n=1/n!$, $a_{n+1}=1/(n+1)!$, то

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}=n+1$$

и

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Данный ряд сходится на всей комплексной плоскости.

Пример 24.29. Найти сумму $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$.

Используя третью из формул (24.39), получаем $\cos kx = (e^{ikx}+e^{-ikx})/2$, поэтому

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}+\sum_{k=1}^{n}e^{-ikx}\right).$$

Суммируя геометрические прогрессии, находим

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{ix}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}+\frac{e^{-ix}-e^{-i(n+1)x}}{1-e^{-ix}}\right].$$

Разделив почленно первую дробь на $e^{ix/2}$, вторую на $e^{-ix/2}$, получим

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{ix/2}-e^{i(2n+1)x/2}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}+\frac{e^{-ix/2}-e^{-i(2n+1)x/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{(e^{(2n+1)x/2}-e^{-(2n+1)x/2})/2i-(e^{ix/2}-e^{-ix/2})/2i}{(e^{ix/2}-e^{-ix/2})/2i}=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}.$$

Итак, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}.$

Пример 24.30. С помощью разложения $\displaystyle\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ $(z=re^{i\varphi}=$ $=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $|z|<1)$ получить следующие:

$$\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\varphi;\quad \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin n\varphi.$$

Первое разложение получено в пример 24.25. Подставив в него выражение $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, найдем

$$\frac{1}{(1-r\cos\varphi)-ir\sin\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\varphi+i\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin n\varphi.$$

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$\frac{1}{(1-r\cos\varphi)-ir\sin\varphi}=\frac{(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi}{[(1-r\cos\varphi)-ir\sin\varphi][(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi]}=$$

$$=\frac{(1-r\cos\varphi)+ir\sin\varphi}{(1-r\cos\varphi)^2-i^2r^2\sin^2\varphi}=\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}+i\,\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}+i\,\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\varphi+i\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin n\varphi,$$

откуда

$$\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\varphi,\quad \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin n\varphi.$$

# IV
# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется обыкновенным. Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то соответствующее дифференциальное уравнения называется уравнением с частными производными. В главах 25 и 27 рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение $n$-го порядка в общем виде можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где $x$ – независимая переменная; $y=y(x)$ – искомая функция переменной $x$; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – ее производные; $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ – заданная функция своих аргументов. Отметим, что функция $F$ может не содержать некоторых своих аргументов, но непременно должна зависеть от $y^{(n)}$ (когда речь идет об уравнении $n$-го порядка).

Если данное уравнение разрешимо относительно производной $n$-го порядка, его можно представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая $n$ раз в интервале $(a, b)$, называется решением дифференциального уравнения в этом интервале, если она обращает данное уравнение в тождество, т.е.

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$$

для всех $x \in (a, b)$.

График решения дифференциального уравнения $n$-го порядка называется интегральной линией (или интегральной кривой).

Термин «дифференциальное уравнение» принадлежит Лейбницу (1676, опубликовано в 1684 г.). Начало исследований по дифференциальным уравнениям восходит ко временам Лейбница, Ньютона, в работах которых исследовались первые задачи, приводящие к таким уравнениям. Лейбниц, Ньютон, братья Я. и И. Бернулли разрабатывали методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве универсального способа использовались разложения интегралов дифференциальных уравнений в степенные ряды. Некоторые классы уравнений были приведены к к уравнению с разделяющимися переменными.

Возникновение теории дифференциальных уравнений в частных производных было связано с расширением в XVIII в. области приложений математического анализа. Оно стимулировалось теми задачами естествознания, механики, физики, в которых появилась необходимость в функциях нескольких переменных.

Первые примеры интегрирования уравнений с частными производными даны в работах Эйлера (1734). Теорию уравнений с частными производными интенсивно развивали Эйлер, Д'Аламбер, Д. Бернулли,. Новые идеи в этой области в конце XVIII в. предложены в сочинениях Лагранжа, Лапласа, Монжа.

В 1807 г. Фурье вывел уравнение теплопроводности и для его решения разработал метод разделения переменных, названный его именем. Решением задач, возникавших в теории теплопроводности занимались многие математики, в том числе Гаусс, Пуассон, Грин, М. В. Остроградский и др.

Глава 25

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию этой переменной и ее производную. Если $y = y(x)$ – функция независимой переменной $x$, то в общем виде уравнение записывается так:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение разрешимо относительно $y'$, то

$$y' = f(x, y),$$

откуда $dy - f(x, y)\,dx = 0$, или в более общем виде

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y) = 0.$$

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество. В случае, если эта функция задана в неявном виде, решение называют интегралом. График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, где $C$ – произвольная постоянная, обращающая данное уравнение в тождество.

Общее решение $\Phi(x, y, C) = 0$, заданное в неявном виде, называется общим интегралом этого уравнения.

Геометрически общее решение (и общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящее от одного параметра $C$.

Частным решением уравнения называется решение, полученное из общего решения при фиксированном значении $C$: $y = \varphi(x, C_0)$, где $C_0$ – число. Аналогично определяется частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

**Задача Коши.** Найти решение $y = f(x)$ дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$. Другими словами, найти интегральную кривую этого уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$.

## 25.1. Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнение первого порядка с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$X(x)\,Y(y)\,dx + X_1(x)\,Y_1(y)\,dy = 0, \qquad (25.1)$$

где $X(x)$, $X_1(x)$ – функции только от $x$, $Y(y)$, $Y_1(y)$ – функции только от $y$.

Предположив, что $X_1(x)\,Y(y)\neq 0$, и разделив обе части уравнения (25.1) на это произведение, получим уравнение

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy=0,$$

которое называют уравнением с разделенными переменными; оно имеет общий интеграл

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+\int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}dy=C.$$

Замечание. Корни уравнений $X_1(x)=0$, $Y(y)=0$ являются решениями уравнения (25.1).

Пример 25.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'=(1-x)/(2+y)$. Найти решение, удовлетворяющее условию $y=1$ при $x=5$.

Это уравнение можно записать в виде

$$dy/dx=(1-x)/(2+y),\ \text{ или }\ (x-1)\,dx+(y+2)\,dy=0;$$

Интегрируя, получаем

$$(x-1)^2/2+(y+2)^2/2=C_1,\ \text{ или }\ (x-1)^2+(y+2)^2=C^2\quad (C^2=2C_1).$$

Общий интеграл данного уравнения геометрически представляет собой множество концентрических окружностей с центром в точке $S(1,-2)$. Найдем решение, удовлетворяющее указанному условию. Подставив в выражение для общего интеграла значения $x=5$, $y=1$, определим $C$: $(5-1)^2+(1+2)^2=C^2$, $C^2=25$. Следовательно, искомый частный интеграл имеет вид $(x-1)^2+(y+2)^2=25$; он определяет окружность, проходящую через точку $M(5,1)$.

## 25.2. Однородные уравнения

Функция $F(x,y)$ называется однородной измерения $m$, если для любых $t$ выполняется тождество

$$F(tx,ty)=t^mF(x,y). \tag{25.2}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \tag{25.3}$$

называется однородным, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

С помощью новой переменной $u$, вводимой по формуле

$$y=ux, \tag{25.4}$$

однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{25.5}$$

также можно привести к однородному уравнению с помощью преобразования $x = u + h$, $y = v + k$, где $h$ и $k$ определяются системой уравнений

$$ah + bk + c = 0, \quad a_1 h + b_1 k + c_1 = 0,$$

в случае, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Уравнение (25.5) сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью преобразования $ax + by = z$ в случае, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 25.2. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' = y \ln (y/x)$.

Это уравнение приводится к виду (25.3), где $P(x, y) = y \ln (y/x)$, $Q(x, y) = -x$ – однородные функции первого измерения; они удовлетворяют условию (25.2) при $m = 1$. Полагая $y/x = u$, или $y = ux$ (см. (25.4)), находим $y' = u'x + ux'$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем $x(u'x + ux') = ux \ln u$,

$$u'x = u \ln u - u, \quad x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1), \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Вводя новую переменную $t$ по формуле $\ln u = t$ и интегрируя, находим

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dt}{t - 1} = \ln(\ln u - 1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln C, \quad \ln(\ln u - 1) = \ln x + \ln C,$$

откуда $Cx = \ln u - 1$, $Cx = \ln(y/x) - 1$, $Cx + 1 = \ln(y/x)$, $y/x = e^{Cx+1}$, $y = xe^{Cx+1}$.

Следовательно, $y = xe^{Cx+1}$ – общее решение.

## 25.3. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли

Уравнение

$$\varphi_1(x)\, y' + \varphi_2(x)\, y + \varphi_3(x) = 0,$$

или

$$y' + p(x)\, y = q(x), \tag{25.6}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение линейного уравнения ищут в виде произведения двух функций:

$$y(x) = u(x)\, v(x). \tag{25.7}$$

Подстановка выражений для $y$ и $y'$ в уравнение (25.6) приводит его к виду

$$v\frac{du}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}+p(x)\,v\right)u=q(x).$$

В качестве $v$ выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $v'(x)+p(x)\,v=0$, тогда функция $u$ определяется уравнением $vu'(x)=q(x)$.

Для решения уравнения (25.6) можно применить метод вариации произвольной постоянной, состоящий в следующем: сначала находят общее решение соответствующего однородного уравнения (т.е. уравнения, для которого $q(x)=0$); величину $C$, входящую в это общее решение, полагают функцией $x$ и находят ее.

Уравнением Бернулли называется уравнение

$$y'+p(x)\,y=q(x)\,y^{\alpha},$$

где $\alpha$ – действительное число. Это уравнение является линейным в случае $\alpha=0$, $\alpha=1$. В других случаях оно сводится к линейному с помощью подстановки $u=y^{1-\alpha}$.

Пример 25.3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x^2+1.$$

Данное уравнение является линейным. Решение этого уравнения ищем в виде (25.7). Поскольку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, то

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}uv=x^2+1,$$

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x^2+1. \qquad (1)$$

В качестве $v$ выберем одну из функций, обращающих в нуль коэффициент при $u$ в уравнении (1), т.е. решение уравнения

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными $v$ и $x$. Разделив переменные, получим

$$\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{x^2+1},$$

откуда $\ln v=\ln(x^2+1)+\ln C$, $v=C(x^2+1)$.

Полагая $C=1$, получаем $v=x^2+1$. Уравнение (1) с учетом (2) сводится к уравнению

$$v\frac{du}{dx}=x^2+1, \text{ или } \frac{du}{dx}(x^2+1)=(x^2+1), \quad \frac{du}{dx}=1,$$

из которого определяется $u=x+C$. По формуле (25.7) находим общее решение

$$y=uv=(x+C)(x^2+1).$$

## 25.4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{25.8}$$

левая часть которого является полным дифференциалом некоторой функции, т.е.

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dU(x, y). \tag{25.9}$$

Общий интеграл уравнения (25.8) определяется формулой

$$U(x, y) = C. \tag{25.10}$$

Поскольку

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy, \tag{25.11}$$

то из равенств (25.9) и (25.11) следуют уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y), \tag{25.12}$$

которыми определяется функция $U = U(x, y)$, входящая в формулу (25.10).

Необходимое и достаточное условие того, что уравнение (25.8) является уравнением в полных дифференциалах, выражается равенством

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{25.13}$$

Если левая часть уравнения (25.8) не является полным дифференциалом, но становится таковым при умножении на некоторую функцию $\mu = \mu(x, y)$ $(\mu(Pdx + Qdy) = dU)$, то $\mu = \mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем.

Интегрирующий множитель зависит только от $x$, т.е. $\mu = \mu(x)$, если

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x),$$

и зависит только от $y$, если

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \varphi(y).$$

Пример 25.4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(2x - 3y)\,dx + (2y - 3x)\,dy = 0$.

Для данного уравнения

$$P(x, y) = 2x - 3y, \quad Q(x, y) = 2y - 3x; \quad P'_y = -3, \quad Q'_x = -3.$$

Так как выполнено условие (25.13), то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах; следовательно, равенства (25.12) принимают вид

$$U'_x = 2x - 3y, \quad U'_y = 2y - 3x. \tag{1}$$

Интегрируя первое из этих уравнений ($y$ при этом считается постоянным), находим

$$U(x, y) = x^2 - 3xy + \varphi(y), \tag{2}$$

где $\varphi(y)$ – функция, подлежащая определению.

Дифференцируя по $y$ функцию $U = U(x, y)$ и принимая во внимание второе из равенств (1), получаем $-3x + \varphi'(y) = 2y - 3x$, откуда

$$\varphi'(y) = 2y, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 2y, \quad d\varphi = 2ydy, \quad \varphi(y) = y^2 + C_1.$$

Подставив выражение для $\varphi(y)$ в равенство (2), найдем

$$U(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 + C_1.$$

В соответствии с формулой (25.10) получаем

$$x^2 - 3xy + y^2 + C_1 = C_2, \text{ или } x^2 - 3xy + y^2 = C, \text{ где } C = C_2 - C_1.$$

Итак, $x^2 - 3xy + y^2 = C$ – общий интеграл данного уравнения.

З а м е ч а н и е. Это уравнение является также однородным; его можно проинтегрировать с помощью формулы (25.4).

## 25.5. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Решение многих научных и технических задач приводит к интегрированию дифференциальных уравнений. В этих задачах требуется установить зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического или другого процесса, найти уравнение линии или поверхности и т. п.

При решении таких задач можно руководствоваться следующим.

1. Необходимо сначала составить дифференциальное уравнение из условия задачи.
2. Определить тип полученного уравнения и выбрать метод решения.
3. Найти общее решение уравнения.
4. Получить частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.
5. В случае необходимости вычислить значения вспомогательных параметров (коэффициент пропорциональности и др.).
6. Если это требуется, найти численные значения искомых величин.

Составление дифференциального уравнения по условию научной или технической задачи состоит в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, в нахождении выражения для производной.

В некоторых случаях приращения целесообразно сразу заменить соответствующими дифференциалами.

При составлении дифференциальных уравнений используются соответственно геометрический или механический смысл производной; кроме того, в зависимости от условия задачи применяются соответствующие законы физики, механики, химии и других наук.

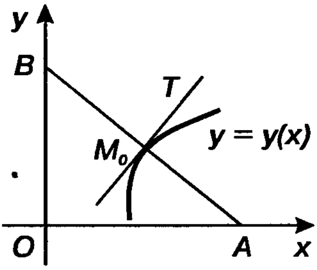


Рис. 25.1

Пример 25.5. Найти линию, у которой отрезок нормали в любой ее точке, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке. Составить уравнение такой линии, проходящей через точку $M$ (5, 4).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка (рис. 25.1) искомой линии $y = y(x)$, где $y(x)$ – пока неизвестная функция аргумента $x$. Уравнение нормали к линии $y = y(x)$ в точке $M_0$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Обозначим через $A$ и $B$ точки пересечения нормали с координатными осями. Положив в этом уравнении $y = 0$, найдем $x = x_0 + y_0 y'(x_0)$ – абсциссу точки $A$; при $x = 0$ из того же уравнения найдем $y = y_0 + \dfrac{x_0}{y'(x_0)}$ – ординату точки $B$.

Поскольку $M_0$ – середина отрезка $AB$, то

$$\frac{x_0 + y_0 y'(x_0)}{2} = x_0, \quad \frac{y_0 + x_0/y'(x_0)}{2} = y_0.$$

Каждое из этих уравнений приводится к уравнению

$$y'(x_0)\,y_0 - x_0 = 0. \tag{1}$$

Уравнению (1) удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$ искомой линии, поэтому

$$y'(x)\,y - x = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем общий интеграл

$$y^2 - x^2 = C. \tag{3}$$

Общий интеграл (3) определяет множество равносторонних гипербол с действительной осью $Oy$ при $C > 0$; множество равносторонних гипербол с действительно осью $Ox$ при $C < 0$; пару прямых $y = x$, $y = -x$ при $C = 0$. Найдем ту линию, которая проходит через точку $M$ (5, 4). Подставив в уравнение (3) координаты точки $M$, определим значение параметра $C$: $4^2 - 5^2 = C$, $C = -9$. При $C = -9$ уравнение (3) принимает вид $y^2 - x^2 = -9$, или $x^2 - y^2 = 9$.

*Глава 26*

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение относительно искомой функции, ее первой и второй производной. В общем виде это уравнение можно записать так:

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где $F(x, y, y', y'')$ – заданная функция указанных аргументов.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ от $x$ и двух независимых произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$, обращающая данное уравнение в тождество. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, называют общим интегралом.

Частным решением уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$ называется решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающееся из общего путем фиксирования значений произвольных постоянных: $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$.

**Задача Коши.** Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее условиям: $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = x_0$. Числа $C_1^0$, $C_2^0$, определяющие искомое частное решение, находятся из системы уравнений:

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2),\ y_0' = \varphi_x'(x_0, C_1, C_2).$$

## 26.1. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка. Случаи понижения порядка

Если уравнение $F(x, y, y', y'') = 0$ разрешимо относительно старшей производной, то его можно представить в виде

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{26.1}$$

К простейшим интегрируемым дифференциальным уравнениям второго порядка относятся уравнения, для которых функция, стоящая в правой части равенства (26.1), зависит только от одного из трех аргументов:

$$y'' = f(x), \tag{26.2}$$

$$y'' = f(y), \tag{26.3}$$

$$y'' = f(y'). \tag{26.4}$$

Общее решение уравнения (26.2) находится двукратным интегрированием.

Уравнения (26.3) и (26.4) интегрируются подстановкой

$$y' = p, \tag{26.5}$$

которая дает возможность свести их к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p, \quad p\frac{dp}{dy} = f(y);$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = f(p).$$

Уравнение

$$y'' = f(x, y') \tag{26.6}$$

подстановкой (26.5) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

с неизвестной функцией $p$.

Уравнение

$$y'' = f(y, y')$$

той же подстановкой сводится к уравнению первого порядка

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

в котором роль независимой переменной играет $y$.

Пример 26.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' = \cos x - \sin x$.

Это уравнение вида (26.2). Преобразуя исходное уравнение, получаем

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}, \quad \frac{dy'}{dx} = \cos x - \sin x, \quad dy' = (\cos x - \sin x)\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим производную искомой функции $y' = \sin x + \cos x + C_1$. Так как

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \sin x + \cos x + C_1, \quad dy = (\sin x + \cos x + C_1)\,dx,$$

то в результате интегрирования полученного уравнения находим общее решение $y = \sin x - \cos x + C_1 x + C_2$.

Пример 26.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $2y''y = 1$, удовлетворяющее условиям: $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 1$.

Данное уравнение можно разрешить относительно $y''$, правая часть его будет зависеть только от $y$; это уравнение вида (26.4).

Применяем подстановку (26.5), т.е. полагаем $y' = p$, тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}, \quad 2\frac{dp}{dx}p = 1, \quad 2p\,dp = dx,$$

откуда $p^2 = x + C_1$, $p = \pm\sqrt{x + C_1}$. Из начального условия $p = y' = 1$ при $x = 1$

определяем $C_1=0$, поэтому $y'=p=\sqrt{x}$, $y'=\sqrt{x}$, $dy=\sqrt{x}dx$,

$$y=\frac{2}{3}x^{3/2}+C_2. \qquad (1)$$

Используя начальное условие $y=0$ при $x=1$, определяем $C_2=-2/3$. Функция (1) принимает вид $y=(2/3)(x^{3/2}-1)$, она определяет искомое частное решение.

Пример 26.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

Это уравнение вида (26.6). Применяем подстановку (26.5). Так как

$$y'=p \qquad (1)$$

и $y''=p'$, то исходное уравнение можно записать так:

$$p'+p\operatorname{tg}x=\sin 2x. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно неизвестной функции $p$. Полагая

$$p=uv, \qquad (3)$$

находим $p'=u'v+uv'$ и подставляем выражения для $p$ и $p'$ в уравнение (2): $u'v+uv'+uv\operatorname{tg}x=\sin 2x$,

$$uv'+v(u'+u\operatorname{tg}x)=\sin 2x. \qquad (4)$$

В качестве $u=u(x)$ возьмем функцию, для которой

$$u'+u\operatorname{tg}x=0, \qquad (5)$$

тогда уравнение (4) примет вид

$$uv'=\sin 2x. \qquad (6)$$

Из уравнения (5) находим $u=u(x)$:

$$u'+u\frac{\sin x}{\cos x}=0,\quad \frac{du}{dx}+u\frac{\sin x}{\cos x}=0,\quad \frac{du}{u}=-\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

$$\frac{du}{u}=\frac{d(\cos x)}{\cos x},\quad u=\cos x.$$

Подставив это выражение в уравнение (6), получим

$$\cos x\frac{dv}{dx}=\sin 2x,\quad dv=2\sin x dx,\quad v=-2\cos x+C_1.$$

По формуле (3) найдем $p$: $p=uv=\cos x(-2\cos x+C_1)$, $p=C_1\cos x-2\cos^2 x$. Уравнение (1) примет вид

$$y'=C_1\cos x-2\cos^2 x,\quad dy=(C_1\cos x-2\cos^2 x)\,dx,$$

откуда

$$y=\int C_1\cos x dx-2\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx,\quad y=C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2.$$

## 26.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$ay''+by'+cy=f(x), \tag{26.7}$$

где $a$, $b$, $c$ – постоянные ($a \neq 0$), называется дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (26.7) называется линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами или уравнением без правой части: $ay''+by'+cy=0$.

Последнее уравнение можно привести к виду

$$y''+py'+qy=0. \tag{26.8}$$

Уравнение

$$k^2+pk+q=0 \tag{26.9}$$

называется характеристическим уравнением для уравнения (26.8).

В зависимости от корней $k_1$ и $k_2$ характеристического уравнения (26.9) получаем общее решение уравнения (26.8) в виде

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}, \tag{26.10}$$

если корни действительны и различны;

$$y=(C_1x+C_2)\,e^{k_1x}, \tag{26.11}$$

если корни действительны и равны;

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x), \tag{26.12}$$

если $k_1=\alpha-i\beta$, $k_2=\alpha+i\beta$ – комплексные числа.

Пример 26.4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y''+2y'-3y=0$; найти частное решение, удовлетворяющее условиям: $y=2$, $y'=2$ при $x=0$.

Характеристическое уравнение (26.9) для данного уравнения принимает вид $k^2+2k-3=0$. Так как $k_1=1$, $k_2=-3$, то общее решение в соответствии с (26.10) определяется формулой

$$y=C_1e^x+C_2e^{-3x}. \tag{1}$$

Чтобы найти указанное частное решение, подставим начальные данные $x=0$, $y=2$, $y'=2$ в выражения для $y$ и $y'=C_1e^x-3C_2e^{-3x}$ : $2=C_1+C_2$, $2=C_1-3C_2$. Из этой системы находим $C_1=2$, $C_2=0$.

При этих значениях $C_1$ и $C_2$ функция (1) принимает вид $y=2e^x$. Итак, $y=2e^x$ – искомое частное решение.

П р и м е р 26.5. Проинтегрировать уравнение $16y''+8y'+y=0$.

Характеристическое уравнение $16k^2+8k+1=0$ имеет два равных корня $k_1=k_2=-1/4$. Общее решение данного дифференциального уравнения в соответствии с (26.11) определяется формулой $y=(C_1+C_2x)\,e^{-x/4}$.

П р и м е р 26.6. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+5y=0$.

Характеристическое уравнение $k^2-2k+5=0$ имеет комплексные корни $k_1=1+2i$, $k_2=1-2i$. Общее решение определяется формулой (26.12), в которой нужно положить $\alpha=1$, $\beta=2: y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

П р и м е р 26.7. Решить уравнение $16y''+y=0$.

Характеристическое уравнение $16k^2+1=0$ имеет чисто мнимые корни $k_1=\frac{1}{4}i$, $k_2=-\frac{1}{4}i$. Пользуясь формулой (26.12), полагая в ней $\alpha=0$, $\beta=1/4$, получаем общее решение $y=C_1\cos(x/4)+C_2\sin(x/4)$.

## 26.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Если в уравнении (26.7) $f(x)\neq 0$, то оно называется неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами; это уравнение может быть приведено к виду

$$y''+py'+qy=\varphi(x). \tag{26.13}$$

Общее решение уравнения (26.13) определяется формулой

$$y=y_0+y_1, \tag{26.14}$$

где $y_0$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+py+qy=0$, а $y_1$ – частное решение уравнения (26.13).

В простейших случаях, когда функция $\varphi(x)$, входящая в уравнение (26.13), является показательной или многочленом, указанное частное решение находится с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Если

$$\varphi(x)=ae^{kx}, \tag{26.15}$$

где $a, k$ – постоянные, то частное решение уравнения (26.13) ищут в виде

$$y_1=Ae^{kx}, \tag{26.16}$$

когда $k$ не является корнем характеристического уравнения или в виде $y_1=Axe^{kx}$, когда $k$ – простой корень характеристического уравнения, или $y_1=Ax^2e^{kx}$, когда $k$ – кратный корень указанного уравнения.

Если $\varphi(x) = a\cos kx + b\sin kx$, где $a, b, k$ – постоянные, то частное решение уравнения (26.13) ищут в виде $y_1 = A\cos kx + B\sin kx$, когда $p^2 + (q-k^2)^2 \neq 0$, и в виде $y_1 = x(A\cos kx + B\sin kx)$, когда $p = 0$, $q = k^2$.

Если $\varphi(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n$, то частное решение уравнения (26.13) ищут в виде $y_1 = Q_n(x)$ в случае, когда $q \neq 0$, и в виде $y_1 = xQ_n(x)$, когда $q = 0$, $p \neq 0$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени $n$.

Пусть дано неоднородное уравнение

$$y'' + py' + qy = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \tag{26.17}$$

правая часть которого есть сумма двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Если $y_1$ является частным решением уравнения $y'' + py' + qy = \varphi_1(x)$, а $y_2$ – частным решением уравнения $y'' + py' + qy = \varphi_2(x)$, то $y_1 + y_2$ – частное решение уравнения (26.17).

Пример 26.8. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 20y = 34e^{-x}$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 20 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + 4i$, $k_2 = -2 - 4i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой $y_0 = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$.

Переходим к отысканию частного решения исходного уравнения. Так как в данном случае $\varphi(x) = 34e^{-x}$ (т.е. имеет вид (26.15): $f(x) = ae^{mx}$, где $a = 34$, $m = -1$) и $m = -1$ не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (26.16) ищем частное решение в виде $y_1 = Ae^{-x}$. Находя производные этой функции $y_1' = -Ae^{-x}$, $y_1'' = Ae^{-x}$ и подставляя выражения для $y_1$, $y_1'$, $y_1''$ в исходное уравнение, получаем $Ae^{-x} - 4Ae^{-x} + 20Ae^{-x} = 34e^{-x}$. Так как $y_1$ – решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех $x$, т.е. является тождеством: $17Ae^{-x} = 34e^{-x}$, откуда $17A = 34$, $A = 2$. Следовательно, частное решение имеет вид $y = 2e^{-x}$. На основании формулы (26.14) получаем общее решение

$$y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + 2e^{-x}.$$

Пример 26.9. Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 - 4x - 14$.

Правая часть данного уравнения является полиномом второй степени $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a = 8$, $b = -4$, $c = -14$.

Так как $q \neq 0$, то частное решение ищем в виде $y_1 = Ax^2 + Bx + C$. Подставляя выражения для $y_1$, $y_1' = 2Ax + B$, $y_1'' = 2A$ в данное уравнение, получаем $2A + 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2 - 4x - 14$, или $4Ax^2 + (10A + 4B)x + (2A + 5B + 4C) = 8x^2 - 4x - 14$.

Поскольку $y_1$ – решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться при всех $x$, т.е. являться тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях $x$, стоящие в разных частях, равны между собой: $4A=8$, $10A+4B=-4$, $2A+5B+4C=-14$.

Из полученной системы уравнений находим, что $A=2$, $B=-6$, $C=3$, поэтому $y_1=2x^2-6x+3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y''+5y'+4y=0$ определяется формулой $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$, так как характеристическое уравнение $k^2+5k+4=0$ имеет корни $k_1=-1$, $k_2=-4$.

На основании формулы (26.14) получаем общее решение

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+2x^2-6x+3.$$

Пример 26.10. Проинтегрировать уравнение

$$y''-2y'+2y=-85\cos 3x.$$

Это уравнение вида (26.13), где $\varphi(x)=a\cos 3x+b\sin 3x$, причем $a=-85$, $b=0$. Частное решение данного уравнения ищем в виде $y_1=A\cos 3x+B\sin 3x$, тогда $y_1'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$, $y_1''=-9A\cos 3x-\ 9B\sin 3x$. Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим тождество $-9A\cos 3x-9B\sin 3x-2(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+2(A\cos 3x+B\sin 3x)=-85\cos 3x$, или $-(7A+6B)\cos 3x+(6A-7B)\sin 3x=-85\cos 3x$, откуда $-(7A+6B)=-85$, $6A-7B=0$. Решив последнюю систему уравнений, найдем, что $A=7$, $B=6$. Следовательно, $y_1=7\cos 3x+6\sin 3x$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y''-2y'+2y=0$ определяется формулой $y_0=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x$ (см. (26.12)), так как характеристическое уравнение $k^2-2k+2=0$ имеет комплексные корни $k_1=1-i$, $k_2=1+i$. На основании формулы (26.14) получаем общее решение $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x+7\cos 3x+6\sin 3x$.

Пример 26.11. Проинтегрировать уравнение $y''-6y'+8y=14e^{2x}$.

Соответствующее однородное уравнение $y''-6y'+8y=0$ имеет общее решение $y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$ (получено по формуле (26.10), ибо $k_1=2, k_2=4$ – различные действительные корни характеристического уравнения $k_2-6k+8=0$. Исходное уравнение является уравнением вида (26.13), где функция $\varphi(x)$ определяется формулой (26.15), причем $a=14$, $k=2$ и $k=2$ – корень характеристического уравнения.

Частное решение данного неоднородного уравнения в этом случае следует искать в виде $y_1=Axe^{2x}$. Так как $y_1'=Ae^{2x}+2Axe^{2x}$, $y_2''=4Ae^{2x}+4Axe^{2x}$, то подстановка выражения для $y_1$, $y_1'$, $y_1''$ в исходное уравнение приводит к тождеству $4Ae^{2x}+4Axe^{2x}-6(Ae^{2x}+2Axe^{2x})+8Axe^{2x}=14e^{2x}$, или $-2Ae^{2x}=14e^{2x}$, откуда $-2A=14$, $A=-7$. Таким образом, $y_1=-7xe^{2x}$, $y=y_0+y_1=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}-7xe^{2x}$.

*Глава 27*

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 27.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением $n$-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную $x$, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные до порядка $n$ включительно:

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{27.1}$$

Решением дифференциального уравнения $n$-го порядка называется функция $y = y(x)$, подстановка которой и ее производных в это уравнение обращает его в тождество. График решения называется интегральной кривой.

**Задача Коши.** Найти решение $y=y(x)$ уравнения (27.1), удовлетворяющее условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, \ldots, y^{n-1} = y_0^{n-1} \text{ при } x = x_0, \tag{27.2}$$

где $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называемые начальными данными решения.

Теорема 27.1. *Если в уравнении* $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *и ее частные производные по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *непрерывны в некоторой замкнутой области* $G$, *определяемой неравенствами:*

$$|x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b, \ |y' - y'_0| \le b, \ldots, \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right| \le b \quad (a > 0, \ b > 0),$$

*и, следовательно, ограничены в ней, т.е.*

$$\left|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\right| \le C, \quad \left|\frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}}\right| \le C_1$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1, \ y^0 \equiv y),$$

*где* $C > 0$, $C_1 > 0$, $M(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in G$, $M_0(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in G$, *то существует единственное решение* $y = y(x)$ *данного уравнения, удовлетворяющее условиям:*

$$y = y_0, \ y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \ \text{при} \ x = x_0.$$

*Это решение определено и непрерывно вместе с производными до порядка n включительно в промежутке $|x-x_0|\le h$, где*

$$h=\min\left(a,\frac{b}{\max\limits_{G}\left(C,|y'|,\ldots,|y^{(n-1)}|\right)}\right).$$

Общим решением дифференциального уравнения $n$-го порядка (27.1) называется функция

$$y=\varphi\,(x,C_1,C_2,\ldots,C_n), \tag{27.3}$$

обладающая следующими свойствами: 1) при любых значениях произвольных постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$ она обращает уравнение (27.1) в тождество; 2) значения постоянных $C_1,C_2,\ldots,C_n$ можно подобрать так, чтобы она удовлетворяла условиям (27.2).

Частным решением дифференциального уравнения $n$-го порядка называется решение, получающееся из общего решения (27.3) при фиксированных значениях произвольных постоянных, т.е. функция $y=\varphi\,(x,C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0)$, где $C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0$ – некоторые числа.

Решение дифференциального уравнения $n$-го порядка, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым.

Общим интегралом дифференциального уравнения $n$-го порядка называется соотношение вида

$$\Phi\,(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)=0, \tag{27.4}$$

неявно определяющее общее решение $y=\varphi\,(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ этого уравнения. Частным интегралом дифференциального уравнения $n$-го порядка называется соотношение $\Phi\,(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n)=0$, полученное из общего интеграла путем фиксирования значений $C_1^0,C_2^0,\ldots,C_n^0$ произвольных постоянных.

## 27.2. Простейшие интегрируемые дифференциальные уравнения высших порядков

Если дифференциальное уравнение $n$-го порядка (27.1) разрешимо относительно старшей производной, то его можно представить в виде

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}). \tag{27.5}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнений (27.1) и (27.5). Пусть уравнение (27.1) не содержит $k-1$ первых последовательных производных, т.е. имеет вид

$$F\,(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0. \tag{27.6}$$

Это уравнение подстановкой $y^{(k)}=z$ приводится к уравнению $F\,(x,z,z',z'',\ldots,z^{(n-k)})=0$, порядок которого равен $n-k$.

Если правая часть уравнения (27.5) зависит только от $x$, тогда

$$y^{(n)} = f(x). \tag{27.7}$$

Общее решение уравнения (27.7) находится $n$-кратным интегрированием.

Пример 27.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y''' = \operatorname{sh} x + x$.

Это уравнение вида (27.7), его общее решение находится трехкратным интегрированием:

$$y''' = (y'')' = \frac{dy''}{dx}, \quad \frac{dy''}{dx} = \operatorname{sh} x + x, \quad dy'' = (\operatorname{sh} x + x)\, dx,$$

$$y'' = \int (\operatorname{sh} x + x)\, dx = \operatorname{ch} x + x^2/2 + C_1, \quad dy' = (\operatorname{ch} x + x^2/2 + C_1)\, dx,$$

$$y' = \int (\operatorname{ch} x + x^2/2 + C_1)\, dx = \operatorname{sh} x + x^3/6 + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (\operatorname{sh} x + x^3/6 + C_1 x + C_2)\, dx, \quad y = \operatorname{ch} x + x^4/24 + (C_1/2)\, x^2 + C_2 x + C_3.$$

Пример 27.2. Найти решение уравнения $xy^{(\mathrm{IV})} - y''' = 0$, удовлетворяющее условиям: $y_0 = 4$, $y_0' = 3$, $y_0'' = -4$, $y_0''' = 24$ при $x_0 = 1$.

Найдем сначала общее решение данного уравнения, являющееся уравнением вида (27.6). Введем новую переменную $z$ по формуле $y''' = z$, тогда $y^{(\mathrm{IV})} = z'$. Исходное уравнение примет вид $xz' - z = 0$. Интегрируя это дифференциальное уравнение первого порядка, находим

$$x\frac{dz}{dx} - z = 0, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln z = \ln x + \ln C_1, \quad z = C_1 x.$$

Так как $y''' = z$, то $y''' = C_1 x$. Находим общее решение этого уравнения: $dy'' = C_1 x dx$, $y'' = (C_1/2)\, x^2 + C_2$, $dy' = ((C_1/2)\, x^2 + C_2)\, dx$,

$$y' = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3, \quad dy = \left(\frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3\right) dx,$$

$$y = \frac{C_1 x^4}{24} + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4. \tag{1}$$

Поставляя в выражения для $y, y', y'', y'''$ значение $x_0 = 1$ и учитывая начальные данные, получаем систему уравнений

$$C_1/24 + C_2/2 + C_3 + C_4 = 4, \quad C_1/6 + C_2 + C_3 = 3, \quad C_1/2 + C_2 = -4, \quad C_1 = 24.$$

Из этой системы определяем значения произвольных постоянных: $C_1 = 24$, $C_2 = -16$, $C_3 = 15$, $C_4 = -4$. Подставив эти значения в формулу (1), найдем искомое частное решение $y = x^4 - 8x^2 + 15x - 4$.

## 27.3. Линейные однородные уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением $n$-го порядка называется уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x),$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – функции от $x$ или постоянные.

Если $f(x)\neq 0$, то уравнение называется неоднородным; если $f(x)\equiv 0$, уравнение называют однородным, последнее имеет вид

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0. \tag{27.8}$$

Если функции $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, ... , $y_n=y_n(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (27.8), то его общее решение определяется формулой

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \tag{27.9}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

В случае, когда коэффициенты уравнения (27.8) – постоянные величины, уравнение называется линейным однородным уравнением $n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение его находится так же, как и в случае уравнения второго порядка:

1) составляется соответствующее характеристическое уравнение $k^n+a_1k^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}k+a_n=0$;

2) находятся корни характеристического уравнения $k_1, k_2, \ldots, k_n$;

3) выписываются частные линейно независимые решения, причем принимается во внимание, что:

   а) каждому действительному простому корню $k$ соответствует частное решение $e^{kx}$;

   б) каждой паре комплексно-сопряженных корней $k^{(1)}=\alpha+i\beta$, $k^{(2)}=\alpha-i\beta$ соответствуют два частных решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

   в) каждому действительному корню $k$ кратности $\mu$ соответствуют $\mu$ линейно независимых частных решений: $e^{kx}$, $xe^{kx}$, $x^2e^{kx}, \ldots, x^{\mu-1}e^{kx}$;

   г) каждой паре комплексно-сопряженных корней $k^{(1)}=\alpha+i\beta$, $k^{(2)}=\alpha-i\beta$ кратности $\mu$ соответствует $2\mu$ частных решений: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$; $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{\mu-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$,

   число частных решений равно степени характеристического уравнения (или порядку данного линейного дифференциального уравнения);

4) общее решение получается по формуле (27.9), в которой $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые решения.

З а м е ч а н и е. Функции

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \tag{27.10}$$

называются линейно зависимыми на отрезке $[a, b]$, если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0. \tag{27.11}$$

Функции (27.10) называются линейно независимыми, если тождество (27.11) выполняется лишь в случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Если функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ тождественно равен нулю на этом отрезке, где

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для линейно независимых функций определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке этого отрезка.

П р и м е р 27.3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y''' - 3y'' - 4y' + 12y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 - 3k^2 - 4k + 12 = 0$ имеет корни $k_1=-2$, $k_2=2$, $k_3=3$ (так как $k^3 - 3k^2 - 4k + 12 = k^2(k-3) - 4(k-3) = (k^2-4)(k-3)$). Этим корням соответствуют линейно независимые решения $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. В соответствии с формулой (27.9) получаем общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

П р и м е р 27.4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y^{(IV)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^4 + k^3 - 3k^2 - 5k - 2 = 0$. Поскольку

$$k^4 + k^3 - 3k^2 - 5k - 2 = k^4 + k^3 - 3k^2 - 3k - 2k - 2 = k^3(k+1) -$$
$$-3k(k+1) - 2(k+1) = (k+1)(k^3 - 3k - 2) = (k+1)(k^3 - k - 2k - 2) =$$
$$= (k+1)[k(k^2-1) - 2(k+1)] = (k+1)^2(k(k-1) - 2) =$$
$$= (k+1)^2(k^2 - k - 2) = (k+1)^3(k-2),$$

то $(k+1)^3(k-2) = 0$, откуда

$$k_1 = k_2 = k_3 = -1, \quad k_4 = 2.$$

Корень $k=-1$ является трехкратным, ему соответствуют линейно независимые решения $y_1=e^{-x}$, $y_2=xe^{-x}$, $y_3=x^2e^{-x}$, простому корню $k_4=2$ соответствует решение $y_4=e^{2x}$. Общее решение определяется формулой $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}+C_4e^{2x}$, или $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\,e^{-x}+C_4e^{2x}$.

Пример 27.5. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'''-y''+y'-y=0$.

Характеристическое уравнение $k^3-k^2+k-1=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=-i$, $k_3=i$ (поскольку $k^3-k^2+k-1=k^2(k-1)+(k-1)=(k-1)\,(k^2+1)$). Общее решение имеет вид $y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$.

Пример 27.6. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y^{(V)}-y^{(IV)}-81y'+81y=0$.

Характеристическое уравнение $k^5-k^4-81k+81=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=3$, $k_3=-3$, $k_4=3i$, $k_5=-3i$ (так как $k^5-k^4-81k+81=$ $=k^4(k-1)-81\,(k-1)=(k-1)\,(k^4-81)=(k-1)\,(k^2-9)\,(k^2+9)$). Следовательно, уравнение имеет общее решение $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+C_3e^{-3x}+C_4\cos 3x+C_5\sin 3x$.

## 27.4. Линейные неоднородные уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{27.12}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{27.13}$$

у которого коэффициенты те же, что и в уравнении (27.12).

Общее решение уравнения (27.12) определяется формулой

$$y=y_0+y_1, \tag{27.14}$$

где $y_0$ – общее решение уравнения (27.13), $y_1$ – частное решение уравнения (27.12).

Частное решение уравнения (27.12) можно находить способом вариации произвольных постоянных. В простейших случаях, когда правая часть этого уравнения – алгебраический или тригонометрический многочлен и др., частные решения находят с помощью метода неопределенных коэффициентов:

1. Пусть

$$f(x)=P_n(x)\,e^{\alpha x}, \tag{27.15}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени $n$, число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения, тогда

$$y_1=Q_n(x)\,e^{\alpha x}, \tag{27.16}$$

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени $n$ с неопределенными коэффициентами; если $\alpha$ – корень кратности $k$ названного уравнения, тогда

$$y_1 = x^k Q_n(x)\, e^{\alpha x}.$$

2. Пусть $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, где $a$, $b$, $\beta$ – постоянные, и $\beta i$ не является корнем характеристического уравнения, тогда $y_1 = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, где $A$ и $B$ – постоянные неопределенные коэффициенты, и $y_1 = x^\lambda (A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, если $\beta i$ – корень кратности $\lambda$ характеристического уравнения.

3. Пусть

$$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены от $x$, тогда

$$y_1 = U_\nu(x)\, e^{\alpha x}\cos\beta x + V_\nu(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \nu = \max(m, n)$$

в случае, когда число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и

$$y_1 = x^\lambda (U_\nu(x)\, e^{\alpha x}\cos\beta x + V_\nu(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x)$$

в случае, когда $\alpha + i\beta$ – корень кратности $\lambda$ указанного уравнения.

Пример 27.7. Проинтегрировать линейное неоднородное уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15$.

Соответствующее однородное уравнение $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ имеет общее решение $y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x}$.

Найдем частное решение исходного уравнения, правая часть которого является многочленом третьей степени (функция (27.15) в случае $n = 3$, $\alpha = 0$; $P_3(x) = 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15$). В соответствии с формулой (27.16) полагаем $y_1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Поскольку $y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_1'' = 6Ax + 2B$, $y_1''' = 6A$, то

$$6A - 2(6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) =$$
$$= 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15,$$

или

$$2Ax^3 + (2B - 3A)\,x^2 + (2C - 2B - 12A)\,x + (6A - 4B - 3C + 2D) =$$
$$= 4x^3 - 4x^2 - 20x + 15.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем систему уравнений

$$2A = 4,\ 2B - 3A = -4,\ 2C - 2B - 12A = -20,\ 6A - 4B - C + 2D = 15,$$

из которой находим $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$, $D = 5$. Следовательно, $y_1 = 2x^3 + x^2 + 3x + 5$. По формуле (27.14) получаем общее решение $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x} + 2x^3 + x^2 + 3x + 5$.

## 27.5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется совокупность $n$ уравнений вида

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x),\\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x),
\end{aligned} \tag{27.17}$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ – неизвестные функции переменной $x$, $a_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ – постоянные величины, $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ – заданные функции. Если $f_k(x) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то система называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Решением системы называется совокупность $n$ функций

$$y_1 = \varphi_1(x),\quad y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x),$$

обращающих каждое из уравнений этой системы в тождество.

**Задача Коши.** Найти решение системы (27.17), удовлетворяющее условиям:

$$y_1 = b_1,\ y_2 = b_2, \ldots, y_n = b_n \text{ при } x = x_0.$$

Методом исключения $(n-1)$ неизвестных функций систему (27.17) в некоторых случаях можно привести к линейному дифференциальному уравнению $n$-го порядка с постоянными коэффициентами относительно одной из функций.

Замечание. Если аргумент функций обозначать через $t$, систему (27.17) можно записать так:

$$\dot{y}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}y_i + f_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{27.18}$$

где $\dot{y}_k$ – производная функция $y_k = y_k(t)$ по этому аргументу.

Пример 27.8. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dfrac{dx}{dt} = 3x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = 8x + y$.

Данную систему запишем в виде

$$\dot{x} = 3x + y,\quad \dot{y} = 8x + y.$$

Дифференцируя по $t$ первое уравнение системы и используя данные уравнения, находим $\ddot{x} = 3\dot{x} + \dot{y} = 3\dot{x} + (8x + y) = 3\dot{x} + 8x + (\dot{x} - 3x) = 4\dot{x} + 5x$, $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$. Полученное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет общее решение $x = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$. Поскольку $y = \dot{x} - 3x$ и $\dot{x} = -C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t}$, то $y = -C_1e^{-t} + 5C_2e^{5t} - 3(C_1e^{-t} + C_2e^{5t}) = 2C_2e^{5t} - 4C_1e^{-t}$.

Следовательно, общее решение данной системы определяется формулами $x=C_1e^{-t}+C_2e^{5t}$, $y=2C_2e^{5t}-4C_1e^{-t}$.

Пример 27.9. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений $\dot{x}=12x-11y+t$, $\dot{y}=13x-12y-t$.

Эта система является неоднородной. Дифференцируя первое уравнение и учитывая данные уравнения, получаем $\ddot{x}=12\dot{x}-11\dot{y}+1=12(12x-11y+t)-$ $-11(13x-12y-t)+1=x+23t+1$. Интегрируя неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $\ddot{x}-x=23t+1$, находим его общее решение $x=C_1e^{-t}+C_2e^{t}-23t-1$. Поскольку $\dot{x}=-C_1e^{-t}+C_2e^{t}-23$, то из первого уравнения системы можно найти $y$:

$$y=\frac{1}{11}(12x-\dot{x}+t)=\frac{1}{11}[12(C_1e^{-t}+C_2e^{t}-23t-1)-$$

$$-(-C_1e^{-t}+C_2e^{t}-23)+t]=\frac{13}{11}C_1e^{-t}+C_2e^{t}-25t+1.$$

Следовательно, данная система имеет общее решение

$$x=C_1e^{-t}+C_2e^{t}-23t-1,\quad y=(13/11)\,C_1e^{-t}+C_2e^{t}-25t+1.$$

## 27.6. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=F_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\
\frac{dy_2}{dx}&=F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_n}{dx}&=F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n),
\end{aligned}\tag{27.19}$$

где $y_k=y_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ – искомые функции независимой переменной $x$, $F_k(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ – заданные функции указанных аргументов. Порядком нормальной системы называется число входящих в нее уравнений. Решением системы (27.19) в интервале $(a,b)$ называется совокупность $n$ функций $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x),\ldots,y_n=y_n(x)$, определенных и непрерывно дифференцируемых в этом интервале, если она обращает в тождество каждое из уравнений данной системы:

$$y_k'(x)\equiv F_k(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x))\quad (k=1,2,\ldots,n)\ \text{для всех}\ x\in(a,b).$$

**Задачи Коши для системы** (27.19). Найти решение

$$y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x),\ldots,y_n=y_n(x),\tag{27.20}$$

удовлетворяющее условиям:

$$y_1(x_0)=y_1^0,\ y_2(x_0)=y_2^0,\dots,y_n(x_0)=y_n^0, \tag{27.21}$$

где $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ – заданные числа.

Совокупность $n$ функций

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 &= f_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= f_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned} \tag{27.22}$$

называется общим решением системы (27.19), если:

1) система (27.22) разрешима относительно произвольных постоянных

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_1, \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= C_n; \end{aligned} \tag{27.23}$$

2) совокупность функций (27.22) является решением системы (27.19) при всех значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, определяемых формулами (27.23).

Решение, получающееся из общего решения при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется частным.

Каждое из равенств (27.23), т. е. $\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)=C_k$ $(k=1,2,\dots,n)$, называется первым интегралом системы (27.19), а каждая из функций $\varphi_k=\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ – интегралом этой системы. Совокупность первых интегралов называется общим интегралом системы (27.19).

Первые интегралы (27.23), образующие общий интеграл системы (27.19), обладают тем свойством, что интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ независимы, т. е. между функциями $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ не существует соотношения вида $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)=0$ ни при каком выборе функции $\Phi$.

При некоторых условиях, наложенных на правые части уравнений системы (27.19), эта система имеет $n$ независимых интегралов.

Перепишем систему (27.19) так:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{F_1}=\frac{dy_2}{F_2}=\dots=\frac{dy_n}{F_n}, \tag{27.24}$$

где $F_i=F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ $(i=1,2,3,\dots,n)$.

Система (27.24) дифференциальных уравнений первого порядка называется системой в симметрической форме, соответствующей нормальной системе (27.19).

Это частный случай системы в симметрической форме общего вида:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})}=\dots=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})}.$$

Если дана система дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}, \tag{27.25}$$

то, принимая $x_n$ за независимую переменную, ее можно привести к следующей нормальной системе $(n-1)$-го порядка:

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n},\ \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n},\dots,\frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{27.26}$$

Решение, интеграл, первый интеграл, общее решение и общий интеграл системы (27.26) называют соответственно решением, интегралом, первым интегралом, общим решением и общим интегралом системы (27.25).

Пример 27.10. Найти общий интеграл системы $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x},\ \dfrac{dz}{dx}= =-\dfrac{2z}{x}$.

Интегрируем эту нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},\ \frac{dz}{z}=-\frac{2dx}{x},\ \ln|y|=-\ln|x|+\ln|C_1|,$$

$$\ln|z|=-2\ln|x|+\ln|C_2|,$$

$$y=C_1/x,\ z=C_2/x^2, \tag{I}$$

$$xy=C_1,\ x^2z=C_2. \tag{II}$$

Формулы (I) определяют общее решение системы. Каждое из равенств (II) является первым интегралом системы, а их левые части – интегралы системы. Поскольку интегралы $\varphi_1=xy$ и $\varphi_2=x^2z$ независимы, то общий интеграл системы определяется равенствами (II).

Замечание. Данную систему можно записать и в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-y/x}=\frac{dz}{-2z/x},\ \frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{-2z}.$$

Из последней системы следует, что имеется еще один первый интеграл $y^2/z=C_3$. Соответствующий интеграл $\varphi_3=y^2/z$ выражается через независимые интегралы $\varphi_1=xy$ и $\varphi_2=x^2z$, а именно $\varphi_3=\varphi_1^2/\varphi_2$.

## 27.7. Применение матриц к решению систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

**Производная от матрицы.** Рассмотрим матрицу $[a_{ik}(t)]$, элементами которой являются дифференцируемые функции $a_{ik}(t)$ аргумента $t$:

$$[a(t)]=[a_{ik}(t)]=\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

Производной матрицы $[a(t)]$ называется матрица, элементы которой являются производными соответствующих элементов матрицы $[a(t)]$:

$$\frac{da}{dt}=\frac{d}{dt}[a(t)]=\begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{bmatrix}.$$

Употребляют следующие символические записи этого равенства:

$$\frac{d}{dt}[a(t)]=\left[\frac{d}{dt}a_{ik}(t)\right],\quad \frac{d}{dt}[a(t)]=\left[\frac{d}{dt}[a(t)]\right],\quad D[a]=[Da].$$

**Матричная запись системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и ее решений.** Рассмотрим систему $n$ линейных дифференциальных уравнений с искомыми функциями $x_1=x_1(t)$, $x_2= =x_2(t),\dots,x_n=x_n(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{27.27}$$

где $\dot{x}_i=dx_i/dt$ $(i=1,2,\dots,n)$, $a_{ik}$ – постоянные.

Если

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\quad [\dot{x}]=\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix},$$

$$[a_{ik}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то систему (27.27) в матричной форме можно записать так:

$$\frac{d}{dt}[x\,(t)]=[a]\cdot[x], \text{ или } \frac{dx}{dt}=ax,$$

где $x=[x]=[x\,(t)]$, $a=[a]=[a_{ik}]_{nn}$.

Решение системы (27.27) в матричной форме имеет вид $[x]=[\alpha]\times[Ce^{kt}]$, или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1e^{k_1t} \\ C_2e^{k_2t} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_ne^{k_nt} \end{bmatrix}, \tag{27.28}$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n$ – корни характеристического уравнения матрицы $[a_{ik}]_{nn}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0, \tag{27.29}$$

$$\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},\quad \alpha^i=\begin{bmatrix} \alpha_1^i \\ \alpha_2^i \\ \vdots \\ \alpha_n^i \end{bmatrix},$$

числа $\alpha'_j$ $(j=1,2,\dots,n)$, соответствующие каждому значение $k$, определяются из системы уравнений $[a-kE]\cdot[\alpha]=0$, или

$$\begin{bmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0. \qquad (27.30)$$

Пример 27.11. Записать в матричной форме систему и решение системы линейных дифференциальных уравнений $\dot{x}_1=4x_1-5x_2$, $\dot{x}_2=3x_1-4x_2$.

Так как

$$[a]=\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},\ [x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ \text{то } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

получена матричная форма данной системы уравнений.

Составляем характеристическое уравнение (по формуле (27.29)) и систему (27.30) для определения значений $\alpha_1$ и $\alpha_2$:

$$\begin{vmatrix} 4-k & -5 \\ 3 & -4-k \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{matrix} (4-k)\alpha_1-5\alpha_2=0, \\ 3\alpha_1-(4+k)\alpha_2=0. \end{matrix}$$

Характеристическое уравнение $-(4-k)(4+k)+15=0$, $k^2-1=0$ имеет корни $k_1=-1$, $k_2=1$. Системы уравнений для определения чисел $\alpha_1$ и $\alpha_2$ принимают вид

$$\begin{matrix} 5\alpha_1-5\alpha_2=0, \\ 3\alpha_1-3\alpha_2=0, \end{matrix}\ (\mathrm{I}) \qquad \begin{matrix} 3\alpha_1-5\alpha_2=0, \\ 3\alpha_1-5\alpha_2=0. \end{matrix}\ (\mathrm{II})$$

Из системы (I) следует, что $\alpha_2=\alpha_1$. Полагая $\alpha_1^1=1$, получаем $\alpha_2^1=1$. Из системы (II) находим $\alpha_2=(3/5)\alpha_1$. Полагая $\alpha_1^2=1$, вычисляем $\alpha_2^2=0{,}6$. В соответствии с (27.28) получаем общее решение системы в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0{,}6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{t} \end{bmatrix},$$

или в обычном виде $x_1=C_1e^{-t}+C_2e^{t}$, $x_2=C_1e^{-t}+0{,}6C_2e^{t}$.

*Глава 28*

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

## 28.1. Основные определения

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных, ее аргументов и частных производных различных порядков. Если искомая функция $u$ зависит от $n$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то дифференциальное уравнение с частными производными имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0,$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$, $F$ – заданная функция.

Порядком дифференциального уравнения с частными производными называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Решением дифференциального уравнения с частными производными называется функция, имеющая соответствующие частные производные и обращающая это уравнение в тождество. Проинтегрировать дифференциальное уравнение с частными производными – значит найти все его решения.

Пример 28.1. Проинтегрировать уравнение $u'_x(x, y) = 0$.

Этому уравнению удовлетворяет любая дифференцируемая функция $u = f(y)$, зависящая только от $y$, так как $f'_x(y) = 0$.

Пример 28.2. Проинтегрировать уравнение $u''_{yx}(x, y) = 0$.

Обозначим $u'_y = v$, тогда $u''_{yx} = (u'_y)'_x = v'_x$ и $v'_x = 0$, $v = f(y)$, где $f(y)$ – произвольная функция переменной $y$. Поскольку $u'_y = v = f(y)$, то $u(x, y) = \int f(y) \cdot dy + \psi(x)$, где $\psi(x)$ – произвольная функция аргумента $x$.

Первое слагаемое последней формулы представляет собой произвольную функцию от $y$; обозначим ее через $\varphi(y)$, тогда $u(x, y) = \psi(x) + \varphi(y)$. Полученное решение содержит две произвольные функции.

## 28.2. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка от функции $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в общем виде можно записать так:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad u'_{x_1}, u'_{x_2}, \ldots, x'_{x_n}) = 0, \tag{28.1}$$

где $F$ – заданная функция своих аргументов.

Линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{28.2}$$

где

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ X_2 = X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ X_n = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{28.3}$$

– заданные функции $n$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция.

Наряду с уравнением (28.2) рассматривают соответствующую ему систему дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{28.4}$$

в которой функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определяются формулами (28.3). Систему (28.4) можно записать и в нормальной форме:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n},\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{28.5}$$

Теорема 28.1. *Если* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *интеграл системы* (28.4) *или* (28.5), *то* $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *решение уравнения* (28.2).

Теорема 28.2. *Если* $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *решение уравнения* (28.2), *то* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *интеграл системы* (28.4) *или* (28.5).

Теорема 28.3. *Если* $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$, $\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *независимые интегралы системы* (28.4), *то*

$$u = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \tag{28.6}$$

*где* $F$ – *произвольная функция, имеющая непрерывные частные производные по аргументам* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, *является решением уравнения (28.2).*

Линейным неоднородным (или квазилинейным) уравнением с частными производными первого порядка называется уравнение вида

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = U, \tag{28.7}$$

где заданные функции $n+1$ аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ выражаются формулами

$$X_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ X_2 = X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots,$$

$$X_n = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u),\ U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \tag{28.8}$$

$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция. Не исключается случай, когда $U(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \equiv 0$, но хотя бы одна из функций $X_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) зависит от $u$.

Наряду с уравнением (28.7) рассматривают систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{U}. \tag{28.9}$$

Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ($\varphi_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, $k = 1, 2, \ldots, n$) – независимые интегралы системы (28.9), то

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{28.10}$$

где $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов, будет решением.

Пример 28.3. Проинтегрировать уравнение $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Это уравнение вида (28.2), в котором $u = z$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $X_1 = 1$, $X_2 = -1$. Записываем систему (28.4) и интегрируем ее:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1},\ dx + dy = 0,\ d(x+y) = 0,\ x + y = C,\ \varphi(x, y) = x + y.$$

Формула (28.6) принимает вид $z = F(\varphi) = F(\varphi(x, y)) = F(x+y)$, $z = F(x+y)$, где $F$ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 28.4. Проинтегрировать уравнение $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$

Это уравнение вида (28.7), в котором $z = u$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $X_1 = x$, $X_2 = y$, $U = 2z$. Записываем систему (28.9) и интегрируем ее:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z},\ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z},\ \frac{y}{x} = C_1,\ \frac{z}{x^2} = C_2,$$

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{y}{x},\ \varphi_2(x, y, z) = \frac{z}{x^2}.$$

В соответствии с формулой (28.10) получаем решение $F(y/x; z/x^2) = 0$, где $F$ – произвольная дифференцируемая функция.

## 28.3. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка

Уравнение с частными производными второго порядка называется линейным относительно старших производных, если оно содержит эти производные лишь в первой степени.

Линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка относительно функции $u = u(x, y)$ двух переменных $x$ и $y$ можно записать так:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (28.11)$$

где $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$, $F = F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ – заданные функции своих аргументов. Уравнение (28.11) называется уравнением гиперболического типа в данной области, если $B^2 - AC > 0$ в этой области; уравнением параболического типа, если $B^2 - AC = 0$; уравнением эллиптического типа, если $B^2 - AC < 0$. Если выражение $B^2 - AC$ в данной области меняет знак, то уравнение (28.11) называется уравнением смешанного типа.

Уравнение (28.11) можно привести к каноническому виду переходом к новым переменным $\xi$ и $\eta$ по формулам

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \qquad (28.12)$$

где $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции аргументов $x$, $y$. Чтобы найти эти функции, рассматривают характеристическое уравнение

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0, \qquad (28.13)$$

которое равносильно системе двух уравнений

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}, \qquad (28.14)$$

где $A, B, C$ те же, что и в уравнении (28.11).

Интегральные кривые уравнения (28.13), или, что то же самое, уравнений (28.14), называются характеристиками уравнения (28.11). Если уравнение (28.11) гиперболического типа, то первые интегралы $\varphi_1(x, y) = C_1$ и $\varphi_2(x, y) = C_2$ действительны и различны. Они определяют два различных семейства действительных характеристик уравнения (28.11). С помощью замены переменных $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$, где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ – интегралы системы (28.14), уравнение (28.11) приводят к каноническому виду уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

З а м е ч а н и е. Уравнение гиперболического типа с помощью замены переменных $\xi = \mu + \nu$, $\eta = \mu - \nu$ можно привести к другому каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}=\Phi_1\left(\mu, \nu, u, \frac{\partial u}{\partial \mu}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right).$$

Если уравнение (28.11) параболического типа, то уравнения (28.14) совпадают; в этом случае получают один первый интеграл системы (28.14) $\varphi(x, y)=C$. Формулы (28.12) принимают вид $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – интеграл системы (28.14), а $\psi(x, y)$ – любая функция, удовлетворяющая условию – якобиан функций $\varphi$ и $\psi$ отличен от нуля:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{28.15}$$

Уравнение (28.11) приводят к каноническому виду параболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Если уравнение (28.11) эллиптического типа, то первые интегралы системы (28.14) будут комплексно-сопряженными: $\varphi(x, y)+i\psi(x, y)=C_1$, $\varphi(x, y)-i\psi(x, y)=C_2$. С помощью замены переменных по формулам $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ уравнение (28.11) приводят к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\Phi_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

называемому каноническим видом уравнения эллиптического вида.

Пример 28.5. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3x \frac{\partial u}{\partial x}-3y \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

и проинтегрировать его.

Это уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости, кроме точек, лежащих на осях координат, поскольку для него $A=x^2$, $B=0$, $C=-y^2$, $B^2-AC=-x^2(-y^2)=x^2y^2>0$, если $x \neq 0$, $y \neq 0$. Уравнение характеристик (28.13) принимает вид $x^2dy^2-y^2dx^2=0$, или $y^2dx^2-x^2dy^2=0$; оно равносильно двум уравнениям: $ydx+xdy=0$, $ydx-xdy=0$. Интегрируя эти уравнения, получаем $xy=C_1$, $y/x=C_2$. Введем новые переменные $\xi$ и $\eta$ по формулам (28.12): $\xi=xy$, $\eta=y/x$. Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{1}{xy}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Проинтегрируем уравнение $u''_{\xi\eta}+(1/\xi)\,u'_\eta=0$. Обозначим $u'_\eta=w$, тогда $u''_{\eta\xi}=w'_\xi$, $w'_\xi+(1/\xi)\,w=0$, $w'/w+1/\xi=0$, $\ln|w|+\ln|\xi|=\ln|\varphi_1(\eta)|$, $w\xi=\varphi_1(\eta)$, $u'_\eta\xi=\varphi_1(\eta)$, $\xi u=\int\varphi_1(\eta)\,d\eta+\psi_1(\xi)=\varphi(\eta)+\psi_1(\xi)$. Следовательно, $u=(1/\xi)\,\varphi(\eta)+\psi(\xi)$, где $\varphi$ и $\psi$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов. Возвращаясь к переменным $x, y$, получаем $u=(1/xy)\,\varphi(y/x)+\psi(xy)$.

П р и м е р 28.6. Найти общее решение уравнения

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Это уравнение параболического типа на всей плоскости $Oxy$, так как для него $A=x^2$, $B=-xy$, $C=y^2$, $B^2-AC=(-xy)^2-x^2y^2=0$. Уравнение характеристик (28.13) принимает вид $x^2dy^2+2xydxdy+y^2dx^2=0$, $(xdy+ +ydx)^2=0$, $xdy+ydx=0$. Поскольку $xdy+ydx=d\,(xy)$, то $d\,(xy)=0$, откуда $xy=C$, $\varphi(x,y)=xy$. В формулах (28.12) положим $\xi=xy$, а в качестве функции $\eta$ возьмем любую функцию, удовлетворяющую условию (28.15), в частности $\eta=y$. Преобразуем данное уравнение, введя новые переменные $\xi$ и $\eta$ по формулам $\xi=xy$, $\eta=y$. Находим выражения для частных производных по $x$ и $y$ через частные производные $\xi$, $\eta$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,\ \ \eta\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Введем новую функцию $w$ по формуле $w=u'_\eta$, тогда

$$\frac{\partial w}{\partial \eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\ \ \eta\frac{\partial w}{\partial \eta}+w=0,\ \ \frac{w'_\eta}{w}+\frac{1}{\eta}=0,$$

$$\ln|w|+\ln|\eta|=\ln|\varphi(\xi)|,\ \ w\eta=\varphi(\xi),\ \ u'_\eta\eta=\varphi(\xi),$$

$$u'_\eta=(1/\eta)\,\varphi(\xi),\ \ u=\varphi(\xi)\ln|\eta|+\psi(\xi).$$

Следовательно, общее решение уравнения определяется формулой $u=\varphi(xy)\ln|y|+\psi(xy)$, где $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции от произведения $xy$ аргументов $x$ и $y$.

Пример 28.7. Найти решение уравнения $u''_{xx}+u''_{yy}=0$ в полосе $0\le x\le a$, $0\le y\le+\infty$, удовлетворяющее условиям $u(0,y)=0$, $u(a,y)=0$, $u(x,0)=A(1-x/a)$, $u(x,+\infty)=0$.

Это каноническое уравнение эллиптического типа. Решение будем искать с помощью метода Фурье (метода разделения переменных). Искомую функцию $u(x,y)$ представим в виде произведения

$$u(x,y)=X(x)\,Y(y), \qquad \text{(I)}$$

где $X(x)$ – функция только от $x$, $Y(y)$ – функция только от $y$. Так как $u''_{xx}=X''(x)\,Y(y)$, $u''_{yy}=X(x)\,Y''(y)$, то уравнение принимает вид $X''(x)\,Y(y)+X(x)\,Y''(y)=0$, откуда $X''(x)/X(x)+Y''(y)/Y(y)=0$, или $Y''(y)/Y(y)=-X''(x)/X(x)$. Поскольку функция (I) – решение уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех $x$ и $y$, что возможно лишь тогда, когда обе части не зависят ни от $x$, ни от $y$, т. е. являются постоянными. Обозначив эту постоянную буквой $c$, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$Y''(y)-cY(y)=0,\ \ X''(x)+cX(x)=0. \qquad \text{(II)}$$

Считая $c=\lambda^2>0$, находим решения этих уравнений:

$$Y(y)=Ae^{-\lambda y}+Be^{\lambda y},\ \ X(x)=C\cos\lambda x+D\sin\lambda x$$

(характеристические уравнения для уравнений (II): $k^2-\lambda^2=0$, $k^2+\lambda^2=0$).

Следовательно, формула (I) примет вид

$$u(x,y)=(Ae^{-\lambda y}+Be^{\lambda y})(C\cos\lambda x+D\sin\lambda x).$$

Так как $u(0, y)=0$, т. е. $C\cos 0+D\sin 0=0$, то $C=0$. Условие $u(a, y)=0$ приводит к равенству $(Ae^{-\lambda y}+Be^{\lambda y})D\sin\lambda a=0$, откуда $\sin\lambda a=0$, $\lambda a=n\pi$ $(n=1,2,3,\dots)$, $\lambda=\pi n/a$. Поскольку $u(x,+\infty)=0$, или $(Ae^{-\lambda\infty}+Be^{\lambda\infty})\times$ $\times D\sin\lambda x=0$, то $B=0$. Таким образом $u(x, y)=Ae^{-\lambda y}D\sin\lambda x$, где $\lambda=n\pi/a$, т.е. решением является любая функция

$$u_n(x,y)=A_n e^{-(n\pi/a)y}D_n\sin(n\pi/a)\,x=b_n e^{-(n\pi/a)y}\sin(n\pi/a)\,x,$$

где $b_n=A_nD_n$, и ряд из этих функций

$$u(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n e^{-(n\pi/a)y}\sin(n\pi/a)\,x.$$

Постоянные $b_n$ определим так, чтобы выполнялось условие $u(x,0)=A(1-x/a)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{a}=A\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Значит, числа $b_n$ являются коэффициентами ряда Фурье для функции $A(1-x/a)$. Эти коэффициенты находим по формуле

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a A\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Вычислив интеграл, получим $b_n=2A/\pi n$.

Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$u(x, y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(n\pi/a)y}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

## 28.4. Основные дифференциальные уравнения математической физики

**Волновое уравиеиие** – уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+g(M,t),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u, \tag{28.16}$$

где $\Delta u$ – оператор Лапласа, $g(M,t)$ – функция точки $M$ из данной области (одномерной, двумерной, трехмерной) и времени $t$; первое называют неоднородным, второе – однородным. Волновыми уравнениями описываются различные колебательные процессы. Каждое волновое уравнение имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти решение, описывающее соответствующий физический процесс, необходимо задать дополнительные условия.

Одномерное волновое уравнение, или уравнение колебаний струны, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t);\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x,t)$ – отклонение от положения равновесия точки струны с абсциссой $x$ в момент времени $t$; $a$ – постоянная; $g(x,t)$ – заданная функция. Первое из этих уравнений называется уравнением вынужденных колебаний, второе – уравнением свободных колебаний. Дополнительные условия состоят из начальных и краевых. Предположим, что струна имеет длину $l$, левый конец ее закреплен в точке $x=0$, правый – в точке $x=l$. Если за начальный момент времени принять $t=0$, то начальные условия запишутся так: $u(x,0)=f(x)$, $u_t'(x,0)=F(x)$, где $f(x)$, $F(x)$ – известные функции, определенные на отрезке $[0,l]$. Так как концы струны закреплены, то краевые условия имеют вид $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ $(t>0)$. Задача, содержащая только начальные условия, называется задачей Коши; задача, содержащая начальные и краевые условия, – смешанной задачей.

Задача Коши для одномерного волнового уравнения. Найти решение $u=u(x,t)$ линейного однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (a\neq 0), \tag{28.17}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t)\big|_{t=0}=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x), \tag{28.18}$$

где $f(x)$, $F(x)$ – заданные функции, определенные в бесконечном промежутке $(-\infty,+\infty)$.

Для решения задачи о свободных колебаниях бесконечной струны используют метод характеристик, или метод Д'Аламбера.

Уравнение (28.17) является уравнением гиперболического типа (в чем можно убедиться, положив $t=y$ и сравнив его с уравнением (28.11)). Уравнение характеристик (28.13) принимает вид $a^2dt^2-dx^2=0$, или $dx^2-a^2dt^2=0$. Оно распадается на два уравнения: $dx-adt=0$, $dx+adt=0$, откуда получаем $x-at=C_1$, $x+at=C_2$. Введя новые переменные $\xi$ и $\eta$ формулами $\xi=x-at$, $\eta=x+at$, уравнение (28.17) преобразуем к виду $u''_{\xi\eta}=0$, откуда (см. пример 28.2) $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$, или

$$u=\varphi(x-at)+\psi(x+at), \tag{28.19}$$

где $\varphi$ и $\psi$ – произвольные дважды дифференцируемые функции. Если эти функции выбрать так, чтобы удовлетворить условиям (28.18), то

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)\,dz. \tag{28.20}$$

Эта формула, называемая формулой Д'Аламбера, дает решение задачи Коши для уравнения колебаний неограниченной струны.

**Уравиения теплопроводиости** – уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+g(M,t), \tag{28.21}$$

где $\Delta u$ – оператор Лапласа, $a$ – постоянная, $g(M,t)$ – заданная функция точки $M$ данной области (одномерной, двумерной, трехмерной). Первое уравнение называют однородным, второе – неоднородным.

Запишем соответственно трехмерное, двумерное и одномерное однородные уравнения вида (28.21):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Первое из этих уравнений описывает распространение тепла в пространстве, второе – в пластинке, третье – в стержне.

Уравнением вида (28.21) описываются различные процессы: диффузия, движение вязкой жидкости и др.

Начальное условие для уравнения теплопроводности в пространстве определяется равенством

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y,z); \tag{28.22}$$

оно задает температуру каждой точки тела в начальный момент времени $t_0=0$ ($f(x,y,z)$ – известная функция).

Краевое условие имеет вид

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=h\left(u|_{\Gamma}-\tilde{u}\right), \tag{28.23}$$

где $\tilde{u}$ – температура окружающей среды на границе Г, $u$ – температура тела, $h$ – коэффициент теплообмена, $k$ – коэффициент теплопроводности, $u'_n$ – производная функции $u=u(x,y,z,t)$ по направлению внешней нормали к поверхности Г.

Краевое условие (28.23) принимает вид $u'_n\big|_{\Gamma}=0$ при $h=0$ (на границе тела нет теплообмена с окружающей средой) или $u\big|_{\Gamma}=\tilde{u}$ при $h\to\infty$ (на границе поддерживается постоянная температура).

**Уравнение Лапласа** имеет вид

$$\Delta u = 0, \tag{28.24}$$

где $\Delta u$ – оператор Лапласа. Уравнению (28.24) удовлетворяет стационарное (не зависящее от времени) распределение температуры в теле, потенциал стационарного электрического поля в области, где отсутствуют заряды. К уравнению Лапласа приводят и другие задачи. Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется гармонической.

Краевая задача для уравнения Лапласа. Найти функцию $u = u(x, y, z)$, гармоническую внутри области, ограниченной замкнутой поверхностью $\Gamma$, и удовлетворяющую граничному условию

$$H\frac{\partial u}{\partial n} = u\big|_{\Gamma} - \tilde{u}, \tag{28.25}$$

где $H$ и $\tilde{u}$ – функции, заданные на границе $\Gamma$.

Важный частный случай краевой задачи получается при $H = 0$: $u\big|_{\Gamma} = \tilde{u}$. Эта краевая задача называется задачей Дирихле.

Задача Дирихле для круга: найти функцию $u = u(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа (в полярных координатах)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и условию $u(r, \varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ – заданная функция, $R$ – радиус круга.

Решение данной задачи выражается формулой

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - r^2)\, f(t)\, dt}{R^2 - 2Rr\cos(t - \varphi) + r^2}.$$

Этот интеграл называется интегралом Пуассона.

Пример 28.8. Найти решение $u = u(x, t)$ уравнения $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, удовлетворяющее условиям: $u(x, 0) = e^x$, $u'_t(x, 0) = \omega x$.

Это частный случай задачи Коши для уравнения (28.17) при $f(x) = e^x$, $F(x) = \omega x$. В соответствии с формулой (28.20) получаем искомое решение

$$u(x, t) = \frac{e^{x-at} + e^{x+at}}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\omega z dz =$$

$$= \frac{e^{x-at} + e^{x+at}}{2} + \frac{\omega}{2a}\,\frac{z^2}{2}\bigg|_{x-at}^{x+at},$$

$$u(x, t) = \frac{e^{x-at} + e^{x+at}}{2} + \omega x t.$$

Глава 29

# ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

## 29.1. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня скалярного поля

Пусть $V$ – область в пространстве или на плоскости. Говорят, что в области $V$ задано скалярное поле, если каждой точке $M$ из $V$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$. Если введены декартовы координаты, то скалярное поле можно представить в виде функции координат точки $M$: $u = u(x, y, z)$, $u = u(x, y)$. В этом случае понятие скалярного поля совпадает с понятием функции трех или двух переменных.

Поверхностью уровня скалярного поля $u(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле имеет данное фиксированное значение $C$.

Уравнение поверхности уровня имеет вид

$$u(x, y, z) = C. \tag{29.1}$$

Поверхности уровня называют еще эквипоненциальными поверхностями (поверхностями одинакового потенциала) или изоповерхностями.

Если поле задано в плоской области, то равенство

$$u(x, y) = C \tag{29.2}$$

определяет некоторую линию. Эти линии называют линиями уровня или изолиниями.

Скалярные поля иногда обладают специальными свойствами симметрии. Если значения $u(M)$ зависят лишь от расстояния точки $M$ от некоторой фиксированной точки $M_0$, то поле называют сферическим. Поверхности уровня сферического поля – концентрические сферы.

Если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле $u(M)$ переходит само в себя, т.е. существует такая декартова система координат, в которой поле можно задать функцией двух переменных $u = u(x, y)$, то это поле называют плоскопараллельным или двумерным. Поверхности уровня таких полей цилиндрические.

Если поле $u(M)$ переходит само в себя при повороте пространства на произвольный угол вокруг некоторой оси, иначе, если существует цилиндрическая система координат, в которой поле может быть задано функцией, зависящей лишь от $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z$, то такое поле называют осесимметрическим.

Поверхности уровня этого поля – поверхности вращения. Если поверхностями уровня являются круговые цилиндры, то $u(M)$ называют цилиндрическим.

**Пример 29.1.** Найти поверхность уровня скалярного поля $u=2x^2-3y^2+16x-18y-12z+43$, проходящую через точку $M(-1,1,1)$.

Совокупность поверхностей уровня данного поля определяется уравнением $2x^2-3y^2+16x-18y-12z+43=C$. Среди этих поверхностей выберем ту, которая проходит через точку $M$, для чего нужно определить значение $C$. Подставляя координаты точки $M$ в левую часть уравнения, находим $2(-1)^2-3\cdot 1^2+16(-1)-18\cdot 1-12\cdot 1+43=C$, или $2-3-16-18-12+43=C$, $C=-4$. Следовательно, уравнение искомой поверхности имеет вид $2x^2-3y^2+16x-18y-12z+43=-4$, или $2x^2-3y^2+16x-18y-12z+47=0$. Выделяя полные квадраты в левой части этого уравнения, получаем $2(x+4)^2-3(y+3)^2=12(z+1)$, или $X^2/3-Y^2/2=2Z$, где $X=x+4$, $Y=y+3$, $Z=z+1$.

Итак, поверхностью уровня является гиперболический параболоид.

**Пример 29.2.** Найти линии уровня плоского скалярного поля, заданного функцией $u=x^2-y^2$.

В соответствии с формулой (29.2) линии уровня данного поля определяются уравнением $x^2-y^2=C$. При $C>0$ получаем равносторонние гиперболы с действительной осью $Ox$, при $C<0$ имеем сопряженные им гиперболы (с действительной осью $Oy$), при $C=0$ получаем асимптоты всех указанных гипербол.

## 29.2. Градиент скалярного поля. Производная по направлению

Линейной формой $\varphi(\Delta\mathbf{r})$ относительно вектора $\Delta\mathbf{r}$ называют скалярное произведение вектора $\Delta\mathbf{r}$ на некоторый вектор $g$, не зависящий от $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x,y,z)$ – радиус-вектор точки $M$, $\Delta\mathbf{r}$ – вектор, соединяющий точки $M$ и $M_0$.

Скалярное поле $u(M)$ называется дифференцируемым в точке $M_0$ из области $V$, если приращение поля $\Delta u$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u=\mathbf{g}\cdot\Delta\mathbf{r}+o(\rho), \tag{29.3}$$

где $\rho=\rho(M_0, M)$ – расстояние между точками $M_0$ и $M$, $\Delta u=u(M)-u(M_0)$.

Градиентом дифференцируемого в точке $M_0$ скалярного поля называют вектор $\mathbf{g}(M_0)$ из (29.3). Обозначение: $\operatorname{grad} u(M_0)=\mathbf{g}(M_0)$.

Если поле дифференцируемо в каждой точке области $V$, то оно дифференцируемо в $V$. В этом случае $\operatorname{grad} u(M)=\mathbf{g}(M)$.

При заданной декартовой системе координат

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{29.4}$$

Величина $\operatorname{grad} u$ определяется формулой

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (29.5)$$

Свойства градиента:

1) $\operatorname{grad} c = 0,\ c = \text{const}$;
2) $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v,\ u,\ v$ – дифференцируемые скалярные поля;
3) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$;
4) $\operatorname{grad}(cu) = c \operatorname{grad} u,\ c = \text{const}$;
5) $\operatorname{grad}(u/v) = (v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v)/v^2 \quad (v \neq 0)$;
6) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u,\ f$ – дифференцируемая функция;
7) $\operatorname{grad}|\mathbf{r}| = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$.

Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – базис в ортогональной криволинейной системе координат $g_1, g_2, g_3$, то

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial g_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial g_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial g_3}\mathbf{e}_3,$$

где $H_1, H_2, H_3$ – параметры Ламе, определенные формулой

$$H_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial g_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial g_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial g_j}\right)^2},\ j = 1, 2, 3; \qquad (29.6)$$

в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z;$$

в сферической системе координат

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi.$$

Дифференциалом скалярного поля $u(M)$ называют скалярное произведение $\operatorname{grad} u \cdot \Delta\mathbf{r}$:

$$du = \operatorname{grad} u \cdot \Delta\mathbf{r}.$$

Пусть $\mathbf{e}$ – единичный вектор, указывающий направление $l$ в точке $M_0$ области $V$, $M$ – произвольная точка $V$, отличная от $M_0$ и такая, что вектор $\mathbf{M_0M}$ коллинеарен вектору $\mathbf{e}$.

Предел $\lim\limits_{\rho\to 0} \Delta u/\rho \quad (\Delta u = u(M) - u(M_0)),\quad (\rho = \rho(M_0, M)$ – расстояние между точками $M_0$ и $M$), если он существует, называют производной поля $u(M)$ в точке $M_0$ по направлению $\mathbf{e}$ и обозначают символом

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u}{\rho}.$$

В декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \tag{29.7}$$

где

$$\mathbf{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\operatorname{grad} u\cdot\mathbf{e}=\text{пр}_{\mathbf{e}}\operatorname{grad} u.$$

Если $\mathbf{e}$ имеет направление $\operatorname{grad} u$, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial e}\right|_{\max}=|\operatorname{grad} u|.$$

Пример 29.3. Найти величину и направление градиента скалярного поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ в точке $M_0(2,1,-1)$.

Находим частные производные функции $u$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz,\ \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy,$$

их значения в точке $M_0$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=15,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=9,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=-3.$$

По формуле (29.4) получаем $\operatorname{grad} u(M_0)=15\mathbf{i}+9\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

Величину градиента находим по формуле (29.5):

$$|\operatorname{grad} u(M_0)|=\sqrt{15^2+9^2+(-3)^2}=3\sqrt{35}.$$

Пример 29.4. Найти производную поля $u=x^2y-3xyz+xz^2y^2$ в точке $M_0(1,2,-1)$ по направлению вектора $\mathbf{e}$, образующего с координатными осями острые углы $\alpha$, $\beta=\pi/4$, $\gamma=\pi/3$. Установить характер изменения поля в данном направлении.

Частные производные функции $u$ в точке $M_0$ имеют значения:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0=(2xy-3yz+y^2z^2)\Big|_{M_0}=14,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=(x^2-3xz+2xyz^2)\Big|_{M_0}=8,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=(-3xy+2xy^2z)\Big|_{M_0}=-14.$$

По условию задачи $\cos\beta=\cos\pi/4=\sqrt{2}/2$, $\cos\gamma=\cos\pi/3=1/2$. Поскольку $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, а угол $\alpha$ – острый, то $\cos\alpha=\sqrt{1-1/2-1/4}=1/2$. По формуле (29.7) находим

$$\frac{\partial u}{\partial e}=14\cdot\frac{1}{2}+8\frac{\sqrt{2}}{2}+(-14)\frac{1}{2}=4\sqrt{2}.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial e}>0$, скалярное поле $u(M)$ возрастает в данном направлении.

## 29.3. Векторное поле. Векторные линии

Если каждой точке $M$ области $V$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\mathbf{F}(M)$, то говорят, что в $V$ задано векторное поле.

В декартовой системе координат $\mathbf{F}(M)$ можно представить совокупностью трех скалярных функций, являющихся координатами вектора $\mathbf{F}(M)$. Обозначим их $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, тогда

$$\mathbf{F}(M) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$

Иногда векторные поля обладают специальными свойствами симметрии.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называют одномерным, если существует декартова система координат такая, что координаты $\mathbf{F}(M)$ имеют вид $P(x)$, 0, 0.

Если существует такая цилиндрическая система координат, что $\mathbf{F}(M)$ зависит от $\rho$ и $z$, но не зависит от $\varphi$, то поле $\mathbf{F}(M)$ называют осесимметрическим. Если $\mathbf{F}(M)$ зависит лишь от $\rho$, то поле называют цилиндрическим.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называют плоскопараллельным, если существует декартова система координат такая, что координаты $\mathbf{F}(M)$ можно задать функциями двух переменных $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$.

Векторной линией (силовой линией, линией тока) векторного поля $\mathbf{F}(M)$ называется линия $L$, лежащая в $V$, если в каждой точке $L$ направление касательной к ней совпадает с направлением $\mathbf{F}(M)$ в этой точке.

Параметрическое дифференциальное уравнение векторной линии, проходящей через точку $M_0$, выражается формулами

$$\mathbf{r}'(t) = \lambda\mathbf{F},\ \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор начальной точки $M_0$, $\lambda$ – произвольное числю, $t_0$ – начальное значение параметра, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ – уравнение векторной линии.

Система дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \qquad (29.8)$$

При непрерывно дифференцируемых функциях $P, Q, R$, ни в одной точке $V$ не обращающихся одновременно в нуль, через каждую точку $V$ пройдет единственная векторная линия.

Часть пространства, в котором задано векторное поле $\mathbf{F}(M)$, ограниченное некоторой поверхностью $\sigma$, называется векторной трубкой, если в каждой точке поверхности $\sigma$ нормаль к ней ортогональна $\mathbf{F}(M)$ в этой же точке, т. е. векторная трубка – часть пространства, состоящая из целых векторных линий, каждая из которых или целиком лежит внутри векторной трубки или целиком находящаяся вне ее.

Пример 29.5. Найти векторные линии векторного поля $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Система (29.8), из которой находятся векторные линии, в данном случае имеет вид $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$. Эту систему уравнений можно записать так: $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$, $dz = 0$. Из этих уравнений находим $x^2 + y^2 = C^2$, $z = C_1$. Эти уравнения определяют векторные линии – окружности в плоскости $z = C_1$.

## 29.4. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция. Соленоидальное поле. Теорема Остроградского

Потоком векторного поля $\mathbf{F}(M)$ через поверхность $\sigma$ в сторону, определяемую единичным вектором $\mathbf{n}$ нормали к поверхности $\sigma$, называют интеграл:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\sigma} F_n d\sigma = \iint_{\sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}\vec{\sigma}.$$

В декартовой системе координат, если $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} P\,(x, y, z)\, dydz + Q\,(x, y, z)\, dxdz + R\,(x, y, z)\, dxdy.$$

Способы вычисления этого поверхностного интеграла указаны в п. 22.2.

Пусть $V(\sigma)$ – объем области $V$, ограниченной замкнутой поверхностью $\sigma$. В этом случае поток через внешнюю сторону поверхности $\sigma$ записывают в виде $\oiint_{\sigma} F_n d\sigma$.

Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\mathbf{F}(M)$ в точке $M$ области $V$ называется $\lim\limits_{\sigma \to M} \frac{\oiint_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)}$, если такой предел существует. Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \lim_{\sigma \to M} \frac{\oiint_{\sigma} F_n d\sigma}{V(\sigma)} = \lim_{\sigma \to M} \frac{\oiint_{\sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma}{V(\sigma)}.$$

Теорема 29.1. *Если $P$, $Q$, $R$ непрерывны вместе со своими частными производными в области $V$, то дивергенция поля $\mathbf{F}$, заданного координатами $P$, $Q$, $R$, существует во всех точках области $V$ и в любой декартовой системе координат выражается формулой*

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{29.9}$$

Если $\operatorname{div}\mathbf{F}(M)>0$, то точка $M$ – источник векторных линий, если $\operatorname{div}\mathbf{F}(M)<0$, то точка $M$ – сток силовых линий.

Свойства дивергенции:

1) $\operatorname{div}\mathbf{c}=0$, $\mathbf{c}$ – постоянный вектор;
2) $\operatorname{div}(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)=\operatorname{div}\mathbf{F}_1+\operatorname{div}\mathbf{F}_2$;
3) $\operatorname{div}(u\mathbf{F})=u\operatorname{div}\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}u$, $u$ – скалярное поле.

В криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial g_1}+\frac{\partial(A_2H_1H_3)}{\partial g_2}+\frac{\partial(A_3H_1H_2)}{\partial g_3}\right),$$

где $A_1, A_2, A_3$ – координаты $\mathbf{F}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$; $H_1, H_2, H_3$ – параметры Ламе, определенные формулой (29.6); в цилиндрических координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z};$$

в сферических координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$(x=r\cos\varphi\sin\theta,\ \ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ \ z=r\cos\theta).$$

Векторное поле, дивергенция в каждой точке которого равна нулю, называется соленоидальным или трубчатым.

Теорема 29.2 (теорема Остроградского). *Формула* (22.12) *для векторного поля* $\mathbf{F}(M)$ *имеет вид*

$$\oiint_\sigma F_n d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}dV. \qquad (29.10)$$

Пример 29.6. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ через внешнюю сторону поверхности $x^2+y^2+y^2=R^2$.

Воспользуемся формулой (29.10), выражающей поток векторного поля через тройной интеграл. Так как $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=3x^2+3y^2+3z^2=3r^2$, то по формуле (29.10) имеем $\oiint_\sigma F_n d\sigma=3\iiint_V r^2dV$. Введя сферические координаты $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, вычислим тройной интеграл:

$$\iiint_V r^2dV=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^R r^4dr=(4/5)\,\pi R^5.$$

Следовательно, $\oiint_\sigma F_n d\sigma=(12/5)\pi R^5$.

Пример 29.7. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}(M)=(2x^2y-3xz^3+5x^3yz)\,\mathbf{i}+(4xy^3+xyz+8z^2)\,\mathbf{j}+(6xy^2z^3-7xz^2+9yz)\,\mathbf{k}$ в точке $M(1,1,1)$.

Вычислим $P'_x, Q'_y, R'_z$ в точке $M(1,1,1)$:

$$(P'_x)_0=(4xy-3z^3+15x^2yz)\Big|_M=16,\ (Q'_y)_0=(12xy^2+yz)\Big|_M=13,$$

$$(R'_z)_0=(18xy^2z^2-14xz+9y)\Big|_M=13.$$

Подставляя полученные значения в формулу (29.9), получаем $\operatorname{div}\mathbf{F}\Big|_M=42$.

## 29.5. Циркуляция векторного поля

Циркуляцией векторного поля $\mathbf{F}(M)$ вдоль линии $L$ называется криволинейный интеграл

$$\int_L F_\tau dl=\int_L \mathbf{F}\cdot\vec{\tau}dl,$$

где $L$ – гладкая или кусочно-гладкая линия, $F_\tau$ – тангенциальная составляющая поля $\mathbf{F}(M)$ на $L$, $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к линии $L$ в точке $M$.

В декартовой системе координат

$$\int_L F_\tau dl=\int_L Pdx+Qdy+Rdz,$$

$P, Q, R$ – непрерывные составляющие поля $\mathbf{F}$. Вычисление полученного криволинейного интеграла второго рода описано в п. 21.2.

Если $\mathbf{F}(M)=P(M), Q(M), R(M)$ – силовое поле, то его циркуляция вдоль линии $L$ представляет собой работу этого поля вдоль линии $L$.

Пример 29.8. Найти работу, производимую силой $\mathbf{F}(M)=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ вдоль линии $L$, описываемой уравнениями $x=t^2,\ \ y=t^4,\ \ z=t^6\ \ (0\le t\le 1)$.

По формуле, выражающей циркуляцию в декартовой системе координат, находим

$$\int_L F_\tau dl=\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\int_0^1(2t^{11}+4t^{11}+6t^{11})\,dt=\int_0^1 12t^{11}dt=t^{12}\Big|_0^1=1.$$

## 29.6. Ротор векторного поля. Теорема Стокса

Ротором (вихрем) поля $\mathbf{F}(M)$ в точке $M$ называется

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(M)=\lim_{\sigma\to M}\frac{\iint\limits_\sigma(\mathbf{n}\times\mathbf{F})\,d\sigma}{V},$$

если этот предел существует. Здесь $V$ – область, ограниченная замкнутой гладкой или кусочно-гладкой поверхностью $\sigma$, $V$ – объем области $V$, $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности $\sigma$ в точке $M$.

Для декартовой системы координат с непрерывными вместе со своими частными производными $P, Q, R$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \qquad (29.11)$$

В символической форме

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Свойства ротора: $\operatorname{rot}\mathbf{c}=0$, $\mathbf{c}=\mathrm{const}$; $\operatorname{rot}\mathbf{r}=0$, $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{i}+z\mathbf{k}$; $\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)=\operatorname{rot}\mathbf{F}_1+\operatorname{rot}\mathbf{F}_2$; $\operatorname{rot}(u\mathbf{F})=u\operatorname{rot}\mathbf{F}+\operatorname{grad}u\times\mathbf{F}$.

В ортогональных криволинейных координатах

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial g_2}-\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial g_3}\right)\mathbf{e}_1+$$

$$+\frac{1}{H_1H_3}\left(\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial g_3}-\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial g_1}\right)\mathbf{e}_2+\frac{1}{H_1H_2}\left(\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial g_1}-\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial g_2}\right)\mathbf{e}_3,$$

где $A_1, A_2, A_3$ – координаты $\mathbf{F}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, $H_1, H_2, H_3$ – параметры Ламе (см. формулы (29.6));
в цилиндрических координатах

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(A_\varphi\rho)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z;$$

в сферических координатах

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi$$

$$(x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta).$$

**Формула Стокса.** Формула (22.11) в векторной форме имеет вид

$$\oint_L F_\tau dl=\iint_\sigma(\operatorname{rot}\mathbf{F})_n d\sigma,$$

т. е. циркуляция векторного поля $\mathbf{F}$ вдоль некоторого замкнутого контура $L$ равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, ограниченную этим контуром. Из последней формулы

$$(\operatorname{rot}\mathbf{F}(M))_n = \lim_{\sigma\to M} \frac{\oint\limits_L F_\tau dl}{S},$$

$S$ – площадь поверхности $\sigma$, $(\operatorname{rot}\mathbf{F}(M))_n$ – проекция ротора на нормаль.

Пример 29.9. Найти вихрь векторного поля $\mathbf{F} = y^2z^2\mathbf{i} + x^2z^2\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$ в произвольной точке.

Находим частные производные: $P'_x = 0$, $P'_y = 2yz^2$, $P'_z = 2y^2z$, $Q'_x = 2xz^2$, $Q'_y = 0$, $Q'_z = 2x^2z$, $R'_x = 2xy^2$, $R'_y = 2x^2y$, $R'_x = 0$. По формуле (29.11) имеем $\operatorname{rot}\mathbf{F}(M) = 2x^2(y-z)\mathbf{i} + 2y^2(z-x)\mathbf{j} + 2z^2(x-y)\mathbf{k}$.

## 29.7. Потенциальное поле

Пусть $V$ – односвязная область, в которой задано поле $\mathbf{F}(M)$.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называется потенциальным, если его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\mathbf{F}(M) = \operatorname{grad} u(M).$$

Поле $\mathbf{F}$ потенциально в $V$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rot}\mathbf{F}(M) = \mathbf{0}$, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Это условия (21.16). При непрерывных $P, Q, R$ со своими частными производными задача о нахождении потенциала свелась к задаче восстановления функции по ее полному дифференциалу (см. п. 21.3).

Пример 29.10. Найти потенциал поля

$$\mathbf{F} = (4xy + 12x^2z)\mathbf{i} + (2x^2 - 3z^3)\mathbf{j} + (4x^3 - 9yz^2)\mathbf{k},$$

если он существует.

Исследуем потенциальность поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (R'_y - Q'_z)\mathbf{i} + (P'_z - R'_x)\mathbf{j} + (Q'_x - P'_y)\mathbf{k} =$$

$$= (-9z^2 + 9z^2)\mathbf{i} + (12x^2 - 12x^2)\mathbf{j} + (4x - 4x)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Поле $\mathbf{F}$ потенциально. Так как $u'_x = P$, $u'_y = Q$, $u'_z = R$, то получаем

$$u(x, y, z) = \int (4xy + 12x^2z)\,dx + \varphi(y, z) = 2x^2y + 4x^3z + \varphi(y, z),$$

$$u(x, y, z) = \int (2x^2 - 3z^3)\,dy + \psi(x, z) = 2x^2y - 3yz^3 + \psi(x, z),$$

$$u(x, y, z) = \int (4x^3 - 9yz^2)\,dz + f(x, y) = 4x^3z - 3yz^3 + f(x, y).$$

Следовательно, $u(x, y, z) = 2x^2y - 3yz^3 + 4x^3z + C$.

## 29.8. Оператор Гамильтона. Операции второго порядка в векторном анализе. Оператор Лапласа

Оператор Гамильтона (оператор набла) – линейный дифференциальный оператор по определению записывают в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

С учетом этого оператора основные операции теории поля можно записать так:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u, \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}.$$

С помощью оператора набла удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа, причем эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. При выполнении действий с оператором $\nabla$ следует учитывать, что это оператор дифференциальный и векторный, т. е. пользоваться правилами дифференциального исчисления и векторной алгебры. При этом следует помнить, что, если $\nabla$ действует на какое-либо произведение, то в первую очередь учитывают его дифференциальные свойства, а затем векторные. Входящие в состав формулы величины, которые подвергаются воздействию оператора набла, обозначают стрелкой, в окончательном результате они должны стоять слева от него. Рассмотрим операцию взятия дивергенции от векторного произведения полей $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2) = \nabla\cdot(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2) = \nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1}\times\mathbf{F}_2) + \nabla\cdot(\mathbf{F}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_2}) =$$
$$= \mathbf{F}_2\cdot(\nabla\times\mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_1\cdot(\nabla\times\mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}_2,$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2) = \nabla\times\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2 = \nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1}\times\mathbf{F}_2 + \nabla\times\mathbf{F}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_2} =$$
$$= -\nabla\times\mathbf{F}_2\times\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1} + \nabla\times\mathbf{F}_1\times\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2(\nabla\cdot\mathbf{F}_1) + (\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 +$$
$$+\mathbf{F}_1(\nabla\cdot\mathbf{F}_2) - (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1\operatorname{div}\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_2\operatorname{div}\mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2.$$

Здесь была использована формула $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. С использованием последней получим

$$\operatorname{grad}(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2) = \nabla(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{F}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_1}\cdot\mathbf{F}_2) + \nabla(\mathbf{F}_1\cdot\overset{\downarrow}{\mathbf{F}_2}) = \mathbf{F}_2\times(\nabla\times\mathbf{F}_1) + \mathbf{F}_1\times(\nabla\times\mathbf{F}_2) +$$
$$+(\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2\times\operatorname{rot}\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2\cdot\nabla)\mathbf{F}_1 + (\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2.$$

Если $\mathbf{F}_j = (P_j, Q_j, R_j)$, $j = 1, 2$, то

$$(\mathbf{F}_1\cdot\nabla)\mathbf{F}_2 = \left(P_1\frac{\partial P_2}{\partial x} + Q_1\frac{\partial P_2}{\partial y} + R_1\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(P_1\frac{\partial Q_2}{\partial x} +\right.$$
$$\left. + Q_1\frac{\partial Q_2}{\partial y} + R_1\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(P_1\frac{\partial R_2}{\partial x} + Q_1\frac{\partial R_2}{\partial y} + R_1\frac{\partial R_2}{\partial z}\right)\mathbf{k}.$$

Эту операцию можно рассматривать как результат применения операции $(\mathbf{F}_1\cdot\nabla)$ к каждой составляющей вектора $\mathbf{F}_2$.

Попарные комбинации операций градиента дивергенции и ротора называют операциями второго порядка. Применительно к скалярному полю имеют смысл две операции $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla \times \nabla u = 0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = (\nabla \cdot \nabla)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Символ $\nabla \cdot \nabla$ называют оператором Лапласа и обозначают $\Delta$:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применительно к векторной величине $\mathbf{F} = (P, Q, R)$

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta P \mathbf{i} + \Delta Q \mathbf{j} + \Delta R \mathbf{k}.$$

В криволинейных ортогональных координатах

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial}{\partial g_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial g_1}\right) + \frac{\partial}{\partial g_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial g_2}\right) + \frac{\partial}{\partial g_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial g_3}\right)\right);$$

в цилиндрических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$

в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

$x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $H_1, H_2, H_3$ – параметры Ламе (см. формулы (29.6)).

Операции второго порядка для векторного поля:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F},\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F},\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F};$$

$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$ – поле, являющееся ротором некоторого поля $\mathbf{F}$, соленоидально;

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\,\mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \Delta\mathbf{F};$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{F} = (P, Q, R)).$$

## 29.9. Полилинейные функции векторного аргумента. Понятие тензора

Если каждому вектору $\mathbf{x}$ из $V_n$ поставлено в соответствие число $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ так, что для любых векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из $V_n$ $\varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \varphi(\mathbf{x}_1) + \varphi(\mathbf{x}_2)$ и для любого числа $\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ $\varphi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\varphi(\mathbf{x})$, то $\varphi(\mathbf{x})$ называют линейной функцией или линейной формой.

Обозначая $x^1, x^2, \dots, x^n$ координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, получаем

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k \text{ и } \varphi(\mathbf{x}) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x^k \mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x^k \varphi(\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x^k \varphi_k.$$

Числа $\varphi_1 = \varphi(\mathbf{e}_1)$, $\varphi_2 = \varphi(\mathbf{e}_2), \dots, \varphi_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$ называют коэффициентами линейной формы. Линейную форму считают заданной, если в некотором базисе заданы ее коэффициенты.

Если любым векторам $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ из $V_n$ поставлено в соответствие число $\varphi = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)$ так, что $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)$ – функция линейная относительно всех своих аргументов, то $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)$ называют полилинейной функцией или полилинейной формой.

В этом случае при

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{k_1=1}^{n} x^{k_1} \mathbf{e}_{k_1}, \quad \mathbf{x}_2 = \sum_{k_2=1}^{n} x^{k_2} \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{x}_p = \sum_{k_p=1}^{n} x^{k_p} \mathbf{e}_{k_p},$$

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) = \varphi\left(\sum_{k_1=1}^{n} x^{k_1} \mathbf{e}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} x^{k_2} \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \sum_{k_p=1}^{n} x^{k_p} \mathbf{e}_{k_p}\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \dots \sum_{k_p=1}^{n} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_p} \varphi(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_p}) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \dots \sum_{k_p=1}^{n} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_p} \varphi_{k_1 k_2 \dots k_p}.$$

Числа $\varphi_{k_1 k_2 \dots k_p} = \varphi(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \dots, \mathbf{e}_{k_p})$ называют коэффициентами полилинейной формы. Всего их $n^p$. При $p = 2$ форму называют билинейной.

В тензорном исчислении принято соглашение о суммировании: если в некотором одночленном выражении одинаковый буквенный индекс встречается дважды – один раз вверху и один раз внизу, то это означает сумму выражений этого рода для значений индекса 1, 2, ..., $n$. Например,

$$a_j^j = \sum_{j=1}^{n} a_j^j = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n,\ a_{kjl}^{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kjl}^{ik},\ a_{ikl}^{ik} = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{n} a_{ikl}^{ik}.$$

Обозначение индексов суммирования не играет роли: $a_j^j = a_k^k = a_i^i$, $j = k = i = 1, 2, \ldots, n$.

Если в $V_n$ выбраны два базиса

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \qquad (29.12)$$

и

$$\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}, \qquad (29.13)$$

то каждый вектор системы (29.13) можно разложить по базису (29.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= t_{1'}^1\mathbf{e}_1 + t_{1'}^2\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{1'}^n\mathbf{e}_n = t_{1'}^j\mathbf{e}_j, \\ \mathbf{e}_{2'} &= t_{2'}^1\mathbf{e}_1 + t_{2'}^2\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{2'}^n\mathbf{e}_n = t_{2'}^j\mathbf{e}_j, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}_{n'} &= t_{n'}^1\mathbf{e}_1 + t_{n'}^2\mathbf{e}_2 + \cdots + t_{n'}^n\mathbf{e}_n = t_{n'}^j\mathbf{e}_j. \end{aligned} \qquad (29.14)$$

Матрица перехода от базиса (29.12) к базису (29.13) имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} t_{1'}^1 & t_{2'}^1 & \ldots & t_{n'}^1 \\ t_{1'}^2 & t_{2'}^2 & \ldots & t_{n'}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{1'}^n & t_{2'}^n & \ldots & t_{n'}^n \end{bmatrix}. \qquad (29.15)$$

Матрица перехода от базиса (29.13) к базису (29.12) является обратной матрице (29.15):

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^{1'} & t_2^{1'} & \ldots & t_n^{1'} \\ t_1^{2'} & t_2^{2'} & \ldots & t_n^{2'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^{n'} & t_2^{n'} & \ldots & t_n^{n'} \end{bmatrix}. \qquad (29.16)$$

Учитывая соглашение о суммировании, формулы (29.14) можно записать в виде

$$\mathbf{e}_{j'} = t_{j'}^j\mathbf{e}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ j' = 1', 2', \ldots, n'). \qquad (29.17)$$

Аналогично, учитывая матрицу (29.16) и соглашение о суммировании, получаем

$$\mathbf{e}_j = t_j^{j'}\mathbf{e}_{j'}. \qquad (29.18)$$

Преобразования, в которых участвуют элементы матрицы (29.15), называют ковариантными (сопреобразующимися, изменяющимися так же). Преобразования, с участием элементов матрицы (29.16), называют контравариантными (противопреобразующимися).

Ковариантным тензором ранга $q$ (тензором типа (0, $q$) или $\begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$) называется величина, которая в каждом базисе векторного пространства $V_n$ задается $n^q$ упорядоченными системами чисел $a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ в базисе (29.12) и $a_{i_{1'}i_{2'}\ldots i_{q'}}$ в базисе (29.13)). которые при переходе от базиса (29.12) к базису (29.13) преобразуются по закону

$$a_{i_{1'}i_{2'}\ldots i_{q'}} = t_{i_{1'}}^{i_1} t_{i_{2'}}^{i_2} \ldots t_{i_{q'}}^{i_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_q}, \tag{29.19}$$

$t_{i'}^{i}$ – элементы матрицы (29.15). Ранг тензора называют также валентностью.

Пусть $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_q)$ – линейная форма порядка $q$ с коэффициентами $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ в базисе (29.12) и $\varphi_{i_{1'}i_{2'}\ldots i_{q'}}$ в базисе (29.13). Учитывая определение коэффициентов полилинейной формы, соотношение (29.17) и свойства линейности, можно получить

$$\varphi_{i_{1'}i_{2'}\ldots i_{q'}} = \varphi(\mathbf{e}_{i_{1'}}, \mathbf{e}_{i_{2'}}, \ldots, \mathbf{e}_{i_{q'}}) = \varphi(t_{i_{1'}}^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}, t_{i_{2'}}^{i_2}\mathbf{e}_{i_2}, \ldots, t_{i_{q'}}^{i_q}\mathbf{e}_{i_q}) =$$

$$= t_{i_{1'}}^{i_1} t_{i_{2'}}^{i_2} \ldots t_{i_{q'}}^{i_q} \varphi(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}) = t_{i_{1'}}^{i_1} t_{i_{2'}}^{i_2} \ldots t_{i_{q'}}^{i_q} \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_q}.$$

Таким образом, линейная форма порядка $q$ является ковариантным тензором типа (0, $q$). Удобно считать, что и тензор типа (0, $q$) является линейной формой порядка $q$.

Контравариантным тензором ранга $p$ (тензором типа ($p$, 0) или $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$) называется величина, которая в каждом базисе векторного пространства $V_n$ задается $n^p$ упорядоченными системами чисел $a^{j_1 j_2 \ldots j_p}$ в базисе (29.12) и $a^{j_{1'}j_{2'}\ldots j_{p'}}$ в базисе (29.13)), которые при переходе от базиса (29.12) к базису (29.13) преобразуются по закону

$$a^{j_{1'}j_{2'}\ldots j_{p'}} = t_{j_1}^{j_{1'}} t_{j_2}^{j_{2'}} \ldots t_{j_p}^{j_{p'}} a^{j_1 j_2 \ldots j_p}, \tag{29.20}$$

$t_j^{j'}$ – элементы матрицы (29.16).

Если $x^1, x^2, \ldots, x^n$ координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе (29.12), $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ – в базисе (29.13), то $\mathbf{x} = x^{j'}\mathbf{e}_{j'}$ и $\mathbf{x}_{j'} = x^j \mathbf{e}_j$. Следовательно, $x^{j'}\mathbf{e}_{j'} = x^j \mathbf{e}_j = x^j t_j^{j'} \mathbf{e}_{j'}$. Приравнивая координаты при $\mathbf{e}_{j'}$, получаем

$$x^{j'} = t_j^{j'} x^j.$$

Таким образом, вектор – это контравариантный тензор, т.е. тензор типа (1, 0). Наоборот, тензор типа (1, 0) можно рассматривать как вектор. Числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ называют контравариантными координатами вектора.

Тензором типа $(p, q)$ ($q$ раз ковариантным и $p$ раз контравариантным) называется величина, которая в каждом базисе векторного пространства $V_n$ задается $n^{p+q}$ упорядоченными системами чисел ($a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}$ в базисе (29.12) и $a_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}}^{j_{1'} j_{2'} \ldots j_{p'}}$ в базисе (29.13)), которые при переходе от базиса (29.12) к базису (29.13) преобразуется по закону

$$a_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}}^{j_{1'} j_{2'} \ldots j_{p'}} = t_{j_1}^{j_{1'}} t_{j_2}^{j_{2'}} \ldots t_{j_p}^{j_{p'}} t_{i_{1'}}^{i_1} t_{i_{2'}}^{i_2} \ldots t_{i_{q'}}^{i_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p},$$

$t_j^{j'}, t_{i'}^{i}$ – элементы матриц (29.15) и (29.16). Числа $a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}$ называют координатами тензора в базисе (29.12), $a_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}}^{j_{1'} j_{2'} \ldots j_{p'}}$ – координатами тензора в базисе (29.13).

## 29.10. Действия над тензорами

Пусть заданы два тензора одинакового строения $(p, q)$, т. е. заданы координаты $a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}$. Их суммой будет тензор того же строения с координатами

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} = a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} + b_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}.$$

Сказанное остается в силе и при сложении нескольких тензоров одинакового строения.

Если $a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}$ – координаты тензора типа $(p, q)$ и $b_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{k_1 k_2 \ldots k_r}$ – координаты тензора типа $(r, s)$, то произведением этих тензоров будет тензор, координаты которого выражаются следующим образом:

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_q l_1 l_2 \ldots l_s}^{j_1 j_2 \ldots j_p k_1 k_2 \ldots k_r} = a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} \cdot b_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{k_1 k_2 \ldots k_r},$$

т.е. в каждом базисе каждую координату первого тензора умножают на каждую координату второго тензора и полученные произведения принимают за координаты нового тензора типа $(p+r, q+s)$. Указанным способом можно перемножать любое число тензоров. Результат умножения зависит не только от типа сомножителей, но и от их порядка.

Операция свертывания тензора имеет специфически тензорный характер, и применяется к тензорам смешанного типа. Пусть дан произвольный тензор, имеющий хотя бы один верхний и хотя бы один нижний индексы. Индексы выбирают произвольно и отбирают те координаты тензора, для которых выбранные индексы имеют одинаковые значения $1, 2, \ldots, n$. Это означает, что производится суммирование всех выбранных координат при фиксированных значениях остальных индексов. Получаем тензор, утративший по сравнению с исходным по одному нижнему и верхнему индексу. Если тип исходного тензора $(p, q)$, то полученный тензор имеет тип $(p-1, q-1)$. Пусть $a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}$, выбираем, например, индексы $j_1$ и $i_1$ и рассматриваем $i_1 = j_1$, т.е.

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} = a_{1 i_2 \ldots i_q}^{1 j_2 \ldots j_p} + a_{2 i_2 \ldots i_q}^{2 j_2 \ldots j_p} + \cdots + a_{n j_2 \ldots i_q}^{n j_2 \ldots j_p} = a_{i_2 \ldots i_q}^{j_2 \ldots j_p}.$$

В связи с тем, что валентность тензора при свертывании понижается на две единицы, эта операция является весьма важным источником получения инвариантов – величин, не зависящих от выбора базиса. Если у тензора одинаковое число верхних и нижних индексов, то, применяя операцию свертывания столько раз, сколько верхних или нижних индексов, получают число. При сворачивании тензора типа $(1, 1)$ получаем $a_i^j = a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_n^n = a$ – след соответствующей матрицы. Особенно часто применяется свертывание к тензорам, полученным как произведение. Так, запись линейной формы $\varphi(\mathbf{x}) = x^i \varphi_i$ можно рассматривать как получение инварианта $\varphi(\mathbf{x})$ путем свертывания произведения тензоров $x^p$ и $\varphi_r$.

Транспонирование тензоров (операция подстановки индексов) по двум ковариантным или двум контравариантным индексам – преобразование рассматриваемого тензора в тензор того же типа, координаты которого отличаются от координат исходного тензора порядком транспонируемых индексов. Например,

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} \to b_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p} = a_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_q}^{j_1 j_2 j_3 \ldots j_p}.$$

Операция симметрирования по группе $p$ ковариантных или контравариантных индексов заключается в следующем: транспонируют тензор, совершая всевозможные перестановки индексов выбранной группы. Полученные таким образом $p!$ тензоров складывают и делят эту сумму на $p!$. Полученный тензор обозначается заключением выбранной группы индексов в круглые скобки. Так, тензор $a_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{j_1}$, симметрированный по индексам $i_2, i_3, i_4$, имеет вид

$$a_{i_1 (i_2 i_3 i_4)}^{j_1} = \frac{1}{3!} (a_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{j_1} + a_{i_1 i_2 i_4 i_3}^{j_1} +$$
$$+ a_{i_1 i_3 i_2 i_4}^{j_1} + a_{i_1 i_3 i_4 i_2}^{j_1} + a_{i_1 i_4 i_3 i_2}^{j_1} + a_{i_1 i_4 i_2 i_3}^{j_1}).$$

Операция альтернирования (альтернации) по группе $p$ ковариантных или контравариантных индексов производится следующим образом: транспонируем тензор, совершая всевозможные перестановки индексов выбранной группы. Получаем $p!$ тензоров. Далее складываем тензоры, полученные четными перестановками и из этого результата вычитаем тензоры, полученные нечетными перестановками, окончательный результат делим на $p!$. Полученный тензор обозначается заключением выбранной группы индексов в квадратные скобки. В результате альтернирования тензора $a_{ij}$ получаем $a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$. Альтернирование тензора $a^{j_1}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$, по индексам $i_1$, $i_2$, $i_3$:

$$a^{j_1}_{[i_1 i_2 i_3] i_4}=\frac{1}{3!}(a^{j_1}_{i_1 i_2 i_3 i_4}+a^{j_1}_{i_3 i_1 i_2 i_4}+$$
$$+a^{j_1}_{i_2 i_3 i_1 i_4}-a^{j_1}_{i_2 i_1 i_3 i_4}-a^{j_1}_{i_3 i_2 i_1 i_4}-a^{j_1}_{i_1 i_3 i_2 i_4}).$$

Тензор называют кососимметрическим по нескольким одноименным индексам, если он умножается на $-1$ при транспонировании любых двух из этих индексов. Примером кососимметрического тензора может быть тензор типа $(0,2)$, координаты которого образуют кососимметрическую матрицу $a_{ij}=-a_{ji}$, т. е. матрицу вида $\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, или тензор типа $(0,3)$, координаты которого обладают свойством

$$a_{ijk}=a_{jki}=a_{kij}=-a_{jik}=-a_{kji}=-a_{ikj}.$$

В результате альтернирования получают кососимметрический тензор по индексам, участвующим в альтернации.

## 29.11. Тензоры в евклидовом пространстве

В евклидовом пространстве $E_n$ введено скалярное произведение двух векторов – билинейная форма. Иначе говоря, евклидово пространство – это линейное пространство, в котором определен тензор типа $(0,2)$. Если $\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{y}=y^j\mathbf{e}_j$, то $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(x^i\mathbf{e}_i\cdot y^j\mathbf{e}_j)=x^i y^j(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)=g_{ij}x^i y^j$, где $g_{ij}=(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)=(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i)=g_{ji}$. Симметричный тензор $g_{ij}$ называют метрическим. В результате свертывания тензоров $g_{ij}$ и $x^i$ получают числа – ковариантные координаты вектора $\mathbf{x}$: $g_{ij}x^i=x_j$. Ковариантные координаты – это проекции вектора $\mathbf{x}$ на базисные векторы, так как $\mathbf{x}_i=g_{ij}\mathbf{x}^j=(\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)x^j=(\mathbf{e}_i\cdot x^j\mathbf{e}_j)$, т. е. $x_i=\mathbf{x}\mathbf{e}_i$. Дважды контравариантный тензор $g^{ij}$ с матрицей, обратной матрице тензора $g_{ij}$, называют контравариантным метрическим тензором. Любой одновалентный ковариантный тензор $x_j$ путем свертывания с тензором $g^{ij}$ можно преобразовать в контравариантный $g^{ij}x_j=x^i$. Операцию перехода от контравариантных координат вектора к его ковариантным координатам называют операцией «опускания индекса», а операцию перехода от ковариантных координат к контравариантным – операцией «поднятия индекса». Операцию опускания или поднятия индекса в евклидовом пространстве применяют к тензорам любой структуры.

Если базис ортонормирован, то нет необходимости различать ковариантные и контравариантные тензоры, так как матрица (29.16) получена в этом случае транспонированием матрицы (29.15) и во всех преобразованиях участвуют лишь элементы матрицы (29.15). В этом базисе $x_i = x^i$.

Примером двухвалентного тензора является тензор деформации, который определяет положение точек тела после деформации по отношению к их положению до деформации. Если $x_1, x_2, x_3$ – декартовы прямоугольные координаты точки тела до деформации, $u_1, u_2, u_3$ – координаты вектора перемещения и деформация мала, то координаты тензора деформации имеют вид $u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ и матрица этого тензора

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

## 29.12. Тензорное поле

Если каждой точке $M$ области $V \subset E_n$ поставлен в соответствие тензор одного и того же типа, то говорят, что в области $V$ задано тензорное поле. При переходе от одной системы координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ к другой $(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'})$ базисные векторы преобразуются следующим образом: $\mathbf{e}_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_i$. Поле тензора валентности $p+q$ определяется в каждой системе координат $n^{p+q}$ функциями точки $a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}(M)$, которые при переходе к другой системе координат преобразуются по закону

$$a_{i_{1'} i_{2'} \ldots i_{q'}}^{j_{1'} j_{2'} \ldots j_{p'}} = \frac{\partial x^{j_{1'}}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial x^{j_{2'}}}{\partial x^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{j_{p'}}}{\partial x^{j_p}} a_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{j_1 j_2 \ldots j_p}.$$

Чтобы определить изменение тензора при переходе от одной точки к другой, надо учитывать не только изменение компонент тензора, но и изменение локального базиса. Например, для контравариантного векторного поля $u^j$ приращение векторного поля (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) равно

$$Du^j = du^j + \Gamma^j_{ik} u^i dx^k, \qquad (29.21)$$

$\Gamma^j_{ik}$ – символы Кристоффеля:

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2} g^{jm} \left( \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right).$$

Слагаемое $du^j$ в (29.21) учитывает зависимость координат приращения тензора от приращения его координат, а слагаемое $\Gamma^j_{ik} u^i dx^k$ учитывает зависимость компонент приращения тензора от изменения системы координат при переходе от точки к точке.

Вектор $Du^j$ называют ковариантным или абсолютным дифференциалом векторного поля. Ковариантной или абсолютной производной этого поля называют совокупность величин

$$\nabla_l u^j = \frac{\partial u^j}{\partial x^l} + \Gamma^j_{il} u^i.$$

Аналогично вводят ковариантную производную ковариантного векторного поля

$$\nabla_l u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x^l} - \Gamma^i_{jl} u_i.$$

Для тензорного поля $u_i^j$ ковариантная производная вычисляется по формуле

$$\nabla_l u_i^j = \frac{\partial u_i^j}{\partial x^l} + \Gamma^j_{il} u^i - \Gamma^i_{jl} u^j.$$

Так же определяется ковариантная производная для тензорного поля любой структуры. Ковариантная производная тензорного поля – тензорное поле, ковариантная валентность которого на единицу выше исходного поля.

Абсолютный дифференциал любого тензорного поля $\mathrm{T} : D\mathrm{T} = \nabla_l \mathrm{T} dx^l$.

В прямоугольных системах координат $\Gamma^j_{il} = 0$ и ковариантное дифференцирование переходит в обычное.

Ковариантное дифференцирование перестановочно со свертыванием. Правила ковариантного дифференцирования для суммы и произведения тензоров совпадают с правилами обычного дифференцирования.

# V
# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

*Глава 30*

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

### 30.1. Отделение корней уравнения

Корнем уравнения

$$f(x)=0 \tag{30.1}$$

называется такое значение $x=\xi$ аргумента функции $f(x)$, при котором это уравнение обращается в тождество: $f(\xi)=0$. Корень уравнения (30.1) геометрически представляет собой абсциссу точки пересечения, касания или другой общей точки графика функции $u=f(x)$ и оси $Ox$ (рис. 30.1, *а* – *в*).

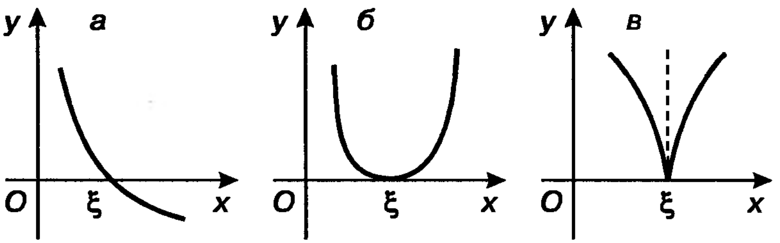


Рис. 30.1

Отделить корень уравнения – значит найти такой конечный промежуток, внутри которого имеется единственный корень данного уравнения. Отделение корней уравнения (30.1) можно выполнить графически, построив график функции $y=f(x)$, по которому можно судить о том, в каких промежутках находятся точки пересечения его с осью $Ox$. В некоторых случаях целесообразно представить уравнение (30.1) в эквивалентном виде:

$$f_1(x)=f_2(x) \tag{30.2}$$

с таким расчетом, чтобы графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ строились по возможности проще. Корень уравнения (30.2) представляет собой абсциссу точки пересечения графиков $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$. Таким способом можно, например, найти корни уравнения $x^3+px+q=0$; это будут абсциссы точек пересечения прямой $y=-px-q$ и линии $y=x^3$.

Для отделения корней уравнения (30.1) применяют следующий критерий: если на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ непрерывна и монотонна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на этом отрезке имеется один и только один корень уравнения. Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке является сохранение знака ее первой производной (если $f'(x)>0$, то функция возрастает; если $f'(x)<0$, функция убывает).

Пример 30.1. Отделить корни уравнения $x^3+x-4=0$.

В данном случае $f(x)=x^3+x-4$, $f'(x)=3x^2+1$. Так как $f'(x)>0$ при всех $x$, то функция $f(x)$ возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Корень считается отделенным, если указан конечный промежуток $(a, b)$, на котором он находится. Методом проб находим отрезок $[a, b]$, для которого $f(a)\,f(b)<0$. Для этого вычислим значения функции при некоторых значениях аргумента: $f(0)=-4<0$, $f(1)=1+1-4=-2<0$; $f(2)=2^3+2-4=6>0$. Поскольку $f(0)\,f(1)>0$, то на отрезке $[0, 1]$ корня нет; так как $f(1)\,f(2)<0$, то корень уравнения находится на отрезке $[1, 2]$.

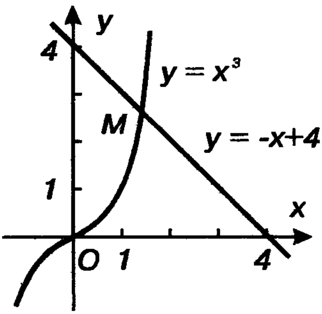

Рис. 30.2

Замечание 1. Можно указать отрезок меньшей длины, которому принадлежит корень. Взяв середину отрезка $[1, 2]$, т.е. положив $x=1{,}5$, получим $f(1{,}5)=1{,}5^3+ +1{,}5-4=0{,}875>0$; значит, корень находится на отрезке $[1; 1{,}5]$. Этот процесс можно продолжать.

Замечание 2. Корень данного уравнения можно отделить и графически. Придадим уравнению вид $x^3=-x+4$, т.е. вид (30.2), и построим графики функций $y=x^3$, $y=-x+4$ (рис. 30.2). Эти графики пересекаются в точке $M$, абсцисса которой принадлежит интервалу $(1, 2)$.

## 30.2. Метод хорд

Метод хорд, или метод секущих, приближенного решения уравнения (30.1) имеет следующую геометрическую иллюстрацию: вместо точки пересечения оси $Ox$ и графика функции $f(x)$, входящей в это уравнение, рассматривается точка пересечения данной оси и отрезка прямой, соединяющей концы дуги графика (рис. 30.3).

Если известно $(n-1)$-е приближение, то $n$-е вычисляется по формуле

$$x_n=\frac{bf(x_{n-1})-x_{n-1}f(b)}{f(x_{n-1})-f(b)} \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{30.3}$$

в случае (рис. 30.3, *а*, *б*), когда

$$f(b)\,f''(x) > 0, \tag{30.4}$$

или по формуле

$$x_n = \frac{af(x_{n-1}) - x_{n-1}f(a)}{f(x_{n-1}) - f(a)} \tag{30.5}$$

в случае (рис. 30.3, *в*, *г*), когда

$$f(a)\,f''(x) > 0. \tag{30.6}$$

В первом случае за начальное приближение принимается $a$, т. е. $x_0 = a$, во втором – $b$, $x_0 = b$ (см. рис. 30.3).

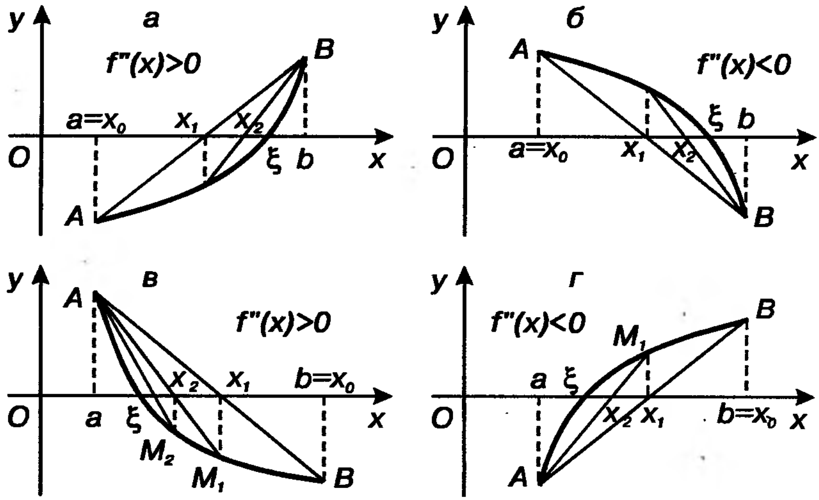


Рис. 30.3

Последовательность чисел $x_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ сходится к корню $\xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Вычисления приближений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ следует производить до тех пор, пока два последовательных приближения $x_n$, $x_{n+1}$ не совпадут на заданное число знаков. Для промежуточных выкладок надлежит брать один-два запасных знака.

Оценка абсолютной погрешности определяется формулой

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\mu}, \tag{30.7}$$

где $\mu = \min\limits_{a\le x\le b} |f'(x)|$, $f'(x) \ne 0$.

Пример 30.2. Методом хорд найти действительный корень уравнения $x^3+x-1=0$.

В данном случае $f(x)=x^3+x-1$, $f'(x)=3x^2+1$. Поскольку $f(0{,}5)<0$, $f(1)>0$, $f'(x)>0$ для всех $x$, то на отрезке $[0{,}5;1]$ находится единственный действительный корень уравнения. Так как $f''(x)=6x$ и $f(1)f''(x)>0$, т.е. выполнено неравенство (30.4), то пользуемся формулой (30.3), положив в ней $b=1$, $x_0=0{,}5$. Вычислим сначала $f(x_0)$, $f(b)$, входящие в эту формулу: $f(x_0)=f(0{,}5)=0{,}5^3+0{,}5-1=-0{,}375$; $f(b)=f(1)=1^3+1-1=1$. По формуле (30.3), полагая $n=1, 2$, вычисляем

$$x_1=\frac{bf(x_0)-x_0f(b)}{f(x_0)-f(b)}=\frac{1(-0{,}375)-0{,}5\cdot 1}{-0{,}375-1}\approx 0{,}636364;$$

$$x_2=\frac{bf(x_1)-x_1f(b)}{f(x_1)-f(b)}=\frac{1(-0{,}105935)-0{,}636364}{-0{,}105935-1}\approx 0{,}671196.$$

Аналогично вычисляем последующие приближения: $x_3=0{,}679662$, $x_4=0{,}681691$, $x_5=0{,}682176$, $x_6=0{,}682292$, $x_7=0{,}682319$, $x_8=0{,}682326$, $x_9=0{,}682327$. Следовательно, с точностью до 0,0001 получено значение корня $\xi=0{,}6823$.

## 30.3. Метод касательных

Метод касательных (или метод Ньютона) отличается от метода хорд тем, что здесь рассматривается не секущая, соединяющая концы дуги графика, а касательная к графику. Точка пересечения касательно с осью $Ox$ дает приближенное значение корня (рис. 30.4).

В методе касательных $(n+1)$-е приближение вычисляется по формуле

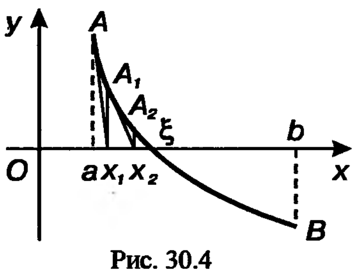


Рис. 30.4

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad (30.8)$$

в которой за нулевое приближение $x_0$ принимается такое значение из отрезка $[a, b]$, для которого выполняется условие

$$f(x_0)\,f''(x)>0. \qquad (30.9)$$

Оценка погрешности, как и в методе хорд, определяется формулой (30.7).

Пример 30.3. Методом касательных найти действительный корень уравнения $x^3+x-3=0$.

В данном случае $f(x)=x^3+x-3=0$, $f'(x)=3x^2+1$. Отделив корень уравнения, видим, что он принадлежит отрезку $[1,2; 1,3]$. В качестве начального приближения возьмем $x_0=1,25$ (середину этого отрезка); в точке $x_0=1,25$ выполняется условие (30.9), так как $f'(x)>0$ и $f(x_0)=f(1,25)>0$. Результаты вычислений, выполненных по формуле (30.8), заносим в табл. 30.1, из которой видно, что $\xi=1,21341$.

Таблица 30.1

| $n$ | $x_n$ | $x_n^3$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $f(x_n)/f'(x_n)$ | $x_{n+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,250000 | 1,953125 | 0,203125 | 5,687500 | 0,0357140 | 1,214286 |
| 1 | 1,214286 | 1,790452 | 0,004738 | 5,423470 | 0,0008740 | 1,213412 |
| 2 | 1,213412 | 1,786590 | 0,000002 | 5,417107 | 0,0000004 | 1,213412 |

## 30.4. Метод итераций

Если каким-либо способом получено приближенное значение $x_0$ корня уравнения (30.1), то уточнение корня можно осуществить методом последовательных приближений или методом итераций. Для этого уравнение (30.1) представляют в виде

$$x=\varphi(x), \tag{30.10}$$

что всегда можно сделать и притом многими способами, например

$$x=x+cf(x), \tag{30.11}$$

где $c$ – произвольная постоянная.

Пусть число $x_1$ есть результат подстановки $x_0$ в правую часть уравнения (30.10): $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, $x_3=\varphi(x_2), \ldots,$

$$x_n=\varphi(x_{n-1}). \tag{30.12}$$

Процесс последовательного вычисления чисел $x_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ по формуле (30.12) называется методом последовательных приближений или методом итераций. Процесс итераций сходится ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$), если выполнено условие

$$|\varphi'(x)|\le q<1 \tag{30.13}$$

на отрезке $[a, b]$, содержащем корень $\xi$.

Пример 30.4. Методом итераций найти действительный корень уравнения $x^3+x-3=0$.

Корень этого уравнения принадлежит отрезку $[1,2; 1,3]$. Данное уравнение можно записать так: $x=\varphi(x)$, где $\varphi(x)=3-x^3$; однако этим представлением пользоваться нельзя, поскольку $\max\limits_{1,2\le x\le 1,3}|\varphi'(x)|=\max|-3x^2|=5,07>1$, т.е. не выполнено условие (30.13).

В соответствии с формулой (30.11) получаем $\varphi(x)=x+cf(x)=x+$ $+c(x^3+x-3)$. Условие (30.13) будет выполнено, например при $c=-0{,}2$ $\varphi(x)=x-0{,}2(x^3+x-3)$, $\varphi'(x)=1-0{,}2(3x^2+1)$,

$$\max_{x\in[1,2;\,1,3]}|\varphi'(x)|=\max\left|1-0{,}2(3x^2+1)\right|=0{,}214<1.$$

Взяв в качестве $x_0$ любое значение $x$ из отрезка [1,2; 1,3], например $x_0=1{,}21$, проведем вычисления по формуле $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, где $\varphi(x_n)=x_n-$ $-0{,}2(x_n^3+x_n-3)$, $\varphi(x_n)=x_n-0{,}2f(x_n)$, и представим их в табл. 30.2, из которой видно, что $\xi=1{,}21341$ – корень уравнения.

Таблица 30.2

| $n$ | $x_n$ | $x_n^3$ | $f(x_n)$ | $\varphi(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,210000 | 1,771561 | – 0,018439 | 1,213688 |
| 1 | 1,213688 | 1,787810 | + 0,001498 | 1,213388 |
| 2 | 1,213388 | 1,786483 | – 0,000129 | 1,213414 |
| 3 | 1,213414 | 1,786599 | + 0,000013 | 1,213411 |
| 4 | 1,213411 | 1,786585 | – 0,000004 | 1,213412 |

## 30.5. Метод Чебышева

Если $\alpha$ – приближенное значение корня уравнения $f(x)=0$, то уточнение этого значения можно осуществить по формуле Чебышева:

$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^2\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^3\left(\frac{f''(\alpha)}{2(f'(\alpha))^2}-\frac{f'''(\alpha)}{6f'(\alpha)}\right)-$$

$$-\left(\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^4\left(\frac{5(f''(\alpha))^3}{8(f'(\alpha))^3}-\frac{5f''(\alpha)f'''(\alpha)}{12(f'(\alpha))^2}+\frac{f^{(\mathrm{IV})}(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)-\dots \qquad (30.14)$$

Замечание. Если в этом разложении ограничится двумя членами, то получим формулу (30.8), т. е. метод Ньютона является частным случаем метода Чебышева.

Пример 30.5. Методом Чебышева найти действительный корень уравнения $x^3+8x-6=0$.

Корень уравнения принадлежит интервалу $(0,1)$. Взяв $\alpha=x_0=0{,}5$, по формуле (30.14) вычислим $x_1=0{,}705868$. Применив эту формулу снова, при $x_1=0{,}705868$ получим $x_2=0{,}706011$. Аналогично находим $x_3=0{,}706011$. Следовательно, $\xi=0{,}706011$ – корень уравнения.

*Глава 31*

# ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

## 31.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяционным многочленом Лагранжа называется многочлен

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \qquad (31.1)$$

Этот многочлен удовлетворяет условиям $P_n(x_k)=y_k$, $k=0,1,2,\dots,n$, где $x_k$ – узлы (или полюсы) интерполяции, $y_k$ – заданные числа.

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула

$$f(x)\approx\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}. \qquad (31.2)$$

Формулы (31.1) и (31.2) можно записать так:

$$P_n(x)=\omega(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)};\quad f(x)\approx\omega(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{y_k}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)},$$

где

$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \qquad (31.3)$$

$$\omega'(x)=(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n).$$

Производя интерполирование функции $f(x)$ по формуле Лагранжа (31.2), заменяют эту функцию полиномом $P_n(x)$, совпадающим с ней в $n+1$ данных точках отрезка $[a, b]$. В остальных точках этого отрезка разность $R_n=f(x)-P_n(x)$ отлична от нуля и представляет собой погрешность метода. Эта разность, называемая остаточным членом интерполяции, определяется формулой

$$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega(x)}{(n+1)!},$$

в которой $\omega(x)$ выражается равенством (31.3), $\xi$ – точка промежутка $[a, b]$, зависящая от $x$.

Пример 31.1. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа, который в точках $x_0=-3$, $x_1=-1$, $x_2=2$ принимает соответственно значения $y_0=-5$, $y_1=-11$, $y_2=10$.

При $n=2$ формула (31.1) имеет вид

$$P_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Подставляя в эту формулу заданные значения, находим

$$P_2(x) = -5\frac{(x+1)(x-2)}{(-3+1)(-3-2)} - 11\frac{(x+3)(x-2)}{(-1+3)(-1-2)} + 10\frac{(x+3)(x+1)}{(2+3)(2+1)},$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + \frac{11}{6}(x^2 + x - 6) + \frac{2}{3}(x^2 + 4x + 3) =$$

$$= \frac{1}{6}[-3(x^2 - x - 2) + 11(x^2 + x - 6) + 4(x^2 + 4x + 3)] = \frac{1}{6}(12x^2 + 30x - 48).$$

Итак, $P_2(x) = 2x^2 + 5x - 8$.

Пример 31.2. Найти интерполяционный многочлен Лагранжа $P_3(x)$, для которого $P_3(-1) = -11$, $P_3(1) = -3$, $P_3(2) = 1$, $P_3(3) = 13$.

В данном случае $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $y_0 = -11$, $y_1 = -3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 13$. При $n = 3$ формула (31.1) принимает вид

$$P_3(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Подставляя в эту формулу данные значения, получаем

$$P_3(x) = -11\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} - 3\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} +$$

$$+1\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} + 13\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} =$$

$$= -11\frac{(x^2-3x+2)(x-3)}{-24} - 3\frac{(x^2-x-2)(x-3)}{4} + \frac{(x^2-1)(x-3)}{-3} +$$

$$+13\frac{(x^2-1)(x-2)}{8} = \frac{11}{24}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) - \frac{3}{4}(x^3 - 4x^2 + x + 6) -$$

$$-\frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - x + 3) + \frac{13}{8}(x^3 - 2x^2 - x + 2) = x^3\left(\frac{11}{24} - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{13}{8}\right) +$$

$$+x^2\left(-\frac{11}{4} + 3 + 1 - \frac{13}{4}\right) + x\left(\frac{121}{24} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{13}{8}\right) +$$

$$+\left(-\frac{11}{4} - \frac{18}{4} - 1 + \frac{13}{4}\right) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5.$$

Следовательно, $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

Термин «интерполяция» впервые употребил Д. Валлис (1656) при составлении астрономических и математических таблиц.

## 31.2. Разности различных порядков. Разделенные разности

Рассмотрим значения $y_i = f(x_i)$ функции $y = f(x)$ в точках $x_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$): $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$ Выделим всевозможные пары соседних значений: $(y_0, y_1)$, $(y_1, y_2)$, $(y_2, y_3), \ldots$ и в каждом случае вычтем предыдущее значение из последующего, получим разности: $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2, \ldots, y_n - y_{n-1}, \ldots$ Эти разности называют конечными разностями первого порядка или просто первыми разностями. Обозначения первых разностей:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}, \tag{31.4}$$

или

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Разностями второго порядка или вторыми разностями называют разности первых разностей $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_n, \ldots$ Обозначают вторые разности через $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2, \tag{31.5}$$

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1},\ \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n.$$

Разности третьего порядка (или третьи разности) определяются и обозначаются следующим образом:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \ldots, \Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n \ldots$$

Аналогично определяются последующее разности. Разности $(n+1)$-го порядка получаются из разностей $n$-го порядка по формулам

$$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0,\ \Delta^{n+1} y_1 = \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1, \ldots \tag{31.6}$$

Таблица разностей различных порядков строится согласно схеме (табл. 31.1).

Таблица 31.1

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ | $\Delta^5 y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | | | | | |
| | | $\Delta y_0$ | | | | |
| $x_1$ | $y_1$ | | $\Delta^2 y_0$ | | | |
| | | $\Delta y_1$ | | $\Delta^3 y_0$ | | |
| $x_2$ | $y_2$ | | $\Delta^2 y_1$ | | $\Delta^4 y_0$ | |
| | | $\Delta y_2$ | | $\Delta^3 y_1$ | | $\Delta^5 y_0$ |
| $x_3$ | $y_3$ | | $\Delta^2 y_2$ | | $\Delta^4 y_1$ | |
| | | $\Delta y_3$ | | $\Delta^3 y_2$ | | $\vdots$ |
| $x_4$ | $y_4$ | | $\Delta^2 y_3$ | | $\vdots$ | |
| | | $\Delta y_4$ | | $\vdots$ | | |
| $x_5$ | $y_5$ | | $\vdots$ | | | |
| | | $\vdots$ | | | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | | | |

Каждое число из этой таблицы (начиная с третьего столбца) является разностью двух смежных чисел столбца слева (из нижнего числа вычитается верхнее; разность записывается в следующем столбце между этими числами). Третий столбец содержит первые разности, четвертый – вторые и т. д.

Для контроля вычислений при составлении таблицы разностей пользуются следующим утверждением: сумма чисел в каждом столбце разностей равна разности крайних чисел предыдущего столбца.

Разделенные разности первого порядка определяются формулами

$$f(x_1,x_0)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\ f(x_2,x_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ldots,f(x_n,x_{n-1})=\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}. \qquad (31.7)$$

Разделенные разности второго порядка получаются из разделенных разностей первого порядка по формулам

$$f(x_2,x_1,x_0)=\frac{f(x_2,x_1)-f(x_1,x_0)}{x_2-x_0},\ f(x_3,x_2,x_1)=\frac{f(x_3,x_2)-f(x_2,x_1)}{x_3-x_1}. \qquad (31.8)$$

Аналогично определяются разделенные разности третьего порядка:

$$\begin{aligned} f(x_3,x_2,x_1,x_0)&=\frac{f(x_3,x_2,x_1)-f(x_2,x_1,x_0)}{x_3-x_0},\\ f(x_4,x_3,x_2,x_1)&=\frac{f(x_4,x_3,x_2)-f(x_3,x_2,x_1)}{x_4-x_1}. \end{aligned} \qquad (31.9)$$

Разделенные разности $n$-го порядка получаются из разностей $(n-1)$-го порядка по формулам

$$f(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1,x_0)=\frac{f(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)-f(x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0)}{x_n-x_0}. \qquad (31.10)$$

В случае равноотстоящих узлов с шагом $h$ $(x_k=x_0+kh)$ разделенные разности различных порядков имеют вид:

$$f(x_1,x_0)=\frac{\Delta y_0}{h},\ f(x_2,x_1)=\frac{\Delta y_1}{h},\ldots,f(x_n,x_{n-1})=\frac{\Delta y_{n-1}}{h}; \qquad (31.11)$$

$$\left.\begin{aligned} f(x_2,x_1,x_0)&=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},\ f(x_3,x_2,x_1)=\frac{\Delta^2 y_1}{2!h^2},\ldots;\\ f(x_n,x_{n-1},\ldots,x_0)&=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}. \end{aligned}\right\} \qquad (31.12)$$

Пример 31.3. Составить таблицу разностей различных порядков при следующих значениях $x$ и $y=f(x)$:

$$x_0=-3,\ x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=1,\ x_4=2,$$

$$y_0=62,\ y_1=12,\ y_2=2,\ y_3=6,\ y_4=32.$$

По формулам (31.4) находим первые разности: $\Delta y_0=y_1-y_0=12-62=-50$, $\Delta y_1=y_2-y_1=2-12=-10$, $\Delta y_2=y_3-y_2=6-2=4$, $\Delta y_3=y_4-y_3=32-6=26$. В соответствии с формулами (31.5) получаем разности второго порядка:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$=-10-(-50)=40, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$=4-(-10)=14, $\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 =$ =26-4=22. Аналогично находим разности третьего порядка: $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = 14 - 40 = -26$, $\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = 22 - 14 = 8$ и разность четвертого порядка $\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 = 8 - (-26) = 34$.

Полученные разности можно представить в виде табл. 31.2.

Таблица 31.2

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | 62 | | | | |
| | | $-50$ | | | |
| $-2$ | 12 | | 40 | | |
| | | $-10$ | | $-26$ | |
| $-1$ | 2 | | 14 | | 34 |
| | | 4 | | 8 | |
| 1 | 6 | | 22 | | |
| | | 26 | | | |
| 2 | 32 | | | | |
| $\Sigma$ | | $-30$ | 76 | $-18$ | |
| $S$ | $-30$ | 76 | $-18$ | | |

Замечание. Последние две строки служат для контроля вычислений: в строке $\Sigma$ числа равны суммам всех чисел, расположенным в соответствующем столбце, в строке $S$ – разности последнего и первого числа соответствующего столбца. Совпадение этих чисел ($\Sigma_1 = S_1$, $\Sigma_2 = S_2$, $\Sigma_3 = S_3$; в таблице – по диагонали) означает, что вычисления таблицы верны.

## 31.3. Интерполяционный многочлен Ньютона

Интерполяционным многочленом Ньютона называется многочлен

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) + \cdots$$

$$\cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f(x_0, x_1, \ldots, x_n), \tag{31.13}$$

в котором $f(x_0, x_1), \ldots, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ – разделенные разности различных порядков. Этот многочлен удовлетворяет условиям $y_k = f(x_k) = P_n(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Интерполяционной формулой Ньютона называется формула

$$f(x) \approx y_0 + (x - x_0)\, f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, f(x_0, x_1, x_2) + \cdots$$

$$\cdots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f(x_0, x_1, \ldots, x_n). \tag{31.14}$$

Замечание 1. Поскольку любой $k$-й член многочлена Ньютона зависит только от $k$ первых узлов интерполяции и от значений функции в этих узлах, добавление новых узлов вызывает в формуле (31.13) лишь добавление новых членов без изменения первоначальных. Это является существенным преимуществом многочлена Ньютона по сравнению с многочленом Лагранжа.

Замечание 2. В силу единственности интерполяционного многочлена $n$-й степени интерполяционный многочлен Ньютона перегруппировкой членов можно преобразовать в интерполяционный многочлен Лагранжа и обратно.

В случае равноотстоящих узлов интерполяции ($x_1 = x_0 + h,\quad x_2 = x_0 + {}$ $+2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$) из формулы (31.14) с учетом (31.12) получается интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования вперед»:

$$f(x) \approx y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+\frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \quad (31.15)$$

Формула (31.15) удобна при интерполировании функций для значений $x$, близких к наименьшему узлу $x_0$.

Интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования назад»:

$$f(x) \approx y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) +$$
$$+\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \cdots + \quad (31.16)$$
$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1).$$

Формула (31.16) удобна при интерполировании функций для значений $x$, близких к наибольшему узлу $x_n$.

Замечание 3. В формуле (31.15) в коэффициенты многочлена входят конечные разности различных порядков, принадлежащие верхней (нисходящей) строке таблицы разностей (см. табл. 31.1). В формуле (31.16) в коэффициенты многочлена входят разности различных порядков, принадлежащие нижней (восходящей) строке таблицы разностей.

Пример 31.4. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения: $f(1) = 6,\quad f(3) = 24,\quad f(4) = 45.$

В данном случае $x_0 = 1,\quad x_1 = 3,\quad x_2 = 4,\quad y_0 = 6,\quad y_1 = 24,\quad y_2 = 45.$ Отметим, что узлы не являются равноотстоящими (так как $x_1 - x_0 \neq x_2 - x_1$). Интерполяционный многочлен (31.13) при $n = 2$ с учетом равенств (31.11) принимает вид

$$P_2(x) = y_0 + (x-x_0)\,f(x_1, x_0) + (x-x_0)(x-x_1)\,f(x_2, x_1, x_0).$$

Вычисляем разделенные разности

$$f(x_1, x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{24-6}{3-1} = 9,\quad f(x_2, x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{45-24}{4-3} = 21,$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{21-9}{4-1} = 4.$$

Подставляя в выражение для $P_2(x)$ соответствующие значения, находим интерполяционный многочлен Ньютона $P_2(x) = 6 + 9\,(x-1) + 4\,(x-1)\times(x-3)$.

Замечание 4. Раскрывая скобки и группируя члены, получаем $P_2(x) = 4x^2 - 7x + 9$.

Пример 31.5. Найти интерполяционный многочлен Ньютона для функции $f(x) = 2^x$ по ее значениям в точках $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ и вычислить $f(-0{,}5)$ и $f(2{,}5)$.

Вычислим сначала значения функции в данных равноотстоящих узлах: $y_0 = f(x_0) = f(-1) = 2^{-1} = 0{,}5$, $y_1 = f(x_1) = f(0) = 2^0 = 1$, $y_2 = f(x_2) = f(1) = \; = 2$, $y_3 = f(x_3) = f(2) = 4$, $y_4 = f(x_4) = f(3) = 8$. Составим таблицу разностей различных порядков (табл. 31.3).

Таблица 31.3

| $x$ | $y$ | $\Delta y$ | $\Delta^2 y$ | $\Delta^3 y$ | $\Delta^4 y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $\underline{0{,}5}$ | | | | |
| 0 | 1 | $\underline{0{,}5}$ | | | |
| 1 | 2 | 1 | $\underline{0{,}5}$ | | |
| 2 | 4 | 2 | 1 | $\underline{0{,}5}$ | |
| 3 | $\underline{\underline{8}}$ | $\underline{\underline{4}}$ | $\underline{\underline{2}}$ | $\underline{\underline{1}}$ | $\underline{0{,}5}$ |

Числа, подчеркнутые одной чертой входят в интерполяционную формулу Ньютона для «интерполирования вперед». Многочлен в правой части формулы (31.15) в данном случае ($h = 1$) принимает вид

$$P_{\text{в}}(x) = 0{,}5 + 0{,}5\,(x+1) + \frac{0{,}5}{2!}(x+1)\,x +$$

$$+ \frac{0{,}5}{3!}(x+1)\,x\,(x-1) + \frac{0{,}5}{4!}(x+1)\,x\,(x-1)\,(x-2),$$

$$P_{\text{в}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)\,x +$$

$$+ \frac{1}{12}(x+1)\,x\,(x-1) + \frac{1}{48}(x+1)\,x\,(x-1)\,(x-2). \qquad \text{(I)}$$

С помощью этого многочлена вычислим значение функции $f(x) = 2^x$ при $x = -0{,}5$ (значение аргумента ближе к $x_0 = -1$). Подставляя значение $x = -0{,}5$ в формулу (I), находим

$$P_B\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{15}{48\cdot 16}=0{,}700.$$

Числа табл. 31.3, подчеркнутые двумя чертами (и число 0,5 в столбце $\Delta^4 y$), входят в интерполяционную формулу Ньютона для «интерполирования назад». Многочлен в правой части формулы (31.16) в данном случае принимает вид

$$P_н(x)=8+4(x-3)+\frac{2}{2!}(x-3)(x-2)+\frac{1}{3!}(x-3)(x-2)(x-1)+$$

$$+\frac{0{,}5}{4!}(x-3)(x-2)(x-1)x,$$

$$P_н(x)=8+4(x-3)+(x-3)(x-2)+\frac{1}{6}(x-3)(x-2)(x-1)+$$

$$+\frac{1}{48}(x-3)(x-2)(x-1)x. \qquad \text{(II)}$$

С помощью многочлена (II) вычислим значение данной функции $f(x)=2^x$ при $x=2{,}5$ (это значение аргумента ближе к $x_4=3$). Подставляя значение $x=2{,}5$ в формулу (II), получаем

$$P_н(2{,}5)=8+4(-0{,}5)+(-0{,}5)(0{,}5)+\frac{1}{6}(-0{,}5)\,0{,}5\cdot 1{,}5+$$

$$+\frac{1}{48}(-0{,}5)\,0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=8-2-0{,}25-\frac{1}{6}\cdot 0{,}375-$$

$$-\frac{1}{48}\cdot 0{,}9375=5{,}658;$$

$f(2{,}5)=2^{2{,}5}\approx 5{,}658$. Следовательно, $f(-0{,}5)=0{,}700$, $f(2{,}5)=5{,}658$.

Замечание 5. Многочлены (I) и (II) различаются лишь формой записи. Действительно, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем

$$P_в(x)=P_н(x)=\frac{1}{48}x^4+\frac{1}{24}x^3+\frac{11}{48}x^2+\frac{17}{24}x+1.$$

*Глава 32*

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

## 32.1. Формулы прямоугольников

Формулы прямоугольников имеют вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k = h\,(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}), \qquad (32.1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k = h\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n), \qquad (32.2)$$

где

$$h = (b-a)/n,\ \ y_k = f(x_k),\ \ x_k = a + kh\ \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \qquad (32.3)$$

Формула (32.1) называется формулой левых прямоугольников (рис. 32.1, а), формула (32.2) – формулой правых прямоугольников (рис. 32.1, б).

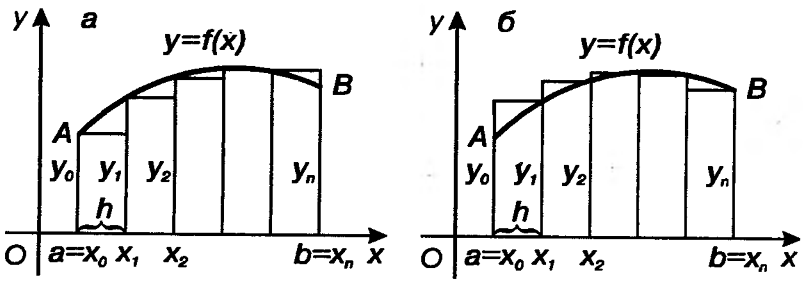


Рис. 32.1

Абсолютная погрешность метода прямоугольников определяется неравенством

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^2 M}{2n}, \qquad (32.4)$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f'(x)|$.

Пример 32.1. По формулам прямоугольников, приняв $n=4$, вычислить $\int\limits_1^9 \frac{dx}{x+2}$.

В данном случае $f(x)=1/(x+2)$, $a$=1, $b$=9. С помощью формул (32.3) находим

$$h=2,\ x_0=1,\ x_1=3,\ x_2=5,\ x_3=7,\ x_4=9\ \ (x_0=a=1, x_4=b=9);$$

$$y_0=f(x_0)=\frac{1}{x_0+2}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3},\ y_1=f(x_1)=\frac{1}{x_1+2}=\frac{1}{5},$$

$$y_2=f(x_2)=\frac{1}{7},\ y_3=f(x_3)=\frac{1}{9},\ y_4=f(x_4)=\frac{1}{11}.$$

По формулам (32.1) и (32.2) получаем

$$I_л=h(y_0+y_1+y_2+y_3)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)=1{,}57046,$$

$$I_п=h(y_1+y_2+y_3+y_4)=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\right)=1{,}0753.$$

Пример 32.2. На сколько частей следует разбить промежуток интегрирования, чтобы с точностью до 0,1 вычислить $\int\limits_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$?

Абсолютная погрешность при вычислении определенного интеграла по методу прямоугольников определяется формулой (32.4). Если ставится задача, чтобы $|R_n(f)|\le\varepsilon$, т. е. $(b-a)^2 M/2n\le\varepsilon$, то $n\ge(b-a)^2 M/2\varepsilon$. В данном случае $a=2,\ b=7,\ \varepsilon=0{,}1$. Так как $f(x)=1/\sqrt{x+2}$, $f'(x)=-1/2\times\ 1/\sqrt{(x+2)^3}$, $M=\max\limits_{2\le x\le 7}|f'(x)|=1/16$, то $n\ge(7-2)^2(1/16)/2\cdot 0{,}1\approx 7{,}8$. Поскольку $n$ – целое число, можно принять $n$=8 (для удобства вычислений можно взять $n$ =10, так как $b$ - $a$ =5 ).

## 32.2. Формула трапеций

Формула трапеций имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right), \tag{32.5}$$

где $h=(b-a)/n,\ x_k=a+kh\ \ y_k=f(x_k),\ (k=0,1,2,\ldots,n)$.

Правая часть этой формулы выражает площадь фигуры, состоящей из трапеций, высота каждой из которых равна $h$ (рис. 32.2). Если $R_n$ – остаточный член приближенной формулы (32.5), то

$$|R_n|\le(b-a)^3 M/12n^2, \tag{32.6}$$

где $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$.

**Пример 32.3.** Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ по формуле трапеций, приняв $n=5$.

В данном случае по расчетной формуле $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, \dots, 5)$, где $h = (1-0)/5 = 0{,}2$, получаем $x_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$, $x_5 = 1$. Так как $y = 1/(1+x)$, то $y_k = 1/(1+x_k)$ $(k = 0, 1, \dots, 5)$. Находим значение $y_k$: $y_0 = 1/(1+x_0) = 1$, $y_1 = 1/(1+x_1) = 1/1{,}2 = 0{,}833$, $y_2 = 1/(1+x_2) = 1/1{,}4 = 0{,}714$, $y_3 = 0{,}625$, $y_4 = 0{,}556$, $y_5 = 0{,}500$.

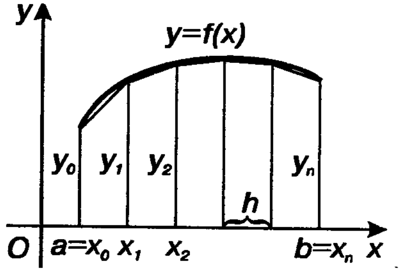


Рис. 32.2

По формуле (32.5) получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}2\,(\,0{,}500 + 0{,}833 + 0{,}714 + 0{,}625 + 0{,}556 + 0{,}250\,) = 0{,}696$$

**Пример 32.4.** На сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x\,(\ln x - 1)\,dx$ с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}1$, $\varepsilon_2 = 0{,}01$?

Для определения числа $n$ отрезков, на которые нужно разбить промежуток интегрирования, воспользуемся формулой (32.6). Неравенство $|R_n| < \varepsilon$ будет выполнено, если $(b-a)^3 M/12n^2 \le \varepsilon$, откуда $n \ge \sqrt{(b-a)^3 M/12\varepsilon}$. Поскольку $f(x) = x\,(\ln x - 1)$, $f'(x) = \ln x$, $f''(x) = 1/x$, $M = \max\limits_{1 \le x \le 4}(1/x) = 1$, то $n_1 \ge \sqrt{(4-3)^3 \cdot 1/12 \cdot 0{,}1} = \sqrt{22{,}5}$, $n_1 = 5$. Аналогично находим $n_2 = 15$.

## 32.3. Формула парабол

Формула парабол (или формула Симпсона) имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\,(y_0 + 4\,(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + \dots\, y_{2n-2}) + y_{2n}), \qquad (32.7)$$

где

$$h = (b-a)/2n,\ \ x_k = a + kh,\ \ y_k = f(x_k)\ \ (k = 0, 1, \dots, 2n). \qquad (32.8)$$

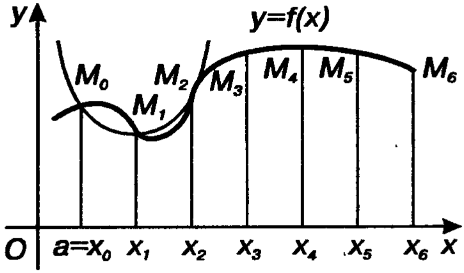


Рис. 32.3

Правая часть формулы (32.7) выражает площадь фигуры, составленной из параболических трапеций $x_0M_0M_2x_2$, $x_2M_2M_4x_4$ и т.д. (рис. 32.3). Дуга $M_0M_1M_2$ графика подынтегральной функции здесь заменена дугой параболы, проходящей через точки $M_0, M_1, M_2$. Аналогичная замена произведена и для остальных дуг.

Для остаточного члена формулы (32.7) выполняется неравенство

$$\left|R_n\right| \le (b-a)^5 M \big/ 180\,(2n)^4 , \tag{32.9}$$

где $M = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f^{(\mathrm{IV})}(x) \right|$.

Пример 32.5. По формуле парабол вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$, приняв $2n=8$.

По первой из формул (32.8) находим $h=(b-a)/2n=(1-0)/8=0{,}125$. Составляем таблицу значений $y_k = f(x_k) = 1/(x_k^2+1)$ (табл. 32.1). В последней строке этой таблицы стоят числа, равные суммам чисел, находящихся в соответствующих столбцах.

Таблица 32.1

| $k$ | $x_k$ | $x_k^2+1$ | $y_0, y_{2n}$ | $y_k$ ($k$ нечетное) | $y_k$ ($k$ четное) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1,00000 | 1,0 | | |
| 1 | 0,125 | 1,01563 | | $y_1=0{,}98461$ | |
| 2 | 0,250 | 1,06250 | | | $y_2=0{,}94118$ |
| 3 | 0,375 | 1,14063 | | $y_3=0{,}87670$ | |
| 4 | 0,500 | 1,25000 | | | $y_4=0{,}80000$ |
| 5 | 0,625 | 1,39063 | | $y_5=0{,}71910$ | |
| 6 | 0,750 | 1,56250 | | | $y_6=0{,}64000$ |
| 7 | 0,875 | 1,76563 | | $y_7=0{,}56637$ | |
| 8 | 1,000 | 2,00000 | 0,5 | | |
| Σ | | | 1,5 | 3,14678 | 2,38118 |

По формуле (32.7) получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6) + y_8\right] =$$

$$= \frac{1}{24}(1 + 4\cdot 3{,}14678 + 2\cdot 2{,}38118 + 0{,}5) = \frac{1}{24}(1 + 12{,}58712 +$$

$$+4{,}76236 + 0{,}5) = 0{,}785395.$$

## 32.4. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью рядов

Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то соответствующий определенный интеграл можно вычислить с заданной точностью.

Пример 32.6. Вычислить интеграл $\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,00001.

Разделив почленно ряд для $\sin x$ на $x$, получим

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Интегрируя этот ряд почленно (это возможно, так как пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости данного ряда), получаем

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{1/4} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right) dx =$$

$$= x\Big|_0^{1/4} - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\Bigg|_0^{1/4} + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\Bigg|_0^{1/4} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}\Bigg|_0^{1/4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 3!}\frac{1}{4^3} + \frac{1}{5\cdot 5!}\frac{1}{4^5} - \frac{1}{7\cdot 7!}\frac{1}{4^7} + \ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, находим

$$\int_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 3! 4^3} \approx 0{,}25000 - 0{,}00087 = 0{,}24913.$$

Погрешность не превзойдет первого отброшенного члена:

$$\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 4^5}=\frac{1}{5\cdot 120\cdot 1024}=\frac{1}{614400}<\frac{1}{100000}.$$

Пример 32.7 Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до 0,001.

Подынтегральная функция разлагается в степенной ряд

$$\sqrt{1+x^3}=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{16}x^9-\frac{5}{128}x^{12}+\ldots\ (|x|<1)$$

Интегрируя этот ряд почленно в промежутке $[0, 1/2]$, находим

$$\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx=\left(x+\frac{x^4}{8}-\frac{x^7}{56}+\frac{x^{10}}{160}-\frac{5x^{13}}{1664}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\frac{1}{2^4}-\frac{1}{56}\frac{1}{2^7}+\frac{1}{160}\frac{1}{2^{10}}-\frac{5}{1664}\frac{1}{2^{13}}+\ldots$$

Поскольку $1/56\cdot 2^7=1/56\cdot 128=1/7168<0{,}001$, то для вычисления данного интеграла с указанной точностью достаточно взять два первых члена полученного ряда, т.е.

$$\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{128}=0{,}508.$$

*Глава 33*

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 33.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Решения многих дифференциальных уравнений не выражаются в элементарных функциях. В этих случаях пользуются приближенными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является представление решения уравнения в виде степенного ряда; сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому решению. Указанный степенной ряд находят способом неопределенных коэффициентов или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена).

Способ неопределенных коэффициентов особенно удобен в применении к линейным уравнениям, т. е. уравнениям вида

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=f(x),$$

и состоит в следующем. Если все коэффициенты $p_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ этого уравнения и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $(x-a)$, сходящиеся в интервале $(a-h,a+h)$, то искомое решение $y=f(x)$ также представляется степенным рядом

$$y(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots+C_n(x-a)^n+\cdots,$$

сходящимся в этом же интервале. Подставляя в уравнение функцию $y(x)$ и ее производные, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях $(x-a)$. Из полученных при этом уравнений и заданных начальных условий находят коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \ldots$

Способ основанный на применение ряда Тейлора (Маклорена), заключается в последовательном дифференцировании данного уравнения. Это дает возможность найти значения производных, входящих в выражения для коэффициентов ряда

$$y(x)=y(a)+y'(a)(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots,$$

являющегося решением уравнения.

П р и м е р 33.1. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего условию $y = 1/2$ при $x = 0$.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(IV)}(0)}{4!}x^4 + \cdots \qquad \text{(I)}$$

Найдем выражения для трех последующих производных, дифференцируя данное уравнение $y' = x^2 + y^2$:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', \quad y^{(IV)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy'''.$$

Вычислим значения этих производных при $x = 0$, принимая во внимание начальное условие $y(0) = 1/2$:

$$y'(0) = 0 + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad y''(0) = 2 \cdot 0 + 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$y'''(0) = 2 + 2\frac{1}{16} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{19}{8}, \quad y^{(IV)}(0) = \frac{11}{4}.$$

Подставляя эти значения в формулу (I), получаем

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \cdots$$

П р и м е р 33.2. С помощью степенного ряда проинтегрировать уравнение $(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2$.

Пусть $y = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots$, тогда

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + 5C_5x^4 + \cdots,$$

$$y'' = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + \cdots$$

Подставляя выражения для $y, y', y''$ в данное уравнение, получаем

$$(1-x)(2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 3 \cdot 4C_4x^2 + 4 \cdot 5C_5x^3 + \cdots) + x(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 +$$

$$+ 5C_5x^4 + \cdots) - (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + \cdots) = x^2 - 2x + 2$$

или

$$(2C_2 - C_0) + (2 \cdot 3C_3 - 2C_2 + C_1 - C_1)x + (3 \cdot 4C_4 - 2 \cdot 3C_3 + 2C_2 - C_2)x^2 +$$

$$+ (4 \cdot 5C_5 - 3 \cdot 4C_4 + 3C_3 - C_3)x^3 + (5 \cdot 6C_6 - 4 \cdot 5C_5 + 4C_4 - C_4)x^4 + \cdots =$$

$$= x^2 - 2x + 2.$$

Так как $y$ – решение уравнения, то последнее равенство выполняется тождественно; коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях равенства равны между собой:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 2C_2 - C_0 = 2, \\
x^1 & 2\cdot 3C_3 - 2C_2 = -2, \\
x^2 & 3\cdot 4C_4 - 2\cdot 3C_3 + C_2 = 1, \\
x^3 & 4\cdot 5C_5 - 3\cdot 4C_4 + 2C_3 = 0, \\
x^4 & 5\cdot 6C_6 - 4\cdot 5C_5 + 3C_4 = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^n & (n+1)(n+2)\,C_{n+2} - n\,(n+1)\,C_{n+1} + (n-1)\,C_n = 0, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Решая эту систему, находим

$$C_2 = \frac{2+C_0}{2} = 1 + \frac{C_0}{2},\ C_3 = \frac{C_0}{3!},\ C_4 = \frac{C_0}{4!},\ C_5 = \frac{C_0}{5!},\ C_6 = \frac{C_0}{6!}, \ldots$$

Таким образом, все коэффициенты, начиная с $C_2$, выражены через коэффициент $C_0$, который остается произвольным; остается произвольным и $C_1$ (этот коэффициент не входит в полученную систему). Следовательно, искомое решение представляется рядом

$$y = C_0 + C_1 x + \left(1 + \frac{C_0}{2}\right)x^2 + \frac{C_0}{3!}x^3 + \frac{C_0}{4!}x^4 + \frac{C_0}{5!}x^5 + \frac{C_0}{6!}x^6 + \cdots,$$

сходящимся при всех $x$. Это решение является общим:

$$y = C_0\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + (C_1 - C_0)\,x + x^2,\ \ y = C_0 e^x + C'x + x^2,$$

где $C_1 - C_0 = C'$ – произвольная постоянная.

Пример 33.3. Найти первые пять членов разложения в ряд частного решения уравнения $y'' - 2y' + y = e^x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=0, y'(0)=1$.

Пусть искомое решение представляется сходящимся степенным рядом $y(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + \cdots$ Дважды дифференцируя этот ряд в его интервале сходимости, получаем

$$y'(x) = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + 4C_4 x^3 + 5C_5 x^4 + \cdots,$$

$$y''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3C_3 x + 3\cdot 4C_4 x^2 + 4\cdot 5C_5 x^3 + \cdots$$

При $x=0$ имеем $y(0)=C_0$, $y'(0)=C_1$; принимая во внимание начальные условия $y(0)=0$, $y'(0)=1$, находим два первых коэффициента разложения для $y(x)$: $C_0=0$, $C_1=1$. Подставив в данное дифференциальное уравнение выражения для $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ и разложение в ряд функции $e^x$, получим

$$2C_2+2\cdot 3C_3x+3\cdot 4C_4x^2+4\cdot 5C_5x^3+\cdots-2(1+2C_2x+3C_3x^2+4C_4x^3+$$

$$+5C_5x^4+\cdots)+x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4+C_5x^5+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,$$

или

$$(2C_2-2)+(2\cdot 3C_3-4C_2+1)x+(3\cdot 4C_4-2\cdot 3C_3+C_2)x^2+(4\cdot 5C_5-2\cdot 4C_4+$$

$$+C_3)x^3+(5\cdot 6C_6-2\cdot 5C_5+C_4)x^4+\cdots=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях этого равенства, получаем систему уравнений для определения коэффициентов $C_2$, $C_3$, $C_4,\ldots$:

$$2C_2-2=1,\ 2\cdot 3C_3-4C_2+1=1,\ 3\cdot 4C_4-2\cdot 3C_3+C_2=1/2,$$

$$4\cdot 5C_5-2\cdot 4C_4+C_3=1/3!,\ 5\cdot 6C_6-2\cdot 5C_5+C_4=1/4!,\ldots$$

Решая эту систему, находим $C_2=3/2$, $C_3=1$, $C_4=5/12$, $C_5=1/8,\ldots$ Таким образом, частное решение выражается формулой

$$y=x+\frac{3}{2}x^2+x^3+\frac{5}{12}x^4+\frac{1}{8}x^5.$$

## 33.2. Метод Эйлера

Пусть требуется решить задачу Коши: найти решение дифференциального уравнения

$$y'=f(x,y), \tag{33.1}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

При численном решении уравнения (33.1) задача ставится так: в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти приближения $y_k$ $(k=0,1,2,\ldots,n)$ для значений точного решения $y(x_k)$. Разность $\Delta x_k=x_{k-1}-x_k$ называется шагом сетки. Во многих случаях величину $\Delta x_k$ принимают постоянной $h$, тогда

$$x_k=x_0+kh\quad (k=0,1,2,\ldots,n). \tag{33.2}$$

Метод Эйлера основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле $\Delta y/\Delta x = f(x, y)$, где $\Delta y = y(x+h) - y(x)$; $\Delta x = (x+h) - x = h$.

Приближенное значение $y_k$ в точке $x_k = x_0 + kh$ вычисляется по формуле

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{33.3}$$

Пример 33.4. Методом Эйлера найти значения решения дифференциального уравнения $y' = 2x - y$, для которого $y(1) = 1$, в пяти точках отрезка $[1; 1{,}5]$, приняв $h = 0{,}1$.

По формулам (33.2) находим точки $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}1$, $x_2 = 1{,}2$, $x_3 = 1{,}3$, $x_4 = 1{,}4$, $x_5 = 1{,}5$. Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условию данной задачи Коши, вычисляем по формуле (33.3). Результаты вычислений занесены в табл. 33.1.

Таблица 33.1

| $k$ | $y_k$ | $x_k$ | $2x_k$ | $f(x_k, y_k) = 2x_k - y_k$ | $hf(x_k, y_k) = 0{,}1(2x_k - y_k)$ | $y_{k+1} = hf(x_k, y_k) + y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,0000 | 1,0 | 2,0 | 1,0000 | 0,1000 | 1,1000 |
| 1 | 1,1000 | 1,1 | 2,2 | 1,1000 | 0,1100 | 1,2100 |
| 2 | 1,2100 | 1,2 | 2,4 | 1,1900 | 0,1190 | 1,3290 |
| 3 | 1,3290 | 1,3 | 2,6 | 1,2710 | 0,1271 | 1,4561 |
| 4 | 1,4561 | 1,4 | 2,8 | 1,3439 | 0,1344 | 1,5905 |
| 5 | 1,5905 | 1,5 | 3,0 | 1,4095 | 0,1410 | 1,7315 |

## 33.3. Метод Рунге – Кутта

Пусть требуется найти численное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Идея метода Рунге – Кутта состоит в представлении разности

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x) \tag{33.4}$$

в виде суммы поправок $k_j$ с коэффициентами $p_j$: $\Delta y = p_1 k_1 + p_2 k_2 + \cdots p_r k_r$, где $k_1 = hf(x, y)$, $k_2 = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1), \ldots, k_r = hf(x + \alpha_r h, y + \beta_{r1} k_1 + {} + \beta_{r2} k_2 + \cdots + \beta_{rr-1} k_{r-1})$.

Коэффициенты $p_j$, $\alpha_j$, $\beta_{ji}$ находят сравнением разложений $\Delta y$ и $k_i$ по степеням $h$. В случае $r = 4$ получаем

$$k_1 = hf(x, y),\ \ k_2 = hf(x + h/2,\ y + k_1/2),$$
$$k_3 = hf(x + h/2,\ y + k_2/2),\ \ k_4 = hf(x + h,\ y + k_3), \tag{33.5}$$

$$\Delta y = (1/6)\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{33.6}$$

При $x = x_0$ с помощью формул (33.4) – (33.6) находим

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \ \ (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{33.7}$$

где

$$\Delta y_i = (1/6)\,(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \tag{33.8}$$

$$k_1^i = hf(x_i, y_i),\ \ k_2^i = hf(x_i + h/2,\ y_i + k_1^i/2),$$
$$k_3^i = hf(x_i + h/2,\ y_i + k_2^i/2),\ \ k_4^i = hf(x + h,\ y_i + k_3^i). \tag{33.9}$$

Метод Рунге – Кутта – один из наиболее употребительных методов повышенной точности.

Пример 33.5. Методом Рунге – Кутта найти решение задачи Коши для уравнения $y' = y - x^2$, $y(1) = 0$, $x \in [1, 2]$ в первых пяти точках, взяв $h = 0{,}1$.

Поскольку в данном случае $f(x, y) = y - x^2$ и в силу условия $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, то $f(x_0, y_0) = y_0 - x_0^2 = 0 - 1 = -1$. По формулам (33.9) находим: $k_1^1 = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(-1) = -0{,}1$; $k_2^1 = 0{,}1f(1{,}05; -0{,}05) = 0{,}1[(-0{,}5) - (1{,}05)^2] = -0{,}1152$; $k_3^1 = 0{,}1f(1{,}05; -0{,}576) = 0{,}1[(-0{,}0576) - (1{,}05)^2] = -0{,}1160$; $k_4^1 = 0{,}1f(1{,}1; -0{,}1160) = 0{,}1[(-0{,}1160) - (1{,}1)^2] = -0{,}1326$. По формуле (33.8) вычислим $\Delta y_0/y = (1/6)[(-0{,}1) + 2(-0{,}1152) + 2(-0{,}1160) + (-0{,}1326)] = -0{,}1158$. Значение $y_1$ вычислим по формуле $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ (см. формулу (33.7) при $i = 0$): $y_1 = 0 + (-0{,}1158) = -0{,}1158$. Таким образом, получено приближенное значение решения $y_1 = -0{,}1158$ при $x_1 = 1{,}1$.

С помощью формул (33.9) при $i = 1$ найдем приближенное значение $y_2$ при $x_2 = 1{,}2$, решив новую задачу Коши для того же уравнения $y' = y - x^2$, $y(1{,}1) = -0{,}1158$.

Аналогично находим значения $y_3, y_4, y_5$. Результаты решения исходной задачи представлены в табл. 33.2, из которой следует, что $y_5 = y_4 + \Delta y_4 = -0{,}6981 + (-0{,}2944) = -0{,}9925$.

Таблица 33.2

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $f(x_i, y_i) = y_i - x_i^2$ | $k_j = hf(x_i, y_i)$ | $p_j$ | $p_j k_j$ | $\Delta y_i = (1/6)\Sigma p_j k_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00 | 0 | 1,0000 | − 1,0000 | − 0,1000 | 1 | − 0,1000 | |
| | 1,05 | − 0,0500 | 1,1025 | − 1,1525 | − 0,1152 | 2 | − 0,2304 | |
| | 1,05 | − 0,0576 | 1,1025 | − 1,1601 | − 0,1160 | 2 | − 0,2320 | |
| | 1,10 | − 0,1160 | 1,2100 | − 1,3260 | − 0,1326 | 1 | − 0,1326 | |
| | | | | | | | − 0,6950 | − 0,1158 |
| 1 | 1,10 | − 0,1158 | 1,2100 | − 1,3258 | − 0,1326 | 1 | − 0,1326 | |
| | 1,15 | − 0,1821 | 1,3225 | − 1,5046 | − 0,1505 | 2 | − 0,3010 | |
| | 1,15 | − 0,1910 | 1,3225 | − 1,5135 | − 0,1514 | 2 | − 0,3028 | |
| | 1,20 | − 0,2672 | 1,4400 | − 1,7072 | − 0,1707 | 1 | − 0,1707 | |
| | | | | | | | − 0,9071 | − 0,1501 |
| 2 | 1,20 | − 0,2659 | 1,4400 | − 1,7059 | − 0,1706 | 1 | − 0,1706 | |
| | 1,25 | − 0,3512 | 1,5625 | − 1,9137 | − 0,1914 | 2 | − 0,3828 | |
| | 1,25 | − 0,3616 | 1,5625 | − 1,9241 | − 0,1924 | 2 | − 0,3848 | |
| | 1,30 | − 0,4583 | 1,6900 | − 2,1483 | − 0,2148 | 1 | − 0,2148 | |
| | | | | | | | − 1,1530 | − 0,1925 |
| 3 | 1,30 | − 0,4584 | 1,6900 | − 2,1484 | − 0,2148 | 1 | − 0,2148 | |
| | 1,35 | − 0,5858 | 1,8225 | − 2,3883 | − 0,2388 | 2 | − 0,4776 | |
| | 1,35 | − 0,5778 | 1,8225 | − 2,4003 | − 0,2400 | 2 | − 0,4800 | |
| | 1,40 | − 0,6984 | 1,9600 | − 2,6584 | − 0,2658 | 1 | − 0,2658 | |
| | | | | | | | − 1,4382 | − 0,2397 |
| 4 | 1,40 | − 0,6981 | 1,9600 | − 2,6581 | − 0,2658 | 1 | − 0,2658 | |
| | 1,45 | − 0,8310 | 2,1025 | − 2,9335 | − 0,2934 | 2 | − 0,5868 | |
| | 1,45 | − 0,8448 | 2,1025 | − 2,9473 | − 0,2947 | 2 | − 0,5894 | |
| | 1,50 | − 0,9928 | 2,2500 | − 2,2428 | − 0,3243 | 1 | − 0,3243 | |
| | | | | | | | − 1,7663 | − 0,2944 |

# VI
# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

*Глава 34*

## СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

### 34.1. Классификация событий

Опытом или испытанием называют всякое осуществление комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующие явление. Возможный результат опыта называют событием. Событие называется достоверным в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте. Событие называется невозможным в данном опыте, если оно в этом опыте произойти не может. Случайным называется событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти. Два события называются совместными в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте, и несовместными, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Два события называются противоположными, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. События считают равновозможными, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие. Множество событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называют полной группой, если они попарно несовместны, появление одного и только одного из них является достоверным событием. Например, полную группу образуют события $A_1, A_2, \dots, A_6$ где $A_k$ $(k = 1, 2, \dots, 6)$ – событие «верхней гранью оказалась грань с цифрой $k$» (при подбрасывании игрального кубика).

### 34.2. Действия над событиями. Соотношения между событиями

Суммой или объединением двух событий называется событие, состоящие в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий $A$ и $B$ обозначается через $A \cup B$ или $A + B$. Аналогично определяется и обозначается сумма $n$ событий:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Эта сумма означает событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из них.

Произведением или пересечением двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий $A$ и $B$ обозначается через $A \cap B$ или $AB$. Произведение $n$ событий

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \ldots A_n, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

означает событие, состоящие в появлении всех событий $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Понятия суммы и произведения событий распространяются на бесконечные последовательности событий, в этих случаях соответственно применяют, например, обозначения

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$$

Разностью событий $A$ и $B$ называется событие $C$, которое означает, что наступает событие $A$ и не происходит событие $B$. Разность событий $A$ и $B$ обозначается так: $A \setminus B$ или $A - B$.

Если при каждом осуществлении комплекса условий, при котором происходит событие $A$, происходит и событие $B$, то говорят, что $A$ влечет за собой $B$, или $A$ является частным случаем $B$, и обозначается так: $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что $A$ и $B$ равносильны: $A = B$.

## 34.3. Различные определения вероятности события

**Классическое определение вероятности.** Вероятность события $A$ определяется формулой

$$P(A) = m/n, \tag{34.1}$$

где $n$ – число всех равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов опыта, $m$ – число элементарных исходов, благоприятствующих событию $A$. Свойства вероятности события: 1) вероятность достоверного события равна единице; 2) вероятность невозможного события равна нулю; 3) вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы; 4) вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0 \le P(A) \le 1$.

**Геометрическое определение вероятности.** Если событие $A$ —попадание в область $g$ точки, брошенной в область $G$, то его вероятность определяется формулой

$$P(A) = \operatorname{mes} g / \operatorname{mes} G, \tag{34.2}$$

где $\operatorname{mes} g$ – мера области $g$ (длина, площадь, объем). Для одномерной двумерной и трехмерной области эта формула соответственно принимает вид

$$P(A)=l_g/l_G,\ P(A)=S_g/S_G,\ P(A)=V_g/V_G,$$

где $l$ – длина, $S$ – площадь, $V$ – объем соответствующей области.

**Статическое определение вероятности.** Относительная частота события $A$ (или просто частота) определяется формулой

$$W(A)=m/n, \tag{34.3}$$

где $m$ – число опытов, в которых появилось событие $A$, $n$ – число всех проведенных опытов. Условной называется частота одного события, вычисленная при условии, что другое событие наступило. Частота события обладает теми же простейшими свойствами, что и вероятность, а также следующими свойствами: а) частота суммы двух несовместимых событий равна сумме частот этих событий: $W(A+B)=W(A)+W(B)$; б) частота произведения двух событий равна произведению частоты одного на условную частоту другого: $W(AB)=$ $=W(A)\times W(B/A)$, $W(AB)=W(B)W(A/B)$.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

**Аксиоматическое определеиие вероятности.** Пространством элементарных событий называют произвольное множество $\Omega$, а его элементы $\omega$ – элементарными событиями. Эти понятия являются первоначальными. В реальных опытах элементарным событиям соответствуют взаимоисключающие итоги опыта. Подмножества множества $\Omega$ называют событиями и обозначают заглавными буквами $A, B, C$ и т.п. Пустое множество $\varnothing$ называют невозможным событием, а множество $\Omega$ – достоверным событием. Случайным событием называют любое собственное (т.е. отличное от $\varnothing$ и $\Omega$) подмножество $\Omega$. Событие $\bar{A}=\Omega-A$ называют противоположным событию $A$; событие $\bar{A}$ означает, что $A$ не произошло. События $A$ и $B$ называют несовместными, если $AB=\varnothing$.

Пусть $\Omega$ – пространство элементарных событий, $L$ – некоторая система случайных событий. Система $L$ случайных событий называется алгеброй событий, если выполнены условия: 1) $\Omega\in L$; 2) если $A\in L$, $B\in L$, то $AB\in L$, $(A+B)\in L$, $(A-B)\in L$. Из этих условий следует, что $\varnothing\in L$. Алгебра событий называется $\sigma$-алгеброй или борелевской алгеброй, если из того, что $A_n\in L$, $n=1,2,\ldots$, следует $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in L$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\in L$.

Числовая функция $P(A)$, определенная на алгебре событий $L$, называется вероятностью, если выполнены следующие аксиомы.

1. Каждому событию $A \in L$ ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$ – его вероятность, т.е. $P(A) \geq 0$ для любого $A \in L$.
2. Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$.
3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \varnothing$.
4. Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из $L$ такой, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Тройка $(\Omega, L, P)$, в которой $L$ является $\sigma$-алгеброй и функция $P(A)$ удовлетворяет аксиомам 1 – 4, называется вероятностным пространством.

Простейшие следствия из аксиом вероятности.

1. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Если $P(A) = p$, $P(\overline{A}) = q$, то $p + q = 1$, $p = 1 - q$.
2. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.
3. Для любых событий $A$ и $B$ верны соотношения
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$
$$P(A+B) \leq P(A) + P(B).$$
4. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны (т. е. $A_i A_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$), то
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$
5. Для любых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выполняется неравенство
$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$
6. Если событие $A$ влечет событие $B$ $(A \subset B)$, то
$$P(A) \leq P(B).$$
7. Вероятность любого события выражается неотрицательным числом, не превосходящим единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$; другими словами, область значений функции $P(A)$ принадлежит отрезку $[0, 1]$.
8. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – попарно несовместны и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in L$, то $P(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

9. Если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

10. Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Пример 34.1. Найти вероятность появления верхней грани с числом очков, кратным 3, при бросании игрального кубика.

Поскольку всего элементарных исходов шесть, а благоприятных исходов два: $A_3$ (появилось 3 очка), $A_6$ (появилось 6 очков), то $P(A) = 2/6 = 1/3$.

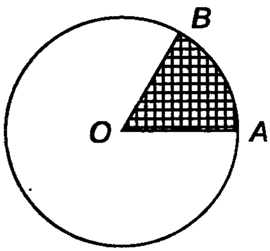


Рис. 34.1

Пример 34.2. Производится стрельба по мишени, имеющей форму круга и равномерно вращающейся вокруг центра $O$ (рис. 34.1). Попадание в круг – событие достоверное. Сектор $OAB$, площадь которого равна одной шестой части площади всего круга, окрашена в черный цвет. Найти вероятность попадания в сектор $OAB$.

В данном случае $S_G = S$, $S_g = (1/6)\,S$, где $S$ – площадь рассматриваемого круга, поэтому $P(A) = S_g/S_G = (1/6)\,S/S = 1/6$.

Пример 34.3. В результате 20 выстрелов по мишени получено 15 попаданий. Какова относительная частота попаданий?

Так как $m = 15$, $n = 20$, то по формуле (34.3) получаем $W(A) = 15/20 = 3/4$.

## 34.4. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимость событий

Вероятность события $B$ при условии, что произошло событие $A$, называется условной вероятностью события $B$ и обозначается так: $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Условные вероятности определяются формулами

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

где $P(A) > 0$, $P(B) > 0$.

Теорема 34.1. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:*

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A), \quad P(AB) = P(B)\,P(A/B). \tag{34.4}$$

По определению, событие $B$ не зависит от события $A$, если

$$P(B/A)=P(B). \tag{34.5}$$

В этом случае также $P(A/B)=P(A)$, т. е. событие $A$ не зависит от события $B$. Свойство независимости событий является взаимным. Если события $A$ и $B$ независимы, то независимы события $\overline{A}$ и $B$, $A$ и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Если события $A$ и $B$ независимы, то формулы (34.4) с учетом равенства (34.5) принимают вид

$$P(AB)=P(A)\,P(B),$$

т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

Теорема 34.2. *Вероятность произведения n событий равна произведению вероятностей одного из них на условные вероятности всех остальных в предположении, что все предыдущие события наступили:*

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n)=P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A/A_1A_2\ldots A_n). \tag{34.6}$$

В частности, для трех событий $A, B, C$ эта формула имеет вид

$$P(ABC)=P(A)\,P(B/A)\,P(C/AB). \tag{34.7}$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если каждое из них и произведение любого числа $k$ остальных $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ являются независимыми.

Замечание. Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n)=P(A_1)\,P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{34.8}$$

Если $A$ – появление хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то

$$P(A)=1-q_1q_2\ldots q_n, \tag{34.9}$$

где $q_k=P(\overline{A}_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$; ($\overline{A}_k$ – событие, противоположное $A_k$).

Если все независимые события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одну и ту же вероятность $p$, то вероятность появления хотя бы одного из них определяется формулой $P(A)=1-q^n$.

Пример 34.4. В урне имеется 6 красных, 8 синих и 4 белых шара. Каждое испытание состоит в том, что из урны берут наудачу один шар и не возвращают обратно. Найти вероятность того, что при первом испытании будет вынут красный шар (событие $A$), при втором – синий (событие $B$), при третьем – белый (событие $C$).

Поскольку $P(A)=6/18=1/3$, $P(B/A)=8/17$, $P(C/AB)=4/16=1/4$, то по формуле (34.7) получаем $P(ABC)=1/3\cdot 8/17\cdot 1/4=2/51$.

П р и м е р 34.5. В каждом из трех ящиков имеется по 24 детали; при этом в первом ящике 18, во втором 20, в третьем 22 стандартные детали. Из каждого ящика берут по одной детали. Найти вероятность того, что все три извлеченные детали окажутся стандартными.

Введем обозначения: извлечение стандартной детали из первого ящика – событие $A_1$, из вторoго – событие $A_2$, из третьего – событие $A_3$, тогда $P(A_1)=18/24=3/4$, $P(A_2)=20/24=5/6$, $P(A_3)=22/24=11/12$, по формуле (34.8) при $n=3$ получаем $P(A_1A_2A_3)=3/4\cdot 5/6\cdot 11/12=55/96$.

П р и м е р 34.6. Три стрелка в одинаковы и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадет в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

Введем обозначения: поражение цели первым стрелком – $A_1$, вторым $A_2$, третьим – $A_3$; попадание в цель только первым стрелком – $B_1$, только вторым стрелком – $B_2$, только третьим – $B_3$. Пусть $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)= =p_2$, $P(A_3)=p_3$, тогда $P(\overline{A}_1)=q_1$, $P(\overline{A}_2)=q_2$, $P(\overline{A}_3)=q_3$. Поскольку $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $B_2=A_2\overline{A}_1\overline{A}_3$, $B_3=A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$ и события $B_1$, $B_2$, $B_3$ несовместны, то вероятность того, что только один стрелок попадет в цель, выражается формулой $P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$. Так как $P(B_1)= =P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=p_1q_2q_3$, $P(B_2)=P(A_2\overline{A}_1\overline{A}_3)=p_2q_1q_3$, $P(B_3)=P(A_3\overline{A}_1\overline{A}_2)= =p_3q_1q_2$, то

$$P(B_1+B_2+B_3)=p_1q_2q_3+p_2q_1q_3+p_3q_1q_2. \qquad \text{(I)}$$

Пусть $C_1$ – попадание в цель только вторым и третьим стрелками, $C_2$ – только первым и третьим, $C_3$ – только первым и вторым, т. е. $C_1=A_2A_3\overline{A}_1$, $C_2=A_1A_3\overline{A}_2$, $C_3=A_1A_2\overline{A}_3$, тогда вероятность того, что только два стрелка попадут в цель, выразится формулой

$$P(C_1+C_2+C_3)=p_2p_3q_1+p_1p_3q_2+p_1p_2q_3. \qquad \text{(II)}$$

Вероятность того, что три стрелка попадут в цель, определяется формулой

$$P(A_1A_2A_3)=p_1p_2p_3. \qquad \text{(III)}$$

По условию задачи $p_1=0{,}9$, $p_2=0{,}8$, $p_3=0{,}7$. Следовательно, $q_1=1-p_1= =0{,}1$, $q_2=1-p_2=0{,}2$, $q_3=1-p_3=0{,}3$. Подставляя эти значения в формулы (I) – (III), находим искомые вероятности:

$$P_1=P(B_1+B_2+B_3)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3+0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}3+0{,}7\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2=0{,}092;$$

$$P_2=P(C_1+C_2+C_3)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}398;$$

$$P_3=P(A_1A_2A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}504.$$

## 34.5. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

Предположим, что событие $A$ может осуществляться с одним из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, для которых известны вероятности $P(H_i)$ и условные вероятности $P(A/H_i)$. Другими словами, положим, что $A = \sum_{i=1}^{n} AH_i$, тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i). \qquad (34.10)$$

Это равенство называют формулой полной вероятности.

Произведен опыт, в результате которого появилось событие $A$. Требуется найти условные вероятности $P(H_k/A)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Согласно теореме умножения вероятностей

$$P(AH_k) = P(A)\, P(H_k/A) = P(H_k)\, P(A/H_k),$$

откуда

$$P(H_k/A) = P(H_k)\, P(A/H_k)/P(A),$$

или

$$P(H_k/A) = P(H_k)\, P(A/H_k) \Big/ \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i), \qquad (34.11)$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Формулы (34.11) носят название формул Бейеса.

В применениях формул Бейеса события $H_k$ называют гипотезами, $P(H_k)$ – априорными вероятностями гипотез, $P(H_k/A)$ – апостериорными вероятностями этих гипотез.

Пример 34.7. Имеется 5 урн с белыми и черными шарами: 2 урны – по 2 белых и 3 черных шара (состав $H_1$), 2 урны – по 1 белому и 4 черных шара (состав $H_2$), 1 урна – 4 белых и 1 черный шар (состав $H_3$). Из одной наудачу выбранной урны вынут шар, который оказался черным (событие $A$). Чему равна апостериорная вероятность того, что шар вынут из урны второго состава?

Полагая в (34.11) $k = 2$, $n = 3$, получаем формулу, которой надлежит пользоваться в данном случае:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\, P(A/H_2)}{P(H_1)\, P(A/H_1) + P(H_2)\, P(A/H_2) + P(H_3)\, P(A/H_3)}.$$

Найдем соответствующее вероятности: $P(H_1)=2/5$, $P(H_2)=2/5$, $P(H_3)=1/5$, $P(A/H_1)=3/5$, $P(A/H_2)=4/5$, $P(A/H_3)=1/5$ и подставим их в данную формулу

$$P(H_2/A) = \frac{2/5 \cdot 4/5}{2/5 \cdot 3/5 + 2/5 \cdot 4/5 + 1/5 \cdot 1/5} = \frac{8/25}{15/25} = \frac{8}{15}.$$

Аналогично можно найти $P(H_1/A) = 6/15$, $P(H_3/A) = 1/15$.

*Глава 35*

# СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

## 35.1. Дискретные случайные величины

Для вероятностного пространства $(\Omega, L, P)$ случайной величиной называется действительная функция $X(\omega)$, определенная для $\omega \in \Omega$ и такая, что при всех действительных значениях $x$ множество $\{\omega : X(\omega) < x\}$ принадлежит $\sigma$-алгебре $L$.

Случайная величина – это переменная величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определенными вероятностями. Важнейшей характеристикой случайной величины служит ее распределение вероятностей.

Случайная величина называется дискретной, если она принимает конечную или бесконечную последовательность значений.

Законом распределения случайной величины $X$ называется соответствие между ее значениями $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и их вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$

Закон распределения дискретной случайной величины $X$, принимающей конечное множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, можно задать схемой

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\ldots$ | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\ldots$ | $p_n$ |

или формулами

$$P(X = x_k) = p_k, \ k = 1, 2, \ldots, n; \ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{35.1}$$

Аналогично задается закон распределения дискретной случайной величины $X$, принимающей бесконечную последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$:

$$P(X = x_k) = p_k, \ k = 1, 2, 3, \ldots; \ \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \tag{35.2}$$

## 35.2. Функция распределения. Плотность распределения

Функцией распределения случайной величины $X$ называется функция $F(x)$ действительной переменной, определяемая равенством

$$F(x)=P(X<x), \tag{35.3}$$

где $P(X<x)$ – вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, меньшее $x$. Вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из полуинтервала $[\alpha,\beta)$, равна разности значений ее функции распределения в концах этого промежутка

$$P(\alpha\le X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Свойства функции распределения $F(x)$.

1. Все значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,1]$, т. е. $0\le F(x)\le 1$.
2. Функция $F(x)$ является неубывающей: $F(x_1)\le F(x_2)$, если $x_1<x_2$.
3. $F(x)$ непрерывна слева при любом $x$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1.$

График функции распределения целиком расположен в полосе между прямыми $y=0$, $y=1$ (рис. 35.1).

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x)=\sum_{x_k<x}P(X=x_k), \tag{35.4}$$

где символы $x_k<x$ означают, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше $x$. Функция $F(x)$ для дискретной случайной величины является разрывной.

Случайная величина $X$ называется непрерывной, если существует неотрицательная функция $p(x)$ такая, что

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)\,du. \tag{35.5}$$

Функция $p(x)$, входящая в это равенство, называется плотностью распределения вероятностей случайной величины $X$. График функции $p(x)$ называется кривой распределения. Вероятность попадания значений случайной величины $X$ в полуинтервал $[a,b)$ равна определенному интегралу от плотности распределения $p(x)$ по отрезку $[a,b]$:

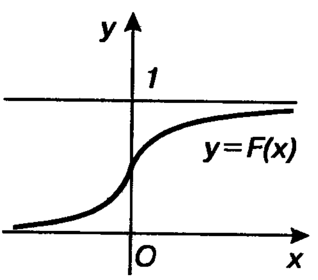

Рис. 35.1

$$P(a \le X < b) = \int_a^b p(x)\,dx. \tag{35.6}$$

Свойства функции $p(x)$ – плотности распределения.

1. Функция $p(x)$ является неотрицательной: $p(x) \ge 0$.
2. В точках дифференцируемости $F(x)$ производная функции распределения равна плотности распределения вероятностей:

$$F'(x) = p(x). \tag{35.7}$$

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ от плотности распределения вероятностей $p(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1. \tag{35.8}$$

Пример 35.1. Случайная величина $X$ задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ x^3 & \text{при } 0 < x \le 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $p(x)$, построить графики функций $F(x)$ и $p(x)$.

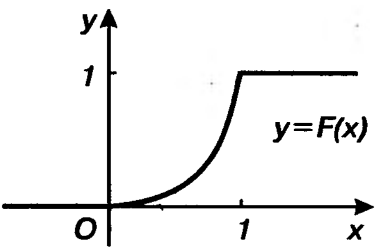


Рис. 35.2

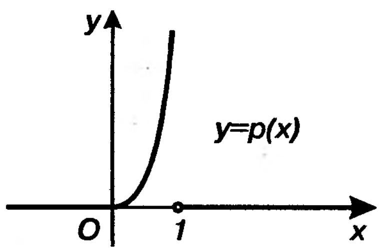


Рис. 35.3

В соответствии с равенством (35.7) находим

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ 3x^2 & \text{при } 0 < x \le 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Графики функций $F(x)$ и $p(x)$ изображены на рис. 35.2 и 35.3.

Пример 35.2. Найти функцию $F(x)$ для дискретной случайной величины, закон распределения которой задан схемой

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_k)$ | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 |

Функцию $F(x)$ строим с помощью формулы (35.4). При $x \le 0$ $F(x) = \sum_{x_k<0} P(X = x_k) = 0$. Если $0<x\le 1$, то $F(x) = \sum_{x_k<1} P(X = x_k) = P(X=0)=0{,}2$. При $1<x\le 2$ $F(x) = P(x=0) + P(x=1) = 0{,}2 + 0{,}4= = 0{,}6$. Если $2<x\le 3$, то $F(x) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)=0{,}9$. При $x>3$ $F(x) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) =1$. График функции $F(x)$ изображен на рис. 35.4.

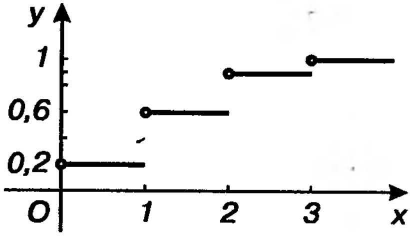


Рис. 35.4

## 35.3. Математическое ожидание случайной величины

Математическое ожидание случайной величины $X$ с законом распределения (35.1) определяется формулой

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{35.9}$$

Если случайная величина $X$ задана законом распределения (35.2), то

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \tag{35.10}$$

при условии, что ряд сходится.

Математическое ожидание называется средним значением, а также центром распределения. Для математического ожидания употребляются и другие обозначения: $EX$, $m_x$, $m$, $a$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины $X$, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, определяется формулой

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} xp(x)\,dx. \tag{35.11}$$

Если случайная величина может принимать любые значения из промежутка $(-\infty, +\infty)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx \tag{35.12}$$

при условии, что интеграл сходится.

Математическое ожидание случайной величины обладает следующими свойствами.

1. Математическое ожидание случайной величины заключено между ее наименьшим и наибольшим значениями.
2. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной: $M(C) = C$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е. $M(CX) = CM(X)$.
4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.
5. Математическое ожидание произведения двух независимых величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X) \times M(Y)$.

Пример 35.3. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины по ее закону распределения, заданному схемой

| $X$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

По формуле (35.9) находим: $M(X) = 3\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}4 = 5$.

Пример 35.4. Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины, указанной в примере 35.1.

По формуле (35.12) получаем

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} xp(x)\,dx + \int_{0}^{1} xp(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} xp(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{1} x3x^2dx + \int_{1}^{+\infty} x0dx = \int_{0}^{1} 3x^3dx = 3\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Название «математическое ожидание» происходит от понятия «ожидаемое значение выигрыша» (математическое ожидание выигрыша), впервые появившегося в теории азартных игр в трудах Б. Паскаля и Х. Гюйгенса в XVII в. Термин «математическое ожидание» ввел П. Лаплас (1795). В полной мере это понятие впервые оценено и использовано П. Л. Чебышевым.

## 35.4. Дисперсия случайной величины

Дисперсией (или рассеянием) случайной величины $X$ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения $X - M(X)$:

$$D(X) = M((X - M(X))^2), \tag{35.13}$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \tag{35.14}$$

Дисперсия случайной величины обладает следующими свойствами.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$.
3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.
4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Дисперсия дискретной случайной величины с законом распределения (35.1) определяется формулой

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-M(X))^2p_k. \qquad (35.15)$$

Если дискретная случайная величина имеет закон распределения (35.2), то

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-M(X))^2p_k \qquad (35.16)$$

при условии, что этот ряд сходится.

Дисперсия непрерывной случайной величины $X$ с плотностью распределения $p(x)$ определяется формулой

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2p(x)\,dx, \qquad (35.17)$$

если этот интеграл сходится, или

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\,dx-(M(X))^2.$$

Средним квадратическим отклонением (или стандартным отклонением) $\sigma(X)$ случайной величины $X$ называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (35.18)$$

Пример 35.5. Найти дисперсию случайной величины, указанной в примере 35.1.

В примере 35.4. было показано, что для данной случайной величины $M(X)=3/4$. По формуле (35.17) находим

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-3/4)^2p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}(x-3/4)^2 0dx+\int_{0}^{1}(x-3/4)^2 3x^2dx+$$

$$+\int_{1}^{+\infty}(x-3/4)^2 0dx=3\int_{0}^{1}\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)x^2dx=$$

$$=3\int_{0}^{1}\left(x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2\right)dx=3\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}\frac{x^4}{4}+\frac{9}{16}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\right)=\frac{3}{80}.$$

Пример 35.6. Дискретная случайная величина $X$ может принимать только два значения $x_1$ и $x_2$, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1$=0,5, математическое ожидание $M(X)$ = 3,5 и дисперсия $D(X) = 0{,}25$. Найти закон распределения $X$.

Поскольку $p_1 + p_2 = 1$ (см. вторую формулу (35.1)) и $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, то $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 3{,}5$, откуда $x_1 + x_2 = 7$. По формуле (35.15) находим $D(X) = (x_1 - 3{,}5)^2 p_1 + (x_2 - 3{,}5)^2 p_2 = 0{,}25$; $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Решая систему уравнений $x_1 + x_2 = 7$, $x_1^2 + x_2^2 = 25$ и учитывая условие $x_1 < x_2$, получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Следовательно, $P(x = 3) = 0{,}5$, $P(x = 4) = 0{,}5$.

## 35.5. Некоторые другие числовые характеристики

Ковариацией двух случайных величин $X$ и $Y$ называется математическое ожидание произведения их отклонений от соответствующих математических ожиданий:

$$\operatorname{cov}(X; Y) = M((X - M(X))(Y - M(Y))).$$

Для ковариации верны равенства:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)\,M(Y),\quad \operatorname{cov}(X, X) = D(X),$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X),\quad D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y).$$

Если случайные величины $X, Y$ независимы, то их ковариация равна нулю: $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Если $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины зависимы.

Коэффициентом корреляции $\rho(X, Y)$ случайных величины $X, Y$ называется отношение их ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Свойства коэффициента корреляции: 1) $|\rho(X, Y)| \le 1$; 2) если величины $X, Y$ независимы, то $\rho(X, Y) = 0$; 3) если $Y = AX + B$, то $|\rho(X, Y)| = 1$.

Начальным моментом $k$-го порядка случайной величины $X$ называется математическое ожидание $k$-й степени этой величины: $\nu_k = M(X^k)$. Центральным моментом $k$-го порядка случайной величины $X$ называется математическое ожидание $k$-й степени отклонения этой величины от ее математического ожидания $a : \mu_k = M((X - a)^k)$. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины – частные случаи моментов, а именно: $\nu_1 = M(X)$, $\mu_2 = D(X)$.

## 35.6. Некоторые законы распределения случайных величин

Пусть производятся испытания, в каждом из которых может появится событие $A$. Если вероятность события $A$ в одном испытании не зависит от появления его в любом другом, то испытания называют независимыми относительно события $A$. Будем считать, что испытания происходят в одинаковых условиях и вероятность появления события $A$ в каждом испытании одна и та же; обозначим эту вероятность через $p$, а через $q$ – вероятность появления события $\overline{A}$, противоположного событию $A$ $(q = 1 - p)$.

Вероятность того, что в серии из $n$ независимых испытаний событие $A$ появится ровно $k$ раз (и не появится $n - k$ раз), выражается формулой Бернулли

$$P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{35.19}$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$p$ – вероятность события $A$ в каждом испытании, $q$ – вероятность события $\overline{A}$ $(q = 1 - p)$.

Закон распределения дискретной случайной величины, определяемый формулой Бернулли, называется биномиальным. Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде схемы

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $0$ | $1$ | $\ldots$ | $k$ | $\ldots$ | $n$ |
| $P$ | $q^n$ | $nq^{n-1}p$ | $\ldots$ | $C_n^k p^k q^{n-k}$ | $\ldots$ | $p^n$ |

Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n$ и $p$:

$$M(X) = np, \; D(X) = npq, \; \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Геометрическим распределением называется распределение дискретной случайной величины $X$, определяемое формулой

$$P(X = m) = (1-p)^{m-1} p \;\; (0 < p < 1), \;\; m = 1, 2, \ldots$$

Это название связано с тем, что ряд вероятностей $P(X = m)$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 - p$; сумма этого ряда равна единице. Для геометрически распределенной случайной величины $M(X) = 1/p$, $D(X) = (1-p)/p^2$.

Распределением Пуассона называется распределение дискретной случайной величины, определяемое формулой

$$P_{k,n} = \frac{a^k e^{-a}}{k!}.$$

Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона, $M(X) = a$, $D(X) = a$, где $a = np$.

Случайная величина $X$ называется равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$, если плотность распределения вероятностей этой величины постоянна на данном отрезке и равна нулю вне его:

$$p(x)=\begin{cases} 1/(\beta-\alpha) & \text{при } \alpha \le X \le \beta; \\ 0 & \text{при } x<\alpha \text{ и } x>\beta. \end{cases}$$

Для случайной величины $X$, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$, вероятность попадания в интервал $(\gamma, \delta)$, принадлежащий этому отрезку, пропорциональна длине интервала:

$$P(\gamma<X<\delta)=\int_{\gamma}^{\delta} p(x)\,dx=\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}.$$

Функция распределения $F(x)$ этой величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le \alpha; \\ (x-\alpha)/(\beta-\alpha) & \text{при } \alpha<x<\beta; \\ 1 & \text{при } x \ge \beta. \end{cases}$$

Для этой случайной величины $M(X)=(\beta+\alpha)/2$, $D(X)=(\beta-\alpha)^2/12$.

Показательное распределение определяется формулой

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{при } x>0 \ (\alpha>0). \end{cases}$$

Кривая распределения вероятностей этой величины представлена на рис. 35.5. Функция распределения $F(x)$ в этом случае имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ 1-e^{-\alpha x} & \text{при } x>0. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 35.6. Для этой случайной величины $M(X)=1/\alpha$, $D(X)=1/\alpha^2$.

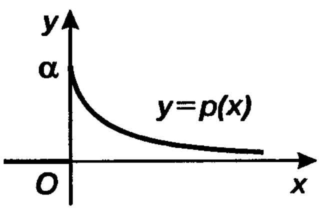


Рис. 35.5

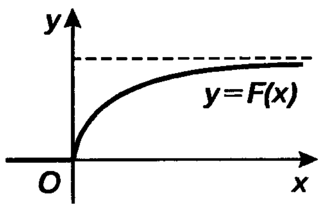


Рис. 35.6

Нормальным распределением (или распределением Гаусса) называется распределение случайной величины, определяемое формулой

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} \quad (\sigma>0). \qquad (35.20)$$

Параметры распределения $a$ и $\sigma$ нормальной случайной величины $X$ имеют следующие значения: $a=M(X)$, $\sigma^2=D(X)$. График функции $p(x)$ называют нормальной кривой или кривой Гаусса. На рис. 35.7 представлены три кривые при одном $a$ и различных $\sigma$.

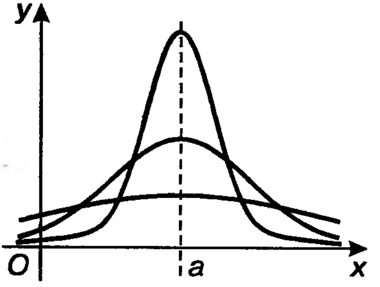


Рис. 35.7

Вероятность попадания значений нормально распределенной случайной величины $X$ в интервал $(\alpha,\beta)$ определяется формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (35.21)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt. \qquad (35.22)$$

С помощью этой функции выражается вероятность неравенства $|X-a|<\delta$ для нормальной случайной величины $X$:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),\quad P(|X-a|<\sigma t)=2\Phi(t).$$

При $t=3$, т. е. $\sigma t=3\sigma$ последнее равенство принимает вид

$$P(|X-a|<3\sigma)=0{,}9973$$

и выражает правило трех сигм: если случайная величина распределена по нормальному закону, то модуль ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Пример 35.7. Найти вероятность попадания в интервал $(4,9)$ значений нормальной случайной величины $X$, для которой математическое ожидание $a=8$, среднее квадратическое отклонение $\sigma=1$.

Применяем формулу (35.21), которая в данном случае примет вид

$$P(4<X<9)=\Phi\left(\frac{9-8}{1}\right)-\Phi\left(\frac{4-8}{1}\right)=\Phi(1)-\Phi(-4).$$

Поскольку функция Лапласа (35.22) является нечетной, то $P(4<X<9)=$ $=\Phi(1)-\Phi(-4)=\Phi(1)+\Phi(4)=0{,}3413+0{,}499968=0{,}841268.$ (Значения $\Phi(1)$ и $\Phi(4)$ найдены по таблице значений функции Лапласа.)

## 35.7. Основные теоремы теории вероятностей

Теорема 35.1 (теорема Чебышева). *Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно независимы, имею математические ожидания и дисперсии, каждая из которых ограничена одним и тем же числом C, то для любого числа $\varepsilon>0$ выполняется неравенство*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(X_k)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

*откуда*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M(X_k)\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (35.23)$$

В частном случае, когда все случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание $a: M(X_k)=a,\ \ k=1,2,\dots,n,$ равенство (35.23) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-a\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема 35.2 (теорема Бернулли). *Если m – число наступлений события A в n независимых испытаниях и p – вероятность наступления события A в каждом из испытаний, то при любом $\varepsilon>0$*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорема 35.3 (теорема Ляпунова). *Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение с математическим ожиданием a и дисперсией $\sigma^2$, то при неограниченном возрастании n закон распределения суммы $X=\sum_{k=1}^{n}X_k$ неограниченно приближается к нормальному.*

Т е о р е м а 35.4 (локальная теорема Лапласа). *Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0<p<1)$, то вероятность $P_n(k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A наступит ровно k раз, приближенно выражается формулой*

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(k-np)^2/(2npq)}. \tag{35.24}$$

Вероятность (35.24) можно вычислить так:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

при $x=(k-np)/\sqrt{npq}$; для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы.

Т е о р е м а 35.5 (интегральная теорема Лапласа). *Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0<p<1)$, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит не менее $k_1$ раз и не более $k_2$ раз, приближенно выражается формулой*

$$P_n(k_1, k_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-x^2/2}dx;\quad x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}. \tag{35.25}$$

Вероятность $P_n(k_1, k_2)$ можно подсчитать по формуле

$$P_n(k_1, k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{35.26}$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (см. формулу (35.22)).

П р и м е р 35.8. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.

По условию $n=100$, $k_1=70$, $k_2=80$, $p=0{,}75$, поэтому $q=0{,}25$. Воспользуемся формулой (35.26), предварительно вычислив $x_1$ и $x_2$ по второй и третьей формуле (35.25):

$$x_1=\frac{70-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=-1{,}15,\quad x_2=\frac{80-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=1{,}15;$$

$$P_{100}(70, 80)=\Phi(1{,}15)-\Phi(-1{,}15)=2\Phi(1{,}15)=2\cdot 0{,}3749=0{,}7498.$$

*Глава 36*

# ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

## 36.1. Основные понятия математической статистики

Выборочным методом называют метод исследования общих свойств совокупности каких-либо объектов на основе изучения свойств лишь части этих объектов, взятых на выборку. Генеральной совокупностью называется множество однородных объектов, из которого выделяется некоторое подмножество, называемое выборочной совокупностью или выборкой. Объемом совокупности (генеральной или выборочной) называется число ее объектов. При изучении некоторого признака выборочной совокупности проводят испытания (наблюдения). Пусть посредством независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, получены числовые значения $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, где $n$ – объем выборки. Располагают эти значения в порядке возрастания:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n)$$

и называют полученную последовательность дискретным вариационным рядом, а сами значения $x_i$ – вариантами. Среди вариант могут оказаться равные, тогда дискретный вариационный ряд можно записать так:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k, \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k, \end{matrix} \tag{36.1}$$

где $n_i$ – частота появления значения $x_i$, причем

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n. \tag{36.2}$$

Относительной частотой $w_i$ варианты $x_i$ называется отношение ее частоты к объему выборки:

$$w_i = \frac{n_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = 1, \quad \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Статистическим распределением выборки называется соответствие между вариантами и их частотами (или относительными частотами). Статистическое распределение может быть задано, например, с помощью таблицы.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называется функция, определяющая для каждого значения $x$ относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = n_x / n,$$

где $n_x$ – число вариант, меньших $x$; $n$ – объем выборки. Функция $F^*(x)$ обладает следующими свойствами: 1) $0 \le F^*(x) \le 1$; 2) $F^*(x)$ – неубывающая функция; 3) если $a$ – наименьшая, $b$ – наибольшая варианты, то $F^*(x) = 0$ при $x \le a$; $F^*(x) = 1$ при $x \ge b$.

Пусть случайная величина $X$ имеет распределение $F(x, \alpha)$, содержащее неизвестный параметр $\alpha$. Оценить параметр $\alpha$ – значит приближенно определить его значение по некоторой выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Оценку параметра $\alpha$ обозначим через $\widetilde{\alpha} : \widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Оценка $\widetilde{\alpha}$ параметра $\alpha$ называется несмещенной, если $M(\widetilde{\alpha}) = \alpha$, и смещенной, если $M(\widetilde{\alpha}) \ne \alpha$. Оценка $\widetilde{\alpha}$ параметра $\alpha$ называется состоятельной, если $\lim\limits_{n \to \infty} P(|\widetilde{\alpha} - \alpha| < \varepsilon) = 1$ при любом $\varepsilon > 0$. Оценка $\widetilde{\alpha}$ называется эффективной, если при заданном $n$ она имеет наименьшую дисперсию, т. е. $D(\widetilde{\alpha}) = D_{\min}$.

Генеральной средней $x_г$ называется среднее арифметическое значений $x_1, x_2, \ldots, x_N$ генеральной совокупности объема $N$: $x_г = \frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} x_i$.

Выборочной средней $x_в$ называется среднее арифметическое выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема $n$: $x_в = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, или

$$x_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \tag{36.3}$$

если выборка имеет вид (36.1).

Выборочную среднюю принимают в качестве оценки генеральной средней. Эта оценка является несмещенной и состоятельной, так как

$$M(X_в) = x_г, \quad \lim_{n \to \infty} P(|X_в - x_г| < \varepsilon) = 1.$$

Генеральной дисперсией $D_г$ называется среднее арифметическое квадратов отклонения значений генеральной совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_N$ от их среднего значения $x_г$:

$$D_г = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_г)^2.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением $\sigma_г$ называется корень квадратный из генеральной дисперсии: $\sigma_г = \sqrt{D_г}$.

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонения значений выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ от их среднего значения $x_в$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_в)^2 \quad \text{или} \quad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_в)^2, \qquad (36.4)$$

если выборка имеет вид (36.1).

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$ определяется формулой

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \qquad (36.5)$$

Для вычисления выборочной дисперсии можно пользоваться формулой $D_в = x_в^2 - (x_в)^2$, где

$$x_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \quad x_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$$

($n_i$ – частота $x_i$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$). Аналогичная формула верна и для генеральной дисперсии.

Так как $M(D_в) = (n-1)/n)D_г$, т.е. $M(D_в) \neq D_г$, то выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии. Чтобы получить несмещенную оценку, генеральной дисперсии $D_г$, вводят понятие эмпирической (или исправленной) дисперсии $s^2$:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_в)^2.$$

Для оценки генерального среднего квадратического отклонения служит исправленное среднее квадратическое отклонение, или эмпирический стандарт $s$:

$$s = \sqrt{s^2}, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x_в)^2}. \qquad (36.6)$$

В случае, когда все значения выборки $x_1, x_2, \dots, x_n$ различны, т. е. $n_i = 1$, $k = n$, формулы для $s^2$ и $s$ принимают вид

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_в)^2, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_в)^2}.$$

Если выборка задана в виде распределения равноотстоящих вариант, то выборочное среднее $x_в$ и выборочную дисперсию $D_в$ удобно находить методом произведений по формулам

$$x_в = M_1^* h + C, \quad D_в = (M_2^* - (M_1^*)^2)\, h^2, \qquad (36.7)$$

где $C$ – варианта, имеющая наибольшую частоту (ложный нуль), $h$ – шаг, $M_1^*$ – условный момент первого порядка, $M_2^*$ – условный момент второго порядка;

$h, u_i, M_1^*, M_2^*$ определяются соответственно формулами:

$$h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad u_i = (x_i - C)/h; \tag{36.8}$$

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i, \quad M_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2; \tag{36.9}$$

$u_i$ – условная варианта, $n$ – объем выборки, $n_i$ – частота варианты $x_i$ $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$.

Пример 36.1. Методом произведений найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение по данному статистическому распределению выборки:

| $x_i$ | 10,2 | 10,9 | 11,6 | 12,3 | 13,0 | 13,7 | 14,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 8 | 10 | 60 | 12 | 5 | 3 | 2 |

Данная выборка является равноотстоящей, так как разности между двумя последующими вариантами постоянны: $x_{i+1} - x_i = h$ при $i = 1, 2, \ldots, 6$, причем $h = 0{,}7$. По формуле (36.2) находим $n = 100$. Наибольшую частоту имеет варианта $x_3 = 11{,}6$, т. е. $C = 11{,}6$. С помощью второй из формул (36.8) находим условные варианты $u_i$ и составляем таблицу (табл. 36.1) значений величин, входящих в формулы (36.7). По формулам (36.9) находим $M_1^* = 13/100 = 0{,}13$, $M_2^* = 133/100 = 1{,}33$. С помощью формул (36.7) получаем $x_в = 0{,}13 \cdot 0{,}7 + 11{,}6 = 11{,}691 \approx 11{,}7$, $D_в = (1{,}33 - 0{,}13^2) \cdot 0{,}7^2 = 0{,}643419 \approx 0{,}64$. В соответствии с формулой (36.5) находим $\sigma_в = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Таблица 36.1

| $i$ | $x_i$ | $n_i$ | $u_i$ | $n_i u_i$ | $n_i u_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10,2 | 8 | −2 | −16 | 32 |
| 2 | 10,9 | 10 | −1 | −10 | 10 |
| 3 | 11,6 | 60 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 12,3 | 12 | 1 | 12 | 12 |
| 5 | 13,0 | 5 | 2 | 10 | 20 |
| 6 | 13,7 | 3 | 3 | 9 | 27 |
| 7 | 14,4 | 2 | 4 | 8 | 32 |
| Σ | | 100 | | 13 | 133 |

## 36.2. Доверительный интервал. Доверительная вероятность

Оценка, определяемая одним числом, называется точечной. Оценка, определяемая двумя числами – концами интервалов, называется интервальной.

Доверительной вероятностью (надежностью) оценки $\tilde{\alpha}$ параметра $\alpha$ называется вероятность $\gamma$, с которой осуществляется неравенство $|\alpha-\tilde{\alpha}|<\delta$, т. е.

$$P(|\alpha-\tilde{\alpha}|<\delta)=\gamma \text{ или } P(\tilde{\alpha}-\delta<\alpha<\tilde{\alpha}+\delta)=\gamma.$$

Эта формула означает следующее: вероятность того, что интервал $(\tilde{\alpha}-\delta, \tilde{\alpha}+\delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр $\alpha$, равна $\gamma$. Интервал $(\tilde{\alpha}-\delta, \tilde{\alpha}+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр $\alpha$ с заданной надежностью $\gamma$, называется доверительным интервалом. Концы доверительного интервала называют доверительными границами.

Если случайная величина $X$ имеет нормальное распределение с заданным средним квадратическим отклонением $\sigma$ и неизвестным математическим ожиданием $a$, то

$$P\left(x_{\text{в}}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<x_{\text{в}}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)=\gamma, \tag{36.10}$$

где

$$\delta=\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}, \quad 2\Phi(t)=\gamma, \tag{36.11}$$

т. е. доверительный интервал

$$I=(x_{\text{в}}-\sigma t/\sqrt{n},\, x_{\text{в}}+\sigma t/\sqrt{n}) \tag{36.12}$$

покрывает неизвестный параметр $a$ с надежностью $\gamma$. Значение $\gamma$ задано заранее; число $\Phi(t)$ определяется второй из формул (36.11); значение $t$ находится с помощью таблиц значений функции Лапласа; точность оценки $\delta$ выражается первой из формул (36.11).

Пример 36.2. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания $a$ нормальной случайной величины с надежностью $\gamma=0{,}95$, зная выборочную среднюю $x_{\text{в}}=75{,}15$, объем выборки $n=64$, среднее квадратическое отклонение $\sigma=8$.

Доверительный интервал определяется формулой (36.12). Чтобы найти концы доверительного интервала, необходимо знать значение $t$ (значения $x_{\text{в}}, n, \sigma$ заданы). Второе из равенств (36.11) примет вид $2\Phi(t)=0{,}95$, откуда $\Phi(t)=0{,}475$. По таблице значений функции Лапласа находим $t=1{,}96$. Подставляя значения $x_{\text{в}}, \sigma, t, n$ в выражения для концов доверительного интервала, получаем

$$x_{\text{в}}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}=75{,}15-\frac{8\cdot 1{,}96}{\sqrt{64}}=75{,}15-1{,}96=73{,}19; \quad x_{\text{в}}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}=77{,}11.$$

Следовательно, $73{,}19<a<77{,}11$, т.е. $(73{,}19; 77{,}11)$ – искомый доверительный интервал.

## 36.3. Оценка точного значения измеряемой величины

Пусть в итоге $n$ независимых измерений некоторой величины $X$ получены следующие результаты:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{36.13}$$

Будем предполагать, что эти результаты свободны от грубых и систематических ошибок (неверные результаты отброшены, на систематические ошибки введены поправки).

Оценить точное значение $a$ измеряемой величины — значит:

а) определить функцию $\alpha = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая обеспечивает достаточно близкое приближение к значению $a$;

б) указать границы интервала $(\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_2)$, который с заданной вероятностью $\gamma$ покрывает истинное значение $a$.

Среднее арифметическое значение (среднее значение) $x$ результатов (36.13), среднее квадратическое отклонение $s^*$ этих результатов от их среднего значения $x$ и эмпирический стандарт $s$ определяются соответственно формулами:

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{36.14}$$

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}; \tag{36.15}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}. \tag{36.16}$$

Если все измерения проведены с одинаковой точностью, то в качестве оценки точного значения $a$ измеряемой величины принимают среднее арифметическое значений результатов (36.13):

$$a \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{36.17}$$

Эта оценка является несмещенной и состоятельной. Введенная оценка оказывается и эффективной при дополнительном предположении о том, что случайные ошибки измерений подчинены нормальному закону распределения. Это предположение имеется в виду и в дальнейшем. Оценка (36.17) относится к числу точечных оценок.

Симметрические доверительные оценки имеют вид

$$|a - x| < \delta, \text{ или } x - \delta < a < x + \delta \quad (\delta > 0), \tag{36.18}$$

где $x$ — среднее значение, определяемое формулой (36.14). Величина $\delta$ (точность оценки) определяется по заданной доверительной вероятности $\gamma$ (надежности оценки).

Если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma$, то доверительная оценка (36.18) имеет вид

$$|a - x| < \sigma t/\sqrt{n}, \tag{36.19}$$

где $n$ – число измерений, а значение $t = t(\gamma)$ определяется по заданной доверительной вероятности $\gamma$ из условия $2\Phi(t) = \gamma$ и находится с помощью таблиц. Точность оценки $\delta$ в этом случае выражается формулой

$$\delta = \sigma t/\sqrt{n}. \tag{36.20}$$

Если средняя квадратическая погрешность $\sigma$ заранее неизвестна, то вместо нее применяют эмпирический стандарт $s$, который служит оценкой параметра $\sigma$. Доверительная оценка (36.18) принимает вид

$$|a - x| < st/\sqrt{n} \tag{36.21}$$

или

$$|a - x| < s^* t/\sqrt{k} \quad (k = n - 1), \tag{36.22}$$

где $s^*$ и $s$ определяются соответственно формулами (36.15) и (36.16), а множитель $t = t(\gamma, k)$ зависит не только от доверительной вероятности $\gamma$, но и от числа измерений $n$ $(k = n - 1)$. Значения этого множителя определяются по таблицам.

Правило трех сигм представляет собой доверительную оценку

$$|a - x| < 3\sigma/\sqrt{n} \tag{36.23}$$

при известной величине $\sigma$ или доверительную оценку

$$|a - x| < 3s/\sqrt{n} \tag{36.24}$$

при неизвестной величине $\sigma$. Оценка (36.23) имеет надежность $2\Phi(3) = 0{,}9973$ независимо от числа измерений. Оценка (36.24) зависит от числа измерений $n$ (зависимость эта устанавливается с помощью соответствующих таблиц).

## 36.4. Оценки точности измерений

Предполагается, что измерения являются независимыми и равноточными (с одной и той же дисперсией), а их погрешности – случайными, причем распределены они по нормальному закону. В качестве показателя точности измерений оценивается дисперсия этого закона $\sigma^2$ или средняя квадратическая погрешность $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

**Точечные оценки дисперсии.** 1. Если измеряют известную величину $a$, то в качестве эффективной оценки дисперсии $\sigma^2$ применяют квадрат среднего квадратического отклонения $s^*$ результатов измерений (36.13) от значения $a$:

$$\sigma^2 \approx s^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2. \tag{36.25}$$

2. При измерениях неизвестной величины в качестве оценки дисперсии $\sigma^2$ применяют эмпирическую дисперсию $s^2$:

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2, \tag{36.26}$$

где $x$ – среднее арифметическое значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Оценка (36.26) является несмещенной и состоятельной, но не является эффективной (она асимптотически эффективна, т. е. ее дисперсия стремится к наименьшему значению при неограниченном увеличении числа измерений $n$).

3. Если проводится $m$ серий измерений некоторой величины и известны количества измерений $n_1, n_2, \dots, n_m$, а также средние арифметические результаты $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ в каждой серии, то в качестве оценки дисперсии применяют эмпирическую дисперсию $\bar{s}^2$ из средних:

$$\sigma^2 \approx \bar{s}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m} n_i(\bar{x}_i - x)^2, \tag{36.27}$$

где

$$x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i\bar{x}_i, \quad N = n_1 + \cdots n_m. \tag{36.28}$$

Эта оценка является несмещенной, состоятельной (и асимптотически эффективной при $m \to \infty$).

**Доверительные оценки средней квадратической погрешности.** При большом числе измерений доверительную оценку средней квадратической погрешности $\sigma$ записывают в виде оценки относительного отклонения оцениваемого значения $\sigma$ от эмпирического стандарта $s$ (или $s^*$, или $\bar{s}$). Эта оценка имеет вид $|(\sigma - s)/s| < q$, или

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \tag{36.29}$$

коэффициент $q = q(\gamma, k)$ находится с помощью соответствующих таблиц в зависимости от доверительной вероятности $\gamma$ (надежности оценки) и от числа степеней свободы $k$ ($k = 1$ в случае 1, $k = n-1$ в случае 2, $k = m-1$ в случае 3).

При малом числе измерений симметричная оценка (36.29) приводит к неоправданно большим доверительным интервалам; в этом случае применяют асимметричные доверительные оценки вида $sz_1 < \sigma < sz_2$, где $s$ – эмпирический стандарт; значения коэффициентов $z_1 = z_1(\gamma, k)$, $z_2 = z_2(\gamma, k)$ находятся по таблицам.

## 36.5. Эмпирические формулы

Во многих науках (физика, химия, технические науки и др.) приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основании результатов наблюдений. Параметры эмпирических формул определяются по способу наименьших квадратов. Сначала устанавливается вид зависимости между двумя величинами. Это можно выполнить разными способами, например графически. Пусть результаты измерений представлены схемой

$$\begin{array}{cccccc} x & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \\ y & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{array}$$

Упорядоченные пары чисел $(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, рассматриваются как прямоугольные декартовы координаты точек на плоскости $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$. В выбранной системе координат строят точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Если построенные точки $M_i(x_i, y_i)$ незначительно уклоняются от некоторой прямой, то полагают, что между величинами $x$ и $y$ существует линейная зависимость, т.е.

$$y = ax + b. \qquad (36.30)$$

Параметры $a$ и $b$ эмпирической формулы (36.30) определяются из системы уравнений

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (36.31)$$

Если точки $M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ незначительно уклоняются от дуги некоторой параболы, то естественно предположить, что между величинами $x$ и $y$ существует квадратичная зависимость, т. е.

$$y = ax^2 + bx + c. \qquad (36.32)$$

Параметры $a, b, c$ эмпирической формулы (36.32) определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad (36.33) \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}$$

Пример 36.3. Экспериментально получены пять значений искомой функции $y = f(x)$ при пяти значениях аргумента:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4,7 | 5,7 | 4,2 | 2,2 | 2,7 |

Методом наименьших квадратов найти функцию $y = f(x)$ в виде $y = ax + b$.

Результаты измерений и их обработки запишем в табл. 36.2.

Таблица 36.2.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4,7 | 4,7 | 1 |
| 2 | 2 | 5,7 | 11,4 | 4 |
| 3 | 3 | 4,2 | 12,6 | 9 |
| 4 | 4 | 2,2 | 8,8 | 16 |
| 5 | 5 | 2,7 | 13,5 | 25 |
| $\Sigma$ | 15 | 19,5 | 51,0 | 55 |

Система уравнений (36.31) принимает вид

$$55a + 15b = 51{,}0, \quad 15a + 5b = 19{,}5.$$

Решая эту систему, находим $a = -0{,}75$, $b = 6{,}15$. Следовательно, получена эмпирическая формула $y = -0{,}75x + 6{,}15$.

# VII
# ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Глава 37*

## ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 37.1. Понятие функции комплексной переменной. Предел и непрерывность

Комплексное число $z = x + iy$, где $x$ и $y$ – действительные числа, $i$ – мнимая единица ($i = \sqrt{-1}$), изображается точкой комплексной плоскости с координатами $(x, y)$. Пусть $D$ – область (открытое связное множество) комплексной плоскости $C$. Если каждой точке $z \in D$ по определенному правилу $f$ поставлено в соответствие единственное комплексное число $w = u + iv$, то говорят, что в области $D$ определена однозначная функция комплексной переменной $z = x + iy$ и пишут $w = f(z)$, $z \in D$. Функцию $w = f(z) = f(x + iy)$ можно рассматривать как комплексную функцию двух действительных переменных $x$ и $y$, определенную в области $D$. Задание такой функции равносильно заданию двух действительных функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in D$, $w = u + iv$. Таким образом, если $z = x + iy$, $w = u + iv$, то

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y). \tag{37.1}$$

Комплексное число $c$ называется пределом однозначной функции $w = f(z)$ при $z \to a$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|z - a| < \varepsilon$ следует неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to a} f(z) = c$.

Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке $z_0$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{37.2}$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области $D$, называется непрерывной в этой области.

Область $D$ называется односвязной, когда она ограничена замкнутой линией $\Gamma$, не пересекающей себя (рис. 37.1). Область $D$ называется двусвязной, когда она ограничена двумя замкнутыми линиями $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, которые не пересекаются и каждая не пересекает себя (рис. 37.2); внутренняя линия $\Gamma_2$, в частности, может вырождаться в точку или в дугу непрерывной линии. Аналогично определяется трехсвязная, четырехсвязная и т.д. области.

Замечание. Если существуют значения $z \in D$, каждому из которых поставлены в соответствие несколько значений $w$, то функция $w = f(z)$ называется многозначной.

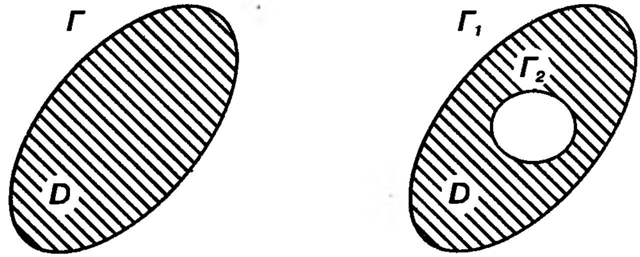


Рис. 37.1

Пример 37.1. Найти значения функции $f(z) = z^3 - 2z^2 + 5z$ при следующих значениях аргумента: 1) $z = i$; 2) $z = 1 - i$; 3) $z = 2 + i$.

Принимая во внимание значения степеней мнимой единицы (см. формулы (7.19)), получаем: $f(i) = i^3 - 2i^2 + 5i = -i + 2 + 5i = 2 + 4i$. Поскольку $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$, $(1-i)^3 = (1-i)^2(1-i) = -2i\,(1-i) = -2i + 2i^2 = -2 - 2i$, то $f(1-i) = (1-i)^3 - 2(1-i)^2 + 5(1-i) = -2 - 2i - 2(-2i) + 5 - 5i = -2 - 2i + 4i + 5 - 5i = 3 - 3i$. Далее,

$$f(2+i) = (2+i)^3 - 2(2+i)^2 + 5(2+i) =$$

$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 - 2(4 + 4i + i^2) + 5(2+i) =$$

$$= 8 + 12i + 6i^2 + i^3 - 8 - 8i - 2i^2 + 10 + 5i = 8 + 12i - 6 - i - 8 - 8i + 2 + 10 + 5i = 6 + 8i.$$

Пример 37.2. Дана функция $f(z) = 1/(x - iy)$, где $z = x + iy$. Найти ее значения при $z = 1 + j$, $z = i$, $z = 3 - 2i$.

Сначала придадим функции вид (37.1):

$$f(z) = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{x + iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2};$$

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Если $z=1+i$, то $x=1$, $y=1$, поэтому $f(1+i)=\frac{1}{1^2+1^2}+i\frac{1}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}=\frac{1+i}{2}.$ При $z=i$, это значит $x=0$, $y=1$, получим $f(i)=i$. В случае $z=3-2i$, т.е. $x=3$, $y=-2$, находим

$$f(3-2i)=\frac{3}{3^2+(-2)^2}+i\frac{-2}{3^2+(-2)^2}=\frac{3}{13}-\frac{2i}{13}=\frac{3-2i}{13}.$$

Замечание. Данную функцию можно записать и в таком виде: $f(z)=\frac{z}{x^2+y^2}$. С учетом этой формулы находим $f(1+i)=\frac{1+i}{2}$, $f(i)=i$, $f(3-2i)=\frac{3-2i}{13}$.

Пример 37.3. Доказать, что функция $w=z^2$ является непрерывной при любом значении $z$.

Зафиксируем значение $z_0$ и рассмотрим разность $z^2-z_0^2=(z-z_0)(z+z_0)$. Когда $z\to z_0$, то существует такое положительное число $M$, при котором выполняются неравенства $|z|<M$, $|z_0|<M$, поэтому

$$|z^2-z_0^2|=|z-z_0||z+z_0|<|z-z_0|(|z|+|z_0|)<2M|z-z_0|.$$

Выберем $\delta=\varepsilon/2M$. Из неравенства $|z-z_0|<\delta$ следует, что

$$|z^2-z_0^2|<2M\delta=2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon,\quad |z-z_0^2|<\varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{z\to z_0} z^2=z_0^2$. Поскольку выполняется равенство (37.2), то функция $w=z^2$ непрерывна в точке $z_0$. Точка $z_0$ была зафиксирована произвольно; значит, функция $w=z^2$ непрерывна в любой точке.

## 37.2. Основные элементарные функции комплексной переменной

Функции комплексной переменной $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ определяются как суммы соответствующих степенных рядов, сходящихся на всей комплексной плоскости:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots \tag{37.3}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \tag{37.4}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots \tag{37.5}$$

Показательная функция $e^z$ имеет следующие свойства: 1) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$, где $z_1$, $z_2$ – произвольные комплексные числа; 2) $e^{z+2k\pi i}=e^z$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, т. е. $e^z$ является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$ – периодические с действительным периодом $2\pi$; они имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \pi/2 + k\pi$ соответственно, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для функций $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ справедливы формулы Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i\sin z, \tag{37.6}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{37.7}$$

Если $z = x + iy$, то $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, поэтому

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{37.8}$$

Тригонометрические функции $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ определяются формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Все формулы тригонометрии остаются справедливыми и для тригонометрических функций комплексной переменной.

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются формулами:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{37.9}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{37.10}$$

Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ можно рассматривать как суммы степенных рядов, сходящихся на всей комплексной плоскости:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots \\ \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{37.11}$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \sin z &= -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z &= \operatorname{ctg} iz. \end{aligned}\right\} \tag{37.12}$$

Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{37.13}$$

Эта функция является многозначной. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется такое значение, которое получается при $k=0$; оно обозначается через $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \tag{37.14}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{37.15}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z, \quad \operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \operatorname{Ln} z / n.$$

Обратные тригонометрические функции $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции, обратные соответственно функциям $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$. Например, когда $z = \sin w$, то $w$ называется арксинусом числа $z$ и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$.

Все эти функции являются многозначными; они выражаются через логарифмические функции следующими формулами:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \tag{37.16}$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{37.17}$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \tag{37.18}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}. \tag{37.19}$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ получаются, когда рассматриваются главные значения соответствующих логарифмических функций.

Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, определяется формулой

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \tag{37.20}$$

ее главное значение равно

$$z^a = e^{a \ln z}. \tag{37.21}$$

Общая показательная функция $w = a^z$ ($a \neq 0$ – любое комплексное число) определяется формулой

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}; \tag{37.22}$$

главное значение этой многозначной функции равно

$$a^z = e^{z \ln a}. \tag{37.23}$$

П р и м е р 37.4. Доказать, что $e^{\pi i}=-1,\ \ e^{\pi i/2}=i$.

Число $\pi i$ можно рассматривать как комплексное число $z=x+iy$, где $x=0,\ y=\pi$, поэтому в соответствии с первой из формул (37.6) находим

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\cdot 0=-1.$$

Аналогично получаем второе равенство:

$$e^{\pi i/2}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\cdot 1=i.$$

П р и м е р 37.5. Найти: 1) $\cos i$; 2) $\sin(1+2i)$.

По первой из формул (37.7) получаем

$$\cos i=\frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2}=\frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2}=\frac{e^{-1}+e^{1}}{2}=\operatorname{ch}1=1{,}5431.$$

В соответствии со второй из формул (37.7) находим:

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}=\frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i}=\frac{e^{-2}e^{i}-e^{2}e^{-i}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}(\cos 1-i\sin 1)}{2i}=\frac{\cos 1(e^{-2}-e^{2})+i\sin 1(e^{2}+e^{-2})}{2i}=$$

$$=\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}\sin 1+i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}\cos 1=\operatorname{ch}2\sin 1+i\operatorname{sh}2\cos 1=$$

$$=3{,}7622\cdot 0{,}8415+i3{,}6269\cdot 0{,}5403=3{,}1650+1{,}9596i.$$

П р и м е р 37.6. Найти: 1) $\ln(-1)$; 2) $\operatorname{Ln}(-1)$; 3) $\ln i$; 4) $\operatorname{Ln} i$; 5) $\ln(3+4i)$; $\operatorname{Ln}(3+4i)$.

Поскольку $|-1|=1$, а главное значение аргумента равно $\pi$, то в соответствии с формулой (37.14) получим $\ln(-1)=\ln 1+\pi i$; по формуле (37.15) найдем: $\operatorname{Ln}(-1)=\pi i+2k\pi i=(2k+1)\pi i\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

На основании тех же формул и с учетом того, что $|i|=1,\ \ \arg i=\pi/2$, находим

$$\ln i=\ln 1+\frac{\pi}{2}i=\frac{\pi}{2}i,\ \ \operatorname{Ln} i=\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Так как $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\arg(3+4i)=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, то $\ln(3+4i)=$ $=\ln 5+i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $\operatorname{Ln}(3+4i)=\ln 5+i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi i\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

П р и м е р 37.7. Найти: 1) $i^i$; 2) $2^{1+i}$.

В соответствии с формулой (37.20) или (37.22) при $a=i,\ \ z=i$ и с учетом того, что $\operatorname{Ln} i=\frac{\pi}{2}i+2k\pi i$ (см. пример 37.6) получаем

$$i^i=e^{i\operatorname{Ln} i}=e^{i(\pi i/2+2k\pi i)}=e^{-\pi/2-2k\pi}\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Главное значение $i^i$ равно $e^{-\pi/2}$.

На основании формулы (37.22) при $a=2$, $z=1+i$ находим:

$$2^{1+i}=e^{(1+i)\operatorname{Ln}2}=e^{(1+i)(\ln 2+2k\pi i)}=e^{(\ln 2-2k\pi)+i(\ln 2+2k\pi)}=e^{\ln 2-2k\pi}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2).$$

Замечание. Здесь использована формула (37.8).

Пример 37.8. Найти: 1) $\operatorname{Arcsin}2$; $\operatorname{Arctg}(2i)$.

С помощью формул (37.13) и (37.16) находим

$$\operatorname{Arcsin}2=-i\operatorname{Ln}(2i\pm i\sqrt{3})=-i\operatorname{Ln}\left[(2\pm\sqrt{3})\,i\right]=-i\left[\ln(2\pm\sqrt{3})+i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\right]=$$

$$=\frac{\pi}{2}-i\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

В соответствии с формулами (37.13) и (37.18) получаем

$$\operatorname{Arctg}(2i)=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3}+\pi i+2k\pi i\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{i\ln 3}{2}+k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

## 37.3. Дифференцирование функций комплексной переменной

Рассмотрим функцию $w=f(z)$, определенную в некоторой области $D$ комплексной плоскости, и точки $z\in D$, $(z+\Delta z)\in D$. Обозначим: $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$.

Производной функции $w=f(z)$ в точке $z$ называется конечный предел отношения $\Delta w/\Delta z$, когда $\Delta z$ произвольным образом стремится к нулю:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\qquad(37.24)$$

Функция, имеющая производную в точке $z$, называется дифференцируемой в этой точке.

Если $z=x+iy$, $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\qquad(37.25)$$

которые называют условиями Д'Аламбера – Эйлера (или условиями Коши – Римана).

Обратно, если в некоторой точке $(x, y)$ функции $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных $x, y$ и, кроме того, удовлетворяют соотношениям (37.25), то функция $f(z)=u+iv$ является дифференцируемой в этой точке $z=x+iy$ как функция комплексной переменной $z$.

Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке $z \in D$, если она дифференцируема в ней и некоторой ее окрестности. Функция $f(z)$ называется аналитической в области $D$, если она дифференцируема в каждой ее точке.

Для всякой аналитической функции $f(z)$ производная $f'(z)$ выражается через частные производные функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Геометрическнй смысл модуля и аргумента производной.** Если функция $f(z)$ – аналитическая в точке $z_0$ и $f'(z_0) \neq 0$, то $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке $z_0$ при отображении $w = f(z)$ плоскости $z$ на плоскость $w$; точнее: при $|f'(z_0)| > 1$ будет растяжение, а при $|f'(z_0)| < 1$ – сжатие. Аргумент производной $f'(z_0)$ равен углу, на который необходимо повернуть касательную в точке $z_0$ к любой гладкой кривой на плоскости $z$, которая проходит через точку $z_0$, чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости $w$ при отображении $w = f(z)$. Отметим, что при $\varphi = \arg f'(z) > 0$ поворот осуществляется против часовой стрелки, а при $\varphi < 0$ – по часовой стрелке.

Отображение с помощью аналитической функции $w = f(z)$ называется конформным отображением.

**Диффереицироваиие элементарных функций.** Производные элементарных функций $z^n$, $\ln z$, $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ находятся по формулам:

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \ (\ln z)' = \frac{1}{z},$$

$$(e^z)' = e^z, \ (\sin z)' = \cos z, \ (\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \ (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \ (\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2},$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \ (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

**Гармоиическая функция.** Функция $\varphi(x, y)$ называется гармонической в области $D$, если она имеет в ней непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{37.26}$$

Если функция $f(z) = u + iv$ аналитическая в области $D$, то ее действительная часть $u = u(x, y)$ и мнимая часть $v = v(x, y)$ являются гармоническими функциями в этой области.

Однако, если $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ – две произвольные гармонические функции, то функция $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ вовсе не обязана быть аналитической функцией: для аналитичности $f_1(z)$ нужно, чтобы функции $u_1 = u_1(x, y)$, $v_1 = v_1(x, y)$ удовлетворяли условиям Д'Аламбера – Эйлера.

Пример 37.9. Выяснить, является ли аналитической функция $w = z^2$.

Поскольку $z = x + iy$, то $w = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2$; $w = (x^2 - y^2) + +2ixy$, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Находим частные производные функций $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Следовательно, $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$; условия (37.25) выполнены для всех точек плоскости $Oxy$. Значит, функция $w = z^2$ является аналитической на всей плоскости.

Пример 37.10. Выяснить, является ли аналитической функция $w = \bar{z}$.

Если $w = \bar{z}$, то $u + iv = x - iy$, $u = x$, $v = -y$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Следовательно, первое из условий (37.25) не выполняется. Функция $w = \bar{z}$ не имеет производной ни в одной точке плоскости и поэтому не является аналитической.

Пример 37.11. Выяснить, является ли аналитической функция $w = z\,\mathrm{Re}\,z$.

Если $w = z\,\mathrm{Re}\,z$, то $u + iv = (x + iy)x = x^2 + ixy$; $u = x^2$, $v = xy$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Равенства (37.25) выполняются только при $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом, функция $w = z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не является аналитической.

Пример 37.12. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее мнимая часть $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Поскольку

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1,\ \frac{\partial v}{\partial y} = -4y,$$

то из равенств (37.25) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1.$$

Из первого уравнения находим $u = \int -4y\,dx = -4xy + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция. Для определения функции $\varphi(y)$ продифференцируем по $y$ функцию $u = -4xy + \varphi(y)$ и подставим полученную производную во второе уравнение: $-4x + \varphi'(y) = -4x - 1$, откуда $\varphi'(y) = -1$, $\varphi(y) = -y + C$. Следовательно, $u=-4xy-y+C$, поэтому $w=u+iv=-4xy-y+C+i(2x^2-2y^2+x)=$ $=2i(x^2-y^2+2ixy)+i(x+iy)+C$, $w=f(z)=2iz^2+iz+C$, где $z=x+iy$.

Пример 37.13. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если ее действительная часть $u(x, y)=x^2-y^2-x$.

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1, \ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,$$

то из равенств (37.25) следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x-1, \ \frac{\partial v}{\partial x}=2y.$$

Из первого уравнения находим $v=\int(2x-1)\,dy=2xy-y+\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция. Для определения функции $\varphi(x)$ находим $v'_x=2y+\varphi'(x)$ и подставляем во второе уравнение: $2y+\varphi'(x)=2y$, откуда $\varphi'(x)=0$, $\varphi(x)=C$. Значит, $v=2xy-y+C$, поэтому $f(z)=u+iv=x^2-y^2-$ $-x+i(2xy-y+C)=x^2-y^2+2ixy-(x+iy)+Ci=(x+iy)^2-(x+iy)+Ci$, или $f(z)=z^2-z+Ci$.

Пример 37.14. При каком условии трехчлен $u=ax^2+2bxy+cy^2$ является гармонической функцией?

Находим частные производные первого и второго порядка: $u'_x=2ax+2by$, $u'_y=2bx+2cy$, $u''_{xx}=2a$, $u''_{yy}=2c$. Вторые частные производные удовлетворяют уравнению (37.26), т.е. $2a+2c=0$, когда $a+c=0$. При этом условии данный трехчлен будет гармонической функцией.

## 37.4. Интегрирование функций комплексной переменной

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, определенную и непрерывную в области $D$. Пусть $C$ – кусочно-гладкая дуга линии, которая целиком принадлежит области $D$; дуга $C$ ограничена точками $z_0$ (начальная) и $Z$ (конечная). Разделим дугу $C$ на $n$ элементарных дуг, занумеруем точки деления $z_k$ в направлении от точки $z_0$ до конечной точки $Z$, причем $z_n=Z$ (рис. 37.3, $n=5$). Введем обозначения: $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$ $(k=1, 2, \dots, n)$, $\lambda=\max|\Delta z_k|$. На каждой элементарной дуге $z_{k-1}$, $z_k$ выберем одну точку $z'_k$ (один из концов или внутреннюю точку) и запишем сумму

$$I_n=\sum_{k=1}^{n} f(z'_k)\,\Delta z_k\,.$$

Интегралом от функции $f(z)$ по дуге $C$ называется конечный предел суммы $I_n$ при $\lambda \to 0$:

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k')\,\Delta z_k.$$

Интеграл от функции комплексной переменной имеет следующие свойства:

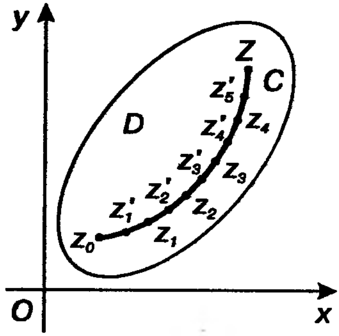


Рис. 37.3

1. $\int_C (f(z)+\varphi(z))\,dz = \int_C f(z)dz + \int_C \varphi(z)\,dz.$

2. $\int_C af(z)\,dz = a\int_C f(z)dz$ ($a$ – постоянная).

3. Если дуга $\overline{C}$ геометрически совпадает с дугой $C$, но имеет направление, противоположное направлению дуги $C$ (для $\overline{C}$ начальная точка $Z$, а конечная $z_0$), то

$$\int_{\overline{C}} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

4. Если дуга $C$ состоит из дуг $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (рис. 37.4, $n=3$), то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

5. $\int_C dz = Z - z_0.$

6. Если $|f(z)| < M$ во всех точках дуги $C$ и длина дуги $C$ равна $l$, то

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le Ml.$$

7. $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$, где $\int_C |f(z)||dz| = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} |f(z_k')||\Delta z_k|.$

Вычисление интеграла от однозначной функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексной переменной $z = x + iy$ сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy, \tag{37.27}$$

где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

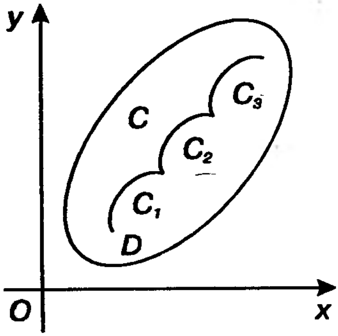

Рис. 37.4

Интеграл $\int_C f(z)\,dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования $C$.

Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области $D$, то значение интеграла $\int_C f(z)\,dz$ не зависит от линии $C$, а только от начальной и конечной точки этой линии.

Теорема 37.1 (Коши). *Для всякой функции $f(z)$, аналитической в некоторой односвязной области $D$, интеграл $\int_\Gamma f(z)\,dz$ по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру $\Gamma$, целиком принадлежащему области $D$, равен нулю:*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Если кривая $C$ задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]\,z'(t)\,dt, \tag{37.28}$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Если функция $f(z)$ аналитическая в однозначной области $D$, содержащей точки $z_0$ и $z_1$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}, \tag{37.29}$$

где $F(z)$ – первообразная для функции $f(z)$, т.е. $F'(z) = f(z)$ в области $D$.

Если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ – аналитические в односвязной области $D$, а $z_0$ и $z_1$ – произвольные точки этой области, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\varphi'(z)\,dz = [f(z)\,\varphi(z)]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)\,f'(z)\,dz. \tag{37.30}$$

Замена переменной в интегралах от функций комплексной переменной проводится аналогично случаю функции действительной переменной. Если аналитическая функция $z = \varphi(w)$ отображает взаимно однозначно линию $C_1$ в $w$-плоскости на линию $C$ в $z$-плоскости, то

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f[\varphi(w)]\,\varphi'(w)\,dw. \tag{37.31}$$

Если путь интегрирования является лучом, исходящим из точки $z_0$ или окружностью с центром в точке $z_0$, то целесообразна подстановка

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}. \tag{37.32}$$

В первом случае $\varphi = \text{const}$, $\rho$ – действительная переменная интегрирования, во втором случае $\rho = \text{const}$, а $\varphi$ – действительная переменная интегрирования.

Пример 37.15. Вычислить интеграл $\int\limits_L \bar{z}dz$, где $L$ – линия, соединяющая точки $z=-1$, $z=1$, причем: 1) $L$ – отрезок действительной оси от точки $z=-1$ до точки $z=1$; 2) $L$ – верхняя полуокружность $|z|=1$.

Поскольку для комплексного числа $z = x+iy$ сопряженным является число $\bar{z} = x - iy$, то на действительной оси $z = x$, $dz = dx$ и $\bar{z} = x$. В первом случае получаем

$$\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_{-1}^{1} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Верхнюю полуокружность $|z|=1$ можно задать так: $z = e^{i\varphi}$, где $0 \le \varphi \le \pi$, причем $\varphi$ убывает. Поскольку $\bar{z} = e^{-i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}$, то во втором случае

$$\int\limits_L \bar{z}dz = \int\limits_{\pi}^{0} e^{-i\varphi} ie^{i\varphi} d\varphi = i\int\limits_{\pi}^{0} d\varphi = -\pi i.$$

Замечание. Функция $w = \bar{z}$ не является аналитической (для функций $w = \bar{z} = x - iy$ не выполняются условия (37.25)); значение интеграла от этой функции зависит от пути интегрирования, соединяющего указанные точки.

Пример 37.16. Вычислить интеграл $\int\limits_L (1+i-2\bar{z})\,dz$, где $L$ – отре-зок прямой между точками $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$.

Перепишем подынтегральную функцию в виде (37.1)

$$1+i-2\bar{z} = 1+i-2\,(x-iy) = 1-2x+i(1+2y),$$

здесь $u(x, y) = 1-2x$, $v\,(x, y) = 1+2y$.

На основании формулы (37.27) получаем

$$\int\limits_L (1+i-2\bar{z})\,dz = \int\limits_L (1-2x)\,dx - (1+2y)\,dy + i\int\limits_L (1+2y)\,dx + (1-2x)\,dy.$$

Отрезок прямой между точками $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$ имеет уравнение $y = x$ $(0 \le x \le 1)$, поэтому $dy = dx$; пределы интегрирования соответственно равны: $a = 0$, $b = 1$. Следовательно,

$$\int_L (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_0^1 [(1-2x)-(1+2x)]\,dx + i\int_0^1 [\,(1+2x)+(1-2x)\,]\,dx =$$

$$= -4\int_0^1 x dx + 2i\int_0^1 dx = -2+2i = 2\,(i-1).$$

Пример 37.17. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{dz}{z-a}$, где $L$ – окружность радиуса $r$ с центром в точке $a$.

Переходим к новой переменной в соответствии с формулой (37.32): $z = a + re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. На основании формулы (37.31) получаем

$$\int_L \frac{dz}{z-a} = \int_{L_1} \frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int_{L_1} d\varphi.$$

Поскольку $L_1$ – отрезок действительной оси от точки 0 до точки $2\pi$, то

$$\int_{L_1} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Таким образом, $\int\limits_L \frac{dz}{z-a} = i\int\limits_{L_1} d\varphi = 2\pi i$.

Пример 37.18. Вычислить интеграл $\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)\,dz$.

Поскольку подынтегральная функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ является аналитической везде, то с помощью формулы Ньютона-Лейбница находим:

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)\,dz = (z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 =$$

$$= (2+11i) + (3+4i) - (-2-2i) - (-2i) = 7+19i.$$

Пример 37.19. Вычислить интеграл $\int\limits_0^i z\sin z dz$.

Функция $f(z) = z\sin z$ является аналитической на всей плоскости $z$, поэтому интеграл от нее не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки $z = 0$ и $z = i$.

На основании формулы интегрирования по частям (37.30) и формулы Ньютона-Лейбница получаем

$$\int_0^i z\sin z dz = \int_0^i z(-\cos z)'\,dz = -z\cos z\Big|_0^i + \int_0^i \cos z dz =$$

$$= -z\cos z\Big|_0^i + \sin z\Big|_0^i = -i\cos i + \sin i = i\,(\operatorname{sh}1 - \operatorname{ch}1) = i\,(1{,}1752 - 1{,}5431) = -0{,}3679i.$$

Замечание. Здесь использованы равенства $\operatorname{sh} z = -i\sin iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$ при $z = 1$ (см. формулы (37.12)): $\operatorname{sh}1 = -i\sin i$, $\operatorname{ch}1 = \cos i$, поэтому $-i\cos i = -i\operatorname{ch}1$, $\sin i = i\operatorname{sh}1$.

## 37.5. Интегральная формула Коши

Если функция $f(z)$ является аналитической в области $G$, ограниченной кусочно-гладким контуром $L$, и на самом контуре, то верна интегральная формула Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} \qquad (z_0 \in G), \tag{37.33}$$

где контур $L$ обходится так, чтобы область $G$ все время оставалась слева (обход контура против часовой стрелки).

Если функция $f(z)$ аналитическая в области $G$ и на ее границе $L$, то для любого натурального $n$ верна формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{37.34}$$

где $z_0 \in G$, $z \in L$, $f^{(n)}(z_0)$ – значение $n$–ой производной функции $f(z)$ в точке $z_0$.

Формулы (37.33) и (37.34) дают возможность вычислить следующие интегралы:

$$\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0) \tag{37.35}$$

$$\int_L \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0). \tag{37.36}$$

Пример 37.20. Вычислить интеграл $\int_L \frac{dz}{z^2+1}$, где $L$ – окружность радиуса $R$=1 с центром в точке $z$=$i$, причем обход контура осуществляется против часовой стрелки.

Чтобы воспользоваться формулой (37.35), преобразуем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1/(z+i)}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}, \quad f(z) = \frac{1}{z+i}.$$

Функция $f(z)=1/(z+i)$ является аналитической внутри рассматриваемого круга и на его границе, поэтому справедливы формулы (37.33) и (37.35). В соответствии с последней формулой получаем

$$\int_L \frac{dz}{z^2+1}=\int_L \frac{f(z)}{z-i}dz=2\pi i\cdot f(i)=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi.$$

Пример 37.21. Вычислить интеграл $\int_L \frac{\sin z}{z^2}\,dz$, где $L$ – любой замкнутый контур, который не проходит через точку $z=0$. Обход контура совершается против часовой стрелки.

Если точка $z=0$ находится вне контура $L$, то функция $\frac{\sin z}{z^2}$ будет аналитической на контуре $L$ и в области, ограниченной этим контуром, поэтому в соответствии с теоремой 37.1 интеграл равен нулю:

$$\int_L \frac{\sin z}{z^2}\,dz=0.$$

Если точка $z=0$ принадлежит области, ограниченной контуром $L$, то справедливыми будут формулы (37.34) и (37.36) для функции $f(z)=\sin z$, $z_0=0$, $n=1$. На основании формулы (37.36) для этого случая, поскольку $f'(z)=(\sin z)'=\cos z$, получим

$$\int_L \frac{\sin z}{z^2}\,dz=2\pi i\cos 0=2\pi i.$$

Пример 37.22. Вычислить интеграл $\int_L \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$, где $L$ – окружность $|z-2|=5$.

В области, ограниченной окружностью $|z-2|=5$, имеются две точки $z=0$, $z=6$, в которых знаменатель дроби равен нулю. Формулой (37.33) непосредственно пользоваться нельзя. В этом случае вычислить интеграл можно следующим образом. Разложим дробь $1/(z^2-6z)$ на элементарные дроби:

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-6}-\frac{1}{z}\right).$$

С учетом этого равенства и в соответствии с формулой (37.35) получаем (при $z_0=6$ и $z_0=0$ соответственно):

$$\int_L \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\int_L \frac{e^{z^2}dz}{z-6}-\frac{1}{6}\int_L \frac{e^{z^2}dz}{z}=\frac{1}{6}2\pi i e^{36}-\frac{1}{6}2\pi i=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

Пример 37.23. Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz$, где $L$ – окружность $|z-1|=1$.

Подынтегральная функция $\sin \pi z/(z^2-1)^2$ является аналитической в области $|z-1|\le 1$ везде, кроме точки $z_0=1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, аналитическую в круге $|z-1|\le 1$. Для этого запишем подынтегральную функцию в виде

$$\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}=\frac{\sin \pi z/(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

и в качестве $f(z)$ рассмотрим функцию $\sin \pi z/(z+1)^2$.

На основании формулы (37.36) при $n=1$ и $z_0=1$ получим

$$\int\limits_L \frac{\sin \pi z/(z+1)^2}{(z-1)^2}\, dz = 2\pi i f'(1).$$

Найдем производную функции $f(z)=\sin \pi z/(z+1)^2$ и ее значение при $z=1$:

$$f'(z)=\left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right)'=\frac{\pi \cos \pi z\cdot(z+1)-2\sin \pi z}{(z+1)^3},\quad f'(1)=\frac{2\pi\cos\pi}{2^3}=-\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\, dz=-\frac{\pi^2 i}{2}.$$

## 37.6. Ряд Тейлора. Ряд Лорана

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в точке $z=z_0$, разлагается в окрестности этой точки в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n, \tag{37.37}$$

коэффициенты $C_n$ которого определяются формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{37.38}$$

где $\Gamma$ – окружность с центром в точке $z=z_0$, расположенная в окрестности точки $z_0$, в которой функция $f(z)$ аналитическая. Центр окружности круга сходимости находится в точке $z_0$; эта окружность проходит через особую точку $\xi$ функции $f(z)$, ближайшую к точке $z_0$, т.е. радиус сходимости ряда (37.37) будет равен расстоянию от точки $z_0$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$.

Для функций $1/(1-z)$, $1/(1+z)$, $(1+z)^\alpha$, $\ln(1+z)$ ряды Тейлора имеют следующий вид:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+\cdots \quad (R=1), \tag{37.39}$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n+\cdots \quad (R=1), \tag{37.40}$$

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}z^n+\cdots \quad (R=1), \tag{37.41}$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots \quad (R=1). \tag{37.42}$$

Формула (37.42) определяет разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ главного значения логарифма. Чтобы получить ряд Тейлора для других значений многозначной функции $\mathrm{Ln}(1+z)$, необходимо в правой части добавить числа $2n\pi i$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$:

$$\mathrm{Ln}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+2n\pi i.$$

Функция $f(z)$, однозначная и аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$ (не исключены случаи $r=0$, $R=+\infty$), разлагается в этом кольце в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n, \tag{37.43}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots), \tag{37.44}$$

где $\Gamma$ – произвольная окружность с центром в точке $z_0$, расположенная внутри этого кольца.

В формуле (37.43) ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

называется главной частью ряда Лорана, а ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n=C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\cdots$$

называется правильной частью ряда Лорана.

**Пример 37.24.** Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=1/(2-z)$ в окрестности точки $z_0=0$.

Преобразуем эту функцию следующим образом:

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2(1-z/2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}.$$

Поскольку (см. формулу (37.39))

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\cdots \qquad (|t|<1), \tag{37.45}$$

то при $t=z/2$ получим

$$\frac{1}{1-z/2}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\cdots \qquad \left(\left|\frac{z}{2}\right|<1\right).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\cdots+\frac{z^n}{2^{n+1}}+\cdots.$$

Полученный ряд сходится при $|z/2|<1$, или $|z|<2$.

**Пример 37.25.** Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=1/(5-3z)$ в окрестности точки $z_0=1$.

Преобразуем данную функцию:

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{5-3(z-1)-3}=\frac{1}{2-3(z-1)}=\frac{1}{2(1-3(z-1)/2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}(z-1)}.$$

В соответствии с формулой (37.45) при $t=3(z-1)/2$ получаем

$$\frac{1}{1-\frac{3}{2}(z-1)}=1+\frac{3}{2}(z-1)+\frac{3^2}{2^2}(z-1)^2+\frac{3^3}{2^3}(z-1)^3+\cdots$$

Итак,

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3(z-1)/2}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2}(z-1)+\frac{3^2}{2^2}(z-1)^2+\frac{3^3}{2^3}(z-1)^3+\cdots\right],$$

$$\frac{1}{5-3z}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}(z-1)+\frac{3^2}{2^3}(z-1)^2+\cdots+\frac{3^n}{2^{n+1}}(z-1)^n+\cdots.$$

Полученный ряд сходится при $|3(z-1)/2|<1$, или $|z-1|<2/3$.

**Пример 37.26.** Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\operatorname{tg} z$ в окрестности точки $z_0=0$.

Ближайшая от начала координат особая точка функции $\operatorname{tg} z$ есть $z=\pi/2$, поэтому функция $\operatorname{tg} z$ разлагается в ряд $C_0+C_1z+C_2z^2+\ +C_3z^3+\cdots$ в круге $|z|<\pi/2$.

Заметив, что $\operatorname{tg} z$ – нечетная функция, поэтому в разложении будут только члены с нечетными показателями, использовав равенство $\sin z=\cos z\cdot\operatorname{tg} z$ и ряды для $\sin z$ и $\cos z$ (см. формулы (37.4) и (37.5)), получим

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)(C_1z+C_3z^3+C_5z^5+C_7z^7+\cdots).$$

Сравнивая коэффициенты при $z, z^3, z^5, z^7,\ldots$ в обеих частях равенства, находим $1=C_1,-\frac{1}{3!}=C_3-\frac{1}{2!}C_1,\ \frac{1}{5!}=C_5-\frac{1}{2!}C_3+\frac{1}{4!}C_1,\ -\frac{1}{7!}=C_7-\frac{1}{2!}C_5+\ \frac{1}{4!}C_3\ -\frac{1}{6!}C_1,\ldots.$

Из этих уравнений определяем коэффициенты: $C_1$=1, $C_3$=1/3, $C_5=2/15$, $C_7=17/315$.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\cdots. \tag{37.46}$$

П р и м е р 37.27. Найти первые три члена ряда Тейлора по степеням $z$ функции $f(z)=e^{\sin z}$.

Поскольку (см. формулу (37.3))

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots,$$

то при $t=\sin z$ получим

$$e^{\sin z}=1+\frac{\sin z}{1!}+\frac{\sin^2 z}{2!}+\frac{\sin^3 z}{3!}+\cdots,$$

$$e^{\sin z}=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)^3+\cdots=$$

$$=1+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)+\frac{1}{2!}z^2\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^2+\frac{1}{3!}z^3\left(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^3+\cdots=$$

$$=1+z-\frac{z^3}{3!}+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots$$

Итак,

$$e^{\sin z}=1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots.$$

П р и м е р 37.28. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z\,(1-z)}$ в ряд Лорана в следующих «кольцах»: 1) $0<|z|<1$; 2) $|z|>1$; 3) $0<|z-1|<1$.

Во всех этих кольцах данная функция является аналитической и поэтому может быть разложена в них в соответствующий ряд Лорана. Представим эту функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{1}{z\,(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}.$$

1. Поскольку $|z|<1,$ то с учетом формулы (37.39) получим

$$\frac{1}{z\,(1-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots.$$

Главная часть ряда Лорана здесь имеет только один член.

2. Если $|z|>1,$ то $|1/z|<1,$ поэтому

$$\frac{1}{z\,(1-z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{z\,(1-z)}=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\cdots.$$

В этом разложении отсутствует правильная часть.

3. Если $0<|z-1|<1,$ то функцию $\frac{1}{z}$ нужно разложить в геометрический ряд со знаменателем $z-1$:

$$\frac{1}{z\,(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+(z-1)}=-\frac{1}{1-z}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots.$$

Главная часть полученного ряда Лорана содержит только один член.

Пример 37.29. Функцию $f(z)=1/(z-1)\,(z-2)$ разложить в ряд Лорана, приняв $z_0=0$.

Данная функция имеет две особые точки: $z=1,$ $z=2.$ Следовательно, имеется три кольца с центром в точке 0, в каждом из которых функция аналитическая: 1) круг $|z|<1;$ 2) кольцо $1<|z|<2;$ 3) внешность круга $|z|\le 2,$ т. е. $|z|>2.$

Функцию $f(z)$ разлагаем на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(z-1)\,(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1};\quad \frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}.$$

1. Поскольку $|z|<1,$ $|z/2|<1,$ то с учетом (37.39) получим

$$\frac{1}{1-z/2}=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots-\frac{z^n}{2^{n+1}}+\cdots, \qquad \text{(I)}$$

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots. \qquad \text{(II)}$$

Сложив ряды (I) и (II), найдем, что

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2^2}\right)z+\left(1-\frac{1}{2^3}\right)z^2+\cdots+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n+\cdots.$$

Полученный ряд является рядом Тейлора.

2. Если $1<|z|<2$, то ряд (I) сходящийся (ибо ($|z/2|<1$), но ряд (II) расходится (так как $|z|>1$). Разложение (II) заменим другим:

$$-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right). \qquad \text{(III)}$$

Ряд (III) сходится, поскольку $|z|>1$ и $|1/z|<1$.

Сложив ряды (I) и (III), получим ряд Лорана для данной функции:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}-\frac{z}{2^2}-\frac{z^2}{2^3}-\cdots-\frac{z^n}{2^{n+1}}-\cdots-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots-\frac{1}{z^n}-\cdots,$$

в котором $C_n=-1/2^{n+1}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $C_{-n}=-1$ $(n=1,2,\ldots)$.

3. Когда $|z|>2$, то равенство (III) верно, поскольку и $|z|>1$, но ряд в правой части формулы (I) уже будет расходящимся. Разложение (I) заменим другим:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\cdots\right)$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\cdots \qquad \text{(IV)}$$

Этот ряд сходится, так как $|z|>2$ и, следовательно, $|2/z|<1$. Сложив (III) и (IV) получим разложение данной функции в ряд Лорана

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+\frac{2^3-1}{z^4}+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\cdots,$$

для которого $C_n=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $C_{-n}=2^{n-1}-1$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Пример 37.30. Функцию $f(z)=z^4/(z-2)^2$ разложить в ряд Лорана по степеням $z-2$.

Обозначим $z-2=Z$, тогда

$$f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(Z+2)^4}{Z^2}=\frac{Z^4+8Z^3+24Z^2+32Z+16}{Z^2}=$$

$$=\frac{16}{Z^2}+\frac{32}{Z}+24+8Z+Z^2,$$

т.е.

$$\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2.$$

Здесь главная часть ряда Лорана имеет два члена, а правильная – три члена. Поскольку полученное разложение содержит только конечное количество членов, то оно справедлива для любой точки плоскости, кроме $z=2$.

## 37.7. Нули функции. Особые точки

**Нули функции.** Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в точке $z_0$. Точка $z_0$ называется нулем функции $f(z)$ порядка (или кратности) $n$, когда выполняются условия:

$$f(z_0)=0,\ f'(z_0)=0,\ldots,f^{(n-1)}(z_0)=0,\ f^{(n)}(z_0)\neq 0. \tag{37.47}$$

Если $n=1$, то точка $z_0$ называется простым нулем.

Значение $z_0$ тогда и только тогда является нулем $n$-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке $z_0$, когда в некоторой ее окрестности верно равенство

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z), \tag{37.48}$$

где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0$ и $\varphi(z_0)\neq 0$.

**Особые точки.** Особой точкой функции $f(z)$ называется точка $z_0$, в которой эта функция не является аналитической. Точка $z_0$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, когда существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитическая всюду, кроме $z_0$. Особая точка $z_0$ функции $f(z)$ называется устранимой, когда существует конечный предел этой функции в данной точке: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c$. Точка $z_0$ называется полюсом функции $f(z)$, когда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

Для того, чтобы точка $z_0$ была полюсом функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем функции

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}. \tag{37.49}$$

Точку $z_0$ называют полюсом порядка $n\,(n \geq 1)$ функции $f(z)$, когда эта точка является нулем порядка $n$ для функции $\varphi(z)=1/f(z)$. В случае $n=1$ полюс называют простым.

Для того, чтобы точка $z_0$ являлась полюсом порядка $n$ функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было привести к виду

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}, \tag{37.50}$$

где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0$ и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка $z_0$ называется существенно особой точкой функции $f(z)$, когда в ней функция $f(z)$, не имеет ни конечного ни бесконечного предела.

Справедливы следующие утверждения.

1. Точка $z_0$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда ее лорановское разложение в окрестности точки $z_0$ не содержит главной части.
2. Точка $z_0$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки $z_0$ содержит только конечное число членов:
$$f(z)=\frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(z-z_0)^n \quad (C_{-k}\neq 0). \tag{37.51}$$
Наибольший из показателей степени разности $z-z_0$ в знаменателях совпадает с порядком полюса.
3. Точка $z_0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки $z_0$ содержит бесконечное множество членов.

Пример 37.31. Доказать, что точка $z_0=0$ является нулем второго порядка для функции $f(z)=1-\cos z$.

Разложим в ряды данную функцию и ее первую и вторую производные:

$$f(z)=1-\cos z=1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\right),$$

$$f(z)=\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\cdots,\quad f'(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$

$$f''(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$

Поскольку $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)\neq 0$, т.е. выполняются условия (37.47) при $n=2$, то $z_0=0$ – нуль второго порядка для функции $f(z)=1-\cos z$.

Пример 37.32. Найти порядок нуля $z_0=0$ для функции $f(z)=z^7/(z-\sin z)$.

Использовав разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора, получим

$$f(z)=\frac{z^7}{z-\sin z}=\frac{z^7}{z-(z-z^3/3!+z^5/5!-\cdots)}=\frac{z^7}{z^3/3!-z^5/5!+\cdots},$$

$$f(z)=z^4\cdot\frac{1}{1/3!-z^2/5!+\ldots};\ f(z)=z^4\varphi(z),\ \varphi(z)=\frac{1}{1/3!-z^2/5!+\cdots}.$$

Таким образом, функция $f(z)$ записана в виде (37.48), где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в точке $z_0=0$, причем $\varphi(0)=6\neq 0$. Значит, точка $z_0=0$ – нуль четвертого порядка для данной функции.

Пример 37.33. Найти нули функции $f(z)=(z^2+1)^3\sin z$ и определить их порядки.

Когда $f(z)=0$ или $(z^2+1)^3\sin z=0$, то $z^2+1=0$ либо $\sin z=0$. Из первого равенства следует, что $z=-i,\ z=i$, а со второго, что $z=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

Пусть $z=-i$, тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде (37.48): $f(z)=(z+i)^3\varphi(z)$, где функция $\varphi(z)=(z-i)^3\sin z$ является аналитической в точке $z=-i$, причем $\varphi(-i)=-8i\sin i=8\operatorname{sh}1\neq 0$. Значит, точка $z=-i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что $z=i$ – нуль третьего порядка. Функция $\sin z$ имеет нули $z=k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. Действительно,

$$\sin z=(-1)^k\sin(z-k\pi)=(-1)^k\left[(z-k\pi)-\frac{(z-k\pi)^3}{3!}+\frac{(z-k\pi)^5}{5!}-\cdots\right].$$

Это нули первого порядка для функции $f(z)=(z^2+1)^3\sin z$: $f(k\pi)=0$, но $f'(k\pi)\neq 0$, ибо $f'(z)=6z(z^2+1)^2\sin z+(z^2+1)^3\cos z$.

Пример 37.34. Доказать, что точка $z_0=0$ для функции $f(z)=(e^z-1)/z$ является устранимой особой точкой.

Действительно, поскольку $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots$, $\dfrac{e^z-1}{z}=1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots$, $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=1$, то $z_0=0$ – устранимая особая точка.

Пример 37.35. Найти полюсы функции $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

Так как для функции $\varphi(z)=1/f(z)=(z^2-1)(z^2+1)^2/z$ точки $z_1=-1,\ z_2=1$ – нули первого порядка, $z_3=-i,\ z_4=i$ – нули второго порядка, то для функции $f(z)$ точки $\pm1$ – полюсы первого порядка, точки $\pm i$ – полюсы второго порядка.

**Замечание.** Если $f(z)=P(z)/Q(z)$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, не имеющие общих корней, то корни многочлена $Q(z)$ (и только они) являются полюсами функции $f(z)$. Порядок полюсов $f(z)$ совпадает с кратностью соответствующих корней многочлена $\varphi(z)$. Например, когда

$$f(z)=\frac{z-1}{(z+i)(z-3)^2(z+4)^3},$$

то $z_1=-i$ – простой полюс, $z_2=3$ – полюс второго порядка, $z_3=-4$ – полюс третьего порядка.

**Пример 37.36.** Исследовать особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$.

Поскольку $z^3+z^2-z-1=z^2(z+1)-(z+1)=(z+1)(z^2-1)=(z+1)^2\times\times(z-1)$, то функция имеет особые точки $z=-1$, $z=1$. Исследуем точку $z=-1$. Функцию $f(z)$ приведем к виду (37.50):

$$f(z)=\frac{\sin z/(z-1)}{(z+1)^2},\ f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^2},\ \varphi(z)=\frac{\sin z}{z-1},$$

где $\varphi(z)$ – функция, аналитическая в окрестности точки $z=-1$, причем $\varphi(-1)=\dfrac{\sin(-1)}{-2}\neq 0$. Следовательно, точка $z=-1$ является полюсом второго порядка.

Аналогично, записав функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{\sin z/(z+1)^2}{z-1},\ f(z)=\frac{\varphi_1(z)}{z-1},\ \varphi_1(z)=\frac{\sin z}{(z+1)^2},$$

заключаем, что $z=1$ – простой полюс данной функции.

**Пример 37.37.** Найти особые точки функции $f(z)=e^{1/z}$ и определить их типы.

Принимая во внимание, что (см. (37.3))

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots,$$

при $t=1/z$ получим

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$$

Этот ряд сходится всюду, кроме точки $z=0$. Его можно рассматривать как разложение функции $e^{1/z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$. Поскольку главная часть ряда имеет бесконечное множество членов, то точка $z=0$ является существенно особой точкой для функции $e^{1/z}$.

## 37.8. Вычеты функций

Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0$ называется число, которое обозначают через $\operatorname{res} f(z_0)$ [1] и определяют формулой

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz, \tag{37.52}$$

где интеграл взят в положительном направлении по контуру $\gamma$. (Используются и другие обозначения: $\operatorname{res}[f(z), z_0]$, $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)$). В качестве контура $\gamma$ рассматривается окружность с центром в точке $z_0$ достаточно малого радиуса; такого, чтобы окружность не выходила за пределы области аналитичности функции $f(z)$ и не содержала внутри других особых точек этой функции. Вычет функции равен коэффициенту при минус первой степени лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$:

$$\operatorname{res} f(z_0)=C_{-1}. \tag{37.53}$$

Вычет функции в устранимой особой точке равен нулю.

Если $z_0$ — полюс $n$-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{f(z)(z-z_0)^n\}. \tag{37.54}$$

В случае простого полюса $(n=1)$

$$\operatorname{res} f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]. \tag{37.55}$$

Если функция $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ является частным двух аналитических функций

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, а $\psi'(z_0)\neq 0$, т. е. $z_0$ — простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname{res} f(z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{37.56}$$

Если $z_0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$, то для нахождения $\operatorname{res} f(z_0)$ необходимо найти коэффициент $C_{-1}$ в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$; это и будет $\operatorname{res} f(z_0)$.

---

[1] res — сокращение французского слова résidu, что означает вычет.

Т е о р е м а 37.2. *Если функция $f(z)$ является аналитической на границе $\Gamma$ области $G$ и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k). \qquad (37.57)$$

Этой теоремой (ее называют теоремой Коши о вычетах) пользуются при вычислении определенных интегралов и нахождении сумм рядов.

**Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки.** Говорят, что функция $f(z)$ является аналитической в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, если функция

$$\varphi(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

аналитична в точке $\xi = 0$. Например, функция $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ аналитична в точке $z = \infty$, поскольку функция $\varphi(\xi) = f(1/\xi) = \sin\xi$ аналитична в точке $\xi = 0$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки (кроме самой точки $z = \infty$).

Говорят, что $z = \infty$ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$ в зависимости от того, конечен, бесконечен или вовсе не существует предел этой функции при $z \to \infty$.

Критерии типа бесконечно удаленной особой точки, связанные с рядом Лорана, изменяются в сравнении с критериями для конечных особых точек.

Т е о р е м а 37.3. *Если $z = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$, то ее лорановское разложение в окрестности данной точки не содержит положительных степеней $z$; когда $z = \infty$ – полюс, то это разложение содержит конечное число положительных степеней $z$, в случае существенно особой точки – бесконечное множество положительных степеней $z$.*

При этом лорановским разложением функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки называют разложение $f(z)$ в ряд Лорана, сходящийся всюду вне круга достаточно большого радиуса $R$ с центром в точке $z = 0$ (кроме, быть может, самой точки $z = \infty$).

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в некоторой окрестности точки $z = \infty$ (кроме, быть может, самой этой точки).

Вычетом функции $f(z)$ в бесконечности называется величина

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)\,dz, \qquad (37.58)$$

где $\gamma$ – окружность достаточно большого радиуса $|z| = \rho$, которую точка $z$ проходит по часовой стрелке (при этом окрестность точки $z = \infty$ остается слева, как и в случае конечной точки $z = z_0$).

Из этого определения следует, что вычет функции в бесконечности равен коэффициенту при $z^{-1}$ в лорановском разложении $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$, взятому со знаком минус:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -C_{-1}. \tag{37.59}$$

Известные разложения функций $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ (см. п. 37.2) можно рассматривать как лорановские ряды в окрестности точки $z=\infty$. Поскольку каждый ряд содержит бесконечное множество положительных степеней $z$, то указанные функции имеют в точке $z=\infty$ существенную особенность.

Теорема 37.4. *Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости конечное число особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечности, равна нулю:*

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) = 0, \tag{37.60}$$

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

Последнее равенство используется при вычислении некоторых интегралов.

Пример 37.38. Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2}$.

Данную функцию можно записать так: $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$ и рассматривать эту сумму как разложение в ряд Лорана по степеням $z$, для которого $C_{-1} = 1$. В соответствии с формулой (37.53) находим, что $\operatorname{res} f(0) = 1$ ($z_0 = 0$ – особая точка).

Замечание. Вычет можно найти и с помощью формулы (37.54). Поскольку $z_0 = 0$ – полюс второго порядка, то

$$\operatorname{res} f(0) = \frac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \frac{d\left(\left((z+1)/z^2\right)\cdot z^2\right)}{dz} = \lim_{z\to 0} \frac{d(z+1)}{dz} = 1.$$

Пример 37.39. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-4)}$.

Эта функция имеет два простых полюса: $z=2$ и $z=4$. В соответствии с формулой (37.55) находим:

$$\operatorname{res} f(2) = \lim_{z\to 2} \frac{z}{(z-2)(z-4)}\cdot(z-2) = \lim_{z\to 2} \frac{z}{z-4} = \frac{2}{2-4} = -1,$$

$$\operatorname{res} f(4) = \lim_{z\to 4} \frac{z(z-4)}{(z-2)(z-4)} = \lim_{z\to 4} \frac{z}{z-2} = \frac{4}{4-2} = 2.$$

Пример 37.40. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^3}$.

Поскольку $z_0=1$ – полюс третьего порядка, то на основании формулы (37.54) получаем

$$\operatorname{res} f(1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2((z^2/(z-1)^3)\cdot(z-1)^3)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\frac{d^2(z^2)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\cdot 2=1.$$

Пример 37.41. Найти вычет функции $f(z)=z^2\cos\dfrac{1}{z-1}$.

Точка $z_0=1$ является единственной конечной особой точкой функции $f(z)$. Чтобы найти $\operatorname{res} f(1)$, разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=1$; при этом используем ряд Тейлора для $\cos t$ (см. (37.5))

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots$$

при $t=1/(z-1)$. Это разложение принимает вид

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}=[1+(z-1)]^2\left[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\dots\right]=$$

$$=[1+2(z-1)+(z-1)^2]\left[1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\dots\right].$$

Нас интересует только коэффициент при $1/(z-1)$. Соответствующий член ряда имеет вид $2(z-1)\cdot\left(\dfrac{-1}{2!(z-1)^2}\right)=\dfrac{-1}{z-1}$. Значит, $C_{-1}$=-1, поэтому $\operatorname{res} f(1)=C_{-1}=-1$.

Пример 37.42. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_\gamma\frac{\ln(z+2)}{z^2}\,dz$, где $\gamma$ – окружность $|z|=1/2$, которую точка $z$ проходит в положительном направлении.

В круге $|z|\le 1/2$ содержится только одна особая точка подынтегральной функции – это полюс второго порядка $z=0$. Вычет функции $f(z)$ в точке $z=0$ найдем в соответствии с формулой (37.54):

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{\ln(z+2)}{z^2}\right]'=\lim_{z\to 0}[\ln(z+2)]'=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}.$$

На основании формулы (37.52) получаем:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{\ln(z+2)}{z^2}\,dz,\quad \int_\gamma\frac{\ln(z+2)}{z^2}\,dz=\pi i.$$

**Пример 37.43.** Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$ в следующих случаях: 1) $\gamma$ – окружность $|z|=1$; 2) $\gamma$ – окружность $|z|=3$; 3) $\gamma$ – окружность $|z|=5$.

В соответствии с формулой (37.55) найдем сначала вычеты функции $f(z)=1/z(z+2)(z+4)$ относительно простых полюсов $z_1=0, z_2=-2, z_3=-4$:

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+2)(z+4)}=\frac{1}{8},$$

$$\operatorname{res} f(-2)=\lim_{z\to -2}(z+2)f(z)=\lim_{z\to -2}\frac{1}{z(z+4)}=-\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{res} f(-4)=\lim_{z\to -4}(z+4)f(z)=\lim_{z\to -4}\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{8}.$$

Интегралы найдем с помощью формулы (37.57).

В первом случае в области, ограниченной окружностью $|z|=1$, находится только один полюс $z=0$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi i}{4}.$$

Во втором случае окружность $|z|=3$ ограничивает область, которая содержит полюсы $z_1=0$ и $z_2=-2$, тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{4}.$$

В третьем случае внутри области, ограниченной контуром $|z|=5$, находятся три полюса: $z_1=0$, $z_2=-2$, $z_3=-4$, поэтому

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=0.$$

*Глава 38*

# ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## 38.1. Оригинал и изображение

Функцией-оригиналом называется любая комплекснозначная функция $f(t)$ вещественной переменной $t$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $f(t)$ интегрируема на любом конечном промежутке оси $Ot$ (локально интегрируема).
2. $f(t)=0$ для всех $t<0$.
3. $|f(t)|$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $M>0$ и $s$, что для всех $t$

$$|f(t)| \le Me^{st}.$$

Нижняя грань $s_0$ всех чисел $s$, для которых выполняется это неравенство, называется показателем роста функции $f(t)$.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$\eta(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t>0,\\ 0 \text{ при } t<0.\end{cases} \tag{38.1}$$

Очевидно, что

$$\varphi(t)\,\eta(t)=\begin{cases}\varphi(t) \text{ при } t>0,\\ 0 \text{ при } t<0;\end{cases}$$

если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $\varphi(t)\,\eta(t)$ является функцией-оригиналом. Для сокращения записи вместо $\varphi(t)\,\eta(t)$ пишут $f(t)$, считая, что $f(t)=0$ при $t<0$.

Изображением функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p=s+i\sigma$, определяемая формулой

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt. \tag{38.2}$$

Интеграл в правой части равенства называют интегралом Лапласа, а переход от оригинала к его изображению – преобразованием Лапласа.

Тот факт, что $F(p)$ является изображением $f(t)$, символически записывают так:

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

и называют операционным (или операторным) равенством. Употребляют и другие обозначения, например: $F(p)\to f(t)$; $F(p)=Lf(t)$; $f(t)=L^{-1}F(p)$.

Теорема 38.1. *Функция* $F(p)$ *определена в полуплоскости* $\operatorname{Re}p=s>s_0$, *где* $s_0$ *– показатель роста* $f(t)$, *и является в этой полуплоскости аналитической функцией.*

Следствие. *Изображение* $F(p)\to 0$, *если* $p\to\infty$ *так, что* $\operatorname{Re}p=s$ *неограниченно возрастает, а* $p$ *находится в полуплоскости* $\operatorname{Re}p>s_0$:

$$\lim_{p\to\infty}F(p)=0.$$

Теорема 38.2. *Преобразование Лапласа*

$$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\,e^{-pt}dt$$

*единственно в том смысле, что две функции* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$, *имеющие одинаковые преобразования Лапласа, совпадают во всех точках непрерывности для всех* $t>0$.

Пример 38.1. Показать, что функция

$$f(t)=\begin{cases}e^{3t}\sin 2t \text{ при } t>0,\\ 0 \text{ при } t<0,\end{cases}$$

является функцией-оригиналом.

Убедимся в том, что все три условия, определяющие функцию-оригинал, выполняются для данной функции $f(t)$. Действительно, функция $f(t)$ локально интегрируема: интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2}e^{3t}\sin 2t\,dt$$

существует для любых конечных $t_1$ и $t_2$. Условие 2 выполняется в соответствии с определением функции $f(t)$ ($f(t)=0$ при $t<0$). Наконец, $\left|e^{3t}\sin 2t\right|\le e^{3t}$ для любых вещественных $t$, так что в качестве $M$ в условии 3 можно взять число $\ge 1$, $s_0=3$.

Пример 38.2. Найти изображение единичной функции Хевисайда, определяемой формулой (38.1).

В соответствии с формулой (38.2) получаем

$$F(p)=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-pt}dt=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-pt}dt=\lim_{a\to+\infty}\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^a=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-pa}\right).$$

Если $\operatorname{Re}p>0$, то $\lim\limits_{a\to+\infty}e^{-pa}=0$; в этом случае

$$\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt=\frac{1}{p}, \qquad (38.3)$$

$$F(p)=\frac{1}{p},\quad \eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}. \qquad (38.4)$$

**З а м е ч а н и е**. Изображение (38.4) получено при условии $\operatorname{Re} p = s > 0$. При $s \le 0$ интеграл Лапласа не существует. Однако функция $1/p$ аналитическая на всей плоскости комплексной переменной $p$, кроме $p = 0$, и ее значение для $\operatorname{Re} p < 0$ можно рассматривать как значения изображения $F(p)$ при $\operatorname{Re} p < 0$. Для функции $f(t) = 1$ равенство $1 \risingdotseq 1/p$ будет выполнятся для всех $p \ne 0$.

**П р и м е р** 38.3. Найти изображение функции $f(t) = e^{kt}$.

Принимая во внимание равенство (38.3), получаем

$$e^{kt} \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-k)t} dt = \frac{1}{p-k},$$

$$e^{kt} \risingdotseq \frac{1}{p-k}, \tag{38.5}$$

когда $\operatorname{Re}(p-k) > 0$. Поскольку функция $1/(p-k)$ аналитическая при всех $p \ne k$, то ее можно рассматривать как изображение функции $e^{kt}$ для таких $p$.

## 38.2. Основные правила и формулы операционного исчисления

**Свойство линейности.** Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, а $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные, то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \risingdotseq C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \tag{38.6}$$

В частности, изображение суммы функций определяется формулой

$$f_1(t) + f_2(t) \risingdotseq F_1(p) + F_2(p).$$

**Дифференцирование оригинала.** Если функции $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$\left.\begin{aligned}
&f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),\\
&f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),
\end{aligned}\right\} \tag{38.7}$$

где $f^{(k)}(0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ есть $\lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$, $f(0) = \lim\limits_{t \to +0} f(t)$.

Если $f(0)=0$, $f^{(k)}(0)=0$ $(k=1,2,...,n\text{-}1)$, то эти формулы принимают вид

$$f'(t) \doteqdot pF(p),\quad f''(t) \doteqdot p^2F(p),\dots,\ f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p). \tag{38.8}$$

**Интегрирование оригинала.** Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на $p$: если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \tag{38.9}$$

**Дифференцирование изображения.** Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$: если $F(p) \doteqdot f(t)$, то

$$F'(p) \doteqdot -tf(t); \tag{38.10}$$

в общем случае

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t). \tag{38.11}$$

**Интегрирование изображения.** Если интеграл $\int_p^{+\infty} F(p)\,dp$ сходится, то он является изображением функции $f(t)/t$:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} F(u)\,du. \tag{38.12}$$

С помощью формулы (38.12) можно вычислять некоторые несобственные интегралы. Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ сходится, то

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} F(p)\,dp, \tag{38.13}$$

где интеграл в правой части вычисляется по положительной полуоси.

**Предельные соотношения.** Если $F(t) \doteqdot f(p)$, то

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0), \tag{38.14}$$

где $p\to\infty$ вдоль положительного направления вещественной оси.

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и существует $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty). \tag{38.15}$$

Пример 38.4. Найти изображения тригонометрических функций: 1) $\sin\alpha t$; 2) $\cos\alpha t$.

На основании формулы (38.5) получаем

$$e^{i\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-i\alpha}, \quad e^{-i\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p+i\alpha}.$$

В соответствии с формулой (38.6) при $f_1(t)=e^{i\alpha t}$, $f_2(t)=e^{-i\alpha t}$, $C_1=1/2i$, $C_2=-1/2i$ находим:

$$\sin\alpha t=\frac{1}{2i}(e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\alpha}-\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\alpha}{p^2+\alpha^2}=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2};$$

при $C_1=1/2$ $C_2=1/2$ получим

$$\cos\alpha t=\frac{1}{2}(e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha}+\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{p}{p^2+\alpha^2}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha t \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \cos\alpha t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\alpha^2}.$$

Пример 38.5. Найти изображения гиперболических функций: 1) $\operatorname{sh}\alpha t$; 2) $\operatorname{ch}\alpha t$.

Принимая во внимание формулы (38.5) и (38.6), находим:

$$\operatorname{sh}\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},$$

$$\operatorname{ch}\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sh}\alpha t \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}, \quad \operatorname{ch}\alpha t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Пример 38.6. Найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t$ с помощью дифференцирования оригинала.

Используем первую из формул (38.7): $f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0)$. Поскольку $f(0)=0$, то формула принимает вид $f'(t) \risingdotseq pF(p)$; $f'(t)=2\sin t\cos t=$ $=\sin 2t$, $\sin 2t \risingdotseq pF(p)$. Как известно (см. пример 38.4), $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$, поэтому $\frac{2}{p^2+4}=pF(p)$, откуда $F(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}$, $\sin^2 t \risingdotseq \frac{2}{p(p^2+4)}$.

**Пример 38.7.** Найти изображение функции $\int\limits_0^t e^\tau d\tau$.

В соответствии с формулой (38.5), при $k=1$, получим $e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}$. На основании формулы (38.9) найдем, что

$$\int\limits_0^t e^\tau d\tau \risingdotseq \frac{1/(p-1)}{p}; \quad \int\limits_0^t e^\tau d\tau \risingdotseq \frac{1}{p(p-1)}.$$

**Пример 38.8.** Найти изображение функции $f(t)=t^n$, где $n$ – натуральное число.

Из равенства $1 \risingdotseq 1/p$ (см. замечание к примеру 38.2), пользуясь правилом интегрирования оригинала, находим:

$$\int\limits_0^t 1\cdot d\tau = t \risingdotseq \frac{1}{p^2}; \quad \int\limits_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{1\cdot 2} \risingdotseq \frac{1}{p^3}; \quad \int\limits_0^t \frac{\tau^2}{1\cdot 2} d\tau = \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3} \risingdotseq \frac{1}{p^4};$$

$$\int\limits_0^t \frac{\tau^{n-1} d\tau}{1\cdot 2 \ldots (n-1)} = \frac{t^n}{1\cdot 2 \ldots n} \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}, \quad t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

**Пример 38.9.** Найти изображения функций: 1) $t\sin\alpha t$; 2) $t\cos\alpha t$.

Поскольку $\sin\alpha t \risingdotseq \alpha/(p^2+\alpha^2)$, $\cos\alpha t \risingdotseq p/(p^2+\alpha^2)$ (см. пример 38.4), то с помощью правила дифференцирования изображения (см формулу (38.10)) получим:

$$-t\sin\alpha t \risingdotseq \frac{0\cdot(p^2+\alpha^2)-2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2} = -\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2},$$

$$-t\cos\alpha t \risingdotseq \frac{1\cdot(p^2+\alpha^2)-2p\cdot p}{(p^2+\alpha^2)^2} = \frac{p^2+\alpha^2-2p^2}{(p^2+\alpha^2)^2} = -\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

Таким образом,

$$t\sin\alpha t \risingdotseq \frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}, \quad t\cos\alpha t \risingdotseq \frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}.$$

**Пример 38.10.** Найти изображение функции $f(t)=t^n e^{\alpha t}$, где $n$ – натуральное число.

Из формулы $e^{\alpha t} \risingdotseq 1/(p-\alpha)$ (см. равенство (38.5)) $n$-кратным дифференцированием изображения (см. формулу (38.11)) получаем

$$(-t)^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{(-1)^n n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

**Пример 38.11.** Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

На основании равенства $\sin t \risingdotseq 1/(p^2+1)$ (см. пример 38.4) и правила интегрирования изображения (см. формулу (38.12)) находим

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u \Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p,$$

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg} p.$$

(Для многозначных функций $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Ln} z$ и т. д. рассматривают ветви, для которых $\operatorname{arctg} 1=\pi/4$, $\ln 1 = 0$ и т. д).

**Пример 38.12.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$

Принимая во внимание равенство $\sin t \risingdotseq 1/(p^2+1) = F(p)$, с помощью формулы (38.13) получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 38.13.** Проверить, выполняются ли предельные соотношения для следующих функций: $\eta(t)$, $\sin t$, $e^{\alpha t}$, где $\alpha$ – вещественное число.

Равенство (38.14) выполняется для всех этих функций. Действительно, поскольку $\eta(t) \risingdotseq 1/p$, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $e^{\alpha t} \risingdotseq 1/(p-\alpha)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} p\dfrac{1}{p} = 1 = \eta(0)$,

$\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{p^2+1} = 0 = \sin 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{p-\alpha} = 1 = e^0$.

Равенство (38.15) для функции $\sin t$ не выполняется, так как $\lim\limits_{t\to\infty} \sin t$ не существует; для функции $e^{\alpha t}$ при $\alpha>0$ оно также не выполняется по той же причине. Для функций $\eta(t)$ и $e^{\alpha t}$ при $\alpha<0$ это равенство будет справедливым;

$\lim\limits_{p\to 0} p\dfrac{1}{p} = \lim\limits_{t\to+\infty} \eta(t) = 1$, $\lim\limits_{p\to 0} \dfrac{p}{p-\alpha} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 0$.

## 38.3. Основные теоремы операционного исчисления

**Теорема 38.3.** (Теорема подобия). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\lambda > 0$, то умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению изображения и его аргумента на это число:*

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{38.16}$$

**Теорема 38.4.** (Теорема смещения). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\alpha$ – произвольное комплексное число, то изменение (смещение) аргумента изображения на величину $\alpha$ приводит к умножению оригинала на величину $e^{\alpha t}$:*

$$F(p-\alpha) \risingdotseq e^{\alpha t} f(t). \tag{38.17}$$

**Теорема 38.5.** (Теорема запаздывания). *Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\Theta > 0$, то запаздывание аргумента оригинала на положительное число $\Theta$ приводит к умножению изображения на величину $e^{-p\Theta}$:*

$$f(t-\Theta) \risingdotseq e^{-p\Theta} F(p). \tag{38.18}$$

**Теорема 38.6.** (Теорема умножения). *Если $F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$, $F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$, то*

$$F_1(p)\, F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{38.19}$$

**Замечание.** Интеграл в правой части этой формулы называется складкой, или сверткой функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, а операция получения складки называется свертыванием функций. В связи с этим теорему умножения можно сформулировать так: умножение изображений приводит к свертыванию их оригиналов. Эту теорему называют также теоремой свертывания и теоремой Бореля.

Свертка функций обладает переместительным свойством:

$$F_1(p)\, F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_2(\tau)\, f_1(t-\tau)\, d\tau.$$

Поскольку функция $\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$ равна нулю при $t = 0$, то, пользуясь правилом дифференцирования оригинала, получаем следующую запись теоремы умножения:

$$pF_1(p)\, F_2(p) \risingdotseq \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{38.20}$$

Интеграл в правой части этой формулы называется интегралом Дюамеля. Если выполнить дифференцирование в интеграле Дюамеля, то теорема умножения примет вид

$$pF_1(p)F_2(p) \doteqdot f_1(t)f_2(0)+\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau,$$

или, учитывая равноправность функций $F_1(p)$ и $F_1(p)$,

$$pF_1(p)F_2(p) \doteqdot f_2(t)f_1(0)+\int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)\,d\tau.$$

Примененное здесь правило дифференцирования интеграла по переменной, входящей в качестве параметра в подынтегральную функцию и в верхний предел интегрирования, определяется формулой

$$\left(\int_a^t f(x,t)\,dx\right)' = f(t,t)+\int_a^t f_t'(x,t)\,dx. \tag{38.21}$$

Последние две записи теоремы умножения можно видоизменить, если учесть, что

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f_2'(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau$$

и

$$\int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$$

Теорема 38.7. *Если $f(t)$ — оригинал с периодом $\omega>0$, то его изображение выражается формулой*

$$F(p)=\frac{\varphi(p)}{1-e^{-\omega p}}, \tag{38.22}$$

*где*

$$\varphi(p)=\int_0^\omega e^{-pt}f(t)\,dt. \tag{38.23}$$

Эту теорему называют теоремой об изображении периодического оригинала.

Теорема 38.8. *Если $F(p)$ — аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки и равна в ней нулю и если лорановское разложение $F(p)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид*

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{p^k}, \tag{38.24}$$

*то оригиналом $F(p)$ служит функция*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{(k-1)!}t^{k-1}, \tag{38.25}$$

*причем этот ряд сходится при всех $t$.*

Эту теорему называют первой теоремой разложения.

Пример 38.14. Найти изображение $\sin\beta t$, зная изображение $\sin t$.

Поскольку $\sin t \doteqdot 1/(p^2+1)$, то в соответствии с теоремой подобия (см. (38.16)) получаем

$$\sin\beta t \doteqdot \frac{1}{\beta}\frac{1}{(p/\beta)^2+1}=\frac{1}{\beta}\frac{\beta^2}{p^2+\beta^2};\quad \sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{p^2+\beta^2}.$$

Пример 38.15. Найти изображение функций: 1) $e^{\alpha t}\sin\beta t$; 2) $e^{\alpha t}\cos\beta t$.

Пользуясь формулами

$$\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{p^2+\beta^2},\quad \cos\beta t \doteqdot \frac{p}{p^2+\beta^2},$$

с помощью теоремы смещения находим

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},\quad e^{\alpha t}\cos\beta t \doteqdot \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Пример 38.16. Найти изображение функции $\sin(t-1)\,\eta(t-1)$, где $\eta(t)$ – функция Хевисайда (см. 38.1).

Вид функции показывает, что здесь имеется запаздывание аргумента на величину $\Theta=1$. С помощью теоремы запаздывания и формулы $\sin t\to 1/(p^2+1)$ получаем

$$\sin(t-1)\,\eta(t-1) \doteqdot \frac{e^{-p}}{p^2+1}.$$

Замечание. Если бы запаздывания аргумента не было, т.е. рассматривалась функция $\sin(t-1)\,\eta(t)$ (такую функцию условились обозначать просто $\sin(t-1)$), то изображение имело бы совсем другой вид, а именно:

$$\sin(t-1)=\sin t\cos 1-\cos t\sin 1 \doteqdot \frac{\cos 1}{p^2+1}-\frac{p\sin 1}{p^2+1}.$$

Пример 38.17. Найти изображение функции $f(t)=|\sin t|$.

Поскольку $|\sin t|$ – периодическая функция с периодом $\omega=\pi$, то изображение $F(p)=\varphi(p)/(1-e^{\pi p})$ (см. формулу (38.22)), где

$$\varphi(p)=\int_0^{\pi}e^{-pt}|\sin t|\,dt=\int_0^{\pi}e^{-pt}\sin t\,dt.$$

Дважды проинтегрировав по частям, получим

$$\varphi(p)=-e^{-pt}\left.\frac{\cos t+p\sin t}{p^2+1}\right|_0^{\pi}=\frac{e^{-\pi p}+1}{p^2+1}.$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{e^{-\pi p}+1}{1-e^{-\pi p}}=\frac{1}{p^2+1}\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2}.$$

**Пример 38.18.** Найти изображение периодического оригинала $f(t)$ с периодом $\omega=2\pi$, который равен $\sin t$ при $0<t<\pi$ и нулю при $\pi<t<2\pi$.

Оригинал для $t>0$ можно записать так: $f(t)=\sin t\cdot\eta(\sin t)$. Искомое изображение имеет вид $F(p)=\varphi(p)/(1-e^{2\pi p})$, где

$$\varphi(p)=\int_0^{2\pi}e^{-pt}\sin t\,\eta(\sin t)\,dt=\int_0^{\pi}e^{-pt}\sin t\,dt=\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1}$$

(см. пример 38.17). Итак,

$$F(p)=\frac{1+e^{-\pi p}}{(p^2+1)(1-e^{-2\pi p})}=\frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$$

**Пример 38.19.** Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p)=$ $=\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$.

Изображению придадим другой вид: $\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}=p\,\dfrac{1}{p^4}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$ и будем считать, что $F_1(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\risingdotseq\sin t=f_1(t)$, $F_2(p)=\dfrac{1}{p^4}\risingdotseq\dfrac{t^3}{6}=f_2(t)$; здесь использовано равенство $t^n\risingdotseq\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ при $n=3$ (см. пример 38.8). С помощью теоремы умножения (см. формулу (38.20)) получаем

$$p\,\frac{1}{p^4}\cdot\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{6}\sin\tau d\tau.$$

В соответствии с формулой (38.21) находим производную

$$\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^3}{6}\sin\tau d\tau=\frac{1}{6}\left\{[(t-\tau)^3\sin\tau]_{\tau=t}+3\int_0^t(t-\tau)^2\sin\tau d\tau\right\}\to$$

$$\to\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)^2\sin\tau d\tau.$$

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \sin\tau d\tau = \frac{1}{2}[(t-\tau)^2(-\cos\tau) - 2(t-\tau)\sin\tau + 2\cos\tau]\Big|_0^t = t^2/2 + \cos t - 1.$$

Следовательно, $f(t) = t^2/2 + \cos t - 1$.

Пример 38.20. Найти оригинал $f(t)$ для изображения $F(p) = \ln(1 + 1/p)$.

Использовав разложение функции $\ln(1+z)$ в ряд Тейлора (см. п. 37.6)

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots \quad (|z| < 1),$$

получим

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{np^n} + \cdots \quad (|p| > 1).$$

В соответствии с теоремой (38.8) находим оригинал

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\frac{t}{1!} + \frac{1}{3}\frac{t^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{t}\left[t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!} + \cdots\right] = \frac{1}{t}\left\{1 - \left[1 - t + \frac{t^2}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{t^n}{n!} + \cdots\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{t}(1 - e^{-t}).$$

## 38.4. Решение дифференциальных уравнений и их систем

Методы операционного исчисления применяются при интегрировании дифференциальных уравнений и их систем. С помощью этих методов интегрирование некоторых классов линейных дифференциальных уравнений сводится к решению алгебраических уравнений; из алгебраического уравнения находят изображение решения данного уравнения, после чего по изображению восстанавливают само решение.

Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(t), \tag{38.26}$$

удовлетворяющее нулевым начальным данным

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0. \tag{38.27}$$

Предположим, что искомая функция $y = y(t)$, ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ и данная функция $f(t)$ являются оригиналами. Обозначим изображения функций

$y(t)$ и $f(t)$, соответственно, через $Y(p)$ и $F(p)$ или короче $Y$ и $F$. Пользуясь ими и правилом дифференцирования оригинала (см. формулы (38.8)), находим

$$y \to Y,\ y' \to pY,\ y'' \to p^2 Y, \ldots,\ y^{(n-1)} \to p^{n-1}Y,\ y^{(n)} \to p^n Y. \tag{38.28}$$

Поскольку $f(t) \doteqdot F(p)$, то на основании свойства линейности (см. формулу (38.6)) получим уравнение в изображениях

$$p^n Y + a_1 p^{n-1} Y + \cdots + a_n Y = F(p), \tag{38.29}$$

которое соответствует данному дифференциальному уравнению. Из уравнения (38.29) найдем изображение $Y$ искомого решения

$$Y = \frac{F(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n}. \tag{38.30}$$

Найдя изображение $F(p)$ функции $f(t)$, получим изображение $Y$ и вопрос будет сведен к отысканию соответствующего оригинала, который является решением данного дифференциального уравнения и удовлетворяет нулевым начальным данным.

Таким образом, чтобы решить уравнение (38.26), необходимо знать, как по оригиналу найти изображение и по данному изображению – оригинал.

При интегрировании дифференциальных уравнений находит применение интеграл Дюамеля (см. формулу (38.20)). Пусть необходимо найти решение дифференциального уравнения (38.26), удовлетворяющее условиям (38.27). Запишем дифференциальное уравнение с такой же левой частью и правой частью, равной единице:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z = 1. \tag{38.31}$$

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным нулевым данным:

$$z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0. \tag{38.32}$$

Обозначим изображение решения $z(t)$ через $Z$, получим уравнение в изображениях

$$p^n Z + a_1 p^{n-1} Z + \cdots + a_{n-1} p Z + a_n Z = \frac{1}{p}, \tag{38.33}$$

откуда

$$Z = \frac{1}{p(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_{n-1} p + a_n)}. \tag{38.34}$$

Из этого равенства и равенства (38.30) находим, что

$$Y = pF(p)\,Z(p). \tag{38.35}$$

Пользуясь интегралом Дюамеля, получаем

$$y = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)\, z(t-\tau)\, d\tau,$$

или

$$y=\frac{d}{dt}\int_0^t z(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (38.36)$$

Таким образом, когда известно решение уравнения (38.26) при $f(t)=1$, удовлетворяющее нулевым начальным данным, то можно сразу найти в квадратурах решение этого уравнения для любой функции $f(t)$ при тех же начальных данных.

Замечание 1. Если начальные данные не являются нулевыми, то изображения производных находятся с помощью формул (38.7). Например, если $y(0)\neq 0$, то $y'\to pY-y(0)$ и т. д.

Замечание 2. Если за начальный момент взято значение $t_0\neq 0$, а не $t=0$, то вводят новую переменную $\tau$ по формуле $\tau=t-t_0$, $t=\tau+t_0$, тогда $\tau=0$ при $t=t_0$.

С помощью операционного исчисления можно найти решения систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а в некоторых случаях – решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, решения дифференциальных уравнений в частных производных.

Пример 38.21. Найти решение уравнения $y''-y'=1$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Обозначим через $Y$ изображение функции $y(t)$: $y \doteqdot Y$, тогда $y'\doteqdot pY$, $y''\doteqdot p^2Y$. Поскольку $1\doteqdot 1/p$, то уравнение в изображениях имеет вид $p^2Y-pY=1/p$, откуда

$$Y=\frac{1}{p(p^2-p)}=\frac{1-p^2+p^2}{p^2(p-1)}=\frac{-1-p}{p^2}+\frac{1}{p-1};\quad Y=-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}.$$

Принимая во внимание формулы $\frac{1}{p^2}\doteqdot t$, $\frac{1}{p}\doteqdot 1$, $\frac{1}{p-1}\doteqdot e^t$, получаем искомое решение $y=e^t-t-1$. Легко проверить, что эта функция удовлетворяет данному уравнению и нулевым начальным данным.

Пример 38.22. Найти решение уравнения $y''+y=2\cos t$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

Изображение функции $y$ обозначим через $Y$, а изображения производных найдем с помощью формул (38.7):

$$y\doteqdot Y,\ y'\doteqdot pY-y(0)=pY,\ y''\doteqdot p^2Y-pY(0)-Y'(0)=p^2Y+1.$$

Поскольку $\cos t \doteqdot p/(p^2+1)$, то уравнение в изображениях принимает вид $p^2Y+1+Y=2p/(p^2+1)$, откуда

$$Y=\frac{2p}{(p^2+1)^2}-\frac{1}{p^2+1}.$$

Так как (см. примеры 38.4 и 38.9)

$$\frac{1}{p^2+1}\doteqdot\sin t,\quad \frac{2p}{(p^2+1)^2}\doteqdot t\sin t,$$

то $y=t\sin t-\sin t$. Получено решение $y=(t-1)\sin t$.

Пример 38.23. Проинтегрировать уравнение $y''+4y=8\sin 2t$ при начальных условиях: $y(0)=C_1$, $y'(0)=C_2$.

Обозначим через $Y$ изображение решения $y(t)$, а изображения производных найдем с помощью формул (38.7): $y\doteqdot Y$, $y''\doteqdot pY-C_1$, $y''\doteqdot p^2Y-C_1p-C_2$.

Поскольку $\sin 2t\doteqdot 2/(p^2+4)$ (см. пример 38.4), то операторное уравнение принимает вид

$$p^2Y-C_1p-C_2+4Y=\frac{16}{p^2+4},\ \text{или}\ (p^2+4)\,Y=\frac{16}{p^2+4}+C_1p+C_2,$$

откуда

$$Y=\frac{16}{(p^2+4)^2}+C_1\,\frac{p}{p^2+4}+C_2\,\frac{1}{p^2+4}.$$

Для двух последних слагаемых имеем:

$$\frac{p}{p^2+4}\doteqdot\cos 2t,\quad \frac{1}{p'+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+4}\doteqdot\frac{1}{2}\sin 2t.$$

Что касается оригинала для первого слагаемого, то его найдем с помощью формулы $4p/(p^2+4)^2\to t\sin 2t$ (см. пример 38.9) и правила интегрирования оригинала (см. формулу (38.9)) следующим образом:

$$\frac{16}{(p^2+4)^2}=4\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{4p}{(p^2+4)^2}\to 4\int_0^t\tau\sin 2\tau d\tau=$$

$$=4\left[-\frac{1}{2}\tau\cos 2\tau+\frac{1}{4}\sin 2\tau\right]\Bigg|_0^t=\sin 2t-2t\cos 2t.$$

Значит, искомое решение имеет вид

$$y=C_1\cos 2t+\frac{C_2}{2}\sin 2t+\sin 2t-2t\cos 2t,$$

или

$$y=C_1\cos 2t+C\sin 2t-2t\cos 2t \quad (C=C_2/2+1).$$

Пример 38.24. Проинтегрировать уравнение $y''+y'=t$ при начальных данных $y(0)=y'(0)=0$.

Найдем сначала решение уравнения $z''+z'=1$ при нулевых начальных данных. Уравнение в изображениях имеет вид $p^2Z+pZ=\frac{1}{p}$, откуда

$$Z=\frac{1}{p^2(p+1)}=\frac{p^2+(1-p^2)}{p^2(p+1)}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p},\quad z(t)=e^{-t}+t-1.$$

На основании формулы (38.36) получаем

$$y(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t(e^{-\tau}+\tau-1)(t-\tau)d\tau=[(e^{-\tau}+\tau-1)(t-\tau)]_{\tau=t}+$$

$$+\int_0^t(e^{-\tau}\tau-1)\,d\tau=\left(-e^{-\tau}+\frac{\tau^2}{2}-\tau\right)\Bigg|_0^t;\quad y(t)=\frac{t^2}{2}-t-e^{-t}+1.$$

Пример 38.25. Найти решение уравнения $y''-y'-6y=2e^{4t}$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Операторное уравнение в заданном случае принимает вид

$$p^2F(p)-pF(p)-6F(p)=\frac{2}{p-4},$$

откуда

$$F(p)=\frac{2}{(p-4)(p^2-p-6)}=\frac{2}{(p-4)(p-3)(p+2)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби, находим

$$F(p)=\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-4}.$$

Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$y=\frac{1}{15}e^{-2t}-\frac{2}{5}e^{3t}+\frac{1}{3}e^{4t}.$$

Пример 38.26. Найти решение задачи Коши: $y''-3y'+2y=te^{3t}$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$.

В отличие от предыдущих примеров, здесь за начальный момент взято значение $t=1$, а не $t=0$. Введем новую переменную $\tau=t-1$, откуда $t=\tau+1$. Обозначим $y(t)=y(\tau+1)=\tilde{y}(\tau)$, тогда уравнение и начальные данные принимают вид: $\tilde{y}''-3\tilde{y}'+2\tilde{y}=(\tau+1)e^3e^{3\tau}$; $\tilde{y}(0)=\tilde{y}'(0)=1$. Найдем решение этого уравнения:

$$\tilde{y} \risingdotseq Y,\ \tilde{y}' \risingdotseq pY-1,\ \tilde{y}'' \risingdotseq p^2Y-p-1,\ (\tau+1)e^{3\tau}=\tau e^{3\tau}+e^{3\tau} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{(p-3)^2}+\frac{1}{p-3}=\frac{p-2}{(p-3)^2};\ (p^2-3p+2)Y=e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}+p-2;$$

$$(p-1)(p-2)Y=e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}+(p-2);\ (p-1)Y=e^3\frac{1}{(p-3)^2}+1;$$

$$Y=e^3\frac{1}{(p-1)(p-3)^2}+\frac{1}{p-1}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{p-1}\to e^{\tau},\ \frac{1}{(p-1)(p-3)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-3}+\frac{2}{(p-3)^2}\right]\to\frac{1}{4}(e^{\tau}-e^{3\tau}+2\tau e^{3\tau}),$$

то

$$\tilde{y}=\frac{1}{4}e^3(e^{\tau}-e^{3\tau}+2\tau e^{3\tau})+e^{\tau};\ \tilde{y}=\left(\frac{e^3}{4}+1\right)e^{\tau}+\frac{2\tau-1}{4}e^{3(\tau+1)}.$$

Возвращаясь к переменной $t$ $(\tau=t-1)$, получаем решение исходной задачи Коши

$$y=\frac{e^3+4}{4e}e^t+\frac{2t-3}{4}e^{3t}.$$

Пример 38.27. Найти решение уравнения $y''+y'=t$, удовлетворяющее условиям $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Положим $t=\tau+1$, $y(t)=y(\tau+1)=\tilde{y}(\tau)$, тогда уравнение и начальные условия примут вид $\tilde{y}''+\tilde{y}'=\tau+1$, $\tilde{y}(0)=1$, $\tilde{y}'(0)=0$. Составим операторное уравнение для этого дифференциального уравнения. Пусть $\tilde{y}(\tau)\risingdotseq Y(p)$, тогда $\tilde{y}'(\tau)\risingdotseq pY(p)-1$, $y''(\tau)\risingdotseq p^2Y(p)-p$, операторное уравнение и его решение запишутся так:

$$p^2Y(p)-p+pY(p)-1=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p},\ Y(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}.$$

Переходя к оригиналам, получаем $\tilde{y}(\tau)=1+\tau^2/2$. Возвращаясь к переменной $t$ (заменив $\tau$ на $t-1$), найдем искомое решение исходной задачи Коши $y(t)=1+(t-1)^2/2$.

**Пример 38.28.** Найдем решение системы дифференциальных уравнений

$$y' + 3y + z = 0, \; z' - y + z = 0$$

при начальных условиях $y(0) = 1, \; z(0) = 1.$

При обозначениях $Y \to y, \; Z \to z$ система в изображениях принимает вид

$$pY - 1 + 3Y + Z = 0, \; pZ - 1 - Y + Z = 0,$$

или

$$(p+3)\,Y + Z = 1,$$
$$-Y + (p+1)\,Z = 1.$$

Решение системы получим с помощью формул Крамера $Y = \Delta_y / \Delta, \quad Z = \Delta_z / \Delta,$ где $\Delta$ – определитель системы, $\Delta_y, \; \Delta_z$ – определители, полученные из определителей системы заменой коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами. Поскольку

$$\Delta = (p+3)(p+1) + 1 = p^2 + 4p + 4 = (p+2)^2,$$
$$\Delta_y = p + 1 - 1 = p, \; \Delta_z = p + 3 + 1 = p + 4,$$
$$Y = \frac{p}{(p+2)^2} = \frac{(p+2) - 2}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} - \frac{2}{(p+2)^2},$$
$$Z = \frac{p+4}{(p+2)^2} = \frac{(p+2) + 2}{(p+2)^2} = \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)^2},$$
$$\frac{1}{p+2} \risingdotseq e^{-2t}, \; \frac{1}{(p+2)^2} \risingdotseq te^{-2t},$$

то

$$y = e^{-2t}(1 - 2t), \; z = e^{-2t}(1 + 2t).$$

**Пример 38.29.** Найти решение системы

$$y' - 2y - 4z = \cos t, \; z' + y + 2z = \sin t$$

при начальных условиях $y(0) = z(0) = 0.$

Система в изображениях принимает вид

$$(p-2)\,Y - 4Z = \frac{p}{p^2+1}, \; Y + (p+2)\,Z = \frac{p}{p^2+1}.$$

Изображения $Y$ и $Z$ определяем с помощью формул Крамера. Поскольку $\Delta = (p-2)(p+2) + 4 = p^2,$

$$\Delta_y = \frac{(p+2)\,p}{p^2+1} + \frac{4}{p^2+1} = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^2+1}, \; \Delta_z = \frac{p-2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} = -\frac{2}{p^2+1},$$

$$Y=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}=\frac{4p^2+4+2p-3p^2}{p^2(p^2+1)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2p(p^2+1-p^2)}{p^2(p^2+1)}-\frac{3}{p^2+1},$$

$$Y=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p}{p^2+1}-\frac{3}{p^2+1};$$

$$Z=-\frac{2}{p^2(p^2+1)}=-2\frac{(1+p^2)-p^2}{p^2(p^2+1)},\quad Z=-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^2+1},$$

$$\frac{1}{p}\risingdotseq 1,\quad \frac{1}{p^2}\risingdotseq t,\quad \frac{1}{p^2+1}\risingdotseq \sin t,\quad \frac{p}{p^2+1}\risingdotseq \cos t,$$

то

$$y=4t+2-2\cos t-3\cos t,\quad z=-2t+2\sin t.$$

П р и м е р 38.30. Найти решение системы

$$x'=x+y+z,\quad y'=x-y+z,\quad z'=x+y-z$$

при начальных данных $x(0)=0,\ \ y(0)=1,\ \ z(0)=0.$

В изображениях система принимает вид

$$\begin{aligned} &pX=X+Y+Z, & &\qquad (1-p)X+Y+Z=0,\\ &pY-1=X-Y+Z, &\text{или}& \qquad X-(1+p)Y+Z=-1,\\ &pZ=X+Y-Z, & &\qquad X+Y-(1+p)Z=0. \end{aligned}$$

Изображения $X, Y, Z$ находим с помощью формул Крамера. Поскольку $\Delta=(p+1)(p+2)(2-p),\ \ \Delta_x=-(p+2),\ \ \Delta_y=2-p^2,\ \ \Delta_z=-p,$ то

$$X=\frac{-(p+2)}{(p+1)(p+2)(2-p)}=\frac{1}{(p+1)(p-2)},\quad Y=\frac{2-p^2}{(p+1)(p+2)(2-p)}=$$

$$=\frac{p^2-2}{(p+1)(p+2)(p-2)},\quad Z=\frac{-p}{(p+1)(p+2)(2-p)}=\frac{p}{(p+1)(p+2)(p-2)}.$$

Разлагая полученные дроби на элементарные, найдем, что

$$X=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1},\quad Y=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2},$$

$$Z=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2}.$$

Принимая во внимание равенство $e^{\alpha t}\to\dfrac{1}{p-\alpha}$, получаем искомое решение системы

$$x=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t},\quad y=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t},\quad z=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t}.$$

# ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые оригиналы и их изображения.

| | Оригиналы $f(t)$ | Изображения $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | $1/p$ |
| 2 | $t^n \quad (n=1,2,3,\ldots)$ | $n!/p^{n+1}$ |
| 3 | $t^\alpha \quad (\alpha>-1)$ | $\Gamma(\alpha+1)/p^{\alpha+1}$ |
| 4 | $e^{ct} \quad (c=a+ib)$ | $1/(p-c)$ |
| 5 | $t^n e^{ct} \quad (n=1,2,3,\ldots)$ | $n!/(p-c)^{n+1}$ |
| 6 | $t^\alpha e^{ct} \quad (\alpha>-1)$ | $\Gamma(\alpha+1)/(p-c)^{\alpha+1}$ |
| 7 | $\sin\beta t \quad (\beta>0)$ | $\beta/(p^2+\beta^2)$ |
| 8 | $\cos\beta t$ | $p/(p^2+\beta^2)$ |
| 9 | $\operatorname{sh}\beta t$ | $\beta/(p^2-\beta^2)$ |
| 10 | $\operatorname{ch}\beta t$ | $p/(p^2-\beta^2)$ |
| 11 | $e^{ct}\sin\beta t$ | $\beta/[(p-c)^2+\beta^2]$ |
| 12 | $e^{ct}\cos\beta t$ | $(p-c)/[(p-c)^2+\beta^2]$ |
| 13 | $e^{ct}\operatorname{sh}\beta t$ | $\beta/[(p-c)^2-\beta^2]$ |
| 14 | $e^{ct}\operatorname{ch}\beta t$ | $(p-c)/[(p-c)^2-\beta^2]$ |
| 15 | $t\sin\beta t$ | $2p\beta/(p^2+\beta^2)^2$ |
| 16 | $t\cos\beta t$ | $(p^2-\beta^2)/(p^2+\beta^2)^2$ |

Некоторые оригиналы и их изображения (продолжение).

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 17 | $t\,\mathrm{sh}\,\beta t$ | $2p\beta/(p^2-\beta^2)^2$ |
| 18 | $t\,\mathrm{ch}\,\beta t$ | $(p^2+\beta^2)/(p^2-\beta^2)^2$ |
| 19 | $\sin\,(t-\tau)\quad(\tau>0)$ | $e^{-\tau p}/(p^2+1)$ |
| 20 | $\cos\,(t-\tau)$ | $pe^{-\tau p}/(p^2+1)$ |
| 21 | $\sin t/t$ | $\mathrm{arcctg}\;p$ |
| 22 | $\mathrm{Si}\,t=\int\limits_0^t\frac{\sin x}{x}dx$ | $\frac{\mathrm{arcctg}\;p}{p}$ |
| 23 | $\mathrm{Ci}\,t=-\int\limits_t^\infty\frac{\cos x}{x}dx$ | $\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ |
| 24 | $\mathrm{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\alpha/2\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2}dx$ | $\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$ |
| 25 | $\frac{1}{t}(1-e^{-t})$ | $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$ |
| 26 | $\ln t$ | $\frac{1}{p}\left(\ln\frac{1}{p}-\gamma\right),\ \gamma=0{,}57722\ \ldots$ |
| 27 | $\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$ | $\ln\frac{p-a}{p-b}$ |
| 28 | $\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$ | $\frac{1}{(p-a)(p-b)}$ |
| 29 | $\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$ | $\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ |
| 30 | $\frac{1-\cos at}{a^2}$ | $\frac{1}{p(p^2+a^2)}$ |

# НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ И ДАТЫ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

| Обозначение | Значение | Автор | Дата |
|---|---|---|---|
| $\pi$ | Отношение длины окружности к диаметру | У. Джонс<br>Л. Эйлер | 1706<br>1736 |
| $e$ | Основание натуральных логарифмов | Л. Эйлер | 1736 |
| $i$ | Корень квадратный из – 1 | Л. Эйлер | 1777 |
| $\infty$ | Бесконечность | Дж. Валлис | 1655 |
| $[\ ]$ | Целая часть числа, антье | К. Гаусс | 1808 |
| $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ | Единичные векторы | У. Гамильтон | 1853 |
| $\mathbf{r}$ | Вектор | О. Коши | 1853 |
| $a, b, c$ | Постоянные | Р. Декарт | 1637 |
| $x, y, z$ | Неизвестные или переменные величины | Р. Декарт | 1637 |
| $+, -$ | Сложение, вычитание | Я. Видман | 1489 |
| $\times$ | Умножение | У. Оутред | 1631 |
| $\cdot$ | Умножение | Г. Лейбниц | 1698 |
| $:$ | Деление | Г. Лейбниц | 1684 |
| $a^2, a^3, \dots, a^n$ | Степени | Р. Декарт | 1637 |
| $\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \dots, \sqrt[n]{\ }$ | Корни | К. Рудольф | 1525 |
| Log | Логарифм | И. Кеплер | 1624 |
| log | | Б. Кавальери | 1632 |
| ln | Натуральный логарифм | А. Принсхейм | 1893 |
| sin, cos | Синус, косинус | Л. Эйлер | 1748 |
| tg | Тангенс | Л. Эйлер | 1753 |
| arcsin | Арксинус | Ж. Лагранж | 1772 |
| sh | Гиперболический синус | В. Риккати | 1757 |
| ch | Гиперболический косинус | В. Риккати | 1757 |
| $dx, ddx, d^2x, d^3x, \dots$ | Дифференциалы различных порядков | Г. Лейбниц | 1675 |
| $\dfrac{d}{dx}$ | Производная | Г. Лейбниц | 1675 |
| $f'(x), y'$ | Производная | Ж. Лагранж | 1770 |

| Обозначение | Значение | Автор | Дата |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{\partial}{\partial x}$ | Частная производная | А. Лежандр | 1786 |
| $\int y dx$ | Интеграл | Г. Лейбниц | 1675 |
| $\int_a^b f(x)\,dx$ | Определенный интеграл | Ж. Фурье | 1819 |
| $\Delta x$ | Разность, приращения | Л. Эйлер | 1755 |
| $\Sigma$ | Сумма | Л. Эйлер | 1755 |
| $\Pi$ | Произведение | К. Гаусс | 1812 |
| ! | Факториал | К. Крамп | 1888 |
| $\lvert x \rvert$ | Модуль | К. Вейерштрасс | 1841 |
| $\lVert x \rVert$ | Норма | Э. Шмидт | 1908 |
| lim | Предел | С. Люилье | 1786 |
| $\lim\limits_{n=\infty}$ | | У. Гамильтон | 1853 |
| $\lim\limits_{n\to\infty}$ | | Многие математики | нач. XX в. |
| Г | Гамма-функция | А. Лежандр | 1808 |
| В | Бета-функция | Ж. Бине | 1839 |
| $\Delta$ | Дельта (оператор Лапласа) | Р. Мерфи | 1833 |
| $\nabla$ | Набла (оператор Гамильтона) | У. Гамильтон | 1853 |
| $\varphi x$ | Функция | И. Бернулли | 1718 |
| $f(x)$ | Функция | Л. Эйлер | 1734 |
| $=$ | Равенство | Р. Рекорд | 1557 |
| $\approx$ | Приближенное равенство | А. Гюнтер | 1882 |
| $>, <$ | Больше, меньше | Т. Гарриот | 1631 |
| $\equiv$ | Тождество | Б. Риман | 1857 |
| $\parallel$ | Параллельность | У. Оутред | 1677 |
| $\perp$ | Перпендикулярность | П. Эригон | 1634 |
| $\cap, \cup$ | Пересечение, объединение | Дж. Пеано | 1888 |
| $\subset, \supset$ | Содержится, включается | Э. Шредер | 1890 |
| $\in$ | Принадлежность | Дж. Пеано | 1895 |

# БИОГРАФИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ

**Абель Нильс Хенрик** (1802 – 1829) – норвежский математик. С 16 лет проявил исключительные математические способности. Окончил университет в Осло (1825). В 1825 – 1827 гг. был в Берлине, Париже, где встречался со многими известными математиками. Доказал, что алгебраические уравнения степени выше 4-й неразрешимы в радикалах (1824). Развил теорию сходимости степенных рядов, впервые полностью исследовал проблему сходимости биномиального ряда для комплексных значений переменных (1826). Изучал интегралы от алгебраических функций – абелевы интегралы (1827). Заложил основы теории интегральных уравнений (1823). За создание теории эллиптических функций ему (посмертно), совместно с Якоби, присуждена премия Парижской академии наук (1830). Работы Абеля оказали большое влияние на развитие математики, привели к возникновению новых математических дисциплин. На родине при жизни Абель не был признан, жил в нужде. В 1908 г. в Осло ему воздвигнут памятник.

**Аньези Мария Гаэтана** (1718 – 1799) – итальянский математик, профессор университета в Болонье (1750). Сочинение «Основания анализа...» (1748) принесло ей известность за пределами Италии. В этом сочинении, в частности, доказано, что любое кубическое уравнение имеет три корня; рассмотрена линия, которую в ее честь назвали «локоном Аньези».

**Безу Этьенн** (1730 – 1783) – французский математик, член Парижской академии наук (1758). Преподавал математику в Училище гардемаринов (1763) и в Королевском артиллерийском корпусе (1768). Основные его работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.). Автор шеститомного «Курса математики» (1764 – 1769), неоднократно переиздававшегося.

**Бернулли** – семейство швейцарских математиков, родоначальник которого Якоб Бернулли (умер в 1583 г.) – выходец из Голландии. В различных поколениях Бернулли математиками были: Якоб (1654 – 1705), Иоганн (1667 – 1748), Николай (1687 – 1759), Николай (1695 – 1726), Даниил (1700 – 1782), Иоганн (1744 – 1807), Якоб (1759 – 1789).

Даниил в 1725 – 1733 гг. работал в Петербургской академии наук, затем был избран ее почетным членом. В Петербурге он написал сочинение «Гидродинамика» (опубликовано в 1738 г.), в котором вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Ему принадлежат важные работы по алгебре, теории вероятностей, исчислению бесконечно малых, теории рядов, дифференциальным уравнениям и другим разделам математики. Профессором математики (1725) в Петербургской Академии был Николай (1695 – 1726), который занимался дифференциальными уравнениями (уравнение Риккати, метод интегрирующего множителя). Якоб (1759 – 1789) также работал в Петербургской Академии наук (адъюнкт – 1786, академик – 1787). Основные труды его относятся к дифференциальным уравнениям, механике, музыкальной акустике. Многие члены семейства Бернулли являлись видными деятелями, занимали высшие государственные должности. Среди них были профессора красноречия, юристы, медики, живописец, аптекарь.

**Бернулли Иоганн** (1667 – 1748) – швейцарский математик, профессор математики Гронингенского (1695) и Базельского (1705) университетов, почетный член Петербургской Академии наук (1725). Ему принадлежит первое систематическое изложение дифференциального интегрального исчисления. Конспект лекций, прочитанных им Лопиталю, был положен в основу составленного Лопиталем «Анализа бесконечно малых для исследования кривых линий» (1696). Он является автором «Курса интегрального исчисления» 1742).

И. Бернулли разработал методы интегрирования дифференциальных уравнений (однородное и линейное уравнения первого порядка, линейные равнения с постоянными коэффициентами, уравнения Бернулли). Дал определение понятия функции как аналитического выражения, составленного из переменных и постоянных, исследовал показательные функции. Вел исследования по механике и математической физике.

**Бернулли Якоб** (1654 – 1705) – швейцарский математик, профессор Базельского университета (1687). Ему принадлежит важные заслуги в развитии анализа бесконечно малых. Я. Бернулли применил новые идеи к изучению свойств ряда кривых: открытой им лемнискаты, логарифмической спирали, цепной линии и др. Он вычислил площади многих плоских фигур, площади поверхностей и длины линий. Известны работы Я. Бернулли по алгебре, арифметике, геометрии, теории рядов, теории вероятностей, а также физике. Его книга «Арифметические приложения о бесконечных рядах и их конечных суммах» явилась первым руководством по теории рядов. В книге «Искусство предположений» доказана теорема (названная позже его именем), имеющая важное значение в теории вероятностей и ее приложениях к статистике.

**Буняковский Виктор Яковлевич** (1804 – 1889) – русский математик, член Петербургской Академии наук (1830, адъюнкт – с 1828 г.) и ее вице-президент (1864 – 1889). Математическое образование получил за границей, в Париже защитил диссертацию и получил степень доктора математики (1825). С 1826 г. начинается его педагогическая и научная деятельность в Петербурге. Преподавал сначала в Первом кадетском корпусе, затем в Морском корпусе (1827 – 1862), в Институте инженеров путей сообщения (1830 – 1846). Читал курсы аналитической механики, теории вероятностей и математического анализа в Петербургском университете (1846 – 1859). Составил обширный «Лексикон чистой и прикладной математики» (вышел только I том в 1839 г.), написал учебник арифметики для средней школы (1844, 1849). Опубликовал 128 научных работ, около половины из них относится к теории вероятностей, остальные – к проблемам анализа, геометрии, алгебры. «Основания математической теории вероятностей» (1846) включали оригинальное изложение теоретических вопросов и приложения к страхованию, демографии и т. п. С 1858 г. был главным экспертом правительства по вопросам статистики и страхования.

**Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм** (1815 – 1897) – немецкий математик. В 1842 – 1855 гг. преподавал математику в средних учебных заведениях г. Дейч-Кронса и Броунберга, с 1856 г. – профессор Берлинского университета, член Берлинкой академии наук. Исследования его посвящены математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. Ввел во всеобщее употребление понятие и признак равномерной сходимости функционального ряда (признак Вейерштрасса), построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, доказал возможность сколь угодно точного приближения многочленами произвольной функции, непрерывной на отрезке (теорема Вейерштрасса). Учениками Вейерштрасса были многие математики, в том числе и С. В. Ковалевская. Вейерштрасс был иностранным членом-корреспондентом (1864) и иностранным почетным членом Петербургской Академии наук (1895).

**Вивиани Винченцо** (1622 – 1703) – итальянский математик и физик, член Итальянской и других академий. Ученик Г. Галилея. Основные работы посвящены геометрии. Построил касательную к циклоиде, исследовал конические сечения, решил проблему трисекции угла с помощью равносторонней гиперболы. Переводил математические сочинения древних авторов. Его именем названа одна из пространственных кривых.

**Виет Франсуа** (1540 – 1603) – французский математик, юрист по профессии. Заинтересовавшись астрономией, начал изучать тригонометрию и алгебру. Алгебра в его трудах стала общей наукой об алгебраических уравнениях, основанной на буквенном исчислении. Впервые ввел буквенные обозначения для коэффициентов уравнений (1591). Предложил новые методы решения алгебраических уравнений (до четвертой степени включительно). Установил связь между корнями и коэффициентами уравнений (формулы Виета). Дал полное решение задачи об определении всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным, нашел разложения $\sin x$, $\cos x$, по степеням $\sin x$, $\cos x$. Впервые рассмотрел бесконечное произведение, впервые употребил фигурные скобки.

**Вроньский Юзеф Мария** (1776 – 1853) – польский математик и философ. (Настоящая фамилия Хёне, известен также как Гёне-Вронский.) Окончил Варшавский кадетский корпус. Был артиллерийским офицером в армии Костюшко, затем служил в штабе А. В. Суворова, с 1797 г. в отставке. В 1800 г. уехал во Францию, где вел математические исследования по теории алгебраических и дифференциальных уравнений. Его именем назван введенный им в 1812 г. функциональный определитель, имеющий важное значение в теории линейных дифференциальных уравнений.

**Галуа Эварист** (1811 – 1832) – французский математик, основоположник современной алгебры. Независимо от Руффини и Абеля доказал невозможность решения в радикалах произвольных алгебраических уравнений выше 4-й степени. Нашел необходимое и достаточное условие, которому удовлетворяют уравнения данной степени, разрешимые в радикалах. Ввел такие фундаментальные понятия, как группа, подгруппа и др. Созданная им общая теория оказала существенное влияние на развитие не только алгебры, но и всей математики XIX в. Идеи и методы теории групп нашли применение в естествознании; в современной квантовой механике, кристаллографии. В возрасте 21 года Галуа был убит на дуэли. В письме к другу, написанном накануне дуэли, он сформулировал основные теоремы об интегралах от алгебраических функций, вновь открытые значительно позже в работах Б. Римана. Математическое наследие Галуа составляет небольшое число кратко написанных работ, не понятых его современниками.

**Галилей Галилео** (1564 – 1642) – итальянский физик, механик, астроном и математик, член Национальной академии деи Линчеи в Риме (1611). В 1589 г. получил кафедру математике в Пизе, а в 1592 – в Падуе. Основные работы относятся к механике: открыл закон инерции, закон падения тел и др. В сочинении «Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» (1632) Галилей развивал учение Коперника о движении Земли. Это сочинение вызвало гнев инквизиции и было запрещено. После допросов в июне 1633 г. отрекся от учения Коперника. Галилей является одним из предшественников основателей теории вероятностей. В частности, он первый явно сформулировал вероятностные свойства случайных погрешностей.

**Гамильтон Уильям Роуан** (1805 – 1865) – ирландский математик, член Королевской ирландской академии (1837), в 1837 – 1845 гг. ее президент; член-корреспондент Петербургской академии наук (1837). Способности Гамильтона проявились рано: в три года умел читать, неплохо знал арифметику и географию, к 13 годам овладел 12 языками, изучил на латинском языке «Начала» Евклида. С 13 до 17 лет изучал сочинения И. Ньютона и П. Лапласа. В 22 года окончил Дублинский университет и работал там же, с 1827 г. – профессор астрономии и директор университетской астрономической обсерватории. Почти одновременно с Г. Грассманом дал точное формальное изложение теории комплексных чисел. Гамильтон построил теорию кватернионов, впервые ввел термины: вектор, ассоциативный закон. Основные работы относятся к механике и теории дифференциальных уравнений.

**Гаусс Карл Фридрих** (1777 – 1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист, член Лондонского королевского общества (1804), Парижской академии (1820), Петербургской академии наук (1824). Родился в Брауншвейге в семье водопроводчика. В раннем детстве обнаружил выдающиеся математические способности. Учился в Гёттингенском университете (1795 – 1798). После защиты диссертации получил право на приват-доцентуру в Брауншвейге (1799). С 1807 г. – профессор математики и астрономии Гёттингенском университете, директор астрономической обсерватории. Работы Гаусса оказали большое влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятностей, геодезии, небесной механики, астрономии, теории электричества и магнетизма. Гаусс предложил несколько вариантов доказательства основной теоремы алгебры (любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень), построил теорию комплексных чисел. Он исследовал уравнения $x^n - 1 = 0$, установил связь между методами решения этих уравнений и построением правильных многоугольников. Нашел все те значения n, для которых правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой. В частности, решив уравнение $x^{17} - 1 = 0$, Гаусс дал построение правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки. В 1818 Г. Гаусс пришел к мысли о возможности построения неевклидовой геометрии. Опасаясь, что его идеи не будут поняты, он далее не разрабатывал их и не публиковал. К публикациям Н. И. Лобачевского по неевклидовой геометрии Гаусс отнесся с большим вниманием. По инициативе Гаусса Н. И. Лобачевский был избран членом–корреспондентом Гёттингенского ученого общества. Ряд работ по физике Гаусс выполнил совместно с В. Вебером (1804 – 1891). Вместе с ним он создал абсолютную систему электромагнитных единиц (1832), сконструировал первый в Германии электромагнитный телеграф (1833).

**Горнер Уильям Джордж** (1786 – 1837) – английский математик. Основные исследования относятся к теории алгебраических уравнений. Разработал способ приближенного решения уравнений любой степени. В 1819 г. ввел важный для алгебры способ деления многочлена на двучлен $x - a$ (схема Горнера).

**Грин Джордж** (1793 – 1841) – английский математик и физик. Математику изучал самостоятельно. В сочинении «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (1828) ввел понятие потенциала и развил соответствующую теорию, опираясь на найденное им соотношение между интегралами по объему и по поверхности, ограничивающей объем. В том же году независимо от Грина эту формулу получил М. В. Остроградский (формула Остроградского; именем Грина названа другая формула). Грин вывел основные уравнения теории упругости (1839).

**Гюйгенс Христиан** (1629 – 1695) – голландский механик, физик, математик. Учился в университетах Лейдена (1645 – 1647) и Бреды (1647 – 1650). В 1665 – 1681 гг. жил в Париже, с 1681 г. – в Гааге. Первый иностранный член Лондонского королевского общества (1663), член Французской академии наук (1666) и ее первый президент (1666 – 1681). Создал волновую теорию света, развил ряд важнейших понятий механики, заложил основы теории удара, построил первые часы с маятником. Гюйгенс совместно с Р. Гуком установил постоянные точки термометра – точку таяния льда и точку кипения воды. В 22 года он опубликовал первую математическую работу об определении длин дуг окружности, эллипса и гиперболы. В последующих математических трактатах им исследованы циклоида, логарифмическая спираль, цепная линия (он ввел этот термин) и другие линии. Написал одно из первых сочинений по теории вероятностей.

**Д'Аламбер Жан Лерон** (1717 – 1783) – французский математик, механик, философ, член Парижской (1741), Французской (1754) и других академий; почетный член Петербургской Академии наук (1764). Впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, сведя задачи динамики к статике – так называемый принцип Д'Аламбера (1743). Этот принцип был применен им для обоснования гидродинамики (1774), основания которой заложил в «Трактате о равновесии и движении жидкостей» (1744). Д'Аламбер является одним из основоположников методов прикладной механики. Основные математические исследования его относятся к теории дифференциальных уравнений, обоснованию исчисления бесконечно малых и теории рядов. Впервые высказал идею о времени как четвертом измерении. Занимался также литературной деятельностью и был избран членом Французской академии «Сорока бессмертных».

**Декарт Рене,** латинизированое имя Картезий (отсюда картезианство) (1596 – 1650) – французский философ, математик, физик, физиолог. Образование получил в иезуитском колледже Ла-Флеш в Анжу (1604 – 1612), затем самостоятельно усиленно изучал математику и другие науки. В 1617 – 1621 гг. служил в армии и несколько лет путешествовал по Европе. В 1629 г. переехал в Нидерланды, где провел двадцать лет в уединении, занимаясь наукой. В 1649 г. по приглашению шведской королевы переехал в Стокгольм, где вскоре и умер. В сочинении «Геометрия» (1637) Декарт заложил основы аналитической геометрии. Ввел общепринятые теперь обозначения переменных и искомых величин $(x, y, z, \ldots)$, буквенных коэффициентов $(a, b, c, \ldots)$, а также степеней $(a^3, x^5, \ldots)$. Декарт положил начало исследованиям свойств алгебраических уравнений, сформулировал положение о том, что число действительных и комплексных корней уравнения равно его степени, привел правило знаков для определения числа положительных и отрицательных корней уравнения, поставил вопрос о границах действительных корней.

**Дирихле Петер Густав Лежен** (1805 – 1859) – немецкий математик, член Берлинской, иностранный член–корреспондент Петербургской (1837) и член других академий. Учился в Берлине, Гёттингене и Париже. Работал в университетах Германии –

Берлинском (1831 – 1855), Гёттингенском (1855 – 1859). Основные исследования относятся к теории чисел, математическому анализу, ряд работ посвящен механике и математической физике. Ввел функциональные ряды особого вида (ряды Дирихле), сформулировал понятие условной сходимости ряда, установил признак сходимости знакопеременного ряда (признак Дирихле). Дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов.

**Капелли Альфредо** (1855 – 1910) – итальянский математик, член Национальной академии деи Линчеи в Риме (1901). Родился в Милане, учился в университетах Рима и Павии. В Берлинском университете слушал лекции Вейерштрасса и Кронекера. Был профессором математики университета в Палермо (1881) и Неаполитанского университета (1886). Его лекции по алгебре (1895) при жизни автора выдержали четыре издания.

**Кардано Джероламо** (1501 – 1576) – итальянский математик, философ, врач. Родился в Павии, где затем окончил университет (1521). Доктор медицины (1526), был практикующим врачом. С 1534 г. читал лекции по математике и медицине в Миланском университете. Профессор Павийского университета (1539), Болонского университета (около 1560 г.). Его математические работы сыграли большую роль в развитии алгебры. Именем Кардано названа формула решения в радикалах неполного кубического уравнения, которая им позаимствована у Н. Тартальи. Одним из первых в Европе рассматривал отрицательные и мнимые корни уравнений. В механике занимался вопросами передачи движения, теорией рычагов (карданная передача, карданов подвес).

**Ковалевская Софья Васильевна** (1850 – 1891) – русский математик, механик, писатель и публицист; первая в мире женщина – профессор математики и первая женщина, избранная в Петербургскую Академию наук (1889). Детство ее прошло в селе Палибино Витебской губернии в имении отца генерал-лейтенанта В. В. Корвин-Круковского. Получила всестороннее образование и рано обнаружила незаурядные математические способности. Доступ женщинам в университеты России в то время был закрыт. Вступив в фиктивный брак (ставший позднее фактическим) с В. О. Ковалевским, она в 1869 г. уехала в Гейдельберг, где изучала математику и другие науки. В 1874 г. переехала в Берлин, где четыре года занималась под руководством К. Вейерштрасса, согласившегося давать ей частные уроки (в Берлинский университет женщины также не допускались). За три ее работы, представленные Вейерштрассом Гёттингенскому университету, в 1874 г. С. В. Ковалевской заочно присуждена степень доктора философии с высшей похвалой. Поиски работы по специальности в России и во Франции оказались безуспешными. В ноябре 1883 г. выехала в Швецию, получив приглашение занять должность приват-доцента в Стокгольмском университете (с 1884 г. – профессор). За работы о вращении твердого тела Ковалевская получила удвоенную премию Парижской (1888) и премию Королевской шведской академий (1889). Один из основных полученных ею математических результатов – теорема о существовании решений нормальной системы уравнений с частными производными (теорема Коши – Ковалевской). Является автором повести «Нигилистка» (1884), «Воспоминаний детства» (1890) и др.

**Коши Огюстен Луи** (1789 – 1857) – французский математик, член Парижской (1816), почетный член Петербургской (1831) и многих других академий. Родился в Париже, где окончил Политехническую школу (1807), Школу мостов и дорог

(1810). Работал инжеиером на сооружении военного порта в Шербуре (1810 – 1813), преподавал в Политехнической школе и в Коллеж де Франс (1816 – 1830), в Парижском университете и в Коллеж де Франс (1848 – 1857). Труды Коши относятся к математическому анализу, дифференциальным уравнениям, математической физике, теории функций комплексной переменной, алгебре, геометрии, теории чисел, теории упругости, оптике и др.

**Крамер Габриель** (1704 – 1752) – швейцарский математик. Родился и получил образование в Женеве. С 1724 г. преподавал математику в Женевской кальвинистской академии (с 1734 г. – профессор). Основные направления исследований – высшая алгебра и аналитическая геометрия. Заложил основы теории определителей, установил правило решения систем $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными, исследовал алгебраические линии высших порядков (особые точки, кривизну и т. п.).

**Кронекер Леопольд** (1823 – 1891) – немецкий математик, член Берлинской (1861), член–корреспондент Петербургской Академий (1872). Окончил Берлинский университет (1845), там же преподавал (1861, профессор – с 1883 г). Основные работы относятся к алгебре, теории чисел. Был сторонником «арифметизации» математики, которая, по его мнению, должна быть сведена к арифметике целых чисел.

**Кутта Мартин Вильгельм** (1867 – 1944) – немецкий математик и физик. Преподавал в Высшей технической школе в Штутгарте. В 1901 г развил метод К. Рунге численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Рунге – Кутта).

**Кэли Артур** (1821 – 1895) – английский математик, член Лондонского королевского общества (1852), член–корреспондент Петербургской Академии наук (1870). Родился в Ричмонде, детство и юность провел в Петербурге. В 1841 г. окончил Кембриджский университет. В течение двадцати лет занимался адвокатурой. В этот период появились почти все его основные математические работы, относящиеся к алгебре, алгебраической геометрии, дифференциальным уравнениям. С 1863 г. – профессор Кембриджского университета. Кэли ввел общепринятое теперь обозначение для определителя (1841).

**Лагранж Жозеф Луи** (1736 – 1813) – французский математик и механик, член Берлинской академии (1759) и директор ее физико-математического класса (1766 – 1787), почетный член Парижской (1772), почетный член Петербургской академий (1776). Родился в Турине (Италия), где окончил университет и с 17 лет начал преподавать математику в Артиллерийской школе. В 1759 – 1787 гг. работал в Берлине, а с 1787 г. – в Париже: профессор Нормальной школы (1795), Политехнической школы (1797). Лагранж вместе с Эйлером заложили основы вариационного исчисления. Ему принадлежат выдающиеся исследования по математическому анализу (его именем названы: форма остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, функция и множители для определения условного экстремума, интерполяционная формула), по различным вопросам дифференциальных уравнений (теория особых решений, метод вариации произвольных постоянных и др.), по алгебре и теории чисел, механике, астрономии, математической картографии и др. Лагранж впервые ввел в рассмотрение тройные интегралы, предложил обозначения для производной ($y'$, $f'(x)$) и для функции арксинус ($\arcsin$). Парижская академия наук дважды присуждала премии Лагранжу за его научные работы.

**Ламе Габриель** (1795 – 1870) – французский математик, физик и инженер, член-корреспондент Петербургской (1829), член Парижской академий (1843), профессор Политехнической школы (1832 – 1863), Парижского университета (1848 – 1863). Родился в Туре, окончил в Париже Политехническую (1817) и Горную школы (1820). В 1820 – 1831 гг. работал в Институте корпуса инженеров путей сообщения (Петербург), где читал высшую математику, физику, прикладную механику, разрабатывал проекты мостов, консультировал строителей Исаакиевского собора. Основные научные исследования относятся к математической физике и теории упругости. Ламе (совместно с Клапейроном) впервые ввел цилиндрические координаты (1828). Разработал общую теорию криволинейных координат (1833), ввел специальный класс функций (функции Ламе, 1839) и ныне называемые коэффициенты Ламе (1859).

**Лаплас Пьер Симон** (1749 – 1827) – французский математик, физик и астроном, член Парижской (1785, адъюнкт – с 1773 г.), Французской (1816), почетный член Петербургской (1802) академий. Родился в крестьянской семье в провинции Нормандия, учился в школе бенедиктинцев. В 1766 г. приехал в Париж, где с помощью Д'Аламбера получил должность профессора математики в Военной школе. Активно участвовал в реорганизации системы высшего образования во Франции, в создании Нормальной и Политехнической школ. В 1790 г. он назначен председателем Палаты мер и весов, руководил введением в практику новой метрической системы мер. Во времена Наполеона был министром внутренних дел (1799). Лаплас развил методы небесной механики и завершил почти все то, что не удалось его предшественникам в объяснении движения тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения Ньютона. В области математики ему принадлежат фундаментальные исследования по дифференциальным уравнениям, теории вероятностей, алгебре.

**Лейбниц Готфрид Вильгельм** (1646 – 1716) – немецкий математик, физик и изобретатель, философ, юрист, историк, языковед, член Лондонского королевского общества (1673), член Парижской академии (1700). Изучал право и философию в Лейпцигском и Йенском университетах, затем был на службе у курфюрста Майнца. В 1672 – 1676 гг. с дипломатической миссией находился в Париже. Здесь познакомился с основными достижениями математики. Возвратившись в Германию, он в последующие 40 лет состоял на службе у ганноверских герцогов, сначала в качестве придворного библиотекаря, затем герцогского историографа и тайного советника юстиции. С целью сбора материала для «Истории Брауншвейга» совершил поездку по Южной Германии, Австрии и Италии (1687 – 1690). Лейбниц трижды (1711, 1712, 1716) встречался с Петром I, по просьбе которого разработал ряд проектов развития образования и государственного управления в России. Важнейшая заслуга Лейбница в математике – разработка им (наряду с И. Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления, имевшая огромное значение для дальнейшего развития математики и естествознания. Лейбниц сделал важные открытия в других областях математики: алгебре, геометрии, комбинаторике. Он ввел ряд математических терминов: функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, абсцисса, ордината, координата, алгоритм, предложил знаки дифференциала, интеграла, логическую символику и др.

**Лобачевский Николай Иванович** (1792 – 1856) – русский математик. Родился в Нижнем Новгороде, почти всю жизнь провел в Казани; учился в гимназии

(1802 – 1807), в университете (1807 – 1811), работал в нем (1811 – 1846, с 1816 г. – профессор). Он был ректором Казанского университета (1827 – 1846), помощником попечителя Казанского учебного округа (1846 – 1856). Важнейшим научным достижением Лобачевского, поставившим его в первые ряда математиком мира, явилось создание неевклидовой геометрии. С первым сообщением о новой геометрии Лобачевский выступил 23 февраля 1826 г., первый мемуар «О началах геометрии» появился в 1829 г. в «Казанском вестнике». Изложение нового учения дано в ряде статей, опубликованных в «Ученых записках Казанского университета» (1835 – 1838). Эти работы были встречены современниками крайне недоброжелательно. Ученые других стран познакомились с неевклидовой геометрией по брошюре, изданной в Берлине на немецком языке (1840). К. Ф. Гаусс высоко оценил открытие Лобачевского. По предложению Гаусса Лобачевский был избран членом-корреспондентом Гёттингенского научного общества. Лобачевскому принадлежит также работы по алгебре, математическому анализу, численным методам.

**Лопиталь Гийом Франсуа Антуатуан** (1661 – 1704) – французский математик. Автор первого учебника по дифференциальному исчислению (1696), в основу которого положены лекции И. Бернулли. Этот учебник неоднократно переиздавался во Франции и других странах. Уже после смерти Лопиталя было опубликовано другое его сочинение, посвященное теории линий второго порядка. Лопиталь исследовал ряд трудных задач математического анализа, в частности дал одно из решений знаменитой задачи о брахистохроне (кривой скорейшего спуска).

**Ляпунов Александр Михайлович** (1857 – 1918) – русский математик и механик, академик Петербургской (1901, член-корреспондент – с 1900 г.), иностранный член-корреспондент Парижской (1916) академий. Окончил Петербургский университет (1880). Ученик П. Л. Чебышева. Преподавал в Харьковском университете (доцент – с 1885 г., профессор – с 1892 г.). Работал в Петербурге (1902) и в Одессе (1917). Создал современную теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Выдающейся заслугой Ляпунова является построение общего метода решения задач об устойчивости. На его идеях и методах основаны все работы отечественных и зарубежных ученых по теории устойчивости, выполненные после исследований Ляпунова. Впервые строго поставил вопрос и посредством тонкого математического анализа исследовал устойчивость фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости. Ему принадлежит также работы по математической физике и теории вероятностей.

**Маклорен Колин** (1698 – 1746) – шотландский математик, член Лондонского королевского общества (1719). В 12 лет поступил в университет в Глазго, в 20 лет получил кафедру математики в Абердине. С1722 по 1726 г. работал во Франции. Возвратившись на родину, занял кафедру в Эдинбургском университете. Основные научные труды относятся к теории рядов, исчислению конечных разностей, теории плоских кривых высших порядков, механике. Парижская академия наук дважды присуждала ему премии: за работу о падении тел (1724) и работу по приливам и отливам (1740), последняя была разделена между Маклореном, Л. Эйлером и Д. Бернулли.

**Монж Гаспар** (1746 – 1818) – французский математик, механик и общественный деятель, член Парижской академии (1780), профессор Мезьерской военно-инженерной школы (1768), один из создателей и профессор Политехнической школы в Париже (1794). Творец начертательной геометрии. Решил ряд задач аналитической геометрии в пространстве. Дал обстоятельное изложение дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей. Предложил геометрическое истолкование уравнений с частными производными и, с другой стороны, изложение геометрических фактов на языке этих уравнений. В период Великой французской революции входил в состав Палаты мер и весов, был морским министром (1792 – 1793), заведовал пороховыми и пушечными заводами республики. Во времена Первой империи Монж стал сенатором, получил титул графа. В период Реставрации был лишен всех прав, изгнан из Политехнической школы и академии наук (1816).

**Ньютон Исаак** (1643 – 1727) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (1672) и его президент (1703), иностранный член Парижской академии (1699). Родился в семье фермера в Вулсторпе (около Грантема). Окончил Кембриджский университет (1665). В 1668 г. Ньютон получил степень магистра, а в следующем году его учитель И. Барроу передал ему почетную люкасовскую физико-математическую кафедру Кембриджского университета, которую он занимал до 1701 г. В 1695 г. назначен на должность смотрителя Монетного двора. Ньютону удалось привести в порядок расстроенное монетное дело Англии, за что он получил в 1699 г. пожизненное высокооплачиваемое звание директора Монетного двора. В 1705 г. за научные труды возведен в дворянское звание. Похоронен в английском национальном пантеоне – Вестминстерском аббатстве. С именем Ньютона связаны открытие закона всемирного тяготения, создание теоретических основ механики и астрономии, разработка дифференциального и интегрального исчисления (одновременно с Г. Лейбницем и независимо от него), работы по теоретической и экспериментальной оптике, алгебре, геометрии, интерполированию, теории рядов, численным методам. Разработка дифференциального и интегрального исчисления явилась важной вехой в развитии математики. В основу нового исчисления Ньютон положил понятия флюксии (производной) и флюенты (интеграла). Флюентой он называл непрерывную переменную величину, а флюксией – скорость изменения флюенты.

**Остроградский Михаил Васильевич** (1801 – 1862) – русский математик, академик Петербургской (1830,адъюнкт – с 1828 г.), иностранный член Парижской (1856) и многих других академий. Учился в Харьковском университете (1816 – 1820), слушал лекции в Париже знаменитых французских математиков О. Коши, П. Лапласа, Ж. Фурье и др. (1822 – 1828). По возвращении на родину преподавал в учебных заведениях Петербурга. Основные труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике. Известен работами по алгебре, теории чисел, теории вероятностей. Его именем названа теорема о связи тройного интеграла по объему с интегралом по поверхности, ограничивающей этот объем, метод выделения рациональной части интеграла. Первым установил правила замены переменных в двойном и тройном интегралах. Ему принадлежит ряд популярных статей, педагогических исследований, а также превосходных учебников. Остроградский создал русскую школу прикладной механики. Его учеником был и уроженец Речицкого уезда (ныне Гомельской области) Н. Ф. Ястржембский (1808 – 1874), профессор Института корпуса путей сообщения (Петербург), лауреат Демидовской премии, инженер, по проектам и под руководством которого на территории Белоруссии построен ряд участков дорог, мостов и других сооружений.

**Паскаль Блез** (1623 – 1662) – французский математик, физик, философ и писатель. В 16-летнем возрасте написал первую научную работу, в которой содержалась одна из важных теорем проективной геометрии, позже названная его именем. Через два года сконструировал счетную машину, окончательный вариант которой построил в 1844 г. Опубликовал ряд работ по арифметике, алгебре, теории чисел и теории вероятностей. Первым предложил метод математической индукции и применил его для доказательства теорем. Паскаль – один из предшественников Ньютона и Лейбница, создавших дифференциальное и интегральное исчисление.

**Пеано Джузеппе** (1858 – 1932) – итальянский математик, работал в Туринском университете (с 1890 г. – профессор). Исследовал основные понятия и методы анализа (вопросы об условиях существования решений дифференциальных уравнений, о понятии кривой и др.). Занимался формально-логическим обоснованием математики, предложил аксиоматику натуральных чисел (аксиоматика Пеано). Построил пример непрерывной кривой, целиком заполняющей некоторый квадрат.

**Понселе Жан Виктор** (1788 – 1867) – французский математик, механик и инженер, основоположник проективной геометрии, член Парижской академии (1834), ее вице-президент (1841) и президент (1840, 1842; избирался на годичный срок), иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук (1857). Учился в Политехнической школе в Париже (1807 – 1810), в Школе приложений (Инженерной и артиллерийской школе) в Меце (1810 – 1812). Лейтенант инженерных войск наполеоновской армии, Понселе участвовал в войне с Россией, попал в плен в бою под Красным (1812). Находясь в плену в Саратове (1813 – 1814), написал трактат о проективных свойствах фигур (опубликован во Франции в 1822 г., переиздан в 1865 г.). По возвращении на родину несколько лет работал инженером на строительстве военных объектов, потом преподавал в школе приложений в Меце (профессор прикладной механики в 1824 – 1835 гг.) и в Парижском университете (1837 –1848). Экзаменатор Политехнической школы (1835 – 1848), начальник Политехнической школы, бригадный генерал (1848 – 1850). Основные работы относятся к проективной геометрии, теории машин, индустриальной механике, экспериментальной механике. Понсселе – один из предшественников П. Л. Чебышева в создании теории приближения функций.

**Пуассон Симеон Дени** (1781 – 1840) – французский математик, механик, физик, член Парижской (1812), иностранный почетный член Петербургской академий (1826). Окончил Политехническую школу в Париже (1800), работал в Парижском университете (с 1806 г. – профессор). Основные труды относятся к теоретической и небесной механике, математической физике. Ему принадлежат работы по интегральному исчислению (интеграл Пуассона), теории вероятностей, где он впервые ввел термин «закон больших чисел», доказал одну из предельных теорем (теорема Пуассона), предложил названное его именем распределение вероятностей случайных величин. В теории потенциала ввел так называемое уравнение Пуассона и применил его к решению задач по гравитации и электростатике. Решил ряд задач теории упругости. Исследовал вопросы теплопроводности, магнетизма, капиллярности и др.

**Раабе Иозеф Людвиг** (1801 – 1859) – швейцарский математик, профессор университета в Цюрихе (1843). Вел научные исследования по анализу, алгебре, геометрии, теории функций, теории рядов (признак Раабе сходимости числового ряда).

**Ролль Мишель** (1652 – 1719) – французский математик, член Парижской АН (1685). Разработал метод отделения действительных корней алгебраических уравнений, основанный на частном случае теоремы, позже названной его именем. Исследовал решения в целых числах неопределенных линейных уравнений с двумя неизвестными. Выступал с критикой исчисления дифференциалов Г. Лейбница, вызвавшей оживленную дискуссию.

**Рунге Карл Тольме** (1856 – 1927) – немецкий математик и физик. Учился в университетах Мюнхена (1876 – 1877) и Берлина (1878 – 1880). Работал в Берлине, Ганновере, Гёттингене. Основные математические работы относятся к численному решению дифференциальных уравнений (метод Рунге – Кутта).

**Сильвестр Джеймс Джозеф** (1814 – 1897) – английский математик, член Лондонского королевского общества (1839), иностранный член-корреспондент Петербургской Академии наук (1872). Окончил Кембриджский университет (1837). Одно время был адвокатом. Профессор Виргинского университета (1841 – 1845), математик в страховой компании (1845 – 1855), профессор Королевской академии в Вулидже (1855 – 1870). В 1876 – 1883 гг. – профессор университета Джона Гопкинса в Балтиморе (США). Основатель и первый редактор первого американского математического журнала (1878 – 1883). По возвращении в Англию получил кафедру в Оксфордском университете (1883 – 1897). Основные работы по алгебре, теории чисел, механике и математической физике.

**Симпсон Томас** (1710 – 1761) – английский математик, член Лондонского королевского общества (1746). Математику изучал самостоятельно. Был ткачом шелковых тканей, школьным учителем, а затем профессором математики Вулиджской военной академии (1743). Основные работы по геометрии, тригонометрии, математическому анализу и его приложениям к механике. В 1743 г. вывел формулу приближенного интегрирования (формула Симпсона).

**Стокс Джордж Габриэль** (1819 – 1903) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (1851), его секретарь (1854 – 1885) и президент (1885 – 1890). Окончил Кембриджский университет (1841), там же работал (с 1849 г. – профессор). Основные работы по физике. Математические труды по анализу. Одновременно с немецким астрономом и математиком Ф. Л. Зейделем (1821 – 1896) и независимо от него ввел понятие равномерной сходимости последовательности и ряда (1848). В 1854 г. предложил формулу, устанавливающую связь между интегралом по поверхности и криволинейным интегралом по контуру, ограничивающему эту поверхность (формула Стокса).

**Тарталья Николо** (ок. 1499 – 1557) – итальянский математик. Самостоятельно изучал латинский и греческий языки, математику. В 1535 г. прославился блестящей победой на публичном математическом диспуте с математиком Фиоре. Темой диспута был вопрос о решении кубического уравнения, не известного до того временн в науке. Открытый им метод решения уравнения третьей степени был опубликован Д. Кардано в книге (1545). Основные труды относятся к арифметике, алгебре, геометрии, механике, баллистике, геодезии, фортификации. В сочинении «Новая наука»

(1557) Тарталья показал, что траекторией полета снаряда является парабола и что наибольшая дальность полета снаряда соответствует наклону орудия под углом в 45°.

**Тейлор Брук** (1685 – 1731) – английский математик, член Лондонского королевского общества (1712) и его непременный секретарь (1714 – 1718). Основные исследования относятся к математическому анализу, механике и баллистике. В 1712 г. нашел формулу для разложений функции в степенные ряды, позже названные его именем. Эта формула опубликована в сочинении «Прямой и обратный метод приращений» (1715), в котором положено начало изучению задачи о колебаниях струны. Предложил правило дифференцирования функции, обратной данной. Занимался также вопросами оптики, астрономии и философии.

**Ферма Пьер** (1601 – 1665) – французский математик. По профессии юрист, с 1631 г. работал советником Кассационной палаты парламента в Тулузе. Математикой занимался в свободное время, при жизни почти ничего не опубликовал. Полученные им математические результаты становились известными ученым благодаря переписке и личному общению. Ферма – один из создателей теории чисел, в которой с его именем связаны две теоремы: великая теорема Ферма (для любого натурального $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах *x*, *y*, *z*) и малая теорема Ферма (если *p* –простое число и *a* – целое число, не делящееся на *p*, то $a^{p-1} - 1$ делится на *p*). Ферма наряду с Декартом является основоположником аналитической геометрии. Предложил правило нахождения экстремумов, а также общие правила дифференцирования и интегрирования степенной функции, которые затем распространил на случаи дробных и отрицательных показателей. Занимался и вопросами физики.

**Фурье Жан Ботист Жозеф** (1768 – 1830) – французский математик, член Парижской (1817), иностранный почетный член Петербургской (1829) академий. Окончил военную школу в Осере, где затем был преподавателем. Преподавал в Политехнической школе в Париже (1796 – 1798). Вместе с другими учеными принимал участие в Египетской экспедиции Наполеона Бонапарта (1798 – 1801), был секретарем Каирского института. По возвращении во Францию Фурье – префект департамента Изер (1802 – 1815). В 1817 г. переехал в Париж. Основные работы относятся к теории тепла и теории уравнений с частными производными. Фурье вывел уравнение теплопроводности и развил методы его интегрирования при различных граничных условиях, чем заложил основы математической физики. Разработал учение о представлении функции в виде тригонометрических рядов (ряды Фурье). Его первые научные работы относились к алгебре; он доказал теорему о числе действительных корней алгебраического уравнения, расположенных в заданном интервале.

**Чебышев Пафнутий Львовнч** (1821 – 1894) – русский математик и механик, академик Петербургской (1856, адъюнкт – с 1853 г.), иностранный член Берлинской (1871) и многих других академий. Окончил Московский университет (1841), здесь защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (М., 1845). Работал в Петербургском университете, где защитил докторскую диссертацию «Теория сравнения» (СПб, 1849), за которую ему присуждена Демидовская премия (1849). Длительное время принимал активное участие в работах артиллерийского отделения военно-ученого комитета и ученого комитета Министерства народного образования. Прекратив чтение лекций в университете, целиком отдался научной работе, продолжавшейся до последних дней его жизни. Основатель Петербургской математической школы, наиболее крупными представителями которой были А. М. Ляпунов, А. А. Марков, В. А. Стеклов и др. Характерной особенностью его творчества была тесная связь теории и практики, что он сам неоднократно подчеркивал. Основные труды относятся к интегральному исчислению, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов, другим областям математики и смежных наук. Чебышев является основоположником теории приближения функций.

**Эйлер Леонард** (1707 – 1783) – математик, физик, механик, астроном. Родился в Базеле (Швейцария). Окончил Базельский университет (1724). По приглашению Петербургской Академии приехал в Россию (1727). В Петербурге работал с 1727 по 1741 г. и с 1766 до конца своей жизни. За 14 лет первого петербургского периода жизни подготовил около 80 и опубликовал свыше 50 работ. С 1741 по 1766 г. Эйлер жил и работал в Берлине, не переставая интенсивно трудится для Петербургской Академии наук, сохраняя звание ее почетного члена и получая пенсию. Участвовал в подготовке русских математиков, командированных на учебу в Берлин, приобретал литературу и оборудование для Петербургской Академии наук и т. п. За 17 лет второго петербургского периода им было подготовлено около 400 работ, среди которых несколько больших книг (всего написано свыше 800 работ). Круг научных занятий Эйлера охватывал все разделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию машин, картографию, баллистику, морскую науку, страховое дело, теорию музыки и др. Свои результаты и результаты, полученные другими учеными, Эйлер систематизировал в ряде классических монографий, большая часть которых вошла затем в учебные пособия для высшей и отчасти средних школ. Трудно перечислить все теоремы и методы Эйлера, только немногие фигурируют в учебной литературе под его именем: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, эйлеровские постоянные, функции, углы, интегралы, формулы, уравнения, постановки и т. д. В трудах Эйлера многие математические формулы и символика получили современный вид. Ему принадлежат обозначения: $e, \pi$ (постоянные), $i$ (мнимая единица) $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ (тригонометрические функции), $\Delta x$ (разность, приращение), $\Sigma$ (знак суммы), $f(x)$ – обозначение функции и др.

**Якоби Карл Густав Якоб** (1804 – 1851) – немецкий математик, член Берлинской (1836), иностранный почетный член Петербургской (1833) и других академий. Брат физика и электротехника Б. С. Якоби (1801 – 1874), с 1835 г. работавшего в России. Окончил Берлинский университет (1825), работал там же (1825 –1829), а также в Кенигсбергском университете (1829 – 1835). С 1836 г. жил в Берлине, занимался научной работой. Сделал важные открытия в области линейной алгебры, теории чисел, вариационного исчисления, теории дифференциальных уравнений, в особенности в теории уравнений с частными производными первого порядка. Исследовал дифференциальные уравнения динамики, предложив новые методы их решения. Ввел в употребление функциональные определители, указал их роль при замене переменных в кратных интегралах и при решении уравнений с частными производными. Эти определители по предложению Дж. Сильвестра названы якобианами.

# Предметный указатель

# Г



# Д

## Е



## З



## И

## К



## Л

## М



## Н



## О

## П

## Р

## С



## Т

## У

## Ф

## Х



## Ц



## Ч



## Ш



## Э



## Я

# СОДЕРЖАНИЕ

*Справочное издание*

**Гусак Алексей Адамович**
**Гусак Галина Максимовна**
**Бричикова Елена Алексеевна**

# Справочник по высшей математике

Главный редактор А.Ф.Мясников.
Редактор С.В.Процко.
Дизайн обложки С.А.Демидовой и Н.Б.Борковского.

Подписано в печать 22.12.98.
Формат 60×84 1/16. Бумага для офсетной печати. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Печ.л. 40. Усл.печ.л. 67.2. Тираж 5000 экз.
Заказ 1.

НТООО “ТетраСистемс” (Лицензия ЛВ № 76 от 19.11.97 до 19.11.2002).
220036, Минск, пер.Домашевский, 11А-508.

При участии ООО "НТЦ АПИ" (Лицензия ЛВ № 52 от 22.10.97 до 22.10.2002).
220102, Минск, ул.Социалистическая, 9-102.

Качество печати соответствует качеству представленных
издателем диапозитивов.

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика
в типографии издательства “Белорусский Дом печати”.
220013, Минск, пр.Ф.Скорины, 79.