А. А. Килбас

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

КУРС ЛЕКЦИЙ

МИНСК
БГУ
2005

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.6я73
К39

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета

Р е ц е н з е н т ы :
член-корреспондент НАН Беларуси,
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Гороховик*;
доктор физико-математических наук, профессор *П. П. Забрейко*

Килбас, А. А.

К39 Интегральные уравнения : курс лекций / А. А. Килбас. — Мн. : БГУ, 2005. — 143 с.

ISBN 985-485-426-4.

Курс лекций «Интегральные уравнения» написан в соответствии с программой для университетов по специальности «Механика». Содержит краткий исторический очерк развития теории интегральных уравнений, основные понятия и теоремы теории интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, интегральных уравнений со слабыми особенностями и с симметричными ядрами и уравнений интегральных преобразований.

Предназначено для студентов механико-математического факультета специальности 1-31 03 02 «Механика».

УДК 517(075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 985-485-426-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие представляет собой изложение лекций, читаемых автором в течение ряда лет на отделении механики механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Пособие содержит краткий исторический очерк развития теории интегральных уравнений. В нем приводятся примеры составления интегральных уравнений и дается классификация интегральных уравнений, включающих интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, уравнения первого и второго рода, особые интегральные уравнения, разностные уравнения, уравнения интегральных преобразований и нелинейные уравнения.

Основной упор в пособии делается на представлении методов решения в замкнутой форме линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра. Сначала приводятся формулы решений интегральных уравнений первого рода, являющихся уравнениями интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Меллина и Ханкеля и более общего интегрального преобразования. Затем метод последовательных приближений применяется для представления решений интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода с непрерывными ядрами через резольвенту. Далее метод, основанной на прямом и обратном преобразованиях Лапласа, применяется для получения решений интегральных уравнений Вольтерра на полуоси с разностными ядрами. Для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с полярным ядром представлен метод решения, основанный на их сведении к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. При этом приводятся условия разрешимости интегральных уравнений Абеля первого и второго рода и даются формулы их явных решений. С использованием аналитического продолжения резольвенты на комплексную плоскость характеристических значений с помощью исследования свойств так называемого знаменателя Фредгольма доказываются теоремы Фредгольма о разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, а также указываются некоторые обобщения этих результатов на системы интегральных уравнений, на уравнения с неограниченными полярными ядрами, на уравнения с ядрами из пространства суммируемых с квадратом функций, а также на операторные уравнения. В пособии также представлен метод решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода в пространстве суммируемых с квадратом функций с симметричным ядром через характеристические значения и собственные функции соответствующего однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, а также условия разрешимости соответствующих интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

По сравнению с известными курсами интегральных уравнений настоящее пособие имеет особенности, связанные со специализацией "Механика". В нем приведены некоторые сведения, отсутствовавшие в опубликованных ранее учебных пособиях по интегральным уравнениям. Это касается классификации типов уравнений, а также уравнений интегральных преобразований и интегральных уравнений Абеля первого и второго рода, широко использующихся в теоретической механике. При изложении стандартных вопросов, связанных с интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерра, нами использовались уже имеющиеся учебники и учебные пособия других авторов. Они указаны в списке литературы.

При подготовке рукописи автор неоднократно консультировался со своими коллегами профессором В. И. Громаком, доцентами С. В. Рогозиным и М. В. Дубатовской и выражает им искреннюю благодарность. Автор также признателен секретарю кафедры теории функций Е. К. Щетникович за большую техническую работу по подготовке рукописи.

§ 1. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Интегральными уравнениями обычно называют уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла. Это определение нечеткое, так как вряд ли можно строить теорию интегральных уравнений вообще — приходится исследовать отдельные, четко ограниченные классы интегральных уравнений. В дальнейшем будем рассматривать только линейные интегральные уравнения.

Систематическое исследование интегральных уравнений началось только в конце XIX века; до этого работы по интегральным уравнениям носили случайный характер. Видимо, первый результат, который можно связать с интегральными уравнениями, это формула обращения Фурье (Ж. Фурье (J. Fourier); 1811):

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(xt) g(t)\, dt \qquad (x > 0), \tag{1.1}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(xt) f(t)\, dt \qquad (x > 0). \tag{1.2}$$

Можно считать, что формула (1.2) дает решение интегрального уравнения (1.1), в котором $g(x)$ — неизвестная, а $f(x)$ — заданная функции.

Другое интегральное уравнение было получено Абелем (Н. Абель (N.H. Abel); 1823), который рассматривал следующую задачу. В вертикальной плоскости дана некоторая гладкая кривая. Материальная частица, находящаяся в точке P, выходит из состояния покоя и начинает под действием притяжения земли падать по этой кривой. Определить время T, по прошествии которого она достигнет точки O. Выберем O за начало координат, ось Ox направим вверх, а ось Oy — горизонтально. Пусть далее координата точки P будет (x, y), точки Q — (ξ, η), а длина дуги OQ будет s.

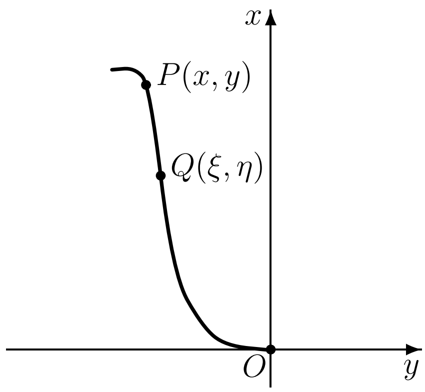

Рис. 1

Абсолютная величина скорости движущейся частицы $v = \sqrt{2g(x-\xi)}$, где g — ускорение свободного падения. Из физического смысла производной следует, что в точке Q материальная точка будет иметь скорость
$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(x-\xi)}.$$
Отсюда
$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}} \qquad \text{и} \qquad t = -\int\limits_P^Q \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}} = \int\limits_Q^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}}.$$
Следовательно, время полного падения
$$T(x) = \int\limits_0^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}}.$$

Если формула кривой задана, то s и значение ds должны выражаться через ξ. Пусть $ds = \varphi(\xi)d\xi$. Тогда
$$T(x) = \int\limits_0^x \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{2g(x-\xi)}}.$$

Абель решал обратную задачу: найти кривую, для которой время падения T представляет собой данную функцию от x: $T = f(x)$. Эта задача сводится к определению неизвестной функции $\varphi(\xi)$ из уравнения
$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{2g(x-\xi)}}\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{1.3}$$
Такая задача известна как задача о таутохроне, а уравнение (1.3) — как уравнение Абеля.

Уравнение Абеля — одно из немногих интегральных уравнений, к которым непосредственно приводит постановка той или иной конкретной задачи физики, механики и др. наук. Значение интегральных уравнений в первую очередь заключается в том, что к ним могут быть сведены многочисленные задачи, относящиеся к дифференциальным уравнениям.

Важным моментом в изучении линейных интегральных уравнений явилась работа Вольтерра (В. Вольтерра (V. Volterra); 1896), в которой он исследовал уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1.4}$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, $K(x,t)$ и $f(x)$ — данные функции, λ — числовой параметр. Вольтерра доказал, что если $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором замкнутом интервале $[a,b]$, то на этом интервале уравнение (1.4) имеет при любом значении λ одно и только одно непрерывное решение, которое можно построить методом последовательных приближений. Уравнения вида (1.4) называют уравнениями Вольтерра.

Более трудными для исследования оказались интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad a \le x \le b, \tag{1.5}$$

которые отличаются от уравнений Вольтерра только тем, что переменный верхний предел интегрирования x заменен постоянным пределом b. Уравнение (1.5) называется уравнением Фредгольма (Э. Фредгольм (E. Fredholm)). Уравнение (1.5) задолго до Фредгольма изучали Ж. Лиувилль (J. Lioville) и К. Нейман (K. Neumann), которые применяли для решения этого уравнения метод последовательных приближений. При таком методе решение интегрального уравнения получается в виде ряда, расположенного по степеням λ, называемого рядом Неймана. В общем случае такой ряд сходится, если параметр λ достаточно мал, но для некоторых классов уравнений Фредгольма сходимость имеет место при более общих условиях. Например, упомянутый выше результат Вольтерра можно сформулировать следующим образом: ряд Неймана для уравнения (1.4) сходится при всех значениях λ и, следовательно, представляет собой целую функцию от λ, если только ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x)$ уравнения (1.4) непрерывны.

Заслуга Фредгольма состоит в том, что он исследовал уравнение (1.5) в предположении непрерывности ядра $K(x,t)$ и свободного члена $f(x)$, при возможных значениях λ. К основным результатам Фредгольм пришел следующим путем. Интеграл в уравнении (1.5) заменяется приближенным

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} K(x, t_j)\varphi(t_j)\Delta t_j = f(x); \tag{1.6}$$

полагая в формуле (1.6) $x = t_1, t_2, \ldots, t_n$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\varphi(t_j)$:

$$\varphi(t_i) - \lambda \sum_{j=1}^{n} K(t_i, t_j)\varphi(t_j)\Delta t_j = f(t_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.7}$$

Условия разрешимости системы (1.7) зависят от определителя

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K(t_1, t_1)\Delta t_1 & -\lambda K(t_1, t_2)\Delta t_2 & \ldots & -\lambda K(t_1, t_n)\Delta t_n \\ -\lambda K(t_2, t_1)\Delta t_1 & 1 - \lambda K(t_2, t_2)\Delta t_2 & \ldots & -\lambda K(t_2, t_n)\Delta t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda K(t_n, t_1)\Delta t_1 & -\lambda K(t_n, t_2)\Delta t_2 & \ldots & 1 - \lambda K(t_n, t_n)\Delta t_n \end{vmatrix},$$

который является полиномом относительно λ. Если λ отлично от корней этого полинома, то система (1.7) разрешима. Решив ее и подставив полученные значения $\varphi(t_j)$ в формулу (1.6), получим приближенное решение уравнения (1.5):

$$\varphi(x) \sim f(x) + \lambda \frac{Q(x, t_1, t_2, \ldots, t_n; \lambda)}{D_n(\lambda)}, \tag{1.8}$$

где $Q(x, t_1, t_2, \ldots, t_n; \lambda)$ и $D_n(\lambda)$ — полиномы относительно λ.

Пусть теперь $\max\limits_{1 \le j \le n} \Delta t_j \to 0$. Если $K(x, t)$ и $f(x)$ непрерывны, то оказывается, что числитель и знаменатель второго члена в формуле (1.8) стремятся соответственно к пределам

$$\lambda \int_a^b D(x, t; \lambda) f(t)\, dt \qquad \text{и} \qquad D(\lambda),$$

где $D(\lambda)$ и $D(x, t; \lambda)$ — некоторые целые функции от λ. Вводя так называемую "резольвенту Фредгольма"

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)},$$

придем к формуле

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b \Gamma(x, t; \lambda) f(t)\, dt, \tag{1.9}$$

которая дает решение уравнения (1.5) для всех значений λ, при которых $D(\lambda) \neq 0$.

Строгое обоснование указанных выше предельных переходов довольно затруднительно, и Фредгольм в своих работах обошелся без такого обоснования. Вместо этого он дал способ непосредственного построения функций $D(\lambda)$ и $D(x, t; \lambda)$ в виде рядов, расположенных по степеням λ ("ряды Фредгольма") и доказал, что при $D(\lambda) \neq 0$ формула (1.9) дает единственное решение уравнения (1.5).

Дальнейший анализ привел Фредгольма к важному выводу, что для уравнений Фредгольма справедливы основные теоремы линейной алгебры, а также дополнительное утверждение о распределении характеристических чисел — тех значений λ, при которых уравнение Фредгольма может не иметь решений.

Фредгольм распространил свою теорию на системы интегральных уравнений, а также на интегральные уравнения, ядра которых не непрерывны, а имеют степенную особенность интегрируемого порядка:

$$K(x, t) = \frac{K_1(x, t)}{|x - t|^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

где функция $K_1(x, t)$ непрерывна.

Дальнейшие исследования линейных интегральных уравнений проводились в четырех направлениях. Первое направление связано с выявлением новых классов уравнений, для которых верны основные теоремы линейной алгебры (с добавлением теоремы Фредгольма о распределении характеристических чисел). Оказалось, что вместо непрерывного ядра $K(x, t)$ достаточно существования двойного интеграла

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x, t)|^2 dx\, dt. \tag{1.10}$$

Т. Карлеман (T. Carleman) доказал, что при этом условии остаются верны фредгольмовские разложения в ряды функций $D(\lambda)$ и $D(x, t; \lambda)$

и что эти функции остаются целыми. Другое доказательство этих фактов, пригодное и для случая бесконечного интервала (a, b), дано С. Г. Михлиным.

Решающий шаг в этом направлении сделал Ф. Рисс (F. Riesz), который показал, что эта теория в своих основных чертах остается справедливой для уравнений, в которых интегральный оператор Фредгольма

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{1.11}$$

заменяется произвольным, так называемым вполне непрерывным (или, что то же, компактным) оператором, действующим в некотором банаховом пространстве, а данная функция $f(x)$ и искомая $\varphi(x)$ — данным и искомым элементами того же пространства. Результаты Рисса были существенно дополнены Ю. С. Шаудером (J. Schauder), который полностью распространил теорию Фредгольма на уравнения с вполне непрерывными операторами.

Второе направление связано с теорией ортогональных разложений и заключается в исследовании интегральных уравнений с симметричными ядрами, для которых $K(x,t) = K(t,x)$. Фундаментальные результаты здесь были получены в начале XX века Д. Гильбертом (D. Hilbert) и Э. Шмидтом (E. Schmidt). Коротко эти результаты можно охарактеризовать следующим образом. Теория уравнений с симметричными ядрами может быть построена независимо от теории Фредгольма, хотя такие уравнения являются частными случаями уравнений Фредгольма. Для интегральных уравнений с симметричными ядрами установлены следующие основные факты: характеристические числа таких уравнений вещественны, а соответствующие им так называемые собственные функции ортогональны. Всякая функция вида (1.11), где $\varphi(t)$ — квадратично суммируема, разлагается в ряд по собственным функциям ядра $K(x,t)$. На этом основан простой способ решения симметричных интегральных уравнений, если только известны его характеристические значения и собственные функции. Дальнейшее развитие идей Гильберта, особенно в работах Т. Карлемана, Ф. Рисса и И. Неймана (I. Neumann), привело к созданию теории операторов в гильбертовом пространстве, играющей в настоящее время важную роль в анализе и теоретической физике. Существенный вклад в развитие этой теории оказали советские математики М. Г. Крейн и И. Ц. Гохберг.

Третье направление связано с исследованием таких интегральных уравнений, для которых неверна одна из основных теорем линейной алгебры, а именно теорема о том, что два сопряженных однородных уравнения имеют равное число линейно независимых решений. Важным классом таких уравнений являются так называемые особые (сингулярные) интегральные уравнения. Входящий в такие уравнения интеграл расходится в обычном смысле и должен пониматься в смысле его главного значения по Коши. Основы теории таких уравнений заложены в работах Д. Гильберта, А. Пуанкаре (A. Poincaré), Т. Карлемана и Ф. Нетера (F. Noether) и развиты в работах советских математиков С. М. Никольского, С. Г. Михлина, Н. И. Мусхелишвили, Н. П. Векуа, Ф. Д. Гахова. Эта теория распространена на широкие классы уравнений в банаховых пространствах.

Четвертое направление связано с развитием теории нелинейных интегральных уравнений. Основы этой теории заложены в трудах А. М. Ляпунова, Э. Шмидта, П. С. Урысона и А. Гаммерштейна (A. Hammerstein), а значительный вклад в ее развитие сделали советские математики М. А. Красносельский, М. М. Вайнберг, П. П. Забрейко.

В заключение добавим, что большое число исследований было посвящено многочисленным приложениям интегральных уравнений. Объем и разнообразие этих исследований столь велики, что охарактеризовать их, даже очень кратко, здесь не представляется возможным.

§ 2. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример интегрального уравнения Абеля был дан в кратком историческом очерке. Здесь мы приведем примеры краевых задач для дифференциальных уравнений, сводящихся к интегральным уравнениям.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $y'(x) = f[x, y(x)]$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Предположим, что функция $f(x, y)$ однозначна, непрерывна и имеет непрерывную производную по y в некоторой открытой области D плоскости xOy, причем точка $(x_0, y_0) \in D$.

При рассмотрении непрерывных функций $y(x)$, определенных на некотором промежутке I изменения x, обычно считают, что точка с координатами $(x, y(x))$ при изменении x на I принадлежит D, а $y(x)$ имеет производную $y'(x)$. У такого решения $y = y(x)$ уравнения $y'(x) = f(x, y)$ производная $y'(x)$ непрерывна.

Если I содержит x и $y(x)$ есть решение задачи

$$y'(x) = f[x, y(x)], \qquad y(x_0) = y_0, \tag{2.1}$$

то $y(x)$ есть решение интегрального уравнения

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt + y_0. \tag{2.2}$$

Обратно, если $y(x)$ — непрерывное на I решение интегрального уравнения (2.2), то $y(x)$ является решением краевой задачи (2.1). В этом смысле говорят, что решения краевой задачи (2.1) и интегрального уравнения (2.2) равносильны. Задача вида (2.1) называется <u>задачей Коши</u>.

Таким же образом задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) = f[x, y(x)], \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \tag{2.3}$$

сводится к интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} f[\tau, y(\tau)]\, d\tau + y_0 + y_1(x - x_0).$$

Преобразуя повторный интеграл в простой, перепишем это уравнение в виде

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} (x - \tau) f[\tau, y(\tau)]\, d\tau + y_0 + y_1(x - x_0). \tag{2.4}$$

Общее решение уравнения $y''(x) = f[x, y(x)]$ получится из интегрального уравнения

$$y(x) = \int_{0}^{x} (x - t) f[t, y(t)]\, dt + c_1 + c_2 x, \tag{2.5}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а нижний предел интегрирования мы положим равным нулю.

Рассмотрим теперь для уравнения $y''(x) = f[x, y(x)]$ так называемую предельную задачу: будем искать его решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = a$ и $y(l) = b$:

$$y''(x) = f[x, y(x)], \qquad y(0) = a, \quad y(l) = b \qquad (0 \le x \le l < \infty). \tag{2.6}$$

Полагая в уравнении (2.5) $x = 0$ и $x = l$, получим два уравнения для определения постоянных c_1 и c_2:

$$y(0) = c_1, \qquad y(l) = \int\limits_0^l (l-t) f[t, y(t)]\, dt + c_1 + c_2 l.$$

Учитывая условия $y(0) = a$ и $y(l) = b$, находим значения постоянных c_1 и c_2:

$$c_1 = a, \qquad c_2 = \frac{b-a}{l} - \frac{1}{l} \int\limits_0^l (l-t) f[t, y(t)]\, dt.$$

Подставляя найденные значения в формулу (2.5), приведем задачу (2.6) к интегральному уравнению

$$y(x) = F(x) + \int\limits_0^x (x-t) f[t, y(t)]\, dt - \frac{x}{l} \int\limits_0^l (l-t) f[t, y(t)]\, dt, \tag{2.7}$$

где

$$F(x) = a + \frac{b-a}{l} x.$$

Перепишем уравнение (2.7) в виде

$$y(x) = F(x) - \int\limits_0^x \frac{t(l-x)}{l} f[t, y(t)]\, dt - \frac{x}{l} \int\limits_x^l \frac{x(l-t)}{l} f[t, y(t)]\, dt. \tag{2.8}$$

Введем функцию двух переменных

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t(l-x)}{l}, & t \le x, \\ \dfrac{x(l-t)}{l}, & t \ge x. \end{cases} \tag{2.9}$$

Уравнение (2.8) может быть переписано при помощи этой функции в виде

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x,t) f[t, y(t)]\, dt. \tag{2.10}$$

Применим полученные результаты к линейному уравнению

$$y''(x) + p(x)y(x) = \omega(x). \tag{2.11}$$

Задача нахождения решения этого уравнения с предельными условиями

$$y(0) = a,\ \ y(l) = b \tag{2.12}$$

равносильна нахождению решения $y(x)$ линейного интегрального уравнения

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^l K(x,t)p(t)y(t)\, dt, \tag{2.13}$$

где

$$F_1(x) = F(x) - \int_0^l K(x,t)\omega(t)\, dt$$

есть известная функция от x.

Умножим коэффициент $p(x)$ в уравнении (2.11) на некоторый параметр λ и рассмотрим однородное уравнение

$$y''(x) + \lambda p(x)y(x) = 0 \tag{2.14}$$

при однородных предельных условиях

$$y(0) = 0,\ \ y(l) = 0. \tag{2.15}$$

Эта неоднородная предельная задача приводит нас к однородному интегральному уравнению, содержащему параметр λ

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x,t)p(t)y(t)\, dt. \tag{2.16}$$

Одним из основных вопросов в дальнейшем будет вопрос о том, при каких значениях параметра λ поставленная задача имеет решения, не равные тождественному нулю.

Отметим некоторые свойства функции $K(x,t)$, которая называется ядром интегрального уравнения (2.16) (также (2.13)). Эта функция непрерывна в квадрате $k_0 = (x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le l$. На диагонали этого квадрата, то есть при $x = t$, первая частная производная по x от ядра терпит разрыв

$$K_x(x,t)|_{x=t+0} - K_x(x,t)|_{x=t-0} = -1.$$

Далее, это ядро $K(x,t)$, как функция от x, вне диагонали $x = t$ есть решение однородного уравнения $y''(x) = 0$, удовлетворяющее однородным предельным условиям (2.15). Наконец, $K(x,t)$ — симметричное ядро:

$$K(x,t) = K(t,x). \tag{2.17}$$

Все эти свойства ядра вытекают из формулы (2.9).

Ядро $K(x,t)$ имеет простой физический смысл. Известно, что при действии сосредоточенной силы в точке $x = t$ на струну, закрепленную на концах, в точке приложения силы выполняется условие

$$T_0[(u_x)_{x=t+0} - (u_x)_{x=t-0}] = -P,$$

где P — величина действующей силы. Непосредственно проверяется, что функция

$$u(x) = \frac{P}{T_0} K(x,t)$$

дает формулу статического прогиба струны под влиянием упомянутой выше сосредоточенной силы.

Укажем еще один характерный метод приведения предельных задач математической физики к интегральному уравнению. Потенциал сферического слоя определяется формулой:

$$u(M) = \iint\limits_S \frac{\rho(M')}{d}\, dS = \iint\limits_S \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\, dS, \tag{2.18}$$

где $\rho(M')$ — заданная на поверхности сферы S функция, dS — элемент площади поверхности и d — расстояние от переменной точки $M \in \mathbb{R}^3$ до переменной точки M' поверхности сферы. Пусть n — направление нормали в некоторой точке M_0 сферы. Обозначим через

$\left(\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i$ и $\left(\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e$ предельные значения, которые имеет производная $\dfrac{\partial u(M)}{\partial n}$ при приближении переменной точки $M \in \mathbb{R}^3$ к точке M_0 соответственно изнутри или извне сферы. Известно, что верны следующие формулы:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_i &= 2\pi\rho(M_0) - \iint\limits_S \rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,dS, \\ \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial n}\right)_e &= -2\pi\rho(M_0) - \iint\limits_S \rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,dS, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где d — расстояние от точки M_0 до переменной точки M' сферы и ω — угол, образованный радиусом-вектором $M'M_0$ с направлением нормали n.

Заметим, что формулы (2.19) справедливы не только для сферы, но и для любых поверхностей с достаточно гладкой границей.

Внутренняя задача Неймана для сферы заключается в нахождении функции $u(M) = u(x, y, z)$, гармонической внутри сферы, нормальная производная которой имеет заданные предельные значения на поверхности сферы:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M = f(M_0). \tag{2.20}$$

Будем искать решение $u(M)$ в виде потенциала сферического слоя (2.18). Этот потенциал является гармонической функцией внутри сферы, что проверяется непосредственно. Поэтому нам нужно подобрать плотность $\rho(M')$ этого потенциала так, чтобы удовлетворялось предельное условие (2.20). Принимая во внимание первую формулу в (2.19) и предельное условие (2.20), мы получаем для определения искомой плотности $\rho(M)$ следующее интегральное уравнение:

$$2\pi\rho(M) = f(M_0) + \iint\limits_S \rho(M')\frac{\cos\omega}{d^2}\,dS. \tag{2.21}$$

Заметим, что в данном случае функции $f(M)$ и $\rho(M)$ должны быть определены на поверхности сферы, а интегрирование производится по поверхности сферы, а не по интервалу оси Ox, как это было выше.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА И ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим интегральные уравнения для того случая, когда искомая функция определена на оси Ox. Рассмотрим интегральные уравнения

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \tag{3.1}$$

$$y(x) = \int_a^x K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \tag{3.2}$$

где $K(x,t)$ и $f(x)$ — заданные функции, а $y(x)$ — искомая функция.

Определение 3.1. *Уравнение (3.1) называется интегральным уравнением Фредгольма второго рода, а уравнение (3.2) — интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Функция $K(x,t)$ называется ядром интегрального уравнения, а $f(x)$ — свободным членом. Если $f(x) \neq 0$, то уравнения (3.1) и (3.2) называются неоднородными уравнениями, а если $f(x) \equiv 0$ — однородными.*

Определение 3.2. *Интегральные уравнения*

$$\int_a^b K(x,t)y(t)\,dt = f(x) \tag{3.3}$$

и

$$\int_a^x K(x,t)y(t)\,dt = f(x) \tag{3.4}$$

называются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и Вольтерра первого рода соответственно.

Примером уравнения Вольтерра первого рода является интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^x \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{2g(x-\xi)}} = f(x),$$

рассмотренное в кратком историческом очерке.

Дадим пример интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Пусть $u(x)$ — статический прогиб струны при наличии непрерывно распределенной нагрузки $\rho(t)$, рассчитанной на единицу длины. Будем рассматривать эту непрерывно распределенную нагрузку как сумму сосредоточенных нагрузок $\rho(t)\,dt$. От каждой такой сосредоточенной нагрузки мы получаем, согласно сказанному в § 2, статический прогиб вида

$$\frac{1}{T_0}K(x,t)\rho(t)\,dt, \qquad K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t(l-x)}{l}, & x \geq t, \\ \dfrac{x(l-t)}{l}, & x \leq t. \end{cases} \tag{3.5}$$

Интегрируя, получим статический прогиб при непрерывно распределенной нагрузке:

$$u(x) = \frac{1}{T_0}\int\limits_0^l K(x,t)\rho(t)\,dt. \tag{3.6}$$

Это уравнение является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, если задан прогиб $u(x)$ и ищется соответствующая нагрузка $\rho(t)$.

Отметим, что уравнения Вольтерра (3.2) и (3.4) — частные случаи уравнений Фредгольма (3.1) и (3.3): в уравнениях Вольтерра мы можем взять интегрирование от $t = a$ до $t = b$, если доопределить ядро $K(x,t)$ условием $K(x,t) = 0$ при $x < t$.

Теория интегральных уравнений Фредгольма во многом аналогична вопросам линейной алгебры. Напомним, что линейное преобразование в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.7}$$

и осуществляется матрицей A, образованной коэффициентами a_{ik} преобразования (3.7):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Поэтому преобразование (3.7) можно записать в виде

$$y = Ax, \tag{3.9}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — первоначальный вектор, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — преобразованный вектор, A — матрица (3.8). В случае интегральных уравнений вместо векторов пространства $\mathbb{R}^n$ мы имеем функции, определенные обычно в некотором промежутке $[a, b]$. Вместо матрицы A имеем ядро $K(x, t)$ и вместо суммирования имеем процесс интегрирования. Тогда в рассматриваемом случае линейное преобразование выражается формулой

$$y(x) = \int\limits_a^b K(x, t)x(t)\,dt, \tag{3.10}$$

где $x(t)$ — первоначальная функция, а $y(x)$ — преобразованная функция.

Напомним, что собственными значениями матрицы A называются такие значения параметра μ, при которых уравнение

$$Ax = \mu x$$

имеет решение $x = (x_1, \ldots, x_n)$, отличное от нуля. По аналогии собственными значениями ядра $K(x, t)$ или соответствующего преобразования называют такие значения параметра μ, при которых однородное интегральное уравнение

$$\int\limits_a^b K(x, t)y(t)\,dt = \mu y(x)$$

имеет решения, не равные тождественно нулю. В теории интегральных уравнений наряду с собственными значениями μ принято рассматривать значения $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, называемые характеристическими.

Определение 3.3. λ *называется характеристическим значением ядра* $K(x, t)$, *если однородное интегральное уравнение*

$$y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, t)y(t)\,dt \tag{3.11}$$

имеет ненулевые решения. Сами решения называют собственными функциями ядра.

При изложении теории интегральных уравнений мы должны сделать некоторые предположения относительно ядра $K(x,t)$, свободного члена $f(x)$ и искомой функции $y(x)$.

Будем считать заданные и искомые функции комплексными:

$$K(x,t) = K_1(x,t)+iK_2(x,t),\ f(x) = f_1(x)+if_2(x),\ y(x) = y_1(x)+iy_2(x),$$

где $K_i(x,t)$, $f_i(x)$, $y_i(x)$ $(i = 1,2)$ — вещественные функции. Независимая переменная x всегда вещественна. Будем обозначать конечный замкнутый промежуток на действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ через $[a,b]$.

Можно рассматривать интегральные уравнения Фредгольма (3.1) и Вольтерра (3.2) более общего вида, заданные на кривых, поверхностях и областях в n-мерных евклидовых пространствах. Например, если $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область, x и t — точки этой области, то уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

$$y(x) + \lambda \int\limits_{\Omega} K(x,t)y(t)\,dt = f(x). \tag{3.12}$$

Можно рассматривать также уравнения (3.1) и (3.2) с ядрами

$$K(x,t) = \frac{K_1(x,t)}{|x-t|^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{3.13}$$

где функция $K_1(x,t)$ ограничена или непрерывна.

Определение 3.4. *Ядра вида (3.13) называются полярными или слабо полярными, а уравнения (3.1) и (3.2) с такими ядрами — соответственно интегральными уравнениями Фредгольма и Вольтерра с полярным ядром.*

Интегральное уравнение Абеля — пример интегрального уравнения Вольтерра первого рода с полярным ядром.

§ 4. ОСОБЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ОСОБЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ КОШИ

Пусть Γ — гладкая кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Это означает, что ее параметрическое уравнение можно записать в виде: $z = \sigma(t)$,

$\sigma(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где функция $\sigma(t)$ имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывную и отличную от нуля производную $\sigma'(t) \neq 0$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то есть $x'(t)$ и $y'(t)$ одновременно не обращаются в нуль: $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ $(\alpha \le t \le \beta)$. Точка $a = \sigma(\alpha)$ называется началом кривой Γ, а точка $b = \sigma(\beta)$ — ее концом. Если $a \neq b$, то кривая Γ разомкнута, а если $a = b$ и $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$, то кривая Γ замкнута.

Пусть функция $f(t)$ определена на кривой Γ. Если $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \Gamma$, то интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \qquad (z \notin \Gamma)$$

называется интегралом типа Коши. Этому интегралу можно придать смысл и при $z = t \in \Gamma$, несмотря на то, что он в этом случае расходится.

Определение 4.1. *Особым интегралом с ядром Коши называется интеграл*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\substack{\tau \in \Gamma \\ (|\tau - t| > \varepsilon)}} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \qquad (t \in \Gamma), \tag{4.1}$$

понимаемый как сходящийся интеграл в смысле главного значения по Коши.

Покажем существование интеграла (4.1) на гельдеровских функциях.

Определение 4.2. *Говорят, что функция $f(t)$, заданная на Γ, удовлетворяет условию Гельдера порядка $\lambda > 0$ на Γ, если для любых точек t_1, $t_2 \in \Gamma$*

$$|f(t_1) - f(t_2)| \le A|t_1 - t_2|^{\lambda}, \tag{4.2}$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от t_1, t_2. Число λ называется показателем Гельдера, а A — постоянной Гельдера. При $\lambda = 1$ условие (4.2) называется условием Липшица.

Обозначим через $H^{\lambda}(\Gamma)$ класс всех комплексных функций, удовлетворяющих на Γ условию Гельдера фиксированного порядка. В частности, $H^1(\Gamma)$ — класс липшицевских функций на Γ.

Покажем сначала, что интеграл (4.1) существует при $f(t) = 1$.

Имеем

$$\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c_\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{d_\varepsilon}^{b} \frac{d\tau}{\tau - t}\right), \tag{4.3}$$

где через c_ε и d_ε обозначены точки пересечения кривой Γ с окружностью $|\tau - t| = \varepsilon$; см. рис. 2. Вычисляя интегралы в правой части (4.3), получаем

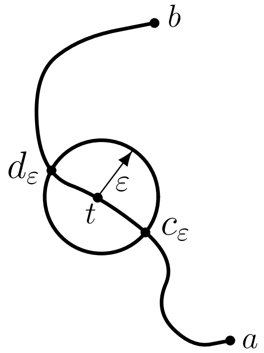

Рис. 2

$$\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln\frac{b-t}{a-t} + \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\frac{c_\varepsilon - t}{d_\varepsilon - t}. \tag{4.4}$$

Согласно определению логарифмической функции

$$\ln\frac{c_\varepsilon - t}{d_\varepsilon - t} = \ln\frac{|c_\varepsilon - t|}{|d_\varepsilon - t|} + i\arg\frac{(c_\varepsilon - t)}{(d_\varepsilon - t)} =$$
$$= i[\arg(c_\varepsilon - t) - \arg(d_\varepsilon - t)],$$

так как $|c_\varepsilon - t| = |d_\varepsilon - t| = \varepsilon$. При $\varepsilon \to 0$ $\arg(c_\varepsilon - t) - \arg(d_\varepsilon - t)$ стремится к углу $-\pi$ и поэтому из (4.4) получаем

$$\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln\frac{b-t}{a-t} - i\pi. \tag{4.5}$$

В частности, если кривая Γ замкнута, то

$$\int_\Gamma \frac{d\tau}{\tau - t} = -i\pi. \tag{4.6}$$

Перейдем к интегралу (4.1). Если $f(t) \in H^\lambda(\Gamma)$, то применяя (4.5), имеем

$$\int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \int_\Gamma \frac{f(t)}{\tau - t}\,d\tau + \int_\Gamma \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t}\,d\tau =$$
$$= f(t)\left[\ln\frac{b-t}{a-t} - i\pi\right] + \int_\Gamma \frac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Согласно (4.2) $\left|\dfrac{f(\tau) - f(t)}{\tau - t}\right| \le A|\tau - t|^{\lambda - 1}$, и, следовательно, последний интеграл сходится по признаку сходимости несобственных интегралов.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Если функция $f(t)$ задана на гладком контуре Γ и удовлетворяет условию Гельдера порядка $0 < \lambda \leq 1$, то особый интеграл с ядром Коши (4.1) существует в смысле главного значения по Коши.*

В частности, такой интеграл существует, если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица на Γ.

Пусть функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ заданы на контуре Γ, а функция $K(t,\tau)$ — на $\Gamma \times \Gamma$.

Определение 4.3. *Полным особым интегральным уравнением с ядром Коши на Γ называется уравнение вида*

$$a(t)y(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{y(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int\limits_{\Gamma} K(t,\tau) y(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{4.7}$$

Если $K(t,\tau) \equiv 0$, то уравнение

$$a(t)y(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{y(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t) \tag{4.8}$$

называется характеристическим особым интегральным уравнением с ядром Коши.

Можно рассматривать особые интегральные уравнения для областей Ω в $\mathbb{R}^n$, которые называются многомерными особыми интегральными уравнениями. Уравнения такого типа имеют вид

$$a(x)y(x) + \int\limits_{\Omega} \frac{g(x,\Theta)}{|x-t|^n}\, y(t)\, dt + \int\limits_{\Omega} K(x,t) y(t)\, dt = f(x), \tag{4.9}$$

где $\Theta = \dfrac{t-x}{|t-x|}$, а многомерный особый интеграл опять понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{g(x,\Theta)}{|x-t|^n}\, y(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x-t|>\varepsilon} \frac{g(x,\Theta)}{|x-t|^n}\, y(t)\, dt. \tag{4.10}$$

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ КЛАССЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном параграфе мы приведем некоторые интегральные уравнения, отличные от интегральных уравнений Фредгольма, Вольтерра и особых интегральных уравнений, теория которых хорошо разработана.

5.1. Уравнения с разностными ядрами

Одномерное интегральное уравнение с разностным ядром имеет вид

$$ay(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{5.1}$$

уравнение с почти разностным ядром задается соотношением

$$a(x)y(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x, x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{5.2}$$

где зависимость ядра $K(x, x-t)$ от первого аргумента в некотором смысле несущественна.

Аналогичные многомерные уравнения даются формулами

$$ay(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{5.3}$$

и

$$a(x)y(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x, x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{5.4}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — n-мерные векторы (точки) из $\mathbb{R}^n$.

Интегральными уравнениями Вольтерра с разностным ядром называются уравнения

$$ay(x) - \int\limits_{-\infty}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{5.5}$$

$$ay(x) - \int\limits_{0}^{x} K(x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (x > 0). \tag{5.6}$$

Заметим, что уравнение (5.5) — частный случай уравнения (5.1), если мы положим в нем $K(u) = 0$ при $u < 0$.

Уравнением с разностным ядром на полуоси является так называемое <u>уравнение Винера – Хопфа</u>

$$ay(x) - \int_0^{\infty} K(x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (x > 0). \tag{5.7}$$

Более общим, чем уравнение (5.7), является так называемое <u>уравнение с двумя ядрами</u>

$$ay(x) + \lambda \int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t)\,dt + \mu \int_{-\infty}^{0} K_2(x-t)y(t)\,dt = f(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{5.8}$$

Важным классом уравнений с разностными ядрами являются <u>парные уравнения</u>

$$\begin{cases} ay(x) - \displaystyle\int_0^{\infty} K_1(x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (x > 0); \\ by(x) - \displaystyle\int_0^{\infty} K_2(x-t)y(t)\,dt = f(x) \qquad (x < 0). \end{cases} \tag{5.9}$$

Интересно отметить, что теория уравнений (5.7) – (5.9) равносильна теории характеристических интегральных уравнений с ядром Коши (4.8) на всей действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Уравнения (5.1) – (5.9) с разностными ядрами называются также <u>уравнениями типа свертки</u>.

5.2. Уравнения интегральных преобразований

Любое из известных в анализе интегральных преобразований можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции, над которой это преобразование выполнено. Приведем несколько примеров; следуя выше принятой системе обозначений будем обозначать через y функцию, над которой производится преобразование, а через f — его результат.

А. Косинус-преобразование Фурье:

$$(\mathcal{F}_c y)(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(xt) y(t)\, dt = f(x) \qquad (x > 0). \tag{5.10}$$

Б. Синус-преобразование Фурье:

$$(\mathcal{F}_s y)(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \sin(xt) y(t)\, dt = f(x) \qquad (x > 0). \tag{5.11}$$

В. Комплексное преобразование Фурье:

$$(\mathcal{F} y)(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-itx} y(t)\, dt = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{5.12}$$

Г. Многомерное комплексное преобразование Фурье:

$$(\mathcal{F} y)(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot t} y(t)\, dt = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{5.13}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot t = \sum\limits_{i=1}^n x_i t_i$ — скалярное произведение x и t.

Д. Преобразование Лапласа:

$$(\mathcal{L} y)(x) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-xt} y(t)\, dt = f(x) \qquad (x > 0). \tag{5.14}$$

Е. Преобразование Меллина:

$$(\mathcal{M} y)(x) \equiv \int\limits_0^\infty t^{x-1} y(t)\, dt = f(x) \qquad (x > 0). \tag{5.15}$$

Ж. Преобразование Ханкеля:

$$(H_\nu y)(x) \equiv \int\limits_0^\infty \sqrt{xt} J_\nu(xt) y(t)\, dt = f(x) \qquad (x > 0), \tag{5.16}$$

где $J_\nu(z)$ — так называемая функция Бесселя первого рода, определенная при $z \in \mathbb{C}$ $(z \neq 0)$ и $\nu \in \mathbb{C}$ $(Re(\nu) > -1)$ рядом

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\,. \tag{5.17}$$

В частности, если $\nu = -1/2$ и $\nu = 1/2$, то

$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z, \qquad J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z, \tag{5.18}$$

и преобразование Ханкеля (5.16) при $\nu = -1/2$ и $\nu = 1/2$ совпадает соответственно с косинус- и синус-преобразованиями Фурье:

$$(H_{-1/2}y)(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(xt) y(t)\, dt = (\mathcal{F}_c y)(x), \tag{5.19}$$

$$(H_{1/2}y)(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \sin(xt) y(t)\, dt = (\mathcal{F}_s y)(x). \tag{5.20}$$

З. <u>Общее интегральное преобразование</u>:

$$\int\limits_0^\infty K(xt) y(t) dt = f(x) \qquad (x > 0). \tag{5.21}$$

5.3. Нелинейные уравнения

А. <u>Уравнение Гаммерштейна</u>:

$$y(x) - \int\limits_a^b K(x,t) F[t, y(t)]\, dt = 0 \qquad (a \le x \le b), \tag{5.22}$$

где $K(x,t)$ и $F(t,z)$ — заданные функции.

Б. <u>Уравнение Урысона</u>:

$$y(x) - \int\limits_a^b K[x, t, y(t)]\, dt = 0 \qquad (a \le x \le b), \tag{5.23}$$

где $K(x, t, z)$ — заданная функция.

В. Нелинейное сингулярное интегральное уравнение:

$$F[x, y(x), (Sy)(x), (K_1 y)(x), \ldots, (K_m y)(x)] = 0, \qquad (5.24)$$

где $F(x, y, z, u_1, \ldots, u_m)$ — заданная функция,

$$(Sy)(x) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{y(\tau)}{\tau - x}\, d\tau \qquad (x \in \Gamma), \qquad (5.25)$$

$$(K_j y)(x) = \int\limits_{\Gamma} K_j(x, t) y(t)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, m;\ x \in \Gamma), \qquad (5.26)$$

где $K_j(x, t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — заданные функции.

Аналогичные уравнения вида (5.22) – (5.23) определяются и на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$\text{А}'. \quad y(x) - \int\limits_{\Omega} K(x, t) F[t, y(t)]\, dt = 0 \qquad (x \in \Omega), \qquad (5.22')$$

$$\text{Б}'. \quad y(x) - \int\limits_{\Omega} K[x, t, y(t)]\, dt = 0 \qquad (x \in \Omega), \qquad (5.23')$$

а многомерное сингулярное уравнение имеет вид

$$\text{В}'. \quad F[x, y(x), (S_1 y)(x), \ldots, (S_l y)(x), (K_1 y)(x), \ldots, (K_m y)(x)] = 0, \qquad (5.24')$$

где

$$(S_j y)(x) = \int\limits_{S} \frac{g_j(x, \Theta)}{|x - t|^n}\, y(t)\, dt \qquad (j = 1, \ldots, l), \qquad (5.25')$$

$$(K_i y)(x) = \int\limits_{S} K_i(x, t) y(t)\, dt \qquad (i = 1, \ldots, m). \qquad (5.26')$$

§ 6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Решения уравнений интегральных преобразований (5.10) – (5.13) даются следующими формулами:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \cos(xt) f(t)\, dt, \qquad (6.1)$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \sin(xt) f(t)\, dt, \tag{6.2}$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\, dt, \tag{6.3}$$

$$y(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot t} f(t)\, dt. \tag{6.4}$$

Эти формулы справедливы для функций $f(x)$, принадлежащих специальным классам функций.

Определение 6.1. *Соотношения (6.1) – (6.4) называются <u>формулами обращения</u> интегральных преобразований (5.10) – (5.13), соответственно.*

Формула обращения преобразования Лапласа (5.14) имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{tx} f(t)\, dt, \tag{6.5}$$

где $k > 0$ — любая положительная постоянная, а функция $f(t)$ аналитична в полуплоскости $Re(t) > k'$ $(k' < k)$ плоскости комплексной переменной t и имеет в этой полуплоскости при больших t оценку

$$f(t) = O\left(|t|^{-\alpha}\right), \qquad \alpha > 0.$$

Формула обращения преобразования Меллина (5.15) имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(t) x^{-t}\, dt \tag{6.6}$$

при условии, что функция $f(t)$ такова, что при некотором значении $k > 0$ интеграл

$$\int\limits_0^\infty x^{k-1} |y(x)|\, dx \quad \text{с} \quad k < c$$

сходится.

Формула обращения преобразования Ханкеля имеет тот же вид, что и само преобразование Ханкеля (5.16):

$$y(x) = \int\limits_0^\infty \sqrt{xt} J_\nu(xt) f(t)\, dt. \tag{6.7}$$

Для уравнения общего интегрального преобразования (5.21) верен следующий результат.

Теорема 6.1. *Если* $(\mathcal{M}k)(x)$ *есть преобразование Меллина ядра* $k(t)$ *и существует такая функция* $h(t)$, *что ее преобразование Меллина* $(\mathcal{M}h)(x)$ *удовлетворяет соотношению*

$$(\mathcal{M}k)(x) \cdot (\mathcal{M}h)(1-x) = 1, \tag{6.8}$$

то интегральное преобразование (5.21) имеет решение

$$y(x) = \int\limits_0^\infty h(xt) f(t)\, dt. \tag{6.9}$$

Доказательство. Требуется доказать, что $y(x)$, даваемое (6.9), есть решение интегрального уравнения (5.21):

$$\int\limits_0^\infty k(xt)\, dt \int\limits_0^\infty h(t\tau) f(\tau)\, d\tau = f(x). \tag{6.10}$$

Вычислим преобразование Меллина правой части (6.10). Имеем

$$\left(\mathcal{M} \int\limits_0^\infty k(xt)\, dt \int\limits_0^\infty h(t\tau) f(\tau)\, d\tau \right)(s) =$$
$$= \int\limits_0^\infty x^{s-1}\, dx \int\limits_0^\infty k(xt)\, dt \int\limits_0^\infty h(t\tau) f(\tau)\, d\tau =$$
$$= \int\limits_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int\limits_0^\infty h(t\tau)\, dt \int\limits_0^\infty x^{s-1} k(xt)\, dx.$$

Осуществляя сначала замену $xt = y$, а затем $t\tau = u$, получаем

$$\left(\mathcal{M}\int_0^\infty k(xt)\,dt\int_0^\infty h(t\tau)f(\tau)\,d\tau\right)(s) =$$
$$=\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_0^\infty h(t\tau)\,dt\int_0^\infty \left(\frac{y}{t}\right)^{s-1}k(y)\,\frac{dy}{t} =$$
$$=\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_0^\infty t^{-s}h(t\tau)\,dt\int_0^\infty k(y)y^{s-1}\,dy =$$
$$=\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_0^\infty \left(\frac{u}{\tau}\right)^{-s}h(u)\,\frac{du}{\tau}(\mathcal{M}k)(s) =$$
$$=\int_0^\infty f(\tau)\tau^{s-1}\,d\tau\int_0^\infty u^{-s}h(u)\,du(\mathcal{M}k)(s) =$$
$$=(\mathcal{M}f)(s)(\mathcal{M}h)(1-s)(\mathcal{M}k)(s).$$

Отсюда согласно условию (6.8) находим

$$\left(\mathcal{M}\int_0^\infty k(xt)\,dt\int_0^\infty h(t\tau)f(\tau)\,d\tau\right)(s) = (\mathcal{M}f)(s). \qquad (6.11)$$

В силу свойства взаимной однозначности преобразования Меллина из (6.11) следует (6.10), что завершает доказательство теоремы.

Определение 6.2. *Функции $k(x)$ и $h(x)$, преобразования Меллина которых удовлетворяют равенству (6.8), называются ядрами Фурье или несимметричными ядрами Фурье. Если функция $k(x)$ такова, что*

$$(\mathcal{M}k)(s)\cdot(\mathcal{M}k)(1-s) = 1, \qquad (6.12)$$

то $k(x)$ называется ядром Фурье.

Из равенств (5.10), (6.1); (5.11), (6.2) и (5.16), (6.7) вытекает, что функции $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos x$, $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin x$ и $\sqrt{x}J_\nu(x)$ являются ядрами Фурье. Непосредственно доказываются следующие формулы преобразования

Меллина этих функций:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}\cos t)(s) =&\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((1-s)/2)} \qquad (0<s<1);\\
(\mathcal{M}\sin t)(s) =&\Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma((1-s)/2)} \qquad (0<s<1);\\
(\mathcal{M}\sqrt{t}J_\nu(t))(s) =&2^{s-1/2}\frac{\Gamma((\nu+s)/2+1/4)}{\Gamma((\nu-s)/2+3/4)} \qquad (Re(\nu)>-1).
\end{aligned}
$$

Тогда для функций $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos x$, $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin x$ и $\sqrt{x}J_\nu(x)$ выполняется равенство (6.12). Следовательно, формулы (6.1), (6.2) и (6.7) решений уравнений (5.10), (5.11) и (5.16) вытекают из теоремы 6.1.

§ 7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

В теории интегральных уравнений часто приходится иметь дело с ортогональными системами функций. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением (φ,ψ) и пусть $(\varphi,\varphi) = \|\varphi\|^2$ — норма. Если $X = L_2(a,b)$, то

$$
(\varphi,\psi) = \int\limits_a^b \varphi(s)\overline{\psi(s)}ds, \qquad \|\varphi\| = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.
$$

Определение 7.1. *Две функции φ и ψ называются* <u>*ортогональными*</u>*, если их скалярное произведение равно нулю: $(\varphi,\psi)=0$. Функция, норма которой равна единице, называется* <u>*ортонормированной*</u>*. Конечная или бесконечная последовательность функций*

$$
\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x),\ldots \tag{7.1}
$$

называется <u>*ортогональной*</u>*, если эти функции попарно ортогональны, и* <u>*ортонормированной*</u>*, если они попарно ортогональны и нормированы.*

Ортонормированная система удовлетворяет условию

$$
(\varphi_j,\varphi_k) = \begin{cases} 0, & j\neq k,\\ 1, & j=k. \end{cases} \tag{7.2}
$$

Определение 7.2. *Ортогональная система (7.1) называется* <u>*неполной*</u>*, если существует отличная от тождественного нуля функция* y*, ортогональная всем функциям системы (7.1). В противном случае система (7.1) называется* <u>*полной*</u>*.*

Приведем некоторые свойства.

Свойство 7.1. *Ортонормированные системы, взятые в любом конечном числе, линейно независимы.*

Свойство 7.2. *Если функции* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *ортонормированы и*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

то

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{7.3}$$

Свойство 7.3. <u>*Процесс ортогонализации*</u>*. Если дана конечная или бесконечная система линейно независимых функций*

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots,$$

то можно построить ортонормированную последовательность

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$$

так, чтобы каждая функция $\varphi_m(x)$ *линейно выражалась через функции* $\omega_1(x), \ldots, \omega_m(x)$*, и наоборот, каждая функция* $\omega_n(x)$ *выражалась бы через* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$*.*

Это построение осуществляется с помощью следующего процесса ортогонализации

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x) = \omega_1(x), && \varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|}\,, \\
&\psi_2(x) = \omega_2(x) - (\omega_2, \varphi_1)\varphi_1(x), && \varphi_2(x) = \frac{\psi_2(x)}{\|\psi_2\|}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\psi_n(x) = \omega_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_n, \varphi_k)\varphi_k(x), && \varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}\,.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Заметим, что деление всегда выполнимо: если бы было $\|\psi_n\| = 0$, то $\omega_n(x)$ линейно бы зависела от $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$, а следовательно, и от функций $\omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$, что невозможно. Из (7.4) видно, что последовательность $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ ортонормированна и что $\varphi_n(x)$ линейно выражается через $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$. В то же время $\omega_n(x)$ линейно выражается через $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$:

$$\omega_n = \|\psi_n\|\varphi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\omega_n, \varphi_k)\varphi_k(x).$$

Свойство 7.4. *Неравенство Бесселя и уравнение замкнутости.*

Пусть система (7.1) ортонормированна и пусть $f(x) \in L_2(a,b)$ — некоторая функция. Рассмотрим следующую задачу: подобрать коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы величина

$$\delta_n = \|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\,,\ f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j \right) \tag{7.5}$$

была минимальной.

Определение 7.3. *Число $(f, \varphi_k) = a_k$ называется коэффициентом Фурье функции f, а ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k(x) \tag{7.6}$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной системе (7.1).

Согласно (7.5) имеем

$$\delta_n = (f,f) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\varphi_k, f) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (f, \varphi_j) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_k \alpha_j (\varphi_k, \varphi_j) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - a_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Отсюда вытекает, что δ_n принимает минимальное значение при $\alpha_k = a_k$, и $\min \delta_n = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2$. Так как в силу (7.5) $\delta_n \geq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq \|f\|^2$$

и, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|f\|^2. \tag{7.7}$$

Определение 7.4. *Неравенство (7.7) называется* *неравенством Бесселя, а уравнение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|^2 \tag{7.8}$$

называется *уравнением замкнутости.*

Свойство 7.5. *Сходимость ряда.*

Сначала напомним

Определение 7.5. *Последовательность функций* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n(x) \in L_2(a,b)$, *называется* *сходящейся в среднем к функции* $\varphi(x) \in L_2(a,b)$, *если*

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ *называется сходящимся в среднем к функции* $\psi(x) \in L_2(a,b)$, *если к этой функции сходится в среднем последовательность его частичных сумм.*

Теорема 7.1 (Рисса – Фишера). *Если* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *— ортонормированная система и числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \tag{7.9}$$

сходится, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{7.10}$$

сходится в среднем. При этом ряд (7.10) является рядом Фурье для своей суммы, для которой имеет место уравнение замкнутости.

Следствие 7.1. *Если ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна, то сумма ряда (7.6) равна $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ и $\omega(x) = f(x) - g(x)$. Имеем

$$(\omega, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - (g, \varphi_n) = a_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\varphi_k, \varphi_n) = a_n - a_n = 0.$$

Так как $\omega(x)$ ортогональна ко всем функциям полной системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то $\omega(x) \equiv 0$ и, следовательно, $g(x) = f(x)$. Отсюда получаем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x). \tag{7.11}$$

Следствие 7.2. *Если ортонормированная система полна, то для любой квадратично суммируемой функции имеет место уравнение замкнутости.*

Доказательство. Согласно следствию 7.1 верна формула (7.11). Умножив скалярно обе части этого равенства на $f(x)$, имеем

$$\|f\| = (f, f) = \left(f, \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)(f, \varphi_k) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

§ 8. ПРИМЕРЫ ПОЛНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Приведем некоторые примеры полных ортонормированных систем. Рассмотрим сначала случай конечного промежутка (a, b). Из теории рядов Фурье известно, что система функций

$$\varphi_k(t) = \sin(kt), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{8.1}$$

ортогональна (но не ортонормированна) и полна в промежутке $(0, \pi)$. От промежутка $(0, \pi)$ перейдем к произвольному промежутку (a, b) подстановкой $t = \pi \dfrac{x-a}{b-a}$. Тогда в новом промежутке (a, b) система функций

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{\pi k(x-a)}{b-a}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{8.2}$$

ортогональна и полна. Чтобы сделать ее ортонормированной, достаточно каждую функцию системы разделить на ее норму, квадрат которой равен

$$\|\varphi_k(x)\|^2 = \int\limits_a^b \sin^2 \frac{\pi k(x-a)}{b-a}\, dx = \frac{1}{2}(b-a).$$

Таким образом, функции

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{\pi k(x-a)}{b-a}, \qquad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{8.3}$$

образуют ортонормированную и полную систему функций в конечном промежутке (a, b).

Перейдем к случаю бесконечного промежутка. Если a конечно, то можно заменой $x' = x - a$ сделать $a = 0$. Система функций

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kt), \qquad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{8.4}$$

ортонормированна и полна в промежутке $(0, 1)$, так что

$$\int\limits_0^1 \frac{2}{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{8.5}$$

Замена $t = \dfrac{\pi x}{x+1}$ переводит промежуток $(0, 1)$ в бесконечный промежуток — положительную полуось $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Осуществляя эту замену в (8.5), получаем

$$\int\limits_0^\infty \frac{2}{(x+1)^2} \sin \frac{\pi n x}{x+1} \sin \frac{\pi m x}{x+1}\, dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \tag{8.6}$$

Отсюда следует, что функции

$$\varphi_k(x) = \frac{\sqrt{2}}{x+1} \sin \frac{\pi k x}{x+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{8.7}$$

образуют ортонормированную и полную систему на $\mathbb{R}_+$.

Другим примером системы, ортонормированной и полной в $\mathbb{R}_+$, является система функций

$$\varphi_k(x) = e^{-x/2} L_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8.8}$$

где $L_k(x)$ — так называемый полином Лагерра:

$$L_k(x) = \frac{e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \left[x^k e^{-x} \right] = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{k}{j} x^j, \quad \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}. \tag{8.9}$$

Если $\alpha = -\infty$ и $b = \infty$, то система

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2ikt} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{8.10}$$

является полной и нормированной на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$. Осуществляя замену $x = \operatorname{tg} t$ и рассуждая так же, как и выше, придем к системе функций

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+x^2)}} e^{2ik \operatorname{arctg} x} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{8.11}$$

ортонормированной и полной на действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Другим примером ортонормированной и полной системы функций на $\mathbb{R}$ является система

$$\varphi_k(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_k(x)}{2^{k/2} \sqrt{k!} \sqrt[4]{\pi}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8.12}$$

где $H_k(x)$ — полиномы Эрмита:

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8.13}$$

§ 9. ИТЕРИРОВАННЫЕ ЯДРА. РЕЗОЛЬВЕНТА

Рассмотрим интегральное преобразование, или интегральный оператор

$$\psi(x) = (K\varphi)(x) \equiv \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{9.1}$$

на конечном отрезке $[a,b]$ с заданными функциями $\varphi(t)$ на $[a,b]$ и $K(x,t)$ на $k_0 = \{(x,t): \ a \le x \le b, \ a \le t \le b\}$.

Лемма 9.1. *Оператор K линеен: если c_1, c_2, ..., c_m — постоянные, то*

$$\int\limits_a^b K(x,t)\sum_{j=1}^m c_j\varphi_j(t)\,dt = \sum_{j=1}^m c_j \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_j(t)\,dt. \tag{9.2}$$

Лемма 9.2. *Если $\varphi(t) \in C[a,b]$ и $K(x,t) \in C(k_0)$, то $\psi(x) \in C[a,b]$.*

Доказательство. Из (9.1) имеем

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \int\limits_a^b [K(x+h,t) - K(x,t)]\varphi(t)\,dt.$$

Так как $\varphi(t) \in C[a,b]$, то $\varphi(t) \in L^2(a,b)$:

$$\int\limits_a^b |\varphi(t)|^2\,dt = K^2 < +\infty.$$

Применяя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \le$$

$$\le \left(\int\limits_a^b |K(x+h,t) - K(x,t)|\,\varphi(t)\,dt\right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b |\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

или

$$|\psi(x+h) - \psi(x)|^2 \le K \int\limits_a^b |K(x+h,t) - K(x,t)|\,\varphi(t)\,dt.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(x+h)=\varphi(x)$ в силу того, что $\lim\limits_{h\to 0}|K(x+$ $+h,t)-K(x,t)|=0$, и, следовательно, $\psi(x)\in C[a,b]$.

Пусть имеются два интегральных оператора с непрерывными ядрами $K(x,t)$ и $L(x,t)$:

$$(Ku)(x)=\int\limits_a^b K(x,t)u(t)\,dt,\qquad (Lv)(x)=\int\limits_a^b L(x,t)v(t)\,dt. \tag{9.3}$$

Пусть $(LKu)(x)$ — оператор, который получается путем последовательного применения к $u(t)$ сначала оператора K, а затем оператора L. Имеем

$$(LKu)(x)=\int\limits_a^b L(x,\tau)\left[\int\limits_a^b K(\tau,t)u(t)\,dt\right]d\tau=$$

$$=\int\limits_a^b\left[\int\limits_a^b L(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau\right]u(t)\,dt=\int\limits_a^b \widetilde{K}(x,t)u(t)\,dt.$$

Таким образом, ядро оператора LK определяется формулой

$$\widetilde{K}(x,t)=\int\limits_a^b L(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau. \tag{9.4}$$

Аналогичным образом показывается, что ядро оператора KL имеет вид

$$\widetilde{L}(x,t)=\int\limits_a^b K(x,\tau)L(\tau,t)\,d\tau. \tag{9.5}$$

$\widetilde{L}(x,t)$, вообще говоря, отлично от $\widetilde{K}(x,t)$, и, следовательно, оператор LK, вообще говоря, отличен от оператора KL.

Определение 9.1. *Если оператор LK совпадает с KL, то говорят, что операторы K и L коммутируют.*

Введем итерированные ядра, соответствующие целым положительным степеням оператора K, причем основное ядро $K(x,t)$ обозначим через $K_1(x,t)$:

$$K_1(x,t) = K(x,t), \qquad K_n(x,t) = \int\limits_a^b K_{n-1}(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau. \tag{9.6}$$

Ядро $K_n(x,t)$ есть ядро оператора K^n. В частности,

$$K_2(x,t) = \int\limits_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)\,dt_1,$$

$$K_3(x,t) = \int\limits_a^b K_2(x,t_2)K(t_2,t)\,dt_2 = \int\limits_a^b\int\limits_a^b K(x,t_2)K(t_2,t_1)K(t_1,t)\,dt_1\,dt_2,$$

и вообще

$$K_{n+1}(x,t) = \int\limits_a^b\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K(x,t_n)K(t_n,t_{n-1})\ldots K(t_2,t_1)K(t_1,t)\,dt_1\ldots dt_n.$$

Порядок квадратур здесь безразличен. Имеет место формула

$$K_{p+q}(x,t) = \int\limits_a^b K_p(x,\tau)K_q(\tau,t)\,d\tau. \tag{9.7}$$

Введем обозначение

$$P^2 = \int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt, \tag{9.8}$$

причем $P > 0$ (очевидно, считается $K(x,t) \neq 0$). Переходя к последовательным квадратурам, имеем

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt = \int\limits_a^b dt\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx = \int\limits_a^b R^2(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b dx\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dt = \int\limits_a^b Q^2(x)\,dx.$$

Следовательно

$$P^2 = \int\limits_a^b Q^2(x)\,dx = \int\limits_a^b R^2(t)\,dt, \tag{9.9}$$

$$Q(x) = \left(\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dt\right)^{1/2}, \quad R(t) = \left(\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{9.10}$$

Оценим последовательно повторные ядра, пользуясь (9.6) и неравенством Коши – Буняковского. Имеем

$$|K_2(x,t)|^2 = \left|\int\limits_a^b K(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau\right|^2 \le Q^2(x)R^2(t),$$

$$|K_3(x,t)|^2 = \left|\int\limits_a^b K_2(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau\right|^2 \le \int\limits_a^b |K_2(x,\tau)|^2 d\tau \int\limits_a^b |K(\tau,t)|^2 d\tau \le$$

$$\le \int\limits_a^b Q^2(x)R^2(\tau)\,d\tau \int\limits_a^b |K(\tau,t)|^2 d\tau =$$

$$= Q^2(x)R^2(t)\int\limits_a^b R^2(\tau)\,d\tau = Q^2(x)R^2(t)\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau,$$

и, следовательно, в силу (9.8)

$$|K_3(x,t)|^2 \le Q^2(x)R^2(t)P^2.$$

Далее

$$|K_4(x,t)|^2 = \left|\int\limits_a^b K_3(x,\tau)K(\tau,t)\,dt_2\right|^2 \le \int\limits_a^b |K_3(x,\tau)|^2 d\tau \cdot \int\limits_a^b |K(\tau,t)|^2 d\tau \le$$

$$\le \int\limits_a^b Q^2(x)R^2(\tau)\,d\tau \int\limits_a^b |K(\tau,t)|^2 d\tau =$$

$$= Q^2(x)R^2(t)\int\limits_a^b R^2(\tau)\,d\tau = Q^2(x)R^2(t)P^4.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$|K_{n+1}(x,t)|^2 \le Q^2(x)R^2(t)P^{2(n-1)},$$

или

$$|K_{n+1}(x,t)| \le Q(x)R(t)P^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9.11}$$

Рассмотрим ряд

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n \qquad (K_1(x,t) = K(x,t)), \tag{9.12}$$

где λ — комплексный параметр.

Так как $K(x,t) \in C(k_0)$, то положительные функции $Q(x)$ и $R(t)$ в силу леммы 9.2 непрерывны, а следовательно, и ограничены на $[a,b]$. Поэтому существует такое положительное число $M > 0$, что $|Q(x)| \le M$ для любого $x \in [a,b]$ и $|R(t)| \le M$ для любого $t \in [a,b]$. Тогда из (9.11) получаем оценку

$$|K_{n+1}(x,t)| \le M^2 P^{n-1}. \tag{9.13}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |K_{n+1}(x,t)|\,|\lambda|^n$ сходится равномерно по x и t в k_0, если

$$|\lambda| < \frac{1}{P}, \quad \text{то есть} \quad |\lambda| < \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt\right)^{-1/2}. \tag{9.14}$$

Таким образом, ряд (9.12) сходится абсолютно и равномерно при условии (9.14).

Определение 9.2. *Если модули членов некоторого функционального ряда образуют равномерно сходящийся ряд, то говорят, что исходный ряд сходится регулярно.*

Очевидно, что если ряд сходится регулярно, то он сходится абсолютно и равномерно.

Определение 9.3. *Через* $R(x,t;\lambda)$ *обозначим сумму ряда (9.12) и будем называть эту функцию* *резольвентой ядра* $K(x,t)$ *или* *резольвентой интегрального уравнения* *Фредгольма второго рода*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt.$$

Заметим, что если условие (9.14) выполняется, то резольвента $R(x,t;\lambda)$ непрерывна в k_0.

§ 10. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{10.1}$$

на конечном отрезке $[a,b]$ в предположении, что $f(x) \in C[a,b]$, $K(x,t) \in C(k_0)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Применяя метод последовательных приближений, будем искать его решение в виде

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\lambda^n. \tag{10.2}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем выражение для $\varphi_n(x)$. Имеем

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_1(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_0(t)\,dt, \; \ldots \; , \varphi_n(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt.$$

Выражая $\varphi_n(x)$ через $f(x)$, находим

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt = \int_a^b K_1(x,t)f(t)\,dt.$$

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K(x,\tau)\left[\int_a^b K_1(\tau,t)f(t)\,dt\right]d\tau =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,\tau)K_1(\tau,t)f(t)\,d\tau\right]dt = \int_a^b K_2(x,t)f(t)\,dt.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K_n(x,t)f(t)\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10.3}$$

Следовательно, сумма (10.2) имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n\right] f(t)\,dt. \tag{10.4}$$

Так как ряд

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n \tag{10.5}$$

сходится равномерно при выполнении условия

$$|\lambda| < \frac{1}{P} = \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt\right)^{-1/2}, \tag{10.6}$$

то формула (10.4) дает непрерывное решение уравнения (10.1). Учитывая (10.5), решение (10.4) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)\,dt. \tag{10.7}$$

Таким образом, нами доказана теорема 10.1.

Теорема 10.1. *Если $f(x) \in C[a,b]$, $K(x,t) \in C(k_0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и выполнено условие (10.6), то интегральное уравнение Фредгольма второго рода (10.1) имеет непрерывное на $[a,b]$ решение, даваемое формулой (10.7).*

Исследуем теперь вопрос, когда это решение будет единственным.

Лемма 10.1. *Резольвента (10.5), определенная при условии (10.6) как функция от x или t, удовлетворяет следующим двум интегральным уравнениям*

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(x,t_1)R(t_1,t;\lambda)\,dt_1, \tag{10.8}$$

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(t_1,t)R(x,t_1;\lambda)\,dt_1. \tag{10.9}$$

Доказательство. Умножая обе части (10.5) на $K(t,\tau)$, интегрируя по t и используя определение итерированных ядер (9.6), имеем

$$\int_a^b R(x,t;\lambda)K(t,\tau)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_{n+1}(x,t)K(t,\tau)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+2}(x,\tau).$$

Умножая обе части на λ и осуществляя замену индекса суммирования $n+1=j$, находим

$$\lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)K(t,\tau)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} K_{n+2}(x,\tau) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_{j+1}(x,\tau) = R(x,\tau;\lambda) - K(x,\tau).$$

Это доказывает формулу (10.9). Соотношение (10.8) доказывается аналогично.

До сих пор мы определили резольвенту $R(x,t;\lambda)$ только при значениях λ, удовлетворяющих условию (10.6). В дальнейшем увидим, что резольвента существует во всей плоскости комплексного переменного λ, кроме некоторых изолированных значений λ, и что она на всей плоскости λ удовлетворяет уравнениям (10.8) и (10.9). Поэтому представляется важным доказать теорему существования и единственности, исходя только из уравнений (10.8) и (10.9).

Теорема 10.2. *Если при некотором значении λ существует непрерывная в квадрате k_0 функция $R(x,t;\lambda)$, удовлетворяющая уравнениям (10.8) и (10.9), то интегральное уравнение Фредгольма (10.1) при этом значении λ имеет единственное решение, и это решение дается формулой (10.7).*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ — некоторое решение уравнения (10.1). Умножим обе части (10.1) на $\lambda R(x,\tau;\lambda)$ и проинтегрируем по τ:

$$\lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda)\varphi(\tau)\,d\tau = \lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda) f(\tau)\,d\tau +$$

$$+\lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda) \int_a^b \lambda K(\tau,t)\varphi(t)\,dt = \lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda) f(\tau)\,d\tau +$$

$$+\lambda \int_a^b \left[\lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda) K(\tau,t)\,d\tau\right] \varphi(t)\,dt.$$

Согласно (10.9)

$$\lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda) K(\tau,t)\,d\tau = R(x,t;\lambda) - K(x,t),$$

и предыдущая формула переписывается в виде

$$\lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda)\varphi(\tau)\,d\tau = \lambda \int_a^b R(x,\tau;\lambda) f(\tau)\,d\tau +$$

$$+\lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)\varphi(t)\,dt - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt.$$

Сокращая одинаковые члены слева и справа и используя формулу (10.1), получаем

$$0 = \lambda \int\limits_a^b R(x,\tau;\lambda) f(\tau)\,d\tau - \varphi(x) + f(x),$$

что дает формулу (10.7).

Покажем теперь, что функция $\varphi(x)$, определенная формулой (10.7), действительно удовлетворяет уравнению (10.1) при наличии (10.8).

Подставляя (10.7) в (10.1) и перенося все члены в левую часть, получим:

$$f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt - f(x) -$$
$$- \lambda \int\limits_a^b K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int\limits_a^b R(t,\tau;\lambda) f(\tau)\,d\tau \right] dt = 0$$

или

$$\int\limits_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt - \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\,dt -$$
$$- \lambda \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,t) R(t,\tau;\lambda) f(\tau)\,d\tau\,dt = 0.$$

Учитывая то, что

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,t) R(t,\tau;\lambda) f(\tau)\,d\tau\,dt = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,\tau) R(\tau,t;\lambda) f(t)\,dt\,d\tau,$$

последнее равенство перепишем в виде

$$\int\limits_a^b \left[R(x,t;\lambda) - K(x,t) - \lambda \int\limits_a^b K(x,\tau) R(\tau,t;\lambda)\,d\tau \right] f(t)\,dt = 0.$$

Это равенство верно, так как в силу (10.8) выражение в квадратных скобках равно тождественно нулю. Это завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 10.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 10.3. *Если значение λ удовлетворяет условию (10.6), то уравнение (10.1) имеет единственное решение, и это решение определяется формулой (10.7).*

§ 11. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{11.1}$$

на конечном отрезке $[a,b]$ в предположении, что $f(x) \in C[a,b]$, $K(x,t) \in C(k_0)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Как уже указывалось ранее в § 3, это уравнение является частным случаем интегрального уравнения Фредгольма второго рода (10.1):

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{11.2}$$

Именно, если $K(x,t) = 0$ при $x < t$, то есть когда ядро обращается в нуль в половине квадрата $k_0 = [a,b] \times [a,b]$, лежащей с одной стороны от диагонали $x = t$, то (11.2) сводится к уравнению (11.1). Таким образом, ядро $K(x,t)$ имеет на диагонали $x = t$ разрыв первого рода.

Как и в § 10, будем искать решение уравнения (11.1) в виде ряда

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\lambda^n. \tag{11.3}$$

Для функций $\varphi_n(x)$ получим формулы

$$\varphi_0(x) = f(x), \qquad \varphi_n(x) = \int\limits_a^x K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{11.4}$$

Так как $f(x) \in C[a,b]$ и $K(x,t) \in C(k_0)$, то существуют положительные числа $m > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leq m \quad \text{для любого} \quad x \in [a,b], \\ &|K(x,t)| \leq M \quad \text{для любого} \quad x \in k_0. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Оценивая $\varphi_n(x)$ в (11.4), получим последовательно:

$$|\varphi_0(x)| \leq m, \qquad |\varphi_1(x)| \leq \int\limits_a^x |K(x,t)||\varphi_0(t)|\,dt \leq mM(x-a),$$

$$|\varphi_2(x)| \leq \int\limits_a^x |K(x,t)||\varphi_1(t)|\,dt \leq mM^2 \int\limits_a^x (x-a)\,dt = mM^2\frac{(x-a)^2}{2},$$

и вообще,

$$|\varphi_n(x)| \leq m\frac{[M(x-a)]^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11.6}$$

При изменении x на конечном промежутке $[a,b]$ члены ряда (11.3) по модулю не превышают положительных чисел:

$$|\varphi_n(x)\lambda^n| \leq m\frac{[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{11.7}$$

образующих при любом λ сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} m\frac{[|\lambda|M(b-a)]^n}{n!} = me^{-\lambda M(b-a)}.$$

Следовательно, на основании признака Вейерштрасса ряд (11.3) сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$, а его сумма $\varphi(x)$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (11.1).

Совершенно так же, как и в § 9, можно образовать резольвенту

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n, \tag{11.8}$$

где

$$\begin{aligned} &K_1(x,t) = K(x,t), \\ &K_n(x,t) = \int\limits_a^x K_{n-1}(x,t_1)K(t_1,t)\,dt_1 \quad (n = 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{11.9}$$

причем из этих формул следует, что $K_n(x,t)=0$ при $x<t$. Действительно, если $x<t$, то $t_1<t$ и $K(t_1,t)=0$.

Так же, как и выше в § 9, доказывается абсолютная и равномерная сходимость ряда (11.8) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому для уравнения Вольтерра (11.1) резольвента есть целая функция, и при всяком λ это уравнение имеет единственное решение, которое определяется формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x R(x,t;\lambda) f(t)\,dt. \qquad (11.10)$$

При этом это решение $\varphi(x) \in C[a,b]$.

Отсюда следует, что уравнение Вольтерра не имеет характеристических значений, то есть однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt \qquad (11.11)$$

при любом λ имеет только нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$.

Можно показать, что если ядро имеет вид

$$K(x,t) = \frac{L(x,t)}{(x-t)^\alpha} \qquad (x>t), \qquad (11.12)$$

где $L(x,t) \in C(k_0)$ и $0<\alpha<1$, то уравнение (11.1) по-прежнему имеет единственное решение, и это решение может быть получено указанным выше методом последовательных приближений. При этом ядра $K_n(x,t)$, начиная с некоторого значения n, будут непрерывны, в частности, при $\alpha<1/2$ непрерывным будет уже ядро $K_2(x,t)$.

Точно так же метод последовательных приближений применим и к системе уравнений Вольтерра

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^m \int\limits_a^x K_{ij}(x,t)\varphi_j(t)\,dt \qquad (i=1,\ldots,m). \qquad (11.13)$$

Замечание 11.1. Характерным для уравнений Вольтерра при сделанных предположениях является тот факт, что ряд, полученный по методу последовательных приближений, сходится при всех значениях

λ в упомянутом промежутке. Если условие непрерывности соблюдено при всех $x \geq a$, то мы получим решение при всех $x \geq a$.

Если свободный член $f(x)$ уравнения Вольтерра (11.1) суммируем на (a, b), то есть $f(x) \in L(a, b)$, то его единственное решение (11.10) также суммируемо на (a, b). При этом вместо непрерывности ядра $K(x, t)$ можно предполагать его ограниченность. Именно, имеет место следующий результат.

Теорема 11.1. *Пусть ядро $K(x, t)$ ограничено на $k_0 = [a, b] \times \times [a, b]$:*

$$|K(x, t)| \leq M \quad \forall (x, t) \in k_0.$$

Если $f(x) \in L(a, b)$, то уравнение Вольтерра имеет единственное решение $\varphi(x) \in L(a, b)$, определяемое формулой (11.10).

Теорема дается без доказательства.

Возникает интересный вопрос: остается ли в силе теорема 11.1 о единственности решения, если отказаться от требования его суммируемости? Оказывается, что тогда теорема единственности перестает быть верной. Советский математик П. С. Урысон построил примеры уравнений Вольтерра, имеющих кроме одного суммируемого решения бесконечное множество несуммируемых решений. Приведем один из примеров П. С. Урысона.

Пример 11.1. Положим $a = 0$, $b = 1$, $f(x) \equiv 0$ и зададим ядро формулой

$$K(x, t) = \begin{cases} x e^{\frac{1}{x^2} - 1}, & t \leq x e^{1 - \frac{1}{x^2}}, \\ x, & x e^{1 - \frac{1}{x^2}} \leq t \leq x, \\ 0, & t > x. \end{cases} \tag{11.14}$$

В квадрате $k_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ ядро $K(x, t)$ ограничено, так как в силу (11.14)

$$0 \leq K(x, t) \leq x \leq 1.$$

Уравнение

$$\varphi(x) - \int\limits_0^x K(x, t) \varphi(t)\, dt = 0 \tag{11.15}$$

согласно теореме 11.1 имеет единственное суммируемое решение $\varphi(x) \equiv 0$.

Непосредственно проверяется, что уравнение (11.15) имеет бесконечное множество несуммируемых на $[0,1]$ решений

$$\varphi(x) = \frac{c}{x}\,, \tag{11.16}$$

где c — произвольная постоянная.

Замечание 11.2. Метод последовательных приближений годится для решения интегральных уравнений Вольтерра на конечном интервале действительной оси. В случае бесконечного интервала этот способ не применим. Одним из методов для решения таких уравнений является метод интегральных преобразований.

§ 12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Определение 12.1. *Преобразованием Лапласа функции $\varphi(t)$, заданной на $\mathbb{R}_+$, называется интеграл вида*

$$\varphi^*(z) = (\mathcal{L}\varphi)(z) = \Phi(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}\varphi(t)\,dt, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{12.1}$$

Приведем некоторые свойства преобразования Лапласа.

1. Если интеграл (12.1) сходится в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, то он сходится во всех точках $z \in \mathbb{C}$, для которых $Re(z) > Re(z_0)$.

Для интеграла Лапласа (12.1) существуют три возможности:

а) интеграл всюду расходится; б) интеграл всюду сходится; в) существует такое число σ_c, что при $Re(z) > \sigma_c$ интеграл (12.1) сходится, а при $Re(z) < \sigma_c$ — расходится.

Определение 12.2. *Прямая $Re(z) = \sigma_c$ на комплексной плоскости называется осью сходимости, а число σ_c — абсциссой сходимости интеграла (12.1).*

2. Если интеграл (12.1) сходится абсолютно в точке $z_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, то он сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $Re(z) > \sigma_0$.

3. Если $\sigma_c < \infty$, то интеграл (12.1) является аналитической функ-

цией переменной z во всех точках полуплоскости $Re(z) > \sigma_c$ и

$$\frac{d^k\varphi^*(z)}{dz^k} = \int\limits_0^\infty (-t)^k e^{-zt}\varphi(t)\,dt, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{12.2}$$

4. **Теорема 12.1.** *Если интеграл (12.1) имеет абсциссу сходимости* $\sigma_c < \infty$, *то имеет место формула обращения*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{zt}\varphi^*(z)\,dz, \tag{12.3}$$

в которой интеграл берется по любой прямой $Re(z) = \sigma > \sigma_c$.

Определение 12.3. *Интеграл (12.3) называется обратным преобразованием Лапласа и обозначается:*

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(z)e^{zt}\,dz. \tag{12.4}$$

5. **Определение 12.4.** *Сверткой Лапласа двух функций* $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *называется интеграл*

$$\varphi(x) \equiv (\varphi_1 * \varphi_2)(x) = \int\limits_0^x \varphi_1(x-t)\varphi_2(t)\,dt. \tag{12.5}$$

Теорема 12.2 (о свертке). *Если интегралы*

$$\varphi_1^*(z) = \int\limits_0^\infty \varphi_1(t)e^{-zt}\,dt, \qquad \varphi_2^*(z) = \int\limits_0^\infty \varphi_2(t)e^{-zt}\,dt \tag{12.6}$$

сходятся абсолютно при $Re(z) > \sigma_0$, *то интеграл*

$$\varphi^*(z) = \varphi_1^*(z)\,\varphi_2^*(z) \tag{12.7}$$

является преобразованием Лапласа свертки (12.5), и при этом интеграл $\varphi^*(z) = \int\limits_0^\infty \varphi(t)e^{-zt}\,dt$ *также абсолютно сходится при* $Re(z) > \sigma_0$.

Формулу (12.7) удобно переписать в виде

$$(\mathcal{L}[\varphi_1 * \varphi_2])\,(x) = (\mathcal{L}\varphi_1)(x)\,(\mathcal{L}\varphi_2)(x) \tag{12.8}$$

или

$$\Phi(x) = \Phi_1(x)\,\Phi_2(x). \tag{12.8$'$}$$

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра с разностным ядром

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt, \qquad x > 0. \tag{12.9}$$

Предположим, что функции $f(x)$ и $k(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, стремятся к нулю при $x \to +\infty$ и имеют оценки

$$|f(x)| \le Ae^{-ax}, \qquad |k(x)| \le Be^{-bx}, \tag{12.10}$$

где $A > 0$, $B > 0$, а постоянные $a \ge 0$, $b \ge 0$. Пусть m и M — верхние границы значений $|f(x)|$ и $|k(x)|$ при $x \ge 0$:

$$m = \sup_{x \ge 0} |f(x)|, \qquad M = \sup_{x \ge 0} |k(x)|. \tag{12.11}$$

Применяя к уравнению (12.9) метод последовательных приближений, получим для $\varphi(x)$ при $x \ge 0$ оценку

$$|\varphi(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} m\frac{(Mx)^n}{n!} = me^{-Mx}.$$

Отсюда следует, что к функциям $\varphi(x)$, $f(x)$ и $k(x)$ применимо преобразование Лапласа (12.1) при $\sigma > \max\{a, b, M\}$. Применяя к обеим частям (12.9) преобразование Лапласа и используя формулу свертки (12.8) и обозначения

$$\Phi(z) = (\mathcal{L}\varphi)(z), \qquad F(z) = (\mathcal{L}f)(z), \qquad K(z) = (\mathcal{L}k)(z), \tag{12.12}$$

имеем

$$\Phi(z) = F(z) + K(z)\,\Phi(z),$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{F(z)}{1 - K(z)}\,. \tag{12.13}$$

Выше мы видели, что функция $\Phi(z)$ должна быть аналитичной в полуплоскости $Re(z) > M$. Отсюда в силу полной независимости $K(z)$ и $F(z)$ вытекает, что знаменатель дроби в (12.13) не должен иметь корней внутри упомянутой полуплоскости. Применяя теорему 12.1, получаем в силу (12.3) выражение для $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi(z) e^{zx}\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(z)}{1 - K(z)} e^{zx}\, dz\,. \tag{12.14}$$

Таким образом, решение $\varphi(x)$ уравнения (12.9) дается формулой (12.14). Приведем другую формулу для этого решения. Для этого сначала покажем, что для уравнения (12.9) все повторные ядра зависят от разности $(x-t)$. Имеем согласно (9.6)

$$K_1(x,t) = K(x-t), \qquad K_2(x,t) = \int\limits_t^x K_1(x,\tau) K_1(\tau,t)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_t^x K(x-\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \int\limits_0^{x-t} K(x-t-s) K(s)\, ds = K_2(x-t).$$

Аналогично доказательство и для других повторных ядер:

$$K_n(x,t) = K_n(x-t) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда согласно формуле (11.8) при $\lambda = 1$ резольвента $R(x,t;\lambda)$ уравнения (12.9) будет зависеть только от разности $x-t$. Введем обозначение:

$$R(x,t;1) = r(x-t) \tag{12.15}$$

Следовательно, на основании формулы (11.10) решение уравнения (12.9) можно записать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x r(x-t) f(t)\, dt. \tag{12.16}$$

Применяя к обеим частям этого равенства преобразование Лапласа, учитывая обозначения (12.12) и

$$R(z) = (Lr)(z), \tag{12.17}$$

а также используя формулу свертки (12.8), получим

$$\Phi(z) = F(z) + R(z)F(z)\,.$$

Согласно (12.13) выразим $R(z)$

$$R(z) = \frac{\Phi(z) - F(z)}{F(z)} = \frac{1}{F(z)}\left[\frac{F(z)}{1-K(z)} - F(z)\right] = \frac{K(z)}{1-K(z)}\,,$$

то есть

$$R(z) = \frac{K(z)}{1-K(z)}\,. \tag{12.18}$$

Обращение формулы (12.18) на основании формулы обращения (12.3) дает нам резольвенту $r(x)$:

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{K(z)}{1-K(z)}\, e^{zx}\, dz\,. \tag{12.19}$$

Подставляя это выражение в (12.16), получим решение уравнения (12.9).

Указанный метод решения уравнения (12.9) применим и к системам уравнений Вольтерра с разностными ядрами

$$\varphi_j(x) = f_j(x) + \sum_{i=o}^{m}\int\limits_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_i(t)\,dt \qquad (j = 1,\ldots,m). \tag{12.20}$$

Применяя к обеим частям (12.20) преобразование Лапласа, имеем

$$\Phi_j(z) = F_j(z) + \sum_{i=o}^{m} K_{ij}(z)\Phi_i(z)\,dt \qquad (j = 1,\ldots,m), \tag{12.21}$$

где

$$\Phi_j(z) = (\mathcal{L}\varphi_j)(z), \quad F_j(z) = (\mathcal{L}f_j)(z), \quad K_{ij}(z) = (\mathcal{L}k_{ij})(z). \tag{12.22}$$

Решая систему уравнений первой степени (12.21), определим $\Phi_j(z)$ и тогда решение исходной системы (12.20) получится по формуле

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_j(z)e^{xz}\,dz \qquad (j = 1,\ldots,m). \tag{12.23}$$

Пример 12.1. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (x>0,\ \lambda>0). \tag{12.24}$$

Оно является уравнением вида (12.9) с $k(x) = \lambda x$. В данном случае

$$K(z) = \lambda \int\limits_0^\infty e^{-zx} x\,dx = \frac{\lambda}{z^2},$$

причем вещественная часть z считается положительной. Формула (12.18) дает

$$R(z) = \frac{\lambda}{z^2-\lambda},$$

и в силу (12.19) резольвента $r(x)$ определяется равенством:

$$r(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\lambda e^{zx}}{z^2-\lambda}\,dz \qquad (x>0), \tag{12.25}$$

где σ — любое достаточно большое положительное число.

Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру плоскости $z=\sigma+i\tau$, состоящему из отрезка прямой $\sigma=\sigma_0$, где $\sigma_0>\sqrt{\lambda}$, и полуокружности, лежащей слева от этой прямой и имеющей центр в точке пересечения этой прямой с вещественной осью. Вводя в интеграле (12.25) вместо z новую переменную интегрирования z_1 по формуле $z-\sigma_0 = iz_1$, мы получим на плоскости переменной z_1 контур интегрирования, состоящий из отрезка вещественной оси и полуокружности с центром в начале координат; см. рис. 3. Пользуясь леммой Жордана и тем, что $x>0$, убедимся, что интеграл по полуокружности будет стремиться к нулю при стремлении ее радиуса к бесконечности. Отсюда непосредственно следует, что величина интеграла (12.25) при $\sigma>\sqrt{\lambda}$ равна сумме вычетов подынтегральной функции в точках $z_1=\sqrt{\lambda}$ и $z_2=-\sqrt{\lambda}$, что дает

$$r(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x}\right).$$

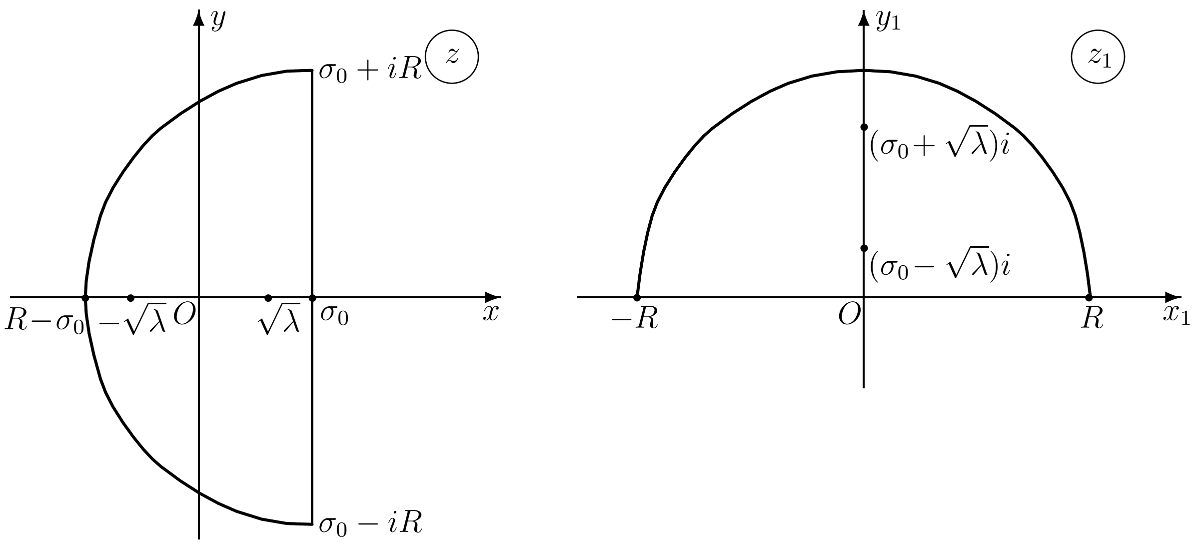

Рис. 3

Следовательно, решение уравнения (12.24) в силу (12.16) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int\limits_0^x \left[e^{\sqrt{\lambda}(x-t)} - e^{\sqrt{\lambda}(t-x)} \right] f(t)\, dt. \qquad (12.26)$$

§ 13. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

В § 11–12 мы получили решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Рассмотрим уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_a^x K(x,t)\varphi(t)\, dt = f(x) \qquad (13.1)$$

и покажем, что при некоторых дополнительных условиях это уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго ряда.

Предположим сначала, что функция $K(x,t)$ непрерывна на $k_0 = [a,b]\times[a,b]$, имеет непрерывную частную производную $K_x(x,t)$ на k_0 и $K(x,x) \neq 0$ для любого $x \in [a,b]$. Из (13.1) следует, что функция $f(x)$ должна удовлетворять необходимому условию разрешимости уравнения (13.1):

$$f(a) = 0. \qquad (13.2)$$

Дифференцируя обе части уравнения (13.1) и используя известную формулу из анализа о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, имеем

$$K(x,x)\varphi(x) + \int\limits_a^x K_x(x,t)\varphi(t)\,dt = f'(x),$$

откуда приходим к уравнению Вольтерра второго рода:

$$\varphi(x) + \int\limits_a^x \frac{K_x(x,t)}{K(x,x)}\varphi(t)\,dt = \frac{f'(x)}{K(x,x)}. \tag{13.3}$$

В силу условия (13.2) уравнения (13.1) и (13.3) равносильны в том смысле, что если они разрешимы, то любое решение $\varphi(x)$ уравнения (13.1) является решением уравнения (13.3) и обратно: любое решение $\varphi(x)$ уравнения (13.3) есть решение уравнения (13.1).

Рассмотрим теперь уравнение Вольтерра первого рода с полярным ядром $K(x,t) = \dfrac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}}$ $(0 < \alpha < 1)$, а именно уравнение

$$\int\limits_a^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{13.4}$$

в предположении, что $H(x,t) \in C(k_0)$, $H_x(x,t) \in C(k_0)$, $H(x,x) \neq 0$.

Заменяя x на τ и τ на t в уравнении (13.4), умножая обе части этого уравнения на $(x-\tau)^{-\alpha}$ и интегрируя по x от $\tau = a$ до $\tau = x$, имеем

$$\int\limits_a^x (x-\tau)^{-\alpha}d\tau \int\limits_a^\tau \frac{H(\tau,t)}{(\tau-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt = \int\limits_a^x (x-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\,d\tau.$$

Применяя формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования, находим

$$\int\limits_a^x K_1(x,t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{13.5}$$

где

$$K_1(x,t) = \int\limits_t^x \frac{H(\tau,t)}{(x-\tau)^\alpha(\tau-t)^{1-\alpha}}\,d\tau. \tag{13.6}$$

Ядро $K_1(x,t)$ не является особым. Действительно, вводя вместо x новую переменную интегрирования θ по формуле

$$\tau = \frac{x+t}{2} + \frac{x-t}{2}\cos\theta \qquad (0 \le \theta \le \pi),$$

получим

$$K_1(x,t) = \int\limits_0^\pi \frac{H(\frac{x+t}{2} + \frac{x-t}{2}\cos\theta, t)\sin\theta}{(1+\cos\theta)^{1-\alpha}(1-\cos\theta)^\alpha}\,d\theta. \tag{13.7}$$

Так как $H(x,t)$ непрерывна и интеграл (13.7) сходится равномерно относительно x и t, то $K_1(x,t)$ есть непрерывная функция. Используя известную формулу из анализа

$$\int\limits_0^\pi (1+\cos\theta)^{\alpha-1}(1-\cos\theta)^{-\alpha}\sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)},$$

получим из (13.7) выражение для $K_1(x,x)$:

$$K_1(x,x) = H(x,x)\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}. \tag{13.8}$$

Так как $H(x,x) \neq 0$, то $K(x,x) \neq 0$. Из (13.7) непосредственно следует также, что существует непрерывная частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x}K_1(x,x)$ в силу непрерывности $H_x(x,t)$. Если мы предположим, что существует непрерывная производная $f'(x)$, то, интегрируя по частям и используя условие (13.2), находим

$$f_1(x) = \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt = \int\limits_a^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}f'(t)}{1-\alpha}\,dt. \tag{13.9}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что правая часть уравнения (13.5) имеет непрерывную производную

$$f'(x) = \int\limits_a^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{13.10}$$

Таким образом, согласно § 11, при наших предположениях уравнение (13.5) имеет решение $\varphi(x) \in C[a,b]$. Покажем, что эта функция удовлетворяет исходному уравнению (13.4). Рассмотрим разность

$$\omega(x) = f(x) - \int_a^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt. \tag{13.11}$$

Заменяя x на t и t на τ и умножая обе части полученного равенства на $(x-t)^{-\alpha}$, интегрируя по t от $t=a$ до $t=x$ и учитывая (13.4), имеем

$$\int_a^x \frac{\omega(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt - \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\int_a^t \frac{H(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau =$$
$$= \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt - \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt = 0,$$

то есть

$$\int_a^x \frac{\omega(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = 0. \tag{13.12}$$

Опять заменяя x на t, t на τ, умножая обе части на $(x-t)^{\alpha-1}$, интегрируя по t в пределах от $t=a$ до $t=x$ и используя формулу Дирихле, находим

$$0 = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha}\omega(\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_a^x \omega(\tau)\,d\tau \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{-\alpha}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\int_a^x \omega(\tau)\,d\tau,$$

или

$$\int_a^x \omega(\tau)\,d\tau = 0.$$

Отсюда получаем $\omega(x) = 0$ и в силу (13.11)

$$\int_a^x \frac{H(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\varphi(t)\,dt = f(x),$$

то есть $\varphi(x)$ является решением уравнения (13.4).

Рассмотрим уравнение (13.1) с разностным ядром

$$\int_a^x k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{13.13}$$

Применяя преобразование Лапласа, используя обозначения

$$\Phi(z) = (\mathcal{L}\varphi)(z), \qquad K(z) = (\mathcal{L}k)(z), \qquad F(z) = (\mathcal{L}f)(z) \tag{13.14}$$

и формулу свертки (12.8), получаем

$$K(z)\Phi(z) = F(z), \qquad \Phi(z) = \frac{F(z)}{K(z)}\,. \tag{13.15}$$

Применяя формулу обращения преобразования Лапласа (12.3) к $\Phi(z)$, получим решение уравнения (13.13)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(z)}{K(z)} e^{zx}\,dz. \tag{13.16}$$

Условия справедливости применения прямого и обратного преобразований Лапласа могут быть обоснованы аналогично тому, как это проводилось в § 12 для уравнения Вольтерра второго рода с разностным ядром.

§ 14. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

Определение 14.1. *Интегральное уравнение*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \qquad (x > a;\ 0 < \alpha < 1), \tag{14.1}$$

называется <u>интегральным уравнением Абеля первого рода</u>.

Дадим формальное решение уравнения (14.1). Предположим, что оно разрешимо, то есть существует отличное от нуля решение $\varphi(x) \not\equiv 0$

уравнения (14.1). Рассуждая так же, как и в § 13 при решении уравнения Вольтерра первого рода (13.4), заменим x на t, t на τ, умножим обе части полученного выражения на $(x-t)^{-\alpha}$ и проинтегрируем от a до x:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}\,dt\int\limits_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)\,d\tau = \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,.$$

Изменяя порядок интегрирования по формуле Дирихле, имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \varphi(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^x (x-t)^{-\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}\,dt = \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,. \tag{14.2}$$

Осуществляя замену переменной $t=\tau+s(x-\tau)$ и используя известные формулы для бета- и гамма-функций, вычислим внутренний интеграл в левой части:

$$\int\limits_\tau^x (x-t)^{-\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}\,dt = \int\limits_0^1 (1-s)^{-\alpha}s^{\alpha-1}\,ds = B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Подставляя полученное выражение в (14.2), находим

$$\Gamma(1-\alpha)\int\limits_a^x \varphi(\tau)\,d\tau = \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

или

$$\int\limits_a^x \varphi(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,. \tag{14.3}$$

Отсюда получаем решение уравнения (14.1):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\,. \tag{14.4}$$

Таким образом, мы показали, что если уравнение (14.1) имеет решение $\varphi(x)$, то оно дается формулой (14.4).

Обоснуем это решение в классе абсолютно интегрируемых функций $\varphi(x)\in L[a,b]$. Для этого нам понадобится класс $AC[a,b]$ абсолютно непрерывных функций на $[a,b]$.

Определение 14.2. *Функция $g(x)$ называется* <u>*абсолютно непрерывной*</u> *на $[a,b]$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset [a,b]$ $(k = 1, \ldots, m)$ такой, что $\sum\limits_{k=1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon\,.$$

Известно, что класс $AC[a,b]$ абсолютно непрерывных функций $g(x)$ на $[a,b]$ совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций:

$$g(x) \in AC[a,b] \quad \Rightarrow \quad g(x) = \int\limits_a^x \psi(t)\,dt + c, \qquad \int\limits_a^b |\psi(t)|\,dt < \infty, \tag{14.5}$$

где c — произвольная постоянная. Из (14.5) вытекает, что абсолютно непрерывная функция $g(x)$ имеет почти всюду суммируемую производную $g'(x) = \psi(x)$. Поэтому $g(x)$ представима в виде:

$$g(x) \in AC[a,b] \quad \Rightarrow \quad g(x) = \int\limits_a^x g'(t)\,dt + g(a). \tag{14.6}$$

Дадим обоснование решения уравнения Абеля (14.1) в $L[a,b]$.

Теорема 14.1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, функция $f(x)$ задана на $[a,b]$ и*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}\,. \tag{14.7}$$

Для того, чтобы уравнение Абеля (14.1) было разрешимо в $L[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC[a,b], \qquad f_{1-\alpha}(a) = 0. \tag{14.8}$$

При выполнении этих условий уравнение (14.1) имеет единственное решение, определяемое формулой (14.4).

Доказательство. Пусть уравнение (14.1) разрешимо в $L[a,b]$. Тогда, как мы показали ранее, справедливо равенство (14.3). Отсюда в силу (14.5) следуют условия (14.8), что доказывает необходимость.

Для доказательства достаточности заметим, что так как $f_{1-\alpha}(x) \in$ $\in AC[a,b]$, то $f'_{1-\alpha}(x) \in L[a,b]$. Поэтому функция, представимая формулой (14.4), существует почти всюду и принадлежит $L[a,b]$. Покажем, что она действительно дает решение уравнения (14.1). Для этого подставим ее в левую часть (14.1) и результат обозначим через $g(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt = g(x)\,. \tag{14.9}$$

Покажем, что почти всюду $g(x) = f(x)$, что и докажет теорему. Равенство (14.9) есть уравнение (14.1) относительно $f'_{1-\alpha}(t)$. Оно заведомо разрешимо в силу (14.4):

$$f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} = g(x)\,,$$

то есть $f'_{1-\alpha}(x) = g'_{1-\alpha}(x)$. Функции $f'_{1-\alpha}(x)$ и $g'_{1-\alpha}(x)$ абсолютно непрерывны: первая по предположению, вторая в силу равенства (14.3) с $g(x)$ в правой части. Поэтому

$$f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = c \quad \text{для любого} \quad x \in [a,b]. \tag{14.10}$$

По предположению $f'_{1-\alpha}(a) = 0$, а $g'_{1-\alpha}(a) = 0$, потому что уравнение (14.9) разрешимо. Поэтому $c = 0$ и (14.10) принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_a^x \frac{[f(t)-g(t)]}{(x-t)^{\alpha}}\,dt = 0\,.$$

Это равенство есть уравнение (14.1). В силу единственности решения $f(t) - g(t) = 0$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Достаточные условия разрешимости уравнения Абеля в $L[a,b]$ дает следующая теорема.

Теорема 14.2. *Если $f(x) \in AC[a,b]$, то уравнение Абеля (14.1) с $0 < \alpha < 1$ разрешимо в $L[a,b]$, при этом его решение (14.4) можно представить в виде*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} \right]. \qquad (14.11)$$

Доказательство основано на подстановке равенства вида (14.6)

$$f(t) = \int\limits_a^t f'(\tau)\,d\tau + f(a)$$

в формулу (14.4).

Известно, что решение интегрального уравнения (14.1) с любым $\alpha > 0$ представимо в виде

$$\varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}, \qquad (14.12)$$

где $n = [\alpha] + 1$, при некоторых дополнительных предположениях на функцию $f(x)$.

В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то уравнение (14.1) принимает вид

$$\frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\,dt = f(x), \qquad (14.13)$$

и его единственное решение дается формулой

$$\varphi(x) = f^{(n)}(x). \qquad (14.14)$$

Определение 14.3. *Выражение*

$$\left(I^\alpha_{a+}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \qquad (\alpha > 0) \qquad (14.15)$$

называется дробным интегралом Римана – Лиувилля порядка α, а

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{a+}f\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}} \qquad (\alpha > 0,\ n = [\alpha]+1) \qquad (14.16)$$

дробной производной Римана – Лиувилля порядка α.

Из формул (14.1) и (14.12) вытекает, что левая часть уравнения Абеля (14.1) является дробным интегралом, а решение (14.12) — дробной производной.

Замечание 14.1. Дробное интегрирование есть операция, обобщающая операцию n-кратного интегрирования с переменным верхним пределом:

$$\int\limits_a^x dt_1 \int\limits_a^{t_1} \ldots \int\limits_a^{t_{n-1}} \varphi(t_n)\, dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\, dt \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{14.17}$$

§ 15. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

Определение 15.1. *Интегральное уравнение*

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x) \qquad (x > 0,\ \alpha > 0,\ \lambda \in \mathbb{C}) \tag{15.1}$$

называется интегральным уравнением Абеля второго рода.

Для нахождения решения этого уравнения применим преобразование Лапласа. Используя обозначение (14.15), перепишем уравнение (15.1) в виде

$$\varphi(x) - \lambda \left(I_{0+}^{\alpha} \varphi\right)(x) = f(x). \tag{15.2}$$

Лемма 15.1. *Для достаточно хороших функций справедлива формула преобразования Лапласа*

$$\left(L I_{0+}^{\alpha} \varphi\right)(z) = z^{-\alpha} (L\varphi)(z). \tag{15.3}$$

Доказательство. Интеграл можно записать в виде свертки Лапласа

$$\left(I_{0+}^{\alpha} \varphi\right)(z) = \left(\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \times \varphi \right)(z), \tag{15.4}$$

где

$$t_+^{\alpha-1} = \begin{cases} t^{\alpha-1}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{15.5}$$

Применяя теорему 12.2 преобразования свертки Лапласа, имеем

$$\left(LI_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(z) = \left(L\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)(z) \cdot (L\varphi)(z). \tag{15.6}$$

Непосредственно доказывается формула

$$(Lt_+^{\alpha-1})(z) = \Gamma(\alpha)z^{-\alpha}. \tag{15.7}$$

Подставляя (15.7) в (15.6), получаем (15.3).

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (15.2) и используя равенство (15.3), находим

$$(L\varphi)(z) - \lambda z^{-\alpha}(L\varphi)(z) = (Lf)(z),$$

откуда

$$(L\varphi)(z) = \frac{(Lf)(z)}{1-\lambda z^{-\alpha}}\,. \tag{15.8}$$

Предположим, что $|\lambda z^{-\alpha}| < 1$. Тогда раскладывая $\dfrac{1}{1-\lambda z^{-\alpha}}$ в ряд

$$\frac{1}{1-\lambda z^{-\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda z^{-\alpha})^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k z^{-\alpha k}$$

и подставляя это выражение в (15.8), имеем

$$(L\varphi)(z) = (Lf)(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k z^{-\alpha k}(Lf)(z). \tag{15.9}$$

Согласно (15.3)

$$z^{-\alpha k}(Lf)(z) = \left(LI_{0+}^{\alpha k}f\right)(z)$$

и, следовательно,

$$(L\varphi)(z) = \left[L\left(f + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k z^{-\alpha k}f\right)\right](z).$$

Отсюда, взяв обратное преобразование Лапласа, приходим к решению уравнения (15.1) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\left(I_{0+}^{\alpha k}f\right)(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha k-1}f(t)\,dt \tag{15.10}$$

или

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k)}(x-t)^{\alpha k-1}\right] f(t)\,dt. \tag{15.11}$$

Для представления решения (15.11) в более компактном виде введем функцию

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\,, \tag{15.12}$$

определенную при $\alpha > 0$ и комплексном $z \in \mathbb{C}$.

Определение 15.2. *Функция* $E_\alpha(z)$ *называется функцией Миттаг-Леффлера.*

Функция $E_\alpha(z)$ введена в 1903 г. шведским математиком Миттаг-Леффлером и поэтому носит его имя. Его же именем названа более общая функция

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0,\ z \in \mathbb{C})\,, \tag{15.13}$$

называемая функцией типа Миттаг-Леффлера. В частности,

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z). \tag{15.14}$$

Функция $E_\alpha(z)$ обобщает показательную функцию:

$$E_1(z) = e^z \tag{15.15}$$

и тригонометрический и гиперболический косинусы:

$$E_2(-z^2) = \cos z, \qquad E_2(z^2) = \operatorname{ch} z. \tag{15.16}$$

Функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ обобщает тригонометрический и гиперболический синусы:

$$zE_{2,2}(-z^2) = \sin z, \qquad zE_{2,2}(z^2) = \operatorname{sh} z. \tag{15.17}$$

$E_\alpha(z)$ и $E_{\alpha,\beta}(z)$ — целые функции от z.

Используя (15.12), запишем (15.11) в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\lambda(x-t)^\alpha]^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\right] f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x E_\alpha[\lambda(x-t)^\alpha] f(t)\,dt.$$

Таким образом, решение уравнения (15.1) дается формулой

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_0^x E_\alpha[\lambda(x-t)^\alpha]f(t)\,dt. \tag{15.18}$$

§ 16. ЗНАМЕНАТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА

В § 9 мы определили резольвенту ядра $K(x,t)$ посредством ряда

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n\,, \tag{16.1}$$

сходящегося в круге

$$|\lambda| < \frac{1}{p} = \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dx\,dt\right)^{-1/2}, \tag{16.2}$$

где повторные ядра определяются формулой

$$\begin{gathered} K_1(x,t) = K(x,t),\\ K_{n+1}(x,t) = \int\limits_a^b K_n(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau \quad (n=1,2,\ldots). \end{gathered} \tag{16.3}$$

Далее мы покажем, что $R(x,t;\lambda)$ может быть аналитически продолжена на всю плоскость λ так, что ее особыми точками могут быть только полюса, и что при всех λ, кроме полюсов, она удовлетворяет уравнениям для резольвент (10.8) и (10.9). Для этого мы построим такую целую функцию $\mathcal{D}(\lambda)$, что при умножении ряда (16.1) на $\mathcal{D}(\lambda)$ получим также целую функцию $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ от λ. Резольвента окажется, таким образом, частным двух целых функций от λ:

$$R(x,t;\lambda) = \frac{\mathcal{D}(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}. \tag{16.4}$$

Функцию $\mathcal{D}(\lambda)$ построим следующим рядом:

$$\mathcal{D}(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\,d_n, \tag{16.5}$$

где

$$d_n = \int\limits_a^b \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \dots dt_n. \qquad (16.6)$$

Здесь используется следующее обозначение:

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \dots & K(x_1,y_n) \\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \dots & K(x_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,y_1) & K(x_n,y_2) & \dots & K(x_n,y_n) \end{vmatrix}, \qquad (16.7)$$

согласно которому

$$K\begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \dots & K(t_1,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \dots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix}. \qquad (16.8)$$

Для оценки коэффициентов d_n воспользуемся леммой Адамара.

Лемма 16.1 (лемма Адамара). *Пусть* Δ *— определитель порядка* n *с элементами* a_{ik} *и* $|a_{ik}| \le M$ $(i,k = 1,2,\dots,n)$. *Тогда справедлива оценка*

$$|\Delta| \le n^{n/2} M^n.$$

Предположим, что $K(x,t) \in C(k_0)$, $k_0 = [a,b] \times [a,b]$. Тогда справедлива оценка

$$|K(x_i,x_k)| \le M \qquad i,k = 1,2,\dots,n$$

и из леммы Адамара получаем оценку для d_n:

$$|d_n| \le n^{n/2} M^n \int\limits_a^b \dots \int\limits_a^b dt_1 \dots dt_n = n^{n/2} M^n (b-a)^n.$$

Отсюда вытекает оценка для общего члена ряда в (16.5):

$$|c_n| = \left| (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, dn \right| \le \frac{|\lambda|^n}{n!}\, n^{n/2} [M(b-a)]^n. \qquad (16.9)$$

Покажем, что эти числа образуют сходящийся ряд. Взяв отношение последующего члена $|c_{n+1}|$ к предыдущему $|c_n|$, получим

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{|\lambda|(b-a)M(n+1)^{(n+1)/2}}{(n+1)\, n^{n/2}} = \frac{|\lambda| M(b-a)}{\sqrt{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n/2}=\sqrt{e}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=0$, и по признаку Даламбера ряд (16.5) абсолютно сходится при любом λ. Таким образом, функция $\mathcal{D}(\lambda)$ в (16.5) является целой функцией от λ.

Определение 16.1. *Выражение $\mathcal{D}(\lambda)$ называется знаменателем Фредгольма.*

Естественно предположить, что $\mathcal{D}(\lambda)$ является знаменателем для $R(x,t;\lambda)$, то есть что, умножая ряд (16.1) на $\mathcal{D}(\lambda)$, мы получим целую функцию от λ. В результате этого умножения получим ряд, члены которого уже не числа, как $\mathcal{D}(\lambda)$, а функции от (x,t). Введем специальное обозначение для этого ряда:

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\,d_n(x,t). \tag{16.10}$$

Оба степенных ряда (16.1) и (16.5) сходятся в круге (16.2). Поэтому и ряд (16.10), полученный от их перемножения, также сходится в этом круге. Степенные ряды, как абсолютно сходящиеся, можно почленно перемножать, и можно получить выражения для коэффициентов $d_n(x,t)$ при помощи простого перемножения упомянутых рядов, но для удобства в дальнейших вычислениях поступим иначе.

Умножая обе части уравнения (10.8) на $\mathcal{D}(\lambda)$, имеем

$$R(x,t;\lambda)\mathcal{D}(\lambda)=K(x,t)\mathcal{D}(\lambda)+\lambda\int\limits_a^b K(x,t_1)R(t_1,t;\lambda)\mathcal{D}(\lambda)\,dt_1$$

или в силу (16.4)

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda)=K(x,t)\mathcal{D}(\lambda)+\lambda\int\limits_a^b K(x,t_1)\mathcal{D}(t_1,t;\lambda)\,dt_1. \tag{16.11}$$

Подставляя в эту формулу вместо $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(t_1,t;\lambda)$ ряды (16.5) и (16.10) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим следующую формулу

$$d_n(x,t)=K(x,t)d_n-n\int\limits_a^b K(x,t_1)d_{n-1}(t_1,t)\,dt_1 \qquad (n\in\mathbb{N}), \tag{16.12}$$

которая дает возможность последовательно вычислять коэффициенты $d_n(x,t)$, причем мы должны считать $d_0(x,t) = K(x,t)$. Заметим при этом, что ряд (16.10) сходится абсолютно и равномерно относительно (x,t) при условии (16.2), так как при этом члены перемножаемых рядов (16.1) и (16.5) меньше положительных чисел, образующих сходящийся ряд. Это дает возможность почленного интегрирования в правой части формулы (16.11).

Полагая $n = 1$ в (16.12), имеем

$$d_1(x,t) = K(x,t)d_1 - \int_a^b K(x,t_1)d_0(t_1,t)\,dt_1 =$$

$$= K(x,t)\int_a^b K(t_1,t_1)\,dt_1 - \int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)\,dt_1 =$$

$$= \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) \end{vmatrix} dt_1$$

или, принимая во внимание обозначение (16.7),

$$d_1(x,t) = \int_a^b K\begin{pmatrix} x, t_1 \\ t, t_1 \end{pmatrix} dt_1. \tag{16.13}$$

При $n = 2$ в силу (16.13) формула (16.12) дает

$$d_2(x,t) = K(x,t)d_2 - 2\int_a^b K(x,t_1)d_1(t_1,t)\,dt_1 =$$

$$= K(x,t)\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} t_1, t_2 \\ t, t_2 \end{pmatrix} dt_1\,dt_2.$$

Производя элементарные преобразования, получим формулу, аналогичную (16.13):

$$d_2(x,t) = \int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} x, t_1, t_2 \\ t, t_1, t_2 \end{pmatrix} dt_1\,dt_2. \tag{16.14}$$

Продолжая этот процесс, по индукции приходим к формуле

$$d_n(x,t) = \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x, t_1, t_2, \dots, t_n \\ t, t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \dots dt_n. \qquad (16.15)$$

Применяя к определителю, входящему в равенство (16.15), лемму Адамара, получим следующую оценку:

$$|d_n(x,t)| \le (n+1)^{(n+1)/2} M^{n+1} (b-a)^n.$$

Отсюда совершенно так же, как и для (16.5), доказывается, что ряд (16.10) сходится при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ абсолютно и равномерно относительно $(x,t) \in k_0$, и, следовательно, $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ является целой функцией от λ.

Принимая во внимание, что при условии (16.2) мы имеем

$$R(x,t;\lambda)\mathcal{D}(\lambda) = \mathcal{D}(x,t;\lambda),$$

можем записать при этих значениях λ:

$$R(x,t;\lambda) = \frac{\mathcal{D}(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}\,. \qquad (16.16)$$

Правая часть этой формулы дает аналитическое продолжение функции $R(x,t;\lambda)$ на всю плоскость комплексного переменного λ и показывает, что резольвента есть мероморфная функция от λ.

§ 17. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $\mathcal{D}(\lambda)$ И $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$

В § 16 мы определили знаменатель Фредгольма $\mathcal{D}(\lambda)$:

$$\mathcal{D}(\lambda) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, dn, \qquad (17.1)$$

где

$$d_0 = 1, \qquad d_n = \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} t_1, \dots, t_n \\ t_1, \dots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n \qquad (n \in \mathbb{N}), \quad (17.2)$$

и функцию $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$:

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda) = d_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, d_n(x,t), \qquad (17.3)$$

$$d_0(x,t) = K(x,t),\ d_n(x,t) = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x, t_1, \ldots, t_n \\ t, t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n \ (n \in \mathbb{N}), \tag{17.4}$$

где использовано обозначение

$$K\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & \ldots & K(x_1, y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ K(x_n, y_1) & \ldots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix}, \tag{17.5}$$

и показали, что функции $d_n(x,t)$ удовлетворяют рекуррентным равенствам:

$$d_0(x,t) = K(x,t),\ d_n(x,t) = K(x,t)d_n - n\int\limits_a^b K(x,t_1)d_{n-1}(t_1,t)\,dt_1 \ (n \in \mathbb{N}). \tag{17.6}$$

Укажем некоторые свойства этих формул

Свойство 17.1. *Справедлива формула*

$$d_{n+1} = \int\limits_a^b d_n(x,x)\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17.7}$$

Доказательство вытекает из (17.2) и (17.4):

$$d_{n+1} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x, t_1, \ldots, t_n \\ x, t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n\ dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x, t_1, \ldots, t_n \\ x, t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n \right] dx = \int\limits_a^b d_n(x,x)\,dx.$$

Замечание 17.1. Формула (17.7) дает возможность простого почленного вычисления коэффициентов d_n и $d_n(x,t)$. Полагая в (17.7) $n = 0$ и учитывая, что $d_0(x,t) = K(x,t)$, получим выражение для d_1:

$$d_1 = \int\limits_a^b d_0(x,x)\,dx = \int\limits_a^b K(x,x)dx. \tag{17.8}$$

Рассматривая (17.6) при $n = 1$ и учитывая (17.7), имеем

$$d_1(x,t) = K(x,t)d_1 - \int\limits_a^b K(x,t_1)d_0(t_1,t)\,dt_1 =$$

$$= K(x,t)\int\limits_a^b K(t_1,t_1)\,dt_1 - \int\limits_a^b K(x,t_1)K(t_1,t)\,dt_1 = \int\limits_a^b K\binom{x,t_1}{t,t_1}dt_1.$$

Полагая $n = 1$ в (17.7) и учитывая только что полученную формулу, находим выражение для d_2:

$$d_2 = \int\limits_a^b d_1(x,x)\,dx = \int\limits_a^b\int\limits_a^b K\binom{x,t_1}{t,t_1}dx\,dt_1.$$

И так далее.

Свойство 17.2. *Справедлива формула*

$$\mathcal{D}'(\lambda) = -\int\limits_a^b \mathcal{D}(x,x;\lambda)\,dx. \tag{17.9}$$

Доказательство. Полагая в (17.3) $t = x$ и интегрируя обе части по x, согласно (17.7) и (17.8) имеем:

$$\int\limits_a^b \mathcal{D}(x,x;\lambda)\,dx = \int\limits_a^b \left[K(x,x)d_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\,d_n(x,x)\right]dx =$$

$$= \int\limits_a^b K(x,x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int\limits_a^b d_n(x,x)dx = d_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\,d_{n+1}. \tag{17.10}$$

Дифференцируя по λ равенство (17.1) и осуществляя замену n на $n+1$, получаем

$$\mathcal{D}'(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\,d_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{(n)!} d_{n+1} = -\left[d_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_{n+1} \right]. \qquad (17.11)$$

(17.9) вытекает из (17.10) и (17.11).

Свойство 17.3. *Функции $d_n(x,t)$ и $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ непрерывны в квадрате $k_0 = [a,b] \times [a,b]$.*

Непрерывность $d_n(x,t)$ в k_0 вытекает из (17.4), а непрерывность $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ в k_0 следует из равномерной сходимости ряда (17.3) в k_0.

Определение 17.1. *Введем числа*

$$A_1 = \int_a^b K(x,x)\,dx, \qquad A_n = \int_a^b K_n(x,x)\,dx \quad (n = 2, 3, \ldots), \quad (17.12)$$

построенные по повторным ядрам

$$K_1(x,t) = K(x,t), \qquad K_n(x,t) = \int_a^b K(x,t_1) K_{n-1}(t_1,t)\,dt_1 \quad (n = 2, 3, \ldots). \quad (17.13)$$

Числа A_n называются следами повторных ядер $K_n(x,t)$.

Свойство 17.4. *Знаменатель Фредгольма $\mathcal{D}(\lambda)$ выражается в терминах следов повторных ядер следующим образом:*

$$\mathcal{D}(\lambda) = e^{-\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + A_n\frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right)} =$$
$$= \exp\left[-\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + A_n\frac{\lambda^n}{n} + \ldots \right) \right]. \qquad (17.14)$$

Доказательство. Используя (17.9) и формулу $\mathcal{D}(x,t;\lambda) = R(x,t;\lambda)\mathcal{D}(\lambda)$, имеем

$$-\frac{\mathcal{D}'(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = \frac{1}{\mathcal{D}(\lambda)} \int_a^b \mathcal{D}(x,x;\lambda)\,dx = \int_a^b \frac{\mathcal{D}(x,x;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}\,dx = \int_a^b R(x,x;\lambda)\,dx =$$
$$= \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,x)\lambda^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b K_{n+1}(x,x)\,dx\,\lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}\lambda^n,$$

и, следовательно,

$$\frac{\mathcal{D}'(\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = -\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}\lambda^n,$$

или

$$\ln \mathcal{D}(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}\frac{\lambda^{n+1}}{n+1} + c_1,$$

и

$$\mathcal{D}(\lambda) = c\exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1}\frac{\lambda^{n+1}}{n+1}\right]. \tag{17.15}$$

Так как $\mathcal{D}(0) = 1$, то $c = 1$ и из (17.15) вытекает (17.14).

Замечание 17.2. Ряд в показателе степени в (17.14) сходится при условии $|\lambda| < \dfrac{1}{p} = \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dx\,dt\right)^{-1/2}$. Используя разложение e^z, разложим правую часть (17.14) по степеням λ:

$$\mathcal{D}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(A_1\lambda + A_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + A_n\frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right)^n. \tag{17.16}$$

Из (17.16) следует, что коэффициенты d_n будут содержать лишь следы $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$. Из формулы

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda) = R(x,t;\lambda)\mathcal{D}(\lambda)$$

вытекает, что коэффициенты $d_n(x,t)$ в разложении (16.10) могут быть выражены через следы $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ и ядра $K_1(x,t),\ K_2(x,t),\ldots,K_n(x,t)$.

Свойство 17.5. *Целые функции $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ могут быть разложены на всей плоскости λ по целым степеням $(\lambda-\lambda_0)$, где λ_0 — любое фиксированное комплексное число.*

Например,

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda) = \mathcal{D}(x,t;\lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\mathcal{D}(x,t;\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{k!}, \tag{17.17}$$

где

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\mathcal{D}(x,t;\lambda) = \sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}\,d_n(x,t) \qquad (0! = 1). \tag{17.18}$$

Из оценок для $d_n(x,t)$ непосредственно следует, что ряд (17.18) сходится равномерно в k_0 при любом λ. Отсюда вытекает, что коэффициенты в разложении $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ по степеням $(\lambda-\lambda_0)$ являются непрерывными функциями в k_0.

§ 18. УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА ПРИ ЛЮБОМ λ. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ФРЕДГОЛЬМА

Рассмотрим уравнение для $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$, которое дается формулой (16.11)

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda) = K(x,t)\mathcal{D}(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x,t_1)\mathcal{D}(t_1,t;\lambda)\,dt_1. \tag{18.1}$$

Оно было получено из интегрального уравнения для резольвенты

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int_a^b K(x,t_1)R(t_1,t;\lambda)\,dt_1 \tag{18.2}$$

при условии (16.2):

$$|\lambda| < \frac{1}{p} = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\,dt\right)^{-1/2}. \tag{18.3}$$

Следовательно, обе части уравнения (18.1) совпадают при условии (18.3). В силу принципа аналитического продолжения если две целые функции совпадают в некотором круге комплексной плоскости λ, то они совпадают и во всей комплексной плоскости. Деля обе части уравнения (18.1) на $\mathcal{D}(\lambda)$, видим, что резольвента

$$R(x,t;\lambda) = \frac{\mathcal{D}(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} \tag{18.4}$$

удовлетворяет уравнению (18.2) при любых значениях λ, при которых $\mathcal{D}(\lambda) \neq 0$.

Аналогично показывается, что резольвента (18.4) удовлетворяет второму интегральному уравнению

$$R(x,t;\lambda) = K(x,t) + \lambda \int\limits_a^b K(t_1,t)R(x,t_1;\lambda)\,dt_1\,. \tag{18.5}$$

Таким образом, если λ отлично от корня $\mathcal{D}(\lambda)$, то при таких значениях λ функция $R(x,t;\lambda)$ удовлетворяет интегральным уравнениям (18.2) и (18.5). Тогда по теореме существования и единственности (теорема 10.2) интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{18.6}$$

имеет единственное решение, и это решение определяется формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,t;\lambda)f(t)\,dt. \tag{18.7}$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 18.1. *Если значение λ не есть корень $\mathcal{D}(\lambda)$, то интегральное уравнение Фредгольма (18.6) при любом $f(x)$ имеет единственное решение, и это решение выражается формулой (18.7), где $R(x,t;\lambda)$ определяется формулой (18.4).*

Рассмотрим теперь такое значение $\lambda = \lambda_0$, которое является корнем $\mathcal{D}(\lambda)$. Может оказаться, что оно также является корнем и функции $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ при любых x, t. Покажем теперь, что кратность этого корня в числителе выражения (18.4) обязательно ниже его кратности в знаменателе, а отсюда будет следовать, что всякий корень $\mathcal{D}(\lambda)$ является полюсом для резольвенты.

Теорема 18.2. *Всякий корень λ функции $\mathcal{D}(\lambda)$ является полюсом резольвенты.*

Доказательство. Пусть λ_0 есть корень $\mathcal{D}(\lambda)$ кратности k, то есть

$$\mathcal{D}(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k \mathcal{D}_0(\lambda) \qquad (\mathcal{D}_0(\lambda_0) \neq 0).$$

Положим, что он же является корнем $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ кратности l:

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^l \mathcal{D}_0(x,t;\lambda),$$

где $\mathcal{D}_0(x,t;\lambda)$ — ряд, расположенный по целым положительным степеням $(\lambda-\lambda_0)$, свободный член которого отличен от нуля при некотором значении (x,t). Известно, что тогда производная $\mathcal{D}'(\lambda)$ имеет корень $\lambda=\lambda_0$ кратности $(k-1)$. Применяя формулу (17.9), получим

$$\mathcal{D}'(\lambda) = -\int_a^b \mathcal{D}(x,x;\lambda)\,dx = (\lambda-\lambda_0)^l \int_a^b \mathcal{D}_0(x,x;\lambda)\,dx.$$

Левая часть имеет корень $\lambda=\lambda_0$ кратности $(k-1)$, а в правой части уже имеется множитель $(\lambda-\lambda_0)^l$, и, кроме того, может случиться, что после интегрирования по x выделится еще целая положительная степень $(\lambda-\lambda_0)$. Это рассуждение приводит нас к неравенству $l \le k-1$. Таким образом, если $\lambda=\lambda_0$ является корнем числителя выражения (18.4), то кратность этого корня во всяком случае ниже k, и поэтому вся дробь имеет полюс $\lambda=\lambda_0$. Это завершает доказательство теоремы.

Замечание 18.1. Свободный член в разложении $\mathcal{D}_0(x,t;\lambda)$ по степеням $(\lambda-\lambda_0)$ есть некоторая функция от (x,t). Она может обращаться в нуль при некоторых частных значениях x и t, но не равна нулю тождественно, ибо если бы это было так, то $\lambda=\lambda_0$ было бы корнем $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$ кратности выше l. Поэтому теорему 18.2 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 18.2′. *Существуют такие значения x и t, при которых $\lambda=\lambda_0$ будет полюсом резольвенты.*

Мы доказали, что всякий корень λ_0 функции $\mathcal{D}(\lambda)$ есть полюс резольвенты. Пусть это будет полюс кратности r. В окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ будем иметь разложение вида:

$$R(x,t;\lambda) = \frac{a_{-r}(x,t)}{(\lambda-\lambda_0)^r} + \frac{a_{-r+1}(x,t)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}(x,t)}{\lambda-\lambda_0} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x,t)(\lambda-\lambda_0)^i,$$

где коэффициент $a_{-r}(x,t)$ не равен тождественно нулю в k_0.

Подставляя это выражение в уравнение (18.2), умножая обе части на $(\lambda - \lambda_0)^r$ и полагая затем $\lambda = \lambda_0$, получим

$$a_{-r}(x,t) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t_1) a_{-r}(t_1,t)\, dt_1.$$

Таким образом, оказывается, что коэффициент $a_{-r}(x,t)$ как функция от x при любом значении переменной t является решением однородного уравнения

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\, dt. \tag{18.8}$$

Так как функция $a_{-r}(x,t)$ не есть тождественный нуль, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 18.3. *Если $\lambda = \lambda_0$ есть корень $\mathcal{D}(\lambda)$, то однородное уравнение Фредгольма (18.8) имеет решение, не равное тождественному нулю.*

Таким образом, всякий корень $\mathcal{D}(\lambda)$ является характеристическим значением интегрального уравнения, то есть при этом однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\, dt \tag{18.9}$$

имеет решение, отличное от нулевого. Если же λ не есть корень $\mathcal{D}(\lambda)$, то в силу теоремы 18.1 уравнение (18.6) имеет единственное решение. В частности, однородное уравнение (18.9) имеет при этом только нулевое решение. Отсюда вытекает теорема 18.4.

Теорема 18.4. *Характеристические значения интегрального уравнения Фредгольма есть корни $\mathcal{D}(\lambda)$.*

В связи с этим теорему 18.1 можно переформулировать так:

Теорема 18.1′. *Если λ не является характеристическим значением интегрального уравнения Фредгольма, то неоднородное уравнение Фредгольма (18.6) при любом $f(x)$ имеет единственное решение, даваемое формулой (18.7).*

Определение 18.1. *Теоремы 18.1 и 18.1′ называют первой теоремой Фредгольма.*

Целая функция $\mathcal{D}(\lambda)$ может иметь лишь конечное число корней во всякой ограниченной области комплексного переменного λ. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 18.5. *Во всякой ограниченной области плоскости λ может существовать лишь конечное число характеристических значений.*

Отметим еще одну формулу, которая бывает полезной в приложениях. Предположим, что свободный член $f(x)$ уравнения (18.6) может быть представлен в виде

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\omega(t)\,dt, \tag{18.10}$$

где $\omega(t)$ — некоторая функция.

Если λ не есть характеристическое значение, то согласно (18.7) получим решение уравнения (18.6) в виде

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\omega(t_1)\,dt + \lambda \int_a^b \int_a^b R(x,t;\lambda)K(t,t_1)\omega(t_1)\,dt\,dt_1. \tag{18.11}$$

Но уравнение (18.5) дает нам

$$\lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)K(t,t_1)\,dt = R(x,t_1;\lambda) - K(x,t_1).$$

Подставляя это выражение в (18.11), получаем простое выражение для решения уравнения (18.6):

$$\varphi(x) = \int_a^b R(x,t;\lambda)\omega(t)\,dt. \tag{18.12}$$

§ 19. СОЮЗНОЕ (ТРАНСПОНИРОВАННОЕ) ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Наряду с интегральным уравнением Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{19.1}$$

рассмотрим уравнение, которое отличается от уравнения (19.1) тем, что интегрирование проводится по первой переменной ядра, а в качестве свободного члена берется функция $g(x)$:

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(t,x)\psi(t)\,dt. \tag{19.1$'$}$$

Определение 19.1. *Уравнение (19.1$'$) называется* <u>*союзным*</u>*, или* <u>*транспонированным*</u> *к уравнению (19.1).*

Соответствующее (19.1$'$) однородное уравнение имеет вид:

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\psi(t)\,dt. \tag{19.2$'$}$$

При прежних обозначениях аргументов ядра мы должны определить ядро этого уравнения следующей формулой:

$$K_0(x,t) = K(t,x).$$

Символ (17.5) для ядра $K_0(x,t)$ получаем из того же символа для $K(x,t)$, заменяя x_i на y_i, и наоборот:

$$K_0\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_n \\ y_1,\dots,y_n \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} y_1,\dots,y_n \\ x_1,\dots,x_n \end{pmatrix}.$$

Формула (16.6) для d_n показывает затем, что для ядра $K_0(x,t)$ коэффициенты d_n^0 будут такими же, что и для ядра $K(x,t)$. Формула (16.15) показывает, что коэффициенты $d_n^0(x,t)$ ядра $K_0(x,t)$ получаются из аналогичных коэффициентов для $K(x,t)$ простой перестановкой аргументов x и t. Тогда числитель и знаменатель в формуле (18.4) для резольвенты выражается через аналогичные величины для уравнения (19.1) по формулам:

$$\mathcal{D}_0(x,t;\lambda) = \mathcal{D}(t,x;\lambda), \qquad \mathcal{D}_0(\lambda) = \mathcal{D}(\lambda). \tag{19.3}$$

Действительно,

$$d_n^0 = \int_a^b \ldots \int_a^b K_0\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n = d_n,$$

$$d_n^0(x,t) = \int_a^b \ldots \int_a^b K_0\begin{pmatrix} x, t_1, \ldots, t_n \\ t, t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} t, t_1, \ldots, t_n \\ x, t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n = d_n(t,x),$$

$$\mathcal{D}_0(x,t;\lambda) = K_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, d_n^0(x,t) =$$

$$= K(t,x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, d_n(t,x) = \mathcal{D}(t,x;\lambda),$$

$$\mathcal{D}_0(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, d_n^0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, d_n = \mathcal{D}(\lambda).$$

Отсюда получаем выражение для резольвенты уравнения ($19.1'$):

$$R_0(x,t;\lambda) = \frac{\mathcal{D}_0(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}_0(\lambda)} = \frac{\mathcal{D}(t,x;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)} = R(t,x;\lambda). \tag{19.4}$$

Из (19.3) и (19.4) следует следующее утверждение.

Утверждение 19.1. *Знаменатель Фредгольма для союзного уравнения ($19.1'$) будет таким же, что и для уравнения (19.1). В частности, союзное уравнение имеет те же характеристические значения, что и основное уравнение (19.1).*

Для союзного уравнения будут справедливы теоремы, аналогичные теоремам 18.1–18.5. Кроме того, на основании сказанного выше имеет место следующий результат.

Теорема 19.1. *Однородное уравнение*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{19.5}$$

и союзное с ним (19.2′) одновременно или имеют только нулевое решение, или имеют решение, отличное от нуля.

§ 20. СЛУЧАЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ

Теорема 18.1 дает полный ответ о решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{20.1}$$

в том случае, когда λ не есть характеристическое значение. Сейчас мы исследуем разрешимость уравнения (20.1) в случае, когда λ есть характеристическое значение.

Пусть λ — характеристическое значение интегрального уравнения (20.1), то есть однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{20.2}$$

имеет отличное от нуля решение $\varphi(x)$. Рассмотрим союзное к (20.2) однородное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(t,x)\psi(t)\,dt. \tag{20.2′}$$

Умножим обе части уравнения (20.1) на какое-либо решение уравнения (20.2′) и проинтегрируем по x:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt\right]\psi(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,t)\psi(x)\,dx\right]\varphi(t)\,dt.$$

Пользуясь (20.2′), получим

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\psi(x)\,dx + \int_a^b \psi(t)\varphi(t)\,dt,$$

откуда

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0. \tag{20.3}$$

Таким образом, для разрешимости уравнения (20.1) необходимо, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию (20.3), где $\psi(x)$ — любое решение уравнения (20.2′), среди решений которого наверняка есть отличные от нуля, ибо по условию λ — характеристическое значение. Если же λ — не характеристическое значение, то уравнение (20.1) в силу теоремы 18.1 имеет решение при любом $f(x)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 20.1. *Имеется две возможности: или интегральное уравнение (20.1) разрешимо при любом $f(x)$ и однородное уравнение (20.2) имеет только нулевое решение, или однородное уравнение (20.2) имеет решения, отличные от нулевого, и уравнение (20.1) разрешимо не при всяком $f(x)$.*

При первой возможности неоднородное уравнение (20.1) имеет единственное решение. Это следует из теоремы 18.1.

Замечание 20.1. Если известно, что при некотором λ и некоторой $f(x)$ неоднородное уравнение (20.1) имеет решение и притом только одно, то λ не есть характеристическое значение. Действительно, если бы λ было характеристическим значением, то добавляя к упомянутому решению неоднородного уравнения любое решение соответствующего однородного уравнения, отличное от нулевого, получили бы решение неоднородного уравнения, отличное от упомянутого.

Далее мы увидим, что условие (20.3) не только необходимо, но и достаточно для разрешимости уравнения (20.1). Предварительно выясним вопрос о ранге характеристического значения.

Пусть λ — характеристическое значение,

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_m(x) — \tag{20.4}$$

какие-либо линейно-независимые собственные функции, то есть решения уравнения (20.2), отличные от нулевого:

$$\frac{\varphi_j(x)}{\lambda} = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_j(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \dots, m). \tag{20.5}$$

Если λ или ядро $K(x,t)$ — не вещественны, то и функции $\varphi_j(x)$ в (20.4) должны считаться комплексными. Напомним, что $\lambda = 0$ не может быть характеристическим значением. Поскольку любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами собственных функций (20.4) есть также собственная функция, то мы можем применить к функциям (20.4) процесс ортогонализации. Таким образом, мы можем считать, что функции (20.4) взаимно ортогональны и нормированны, то есть

$$\int\limits_a^b \varphi_p(x)\overline{\varphi_q(x)}\,dx = 0 \quad (p \neq q); \qquad \int\limits_a^b |\varphi_p(x)|^2\,dx = 1. \tag{20.6}$$

Переходя к сопряженным величинам, перепишем (20.5) в виде

$$\frac{\overline{\varphi_j(x)}}{\lambda} = \int\limits_a^b \overline{K(x,t)\varphi_j(t)}\,dt.$$

Отсюда видно, что левая часть этого равенства есть коэффициент Фурье $\overline{K(x,t)}$ как функция аргумента t относительно ортонормированной системы (20.4), состоящей из конечного числа функций. В силу неравенства Бесселя (7.7) можем записать

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{|\varphi_j(x)|^2}{|\lambda|^2} \le \int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dt. \tag{20.7}$$

Отметим, что $|\overline{\lambda}| = |\lambda|$ для любого комплексного $\lambda \in \mathbb{C}$. Интегрируя обе части равенства (20.7) и учитывая (20.6), получим

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{|\lambda|^2} \le \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dt\right] dx \tag{20.8}$$

или

$$\frac{m}{|\lambda|^2} \le \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dt\right] dx, \tag{20.9}$$

откуда

$$m \le |\lambda|^2 \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dt\right] dx = |\lambda|^2 \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt, \tag{20.10}$$

так как в силу непрерывности ядра $K(x,t)$ в k_0 интеграл в правой части можно толковать как двойной интеграл.

Из неравенства (20.8) следует, что число линейно независимых функций, соответствующих характеристическому значению λ, не может превышать числа, стоящего в правой части (20.8).

Отсюда вытекает теорема 20.2.

Теорема 20.2. *Всякому характеристическому значению соответствует лишь конечное число линейно независимых собственных функций, то есть ранг всякого характеристического значения конечен.*

§ 21. ВТОРАЯ И ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

Пусть λ — характеристическое значение. Тогда согласно теореме 19.1 однородное интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{21.1}$$

и союзное с ним

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\psi(t)\,dt \tag{21.1$'$}$$

одновременно имеют решения, отличные от нуля. Покажем, что ранг характеристических значений этих уравнений конечен.

Теорема 21.1. *Однородное уравнение (21.1) и союзное уравнение (21.1′) имеют одинаковые числа линейно независимых решений, то есть ранг их совпадающих характеристических значений конечен.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что ранг уравнения (21.1) равен m, а ранг уравнения (21.1′) равен n, и пусть $m < n$. Приведем это к противоречию. Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x) \,— \tag{21.2}$$

линейно независимые решения уравнения (21.1), и

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x) \,— \tag{21.3}$$

линейно независимые решения уравнения (21.1′). Как и в § 20, будем считать, что как функции (21.2), так и функции (21.3) образуют ортонормированную систему. Мы имеем

$$\varphi_j(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_j(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{21.4}$$

$$\psi_j(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\psi_j(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{21.4$'$}$$

Составим новое ядро

$$L(x,t) = K(x,t) - \sum_{j=1}^{m} \overline{\varphi_j(t)\psi_j(x)} \qquad (21.5)$$

и напишем два союзных уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b L(x,t)\varphi(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (21.6)$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b L(t,x)\psi(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (21.6').$$

Согласно (21.5), перепишем (21.6) и (21.6′) в таком виде:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt - \lambda \sum_{j=1}^{m} \overline{\psi_j(x)} \int_a^b \overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)\,dt, \qquad (21.7)$$

$$\psi_j(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\psi(t)\,dt - \lambda \sum_{j=1}^{m} \overline{\varphi_j(x)} \int_a^b \overline{\psi_j(t)}\psi(t)\,dt. \qquad (21.7')$$

Пусть $\varphi(x)$ есть какое-либо решение уравнения (21.7). Умножим обе части (21.7) на $\psi_k(x)$, где k — какое-либо из чисел $1, 2, \ldots, m$, и проинтегрируем по x:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi_k(x)\,dx = \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt\right] \psi_k(x)\,dx -$$

$$-\lambda \sum_{j=1}^{m} \int_a^b \left[\overline{\psi_j(x)} \int_a^b \overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)\,dt\right] \psi_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,t)\psi_k(x)\,dx\right] \varphi(t)\,dt -$$

$$-\lambda \sum_{j=1}^{m} \int_a^b \overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)\,dt \int_a^b \overline{\psi_j(x)}\psi_k(x)\,dx.$$

Принимая во внимание (21.4′) и ортонормированность функций (21.3), перепишем полученное равенство в виде:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi_k(x)\,dx = \int_a^b \psi_k(t)\varphi(t)\,dt - \lambda\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\,dt,$$

откуда в силу $\lambda \neq 0$ следует:

$$\int_a^b \overline{\varphi_k(x)}\varphi(x)\,dx = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{21.8}$$

Таким образом, всякое решение уравнения (21.7) удовлетворяет условиям (21.8). Но в силу этих условий уравнение (21.7) можно переписать в виде

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt,$$

то есть всякое решение уравнения (21.7) является решением уравнения (21.1). Тем самым это решение должно представляться в виде линейной комбинации функций (21.2):

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\,\varphi_j(x). \tag{21.9}$$

Покажем, что все коэффициенты c_j должны равняться нулю. Умножим обе части (21.9) на $\overline{\varphi_k(x)}$ и проинтегрируем по x:

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{m} c_j \int_a^b \varphi_j(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx.$$

Пользуясь (21.8) и ортонормированностью системы (21.2), получим $0 = c_k$. Таким образом, из (21.9) следует $\varphi(x) \equiv 0$, то есть однородное уравнение (21.6) имеет только нулевое решение.

Покажем, что союзное уравнение (21.6′) имеет решения, отличные от нулевого. Подставим в (21.7′) $\psi(x) = \psi_k(x)$, где $k > m$:

$$\psi_k(x) = \lambda\int_a^b K(t,x)\psi_k(t)\,dt - \lambda\sum_{j=1}^{m}\overline{\varphi_j(x)}\int_a^b \overline{\psi_j(t)}\psi_k(t)\,dt.$$

Так как функции (21.3) образуют ортонормированную систему, то из последнего равенства получим:

$$\psi_k(x) = \lambda \int\limits_a^b K(t,x)\psi_k(t)\,dt,$$

откуда в силу (21.4$'$) видно, что $\psi(x) = \psi_k(x)$ при $k > m$ удовлетворяет уравнению (21.6$'$).

Итак, мы получили противоречие с теоремой 18.1: уравнение (21.6) имеет только нулевое решение, а союзное уравнение (21.6$'$) имеет решения, отличные от нулевого. Таким образом, случай $m > n$ невозможен.

Аналогичным образом доказывается, что случай $m < n$ также невозможен. Поэтому $m = n$, что завершает доказательство теоремы 21.1.

Замечание 21.1. Из наших рассуждений вытекает, что однородные уравнения (21.6) и (21.6$'$) имеют только нулевые решения, то есть λ не есть характеристическое значение ядра $L(x,t)$.

Перейдем к решению неоднородного уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{21.10}$$

если λ — характеристическое значение. В § 20 мы показали, что для разрешимости уравнения (21.10) необходимо, чтобы $f(x)$ удовлетворяла условию:

$$\int\limits_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0, \tag{21.11}$$

где $\psi(x)$ — любое решение союзного однородного уравнения (21.1$'$).

Докажем теперь достаточность условия (21.11). Пусть оно выполнено. Составим ядро $L(x,t)$ по формуле (21.5). Как мы уже показали (см. замечание 21.1), λ уже не есть характеристическое значение этого ядра, так что уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b L(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{21.12}$$

имеет решение (согласно первой теореме Фредгольма 18.1). Используя (21.5), перепишем это уравнение в виде:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt - \lambda \sum_{j=1}^{m} \overline{\psi_j(x)} \int\limits_a^b \overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)\,dt. \quad (21.12')$$

Умножая обе части этого равенства на $\psi_k(x)$ и интегрируя по x, имеем:

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\psi_k(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx + \int\limits_a^b \left[\lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt\right] \psi_k(x)\,dx -$$
$$- \int\limits_a^b \left[\lambda \sum_{j=1}^{m} \overline{\psi_j(x)} \int\limits_a^b \overline{\varphi_j(t)}\varphi(t)\,dt\right] \psi_k(x)\,dx$$

или

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\psi_k(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx + \int\limits_a^b \psi_k(t)\varphi(t)\,dt - \lambda \int\limits_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\,dt.$$

Отсюда в силу (21.11) получаем:

$$\int\limits_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Таким образом, уравнение (21.12′), или что то же (21.12), сводится к уравнению (21.10), то есть решение $\varphi(x)$ уравнения (21.12) является решением уравнения (21.10). Достаточность условия (21.11) доказана.

Если условие (21.11) выполнено, то, как всегда для линейных неоднородных уравнений, все решения этого уравнения представляют собой сумму какого-либо частного решения $\varphi_0(x)$ этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{m} c_j\,\varphi_j(x), \qquad (21.13)$$

где c_j — произвольные постоянные. Тем самым уравнение (21.10) имеет бесчисленное множество решений. Решение $\varphi_0(x)$ можно построить при помощи резольвенты ядра $L(x,t)$:

$$\varphi_0(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_0(x,t;\lambda) f(t)\, dt. \tag{21.14}$$

Предыдущие рассуждения приводят нас к теореме.

Теорема 21.2. *Если λ есть характеристическое значение, то для разрешимости неоднородного уравнения (21.10) необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял условию (21.11), в котором $\psi(x)$ — любая собственная функция союзного уравнения, то есть любое решение уравнения (21.1′). Если условие (21.11) выполнено, то уравнение (21.10) имеет бесчисленное множество решений, и все эти решения определяются формулой*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_0(x,t;\lambda) f(t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} c_j\, \varphi_j(x), \tag{21.15}$$

где $\varphi_j(x)$ — полная система линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения (21.1), а $R_0(x,t;\lambda)$ — резольвента интегрального уравнения Фредгольма (21.12).

Замечание 21.2. Достаточно проверить условие (21.11), подставляя вместо $\psi(x)$ полную систему линейно независимых решений $\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ уравнения (21.1′), так как любое другое его решение есть их линейная композиция.

Поэтому теорему 21.2 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 21.2′. *Если однородное уравнение (21.1) имеет отличные от нуля решения, то для разрешимости неоднородного уравнения (21.10) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)\, dx = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{21.16}$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения (21.1′). При выполнении этих *условий общее решение уравнения Фредгольма (21.10) дается формулой (21.15).*

Определение 21.1. *Теорему 21.1 называют второй теоремой Фредгольма, а теорему 21.2′ — третьей теоремой Фредгольма.*

Замечание 21.3. Вместо союзного уравнения (21.1′) часто рассматривается так называемое сопряженное уравнение

$$\omega(x) = \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(t, x)} \omega(t) \, dt. \tag{21.17}$$

Уравнение (21.17) имеет комплексно сопряженное решение

$$\psi(x) = \overline{\omega(x)},$$

и условия разрешимости (21.11) принимают вид

$$\int_a^b f(x) \overline{\omega(x)} \, dx = 0, \tag{21.18}$$

где $\omega(x)$ — любое решение уравнения (21.17).

Замечание 21.4. Аппарат, на основании которого были доказаны основные теоремы, был впервые дан Э. Фредгольмом (1903 г.). Эти теоремы аналогичны тем, которые были доказаны в алгебре при решении систем линейных алгебраических уравнений.

§ 22. АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА

Результаты, полученные в § 18–22, часто формулируются в виде следующего утверждения, называемого альтернативой Фредгольма.

Теорема 22.1 (альтернатива Фредгольма). *Для интегрального уравнения Фредгольма второго рода*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) \, dt \tag{22.1}$$

представляются две взаимоисключающие возможности:

1. Или λ не является характеристическим значением ядра $K(x,t)$, и тогда интегральное уравнение (22.1) и ему союзное уравнение

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(t,x)\psi(t)\,dt \tag{22.1$'$}$$

имеют только одно решение при любых правых частях $f(x)$, $g(x) \in C[a,b]$:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt, \tag{22.2}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(t,x;\lambda) g(t)\,dt, \tag{22.2$'$}$$

где $R(x,t;\lambda)$ — резольвента ядра $K(x,t)$. При этом соответствующие однородные уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt, \tag{22.3}$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\psi(t)\,dt \tag{22.3$'$}$$

имеют лишь тривиальные решения $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$.

2. Или λ является характеристическим значением ядра $K(x,t)$, и тогда интегральное уравнение (22.1) разрешимо тогда и только тогда, когда его свободный член $f(x)$ ортогонален всем решениям союзного однородного уравнения (22.3$'$):

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)\,dx = 0, \tag{22.4}$$

где $\psi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения (22.3$'$). При этом уравнения

(22.3) и (22.3′) имеют одинаковые числа линейно независимых решений

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j\, \varphi_j(x) \tag{22.5}$$

и

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{m} c_j\, \psi_k(x), \tag{22.5′}$$

а общее решение $\varphi(x)$ уравнения (22.1) складывается из общего решения (22.5) соответствующего однородного уравнения (22.3) и некоторого частного решения неоднородного уравнения (22.1):

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} c_j\, \varphi_j(x). \tag{22.6}$$

§ 23. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ

Рассмотрим класс интегральных уравнений Фредгольма, решение которых сводится к системам линейных алгебраических уравнений.

Определение 23.1. *Ядро $K(x,t)$ называется вырожденным, если оно представимо в виде конечной суммы произведений функций только от x на функции только от t:*

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \rho_j(x) \sigma_j(t). \tag{23.1}$$

Функции $\rho_j(x)$ и $\sigma_j(t)$ можно считать линейно независимыми. Если бы некоторое $\rho_j(x)$ выражалось через остальные $\rho_j(x)$, то мы могли подставить это выражение $\rho_j(x)$ в (23.1). При этом число слагаемых уменьшилось.

Рассмотрим уравнение Фредгольма с таким ядром и союзное с ним уравнение:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t)\, dt, \tag{23.2}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int\limits_a^b K(t, x)\psi(t)\, dt. \tag{23.2$'$}$$

С учетом (23.1) эти уравнения принимают вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \rho_j(x) \int\limits_a^b \sigma_j(t)\varphi(t)\, dt, \tag{23.3}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) \int\limits_a^b \rho_j(t)\psi(t)\, dt, \tag{23.3$'$}$$

или

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \rho_j(x), \tag{23.4}$$

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} y_j \sigma_j(x), \tag{23.4$'$}$$

где x_j и y_j — некоторые числа, определяемые равенствами

$$x_j = \int\limits_a^b \sigma_j(t)\varphi(t)\, dt, \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{23.5}$$

$$y_j = \int\limits_a^b \rho_j(t)\psi(t)\, dt, \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{23.5$'$}$$

Таким образом, всякое решение уравнений (23.3) и (23.3$'$) должно иметь вид (23.4) и (23.4$'$) соответственно, и все сводится к нахождению не функций $\rho_j(x)$ и $\sigma_j(x)$, а чисел x_j и y_j.

Подставляя выражения (23.4) и (23.4$'$) в уравнения (23.3) и (23.3$'$) и приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях $\rho_j(x)$ и $\sigma_j(x)$, получим для определения x_j и y_j две системы уравнений

$$x_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = f_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{23.6}$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, y_j = g_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{23.6$'$}$$

где

$$a_{ij} = \int_a^b \sigma_i(t)\rho_j(t)\, dt, \quad f_i = \int_a^b f(t)\sigma_i(t)\, dt, \quad g_i = \int_a^b g(t)\sigma_i(t)\, dt. \tag{23.7}$$

Определители систем (23.6) и (23.6$'$) отличаются лишь заменой строк столбцами.

Если, например, определитель системы (23.6) отличен от нуля, то при любых f_i и g_i мы получим определенные значения для x_i. Подставляя их в (23.4), мы найдем $\varphi(x)$. Однородным уравнениям

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\, dt, \tag{23.8}$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(t,x)\psi(t)\, dt \tag{23.8$'$}$$

будут соответствовать однородные системы

$$x_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{23.9}$$

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, y_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{23.9$'$}$$

Приравнивая определитель одной из этих систем (все равно какой) к нулю, мы получим алгебраическое уравнение для определения характеристических значений. Если $\lambda = \lambda_0$ — какой-либо корень этого уравнения, то система (23.9) имеет решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличное от нулевого.

Подставляя это решение в формулу

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \rho_j(x), \tag{23.10}$$

мы получим собственную функцию.

Доказанные ранее теоремы для интегральных уравнений Фредгольма в данном случае сведутся к известным теоремам линейной алгебры.

Пример 23.1. Пусть

$$K(x,t) = \cos(x+t) = \cos x \cdot \cos t - \sin x \cdot \sin t \quad (0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le \pi).$$

В данном случае в (23.1) $n = 2$,

$$\rho_1(x) = \cos x, \quad \sigma_1(t) = \cos t, \quad \rho_2(x) = \sin x, \quad \sigma_2(t) = -\sin t\,.$$

Вычисляя a_{ij}, получим

$$a_{11} = \int\limits_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = 0, \quad a_{22} = -\int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Система (23.6) принимает вид

$$(1 - \lambda\frac{\pi}{2})x_1 = f_1, \quad (1 + \lambda\frac{\pi}{2})x_2 = f_2\,;$$
$$f_1 = \int\limits_0^\pi \cos t f(t) dt\,dt, \quad f_2 = -\int\limits_0^\pi \sin t f(t)\,dt\,.$$

Имеются два характеристических значения $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$, а соответствующие нормированные собственные функции даются формулами

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \qquad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x.$$

Если $\lambda \ne \pm\dfrac{2}{\pi}$, то интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^\pi \cos(x+t)\varphi(t)\,dt \tag{23.11}$$

имеет единственное решение вида (23.4):

$$\varphi = f(x) + \lambda\frac{f_1}{1 - \lambda\frac{\pi}{2}}\cos x + \lambda\frac{f_2}{1 + \lambda\frac{\pi}{2}}\sin x. \tag{23.12}$$

Если $\lambda = 2/\pi$, то для разрешимости уравнения (23.11) необходимо и достаточно выполнение условия разрешимости

$$f_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^{\pi} \cos t\, f(t)\, dt = 0. \tag{23.13}$$

При выполнении этого условия решение уравнения (23.11) имеет вид

$$\varphi = f(x) + c_1 \cos x + \frac{f_2}{\pi} \sin x, \tag{23.14}$$

где c_1 — произвольная постоянная. При этом соответствующее (23.11) однородное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(x+t)\varphi(t)\, dt \tag{23.15}$$

имеет линейно независимое решение $\varphi(x) = \cos x$.

Если $\lambda = -2/\pi$, то для разрешимости уравнения (23.11) необходимо и достаточно выполнение условия

$$f_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin x\, dx = 0. \tag{23.16}$$

При выполнении этого условия решение уравнения (23.11) дается формулой

$$\varphi = f(x) + \frac{f_1}{\pi} \cos x + c_2 \sin x, \tag{23.17}$$

где c_2 — произвольная постоянная. При этом соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos(x+t)\varphi(t)\, dt \tag{23.18}$$

имеет линейно независимое решение $\varphi(x) = \sin x$.

§ 24. ОБОБЩЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При изложении теории интегральных уравнений Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{24.1}$$

в § 9–10 и 18–22 мы предполагали, что искомая функция $\varphi(x)$ и свободный член $f(x)$ есть функции одной независимой переменной x, которая может меняться в некотором конечном промежутке $[a,b]$. Этот же промежуток был промежутком изменения и для обоих аргументов ядра $K(x,t)$. Вся теория остается неизменной, если мы будем предполагать, что функции $\varphi(M)$ и $f(M)$ есть функции точки в некоторой ограниченной области B любого числа измерений или на некоторой поверхности или на некоторой кривой. При этом ядро $K(M,N)$ будет функцией пары точек M и N, каждая их которых может меняться в упомянутой области, или на поверхности, или на кривой, и знак интеграла в интегральном уравнении надо понимать как интегрирование по упомянутой области, или поверхности, или кривой. Тогда интегральное уравнение запишется в виде

$$\varphi(M) = f(M) + \int_B K(M,N)\varphi(N)\,d\omega_N\,. \tag{24.2}$$

Здесь под интегралом понимается или кратный интеграл, распространенный по упомянутой области, или поверхностный интеграл, распространенный по поверхности, или криволинейный интеграл, распространенный по кривой; а $d\omega_N$ обозначает элемент объема, или элемент площади, или элемент длины кривой. Например, если областью изменения является некоторая ограниченная область D на плоскости (x,y), то уравнение (24.2) в координатах может быть записано следующим образом:

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + \iint_D K(x,y;\xi,\eta)\,\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\,. \tag{24.3}$$

Функцию $f(M)$ мы считаем непрерывной в замкнутой области B и ищем непрерывное в этой области решение $\varphi(M)$. Ядро $K(M,N)$

считается непрерывной функцией пары точек (M, N), причем каждая может меняться в замкнутой области B.

Рассмотрим теперь систему m интегральных уравнений относительно такого числа искомых функций:

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \int_a^b \sum_{j=1}^m K_{ij}(x,t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{24.4}$$

Вместо ядра мы имеем в данном случае матрицу функций $K_{ij}(x,t)$.

Систему (24.4) можно привести к одному интегральному уравнению с одной искомой функцией. Для простоты ограничимся случаем $m = 2$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = f_1(x) + \displaystyle\int_a^b \big[K_{11}(x,t)\,\varphi_1(t) + K_{12}(x,t)\,\varphi_2(t)\big]\,dt\,, \\ \varphi_1(x) = f_1(x) + \displaystyle\int_a^b \big[K_{21}(x,t)\,\varphi_1(t) + K_{22}(x,t)\,\varphi_2(t)\big]\,dt\,. \end{cases} \tag{24.5}$$

Выше мы указывали, что вся теория интегральных уравнений остается неизменной, если основной областью является не промежуток, а любая ограниченная область на плоскости, на поверхности или в пространстве. Можно также считать, что переменная точка пробегает не один отрезок или не одну область, а несколько отдельно лежащих отрезков или областей. Вся теория остается при этом совершенно неизменной. Для приведения системы (24.5) к одному уравнению возьмем за основную область промежуток $[a, b]$, взятый два раза. Другими словами, мы берем за основную область два экземпляра промежутка $[a, b]$. Эти экземпляры друг с другом никак не связаны. Мы считаем $f(M) = f(M_1)$, если точка находится на первом экземпляре, и $f(M) = f(M_2)$, если точка находится на старом экземпляре. Аналогично определяется $\varphi(M)$ через $\varphi(M_1)$ и $\varphi(M_2)$. Ядро $K(M, N)$ определяется следующим образом:

$K(M, N) = K_{11}(M, N)$ (M и N на 1-м экземпляре),
$K(M, N) = K_{12}(M, N)$ (M на 1-м экземпляре; N на 2-м экземпляре),

$$K(M,N) = K_{21}(M,N) \ \text{(M на 2-м экземпляре; N на 1-м экземпляре)},$$
$$K(M,N) = K_{22}(M,N) \ \text{(M и N на 2-м экземпляре)}. \tag{24.6}$$

При этом система (24.5) приводится к одному интегральному уравнению с непрерывным ядром в основной области J, состоящей из двух экземпляров отрезка $[a,b]$:

$$\varphi(M) = f(M) + \int\limits_J K(M,N)\varphi(N)\,d\omega_N\,. \tag{24.7}$$

Интегрирование производится по обоим экземплярам промежутка, и можно считать $d\omega_N = dx$.

Изложенная теория остается справедливой и при более общих предположениях относительно ядра, чем его непрерывность. Можно, например, предположить, что функция $K(x,t)$ ограничена и имеет конечное число точек и линий разрыва непрерывности, причем линии разрыва имеют уравнения вида $t = \omega(t)$. Такие ядра называются регулярными. Отметим, что если ядро $K(x,t)$ имеет разрыв вдоль прямой $x = x_0$ (ядро не регулярно), то и функция

$$\omega(x) = \int\limits_a^b K(x,t)h(t)\,dt \tag{24.8}$$

будет, вообще говоря, иметь разрыв вдоль $x = x_0$ и при предположении непрерывности $h(t)$.

Оказывается, что если ядро $K(x,t)$ регулярно, то второе повторное ядро

$$K_2(x,t) = \int\limits_a^b K(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau \tag{24.9}$$

будет непрерывной функцией от x и t.

Вопрос становится гораздо более сложным, если ядро $K(x,t)$ неограничено. В дальнейшем мы исследуем этот вопрос и выделим те неограниченные ядра, для которых имеют место доказанные выше теоремы Фредгольма.

§ 25. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОЛЯРНЫМ ЯДРОМ

Определение 25.1. *Ядро $K(x,t)$ вида*

$$K(x,t) = \frac{L(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}\,, \tag{25.1}$$

где функция $L(x,t)$ непрерывна в $k_0 = [a,b]\times[a,b]$, а $0<\alpha<1$, называется полярным или слабо полярным ядром.

Отметим, что непрерывная функция $L(x,t)$ ограничена в k_0:

$$|L(x,t)| \le A \quad \forall\,(x,t)\in k_0,$$

и поэтому для полярного ядра верна оценка

$$|K(x,t)| \le \frac{A}{|x-t|^{\alpha}} \qquad (0<\alpha<1). \tag{25.2}$$

Рассмотрим интегральное уравнение с полярным ядром (25.1):

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b \frac{L(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}\,\varphi(t)\,dt \qquad (0<\alpha<1), \tag{25.3}$$

где $f(x)$ — заданная, а $\varphi(x)$ — искомая функции на $[a,b]$.

Оказывается, для интегральных уравнений (25.3) верны теоремы Фредгольма.

Теорема 25.1 (первая теорема Фредгольма). *Если λ не есть характеристическое значение, то интегральное уравнение (25.3) при любой правой части $f(x)$ имеет единственное решение.*

Теорема 25.2 (вторая теорема Фредгольма). *Если λ есть характеристическое значение, то однородное интегральное уравнение*

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b \frac{L(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}\,\varphi(t)\,dt \tag{25.4}$$

и союзное уравнение

$$\psi(x) = \lambda\int\limits_a^b \frac{L(t,x)}{|t-x|^{\alpha}}\,\psi(t)\,dt \tag{25.4$'$}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, то есть ранг совпадающих характеристических значений уравнений (25.4) и (25.4′) конечен.

Теорема 25.3 (третья теорема Фредгольма). *Если λ — характеристическое значение, то для разрешимости неоднородного уравнения (25.3) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_a^b f(x)\psi_j(x)\,dx = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{25.5}$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения (25.4′). Если условия (25.5) выполнены, то интегральное уравнение (25.3) имеет бесконечное множество решений: общее решение уравнения (25.3) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (25.3) и общего решения соответствующего однородного уравнения (25.4).

Идея доказательства теорем 25.1–25.3 основана на исследовании повторных ядер, рассмотрении непрерывного ядра

$$K_\gamma(x,t) = \begin{cases} K(x,t), & |x-t| > \gamma, \\ \dfrac{L(t,x)}{|t-x|^\alpha}, & |x-t| < \gamma, \end{cases} \qquad (0 < \gamma \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0)$$

и доказательстве теорем 25.1–25.3 для интегральных уравнений

$$\varphi(x) \;=\; f(x) + \lambda \int\limits_a^b K_\gamma(x,t)\,\varphi(t)\,dt\,,$$

$$\varphi(x) \;=\; \lambda \int\limits_a^b K_\gamma(x,t)\,\varphi(t)\,dt\,,$$

$$\psi(x) \;=\; \lambda \int\limits_a^b K_\gamma(t,x)\,\psi(t)\,dt\,,$$

из которых теоремы 25.1–25.3 получаются предельным переходом при $\gamma \to 0$ к уравнениям (25.3), (25.4) и (25.4′).

Определение 25.2. *Интегральные уравнения с полярными ядрами называют интегральными уравнениями типа Фредгольма.*

Рассмотрим вопрос построения резольвенты для полярного ядра.

Ранее для непрерывного ядра $K(x,t)$ на k_0 резольвента определялась формулой

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n\,, \tag{25.6}$$

где

$$K_1(x,t) = K(x,t), \qquad K_{n+1}(x,t) = \int\limits_a^b K_n(x,\tau)K(\tau,t)\,d\tau \quad (n = 1,2,\ldots)$$

при условии

$$|\lambda| < \frac{1}{p} = \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dx\,dt\right)^{-1/2},$$

и было показано, что $R(x,t;\lambda)$ может быть распространено на значения $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{D}(\lambda) \neq 0$, соотношением

$$R(x,t;\lambda) = \frac{\mathcal{D}(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}, \tag{25.7}$$

где

$$\mathcal{D}(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\,d_n, \quad d_n = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} t_1,\ldots,t_n \\ t_1,\ldots,t_n \end{pmatrix} dt_1\,dt_2\ldots dt_n,$$

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\,d_n(x,t)\,,$$

$$d_n(x,t) = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K\begin{pmatrix} x,t_1,\ldots,t_n \\ t,t_1,\ldots,t_n \end{pmatrix} dt_1\,dt_2\ldots dt_n\,.$$

При этом $\mathcal{D}(\lambda)$ может быть выражено в терминах следов A_n

$$A_1 = \int\limits_a^b K(t,t)\,dt, \qquad A_n = \int\limits_a^b K_n(t,t)\,dt \quad (n = 2,3,\ldots) \tag{25.8}$$

формулой

$$\mathcal{D}(\lambda) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\lambda^n}{n}\right],$$

и тогда

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda) = \big[K(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \ldots\big]\mathcal{D}(\lambda)\,. \qquad (25.9)$$

В нашем случае полярного ядра $K(t,t)$ не имеет смысла, и мы не имеем первого следа A_1 ядра $K(x,t)$.

Идея построения резольвенты для полярного ядра состоит в сведении к непрерывному ядру с помощью повторных ядер.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 25.1. *Пусть*

$$(K_1 u)(x) = \int\limits_a^b \frac{L_1(x,t)}{|x-t|^\alpha}\, u(t)\, dt, \qquad (K_2 v)(x) = \int\limits_a^b \frac{L_2(x,t)}{|x-t|^\beta}\, v(t)\, dt,$$

где функции $L_1(x,t)$ и $L_2(x,t)$ непрерывны в k_0, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$.

Тогда произведение K_1K_2 операторов K_1 и K_2 есть оператор

$$(Mv)(x) = \int\limits_a^b M(x,t) v(t)\, dt, \qquad M(x,t) = \int\limits_a^b \frac{L_2(x,\tau) L_1(\tau,t)}{|x-\tau|^\beta\, |\tau-t|^\alpha}\, d\tau,$$

и при этом

$$M(x,t) = \frac{L_3(x,t)}{|x-t|^{\alpha+\beta-1}}\,, \text{ если } \alpha+\beta>1\,,$$

$$M(x,t) = L_4(x,t), \text{ если } \alpha+\beta<1,$$

где $L_3(x,t)$ и $L_4(x,t)$ — непрерывные функции в k_0.

Рассмотрим интегральное уравнение (25.3) с $0<\alpha<1/2$. Тогда все повторные ядра, начиная со второго

$$K_2(x,t) = \int\limits_a^b K(x,\tau) K(\tau,t)\, d\tau = \int\limits_a^b \frac{L(x,\tau)}{|x-\tau|^\alpha}\, \frac{L(\tau,t)}{|\tau-t|^\alpha}\, d\tau,$$

по лемме 25.1 непрерывны, и поэтому существуют следы

$$A_m = \int\limits_a^b K_m(t,t)\,dt \qquad (m = 2, 3, \ldots). \tag{25.10}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби в (25.7) на $e^{A_1\lambda}$ и обозначим

$$\mathcal{D}(x,t;\lambda)e^{A_1\lambda} = \mathcal{D}_2(x,t;\lambda)\,, \qquad \mathcal{D}(\lambda)e^{A_1\lambda} = \mathcal{D}_2(\lambda).$$

Тогда можем написать тождество, аналогичное (25.9):

$$\mathcal{D}_2(x,t;\lambda) = \big[K(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \ldots\big]\mathcal{D}_2(\lambda)\,. \tag{25.11}$$

Оно получается формально из (25.9), если выразить $\mathcal{D}(\lambda)$ через следы и в (25.11) положить $A_1 = 0$.

Тогда дробь

$$R_2(x,t;\lambda) = \frac{\mathcal{D}_2(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}_2(\lambda)} \tag{25.12}$$

дает аналитическое продолжение выражения, стоящего в квадратных скобках формулы (25.11) на всю плоскость λ.

В рассматриваемом случае $0 < \lambda < 1/2$ можно показать, что

$$\mathcal{D}_2(\lambda) = \exp\left[-\sum_{k=2}^{\infty} A_k \frac{\lambda^k}{k}\right]$$

есть целая функция и что решение уравнения (25.3) можно представить в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R_2(x,t;\lambda)\, f(t)\,dt, \tag{25.13}$$

при этом нули $\mathcal{D}_2(\lambda)$ есть полюсы $R_2(x,t;\lambda)$. Отметим еще, что все члены в $\mathcal{D}(\lambda)$ и $\mathcal{D}(x,t;\lambda)$, содержащие A_1, получаются только из элементов главной диагонали определителей, входящих в формулы для d_n и $d_n(x,t)$, и что можно получить $\mathcal{D}_2(\lambda)$ и $\mathcal{D}_2(x,t;\lambda)$ по упомянутым выше формулам, полагая $K(x,x) \equiv 0$.

Пусть теперь $\alpha > 0$ любое. Тогда по лемме 25.1 для повторного ядра $K_2(x,t)$ порядок особенности будет $2\alpha - 1$, для ядра $K_3(x,t)$ — $(2\alpha-1)+(\alpha-1) = 3\alpha-2$, для повторного ядра $K_m(x,t)$ — $m\alpha-(m-1)$.

Пусть m — такое, что $(m-1)\alpha - (m-2) < 0$, а $m\alpha - (m-1) > 0$. Тогда при $n \geq m$ повторные ядра $K_n(x,t)$ непрерывны, и резольвенту можно представить в виде

$$R_{m+1}(x,t;\lambda) = \frac{\mathcal{D}_{m+1}(x,t;\lambda)}{\mathcal{D}_{m+1}(\lambda)}, \tag{25.14}$$

где

$$\mathcal{D}_{m+1}(\lambda) = \exp\left[-\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \frac{\lambda^n}{n}\right], \tag{25.15}$$

то есть $\mathcal{D}_{m+1}$ получается из $\mathcal{D}_\lambda$ при $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = 0$, а

$$\mathcal{D}_{m+1}(x,t;\lambda) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n\right]\mathcal{D}_{m+1}(\lambda). \tag{25.16}$$

Тогда единственное решение уравнения (25.3) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R_{m+1}(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt. \tag{25.17}$$

Аналогичные результаты можно получить для интегрального уравнения с полярным ядром в n-мерном пространстве

$$\varphi(x) = f(M) + \lambda\int_B \frac{L(M,N)}{r^\alpha}\,\varphi(N)\, d\omega_N, \tag{25.18}$$

где $r = d(M,N)$ — расстояние между точками M, $N \in B$, $0 < \alpha < n$. Доказательство основано на аналоге леммы 25.1 для $\mathbb{R}^n$.

Лемма 25.2. *Пусть*

$$(K_1 u)(M) = \int_B \frac{L_1(M,N)}{r_1^\alpha}\, u(N)\, d\omega_N,$$

$$(K_2 v)(M) = \int_B \frac{L_2(M,N)}{r_2^\beta}\, v(N)\, d\omega_N,$$

где функции $L_1(M,N)$ *и* $L_2(M,N)$ *непрерывны в* $\overline{B}$, *а* $0 < \alpha < n$, $0 < \beta < n$.

Тогда произведение K_1K_2 операторов K_1 и K_2 есть оператор

$$(K_1K_2v)(M) = \int\limits_B P(M,N)v(N)\,d\omega_N,$$

$$P(M,N) = \int\limits_B \frac{L_1(M,Q)}{r_1^{\alpha}}\,\frac{L_2(Q,N)}{r_2^{\beta}}\,d\omega_N,$$

и

$$P(M,N) = \frac{L_3(M,N)}{r^{\alpha+\beta-n}}\,,\ \textit{при}\ \ \alpha+\beta>n\,,$$

$$P(M,N) = L_4(M,N),\ \textit{при}\ \ \alpha+\beta<n,$$

где $L_3(M,N)$ и $L_4(M,N)$ — непрерывные функции в B.

§ 26. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В L_2. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕОРИЯ РИССА – ШАУДЕРА

В предыдущем параграфе мы рассмотрели интегральные уравнения с полярными ядрами. Второй пример интегральных уравнений с неограниченным ядром — интегральные уравнения, ядра которых принадлежат пространству L_2. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt, \qquad (a<x<b), \tag{26.1}$$

где (a,b) — конечный или бесконечный промежуток действительной оси $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, $f(x)\in L_2(a,b)$, $K(x,t)\in L_2(k_0)$ $(k_0=[a,b]\times[a,b])$ и ищется решение $\varphi(x)\in L_2(a,b)$.

Если

$$\left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dx\,dt\right)^{1/2} < \infty, \tag{26.2}$$

то, как и для случая интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным ядром, можно показать, что при $|\lambda| < \dfrac{1}{p}$ резольвента

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x,t)\lambda^n \tag{26.3}$$

представляется сходящимся рядом в $L_2(k_0)$ по норме L_2:

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N(x,t;\lambda) - R(x,t;\lambda)\|_2 = 0,$$

где

$$S_N(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{N} K_{n+1}(x,t)\lambda^n,$$

и решение неоднородного уравнения (26.1) представляется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)\,dt. \tag{26.4}$$

Вместо союзного уравнения Фредгольма рассматривается сопряженное к (26.1) уравнение

$$\psi(x) = g(x) + \overline{\lambda} \int_a^b \overline{K(t,x)}\psi(t). \tag{26.1$'$}$$

Используя представление ядра в виде

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\omega_k(x)\omega_l(t),$$

где $\omega_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ — какая-либо замкнутая ортонормированная система в (a,b) (и тогда $\omega_k(x)\omega_l(t)$ — замкнутая ортонормированная система в k_0), можно доказать все основные теоремы Фредгольма для уравнения (26.1).

Теорема 26.1 (первая теорема Фредгольма). *Если λ не есть характеристическое значение, то интегральное уравнение Фредгольма (26.1) при любой правой части $f(x)$ имеет единственное решение, даваемое формулой (26.4).*

Т е о р е м а 26.2 (вторая теорема Фредгольма). *Если* λ *— характеристическое значение уравнения (26.1),* $\overline{\lambda}$ *— характеристическое значение уравнения (26.1′), то однородное уравнение*

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{26.5}$$

и сопряженное однородное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int\limits_a^b \overline{K(t,x)}\,\psi(t)\,dt \tag{26.5′}$$

имеют одинаковое число линейно независимых решений, то есть уравнение (26.5′) имеет тот же ранг, что и уравнение (26.5). Других характеристических значений уравнение (26.5) не имеет.

Т е о р е м а 26.3 (третья теорема Фредгольма). *Если* λ *— характеристическое значение интегрального уравнения (26.1), то для разрешимости неоднородного уравнения (26.1) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_a^b f(x)\psi_j(x)\,dx = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{26.6}$$

где $\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ *— полная система собственных функций (линейно независимых решений) сопряженного однородного уравнения (26.5′). Если условия (26.6) выполнены, то неоднородное уравнение (26.1) имеет бесконечное множество решений. При этом общее решение уравнения (26.1) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (26.1) и общего решения соответствующего однородного уравнения (26.5).*

Т е о р е м а 26.4 (четвертая теорема Фредгольма). *Во всякой ограниченной части плоскости* λ *может находиться лишь конечное число характеристических значений* λ *уравнения (26.1) и каждое из них имеет лишь конечный ранг.*

Эта теорема говорит о том, что множество характеристических значений образует дискретный спектр.

Перейдем теперь к операторным уравнениям.

Определение 26.1. *Оператор K в L_2 называется вполне непрерывным или компактным, если он преобразует каждое ограниченное в L_2 множество $u(t)$:*

$$\int\limits_a^b |u(t)|^2 dt \leq C^2 \qquad (C > 0 \text{ — постоянная})$$

в компактное множество, то есть в такое множество функций $v(x)$ на L_2, что во всякой последовательности этих функций существует сходящаяся подпоследовательность.

Имеют место следующие утверждения

Лемма 26.1. *Интегральный оператор*

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

с ядром $K(x,t) \in L_2(k_0)$ есть вполне непрерывный оператор в L_2.

Лемма 26.2. *Любой конечномерный оператор вполне непрерывен.*

Определение 26.2. *Нормой оператора называется выражение*

$$\|K\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|K\varphi\|.$$

Из лемм 26.1 и 26.2 следует, что если для любого $\varepsilon > 0$ линейный оператор K может быть представлен в виде суммы двух линейных операторов $K_{1,\varepsilon}$ и $K_{2,\varepsilon}$,

$$K = K_{1,\varepsilon} + K_{2,\varepsilon}, \tag{26.7}$$

из которых $K_{1,\varepsilon}$ — конечномерный, а $K_{2,\varepsilon}$ имеет норму, не превосходящую ε, то K является вполне непрерывным оператором. Оказывается, верно и обратное предположение: любой вполне непрерывный оператор K допускает представление (26.7) при любом $\varepsilon > 0$, или, что то же, может быть приближен конечномерными операторами $K_{1,\varepsilon}$ в операторной норме. Это свойство выполняется в любом гильбертовом (полном сепарабельном) пространстве.

Теоремы Фредгольма 26.1–26.4 остаются справедливыми и для операторных уравнений $\varphi = f + \lambda K\varphi$ в любом комплексном гильбертовом пространстве H, если K является вполне непрерывным оператором в H. Соответствующие утверждения называются теорией Гильберта – Шмидта. Сформулируем эти результаты для $H = L_2$.

Определение 26.3. *Уравнением Рисса – Шаудера называется уравнение*

$$\varphi(x) - \lambda T\varphi = f(x), \tag{26.8}$$

где T — вполне непрерывный оператор в L_2.

Определение 26.4. *Значение λ называется правильным, если однородное уравнение*

$$\varphi(x) - \lambda T\varphi = 0 \tag{26.9}$$

имеет только тривиальное решение $\varphi \equiv 0$, и характеристическим, если уравнение (26.9) имеет нетривиальные решения. Соответствующие решения называются собственными функциями оператора T, соответствующими данному характеристическому значению λ.

Для уравнения Рисса – Шаудера справедливы все четыре теоремы Фредгольма.

Теорема 26.1′. *Если λ — правильное значение уравнения (26.8), то уравнение (26.8) разрешимо при любой правой части $f(x)$ и имеет единственное решение.*

Теорема 26.2′. *Если λ — характеристическое значение, то однородное уравнение (26.9) и сопряженное однородное уравнение*

$$\varphi(x) - \overline{\lambda} T^{*}\psi = 0, \tag{26.10}$$

где T^{*} — оператор, сопряженный к T, $(T\varphi, f) = (\varphi, T^{*}f)$, имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.

Теорема 26.3′. *Если λ — характеристическое значение, то для разрешимости уравнения (26.8) необходима и достаточна ортогональность f любому решению ψ сопряженного однородного уравнения (26.10)*

$$\int\limits_a^b f(x)\psi_j(x)\,dx = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{26.11}$$

Т е о р е м а 26.4$'$. *Вполне непрерывный оператор имеет не более счетного множества характеристических значений, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

Определение 26.5. *Теоремы 26.1$'$ – 26.4$'$ называют теорией Рисса – Шаудера.*

§ 27. СИММЕТРИЧНЫЕ ЯДРА

Определение 27.1. *Комплексное ядро $K(x,t)$ называется симметричным или эрмитовым, если*

$$K^*(x,t) = \overline{K(t,x)} = K(x,t). \tag{27.1}$$

Из этого определения следует, что $K(x,x)$ вещественно. В случае вещественного ядра равенство (27.1) сводится к равенству

$$K(t,x) = K(x,t). \tag{27.2}$$

Интегральный оператор $K\varphi$ с симметричным ядром удовлетворяет соотношению

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K\psi), \tag{27.3}$$

или в раскрытом виде

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt\right]\overline{\psi(x)}\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\left[\overline{\int\limits_a^b \overline{K(t,x)}\psi(t)\,dt}\right]dx,$$

которое непосредственно проверяется изменением порядка интегрирования. В частности,

$$(K\varphi, \varphi) = (\varphi, K\varphi), \tag{27.4}$$

откуда видно, что $(K\varphi, \varphi)$ — вещественное число.

Определение 27.2. *Интегральные операторы с симметричным ядром называют самосопряженными.*

Для самосопряженных операторов K характерно соотношение (27.3).

Будем рассматривать интегральные операторы с симметричным ядром. Для простоты ограничимся одномерным случаем:

$$(K\varphi)(x) = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt. \tag{27.5}$$

Лемма 27.1. *Всякое характеристическое значение интегрального оператора с симметричным ядром вещественно.*

Доказательство. Пусть λ_0 — характеристическое значение интегрального оператора (27.5) и φ_0 — соответствующая собственная функция, так что $\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0$. Отсюда получаем

$$(\varphi_0, \varphi_0) = (\lambda_0 K\varphi_0, \varphi_0) = \lambda_0(K\varphi_0, \varphi_0),$$

или

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{(K\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{(K\varphi_0, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|^2} \qquad \bigl(\|\varphi_0\|^2 = (\varphi_0, \varphi_0)\bigr).$$

Следовательно, всякое характеристическое значение вещественно.

Лемма 27.2. *Собственные функции, соответствующие различным характеристическим значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1 и λ_2 — два различных характеристических значения, а φ_1 и φ_2 — соответствующие собственные функции:

$$\varphi_1 = \lambda_1 K\varphi_1, \qquad \varphi_2 = \lambda_2 K\varphi_2. \tag{27.6}$$

Из первого уравнения следует, что

$$\frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1, \varphi_2) = (K\varphi_1, \varphi_2), \quad \text{или} \quad \frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, K\varphi_2).$$

Используя второе из уравнений (27.6), получим

$$\frac{1}{\lambda_2}(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1, \frac{\varphi_2}{\lambda_2}) = (\varphi_1, K\varphi_2) = \frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

и в силу $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеем $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, что и требовалось доказать.

Можно считать, что собственные функции, соответствующие одному и тому же характеристическому значению, ортонормированны.

Принимая во внимание лемму 27.2, мы видим, что множество всех собственных функций образует ортонормированную систему.

Пример 27.1. Пусть $K(x,t) = \sin x \cdot \sin(2t)$ $(0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le \pi)$. Тогда интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^\pi K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{27.7}$$

не имеет характеристических значений.

Доказательство. (27.7) равносильно уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int\limits_0^\pi \sin(2t)\varphi(t)\,dt.$$

Обозначая $C = \int\limits_0^\pi \sin(2t)\varphi(t)\,dt$, имеем

$$\varphi(x) = \lambda C \sin x.$$

Умножая обе части равенства на $\sin 2x$ и интегрируя от 0 до π, имеем

$$\int\limits_0^\pi \varphi(x)\sin 2x\,dx = \lambda C \int\limits_0^\pi \sin x\, \sin 2x\,dx$$

или

$$C = \lambda C \int\limits_0^\pi \sin x\, \sin 2x\,dx.$$

Так как $\int\limits_0^\pi \sin x\, \sin 2x\,dx = 0$, то $C = 0$.

В примере 27.1 мы привели интегральное уравнение с вырожденным (не симметричным) ядром, которое не имеет ни одного характеристического значения. Для симметричных ядер этого не может быть, то есть имеет место следующая основная теорема.

Теорема 27.1. *Всякое интегральное уравнение с симметричным ядром имеет характеристические значения (может быть и только одно).*

Теорема дается без доказательства.

Как следует из четвертой теоремы Фредгольма (теорема 26.4) характеристические значения (в данном случае вещественное) имеют все конечный ранг, и число их на любом конечном промежутке конечно.

Отсюда следует, что если их бесконечное множество, то они сгущаются на бесконечности, и их можно расположить в порядке неубывания абсолютных величин, то есть имеем

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_n| \le \ldots \tag{27.8}$$

и соответствующую ортонормированную систему собственных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x) \ldots . \tag{27.9}$$

Очевидно, что и система

$$\overline{\varphi_1(x)}, \overline{\varphi_2(x)}, \ldots \overline{\varphi_n(x)} \ldots \tag{27.10}$$

также ортонормированна. Если ядро $K(x,t)$ вещественно, то и собственные функции (27.9) можно считать вещественными, и система (27.10) совпадает с (27.9).

Определение 27.3. *Система (27.9) называется <u>системой собственных функций</u> ядра $K(x,t)$ или <u>соответствующего ему интегрального уравнения</u>.*

Для собственных функций имеем

$$\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = \int\limits_a^b K(x,t)\varphi_k(t)\,dt,$$

откуда видно, что левую часть можно рассматривать как коэффициент Фурье функции $K(x,t)$, как функции от t, относительно системы (27.10). Неравенство Бесселя дает

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \le \int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dt. \tag{27.11}$$

Интегрируя по x, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2} \leq \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt,$$

и, переходя к пределу, если число характеристических значений бесконечно, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \leq \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt. \tag{27.12}$$

Всякое характеристическое значение встречается в последовательности (27.8) число раз, равное его рангу. Здесь знак равенства $|\lambda_n| = |\lambda_{n+1}|$ будет иметь место, если $\lambda_{n+1} = \lambda_n$ (ранг>1) или $\lambda_{n+1} = -\lambda_n$. При бесконечности последовательности (27.8) $|\lambda_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Если мы рассмотрим вырожденное симметричное ядро

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(x)\overline{\sigma_k(t)}, \tag{27.13}$$

то, как и ранее в § 23, доказывается, что оно имеет конечное число характеристических значений. Далее мы покажем, что если ядро не вырождено, то интегральное уравнение имеет бесконечное множество характеристических значений.

Замечание 27.1. Все сказанное имеет место для ядер рассмотренных выше типов: непрерывных и полярных ядер на конечном промежутке и ядер из L_2 на конечном или бесконечном промежутке. В первых двух случаях собственные функции непрерывны, а для ядер из L_2 они также из L_2.

§ 28. РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ЯДРА ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots$ — конечная или бесконечная система характеристических значений, а

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x), \ldots\ — \tag{28.1}$$

соответствующая ортонормированная система собственных функций. Эта система может и не быть замкнутой. Поэтому при разложении какой-либо функции в ряд Фурье по $\varphi_k(x)$ даже при равномерной сходимости ряда нельзя утверждать, что сумма равна разлагаемой функции. Начнем с образования ряда Фурье для симметричного ядра $K(x,t)$ по системе (28.1).

В § 27 мы видели, что коэффициенты Фурье ядра $K(x,t)$ относительно системы (28.1) равны отношениям $\varphi_k(x)/\lambda_k$:

$$a_k = \int_a^b K(x,t)\varphi_k(t)\,dt = \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\,,$$

и, следовательно, ряд Фурье ядра $K(x,t)$ имеет вид

$$\sum_k \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\,, \tag{28.2}$$

причем суммирование ведется по k или до бесконечности или до конечного числа, равного числу всех собственных функций системы (28.1).

Отметим, что ряд (28.2) можно рассматривать как ряд Фурье функции $K(x,t)$, определенной в $k_0=[a,b]\times[a,b]$, по функциям $\varphi_k(x)\overline{\varphi_l(t)}$ $(k,l=1,2,\ldots)$, которые образуют в k_0 ортогональную систему:

$$\iint\limits_{k_0} K(x,t)\overline{\varphi_k(x)}\varphi_l(t)\,dx\,dt = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b \overline{\varphi_k(x)}\varphi_l(x)\,dx = \begin{cases} 0\,, & \text{при} \quad k\neq l\,,\\ \dfrac{1}{\lambda_k}\,, & \text{при} \quad k=l\,.\end{cases}$$

Теорема 28.1. *Если ядро $K(x,t)$ непрерывно в k_0 и ряд (28.2) равномерно сходится в k_0, то его сумма равна ядру в k_0, то есть*

$$K(x,t) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\,. \tag{28.3}$$

Доказательство. Считая пока, что число характеристических значений бесконечно, рассмотрим функцию

$$\omega(x,t) = K(x,t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\,, \tag{28.4}$$

$\omega(x,t)$ — непрерывная симметричная функция в k_0. Фиксируя x, рассмотрим $\omega(x,t)$ как функцию от t на промежутке $[a,b]$. Тогда ее коэффициенты Фурье относительно системы функций (28.1) равны нулю:

$$\int_a^b \omega(x,t)\varphi_j(t)\,dt = \int_a^b K(x,t)\varphi_j(t)\,dt - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\int_a^b \overline{\varphi_k(t)}\varphi_j(t)\,dt =$$
$$= \frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j} - \frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j} = 0\,.$$

Отсюда вытекает

$$\int_a^b \omega(x,t)\varphi_j(t)\,dt = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_a^b \omega(x,t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt = 0 \quad (k=1,2,\ldots)\,. \tag{28.5}$$

Покажем, что $\omega(x,t)$ тождественно равна нулю в квадрате k_0. Будем доказывать это от противного.

Положим, что функция $\omega(x,t)$ не обращается тождественно в нуль в квадрате k_0, и примем ее за ядро интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda\int_a^b \omega(x,t)\psi(t)\,dt\,.$$

В силу теоремы 27.1 это интегральное уравнение должно иметь, по крайней мере, одно характеристическое значение λ_0, которому соответствует некоторая собственная функция $\psi_0(x)$, не равная тождественно нулю:

$$\psi_0(x) = \lambda\int_a^b \omega(x,t)\psi_0(t)\,dt\,. \tag{28.6}$$

Покажем, что эта функция $\psi_0(x)$ должна быть ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_k(x)$ ядра $K(x,t)$. Действительно, умножая обе части (28.5) на $\lambda_0\psi_0(x)$ и интегрируя по x, получим

$$\lambda_0\int_a^b\int_a^b \omega(x,t)\psi_0(x)\overline{\varphi_k(t)}\,dx\,dt = 0.$$

В силу (28.6) и симметрии ядра $K(x,t)$ имеем

$$0 = \int\limits_a^b \left[\lambda_0 \int\limits_a^b \omega(x,t)\psi_0(x)\,dx\right] \overline{\varphi_k(t)}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\lambda_0 \int\limits_a^b \omega(t,x)\psi_0(x)\,dx\right] \overline{\varphi_k(t)}\,dt = \int\limits_a^b \psi_0(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt$$

и, следовательно,

$$\int\limits_a^b \psi_0(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{28.7}$$

Перепишем равенство (28.6) в виде

$$\psi_0(x) = \lambda_0 \int\limits_a^b \left[K(x,t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\right] \psi_0(t)\,dt\,.$$

Принимая во внимание равномерную сходимость ряда (28.3) и формулу (28.7), имеем

$$\int\limits_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\psi_0(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int\limits_a^b \overline{\varphi_k(t)}\psi_0(t)\,dt = 0\,.$$

Тогда

$$\psi_0(x) = \lambda_0 \int\limits_a^b K(x,t)\psi_0(t)\,dt\,,$$

то есть функция $\psi_0(x)$ должна быть собственной функцией первоначального ядра $K(x,t)$. Следовательно, она должна быть линейной комбинацией собственных функций $\varphi_k(x)$, соответствующих характеристическому значению λ_0. Но этого не может быть, так как $\varphi_0(x)$ и все функции $\varphi_k(x)$ образуют ортогональную систему, а ортогональные функции (как известно) не могут быть линейно зависимыми. Это противоречие показывает, что наше предположение $\omega(x,t) \not\equiv 0$ неверно и, следовательно, имеет место формула (28.3).

Далее мы покажем, что ряд (28.2) сходится в k_0, если числа λ_k одного знака, кроме, может быть, их конечного числа.

Положим теперь, что ядро $K(x,t)$ непрерывно, или слабо полярно, или из L_2, и образуем его ряд Фурье в k_0:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}.$$

Как всякий ряд Фурье функции из L_2, он сходится в среднем, и мы можем говорить о его сумме в k_0. Составим разность (28.4), принадлежащую L_2 в k_0, и будем рассуждать дальше так же, как и выше. При этом нужно принять во внимание, что ряд, сходящийся в среднем, можно умножать на функцию из L_2 и почленно интегрировать. Окончательно мы придем к тому, что $\omega(x,t) = 0$ (эквивалентно нулю). Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Теорема 28.2. *Для непрерывных, слабо полярных ядер из L_2 ряд (28.2) сходится в среднем в k_0, и его сумма равна ядру.*

Замечание 28.1. Из сходимости в среднем следует уравнение замкнутости

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt. \qquad (28.8)$$

Поэтому можно было бы доказать сначала теорему 28.2 и получить теорему 28.1 как ее следствие.

Замечание 28.2. Нетрудно видеть, что непрерывные и слабополярные ядра (с $0 < \alpha < 1/2$) есть также ядра из L_2.

Если ядро $K(x,t)$ имеет конечное число характеристических значений, то ряд (28.2) содержит конечное число слагаемых, и имеет место равенство

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}. \qquad (28.9)$$

Эта формула показывает, что $K(x,t)$ есть вырожденное ядро, если оно имеет конечное число характеристических значений. С другой стороны, ранее в § 23 мы показали, что всякое вырожденное ядро имеет конечное число характеристических значений. Отсюда вытекает теорема 28.3.

Т е о р е м а 28.3. *Конечность числа характеристических значений является необходимым и достаточным условием вырожденности ядра.*

Пример 28.1. Рассмотрим ядро $K(x,t)$ из (3.5), причем для простоты положим $l=1$, то есть

$$K(x,t)=\begin{cases} t(1-x), & x\geq t,\\ x(1-t) & x\leq t. \end{cases} \tag{28.10}$$

В данном случае мы можем найти в конечном виде все характеристические значения и собственные функции. Однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{28.11}$$

с ядром (28.10) переписывается в виде

$$\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^x t(1-x)\varphi(t)\,dt+\lambda\int\limits_x^1 x(1-t)\varphi(t)\,dt.$$

Дифференцируя обе части по x, получаем

$$\varphi'(x)=-\lambda\int\limits_0^x t\varphi(t)\,dt+\lambda x(1-x)\varphi(x)-\lambda x(1-x)\varphi(x)\lambda\int\limits_x^1(1-t)\varphi(t)\,dt,$$

или

$$\varphi'(x)=-\lambda\int\limits_0^x t\varphi(t)\,dt+\lambda\int\limits_x^1(1-t)\varphi(t)\,dt.$$

Дифференцируя еще раз по x, приходим к дифференциальному уравнению

$$\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0. \tag{28.12}$$

Из (28.10) следует, что ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условию $K(0,t)=K(1,t)=0$, и формула (28.11) дает

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0. \tag{28.13}$$

Таким образом, решение уравнения (28.11) с ядром (28.10) равносильно решению краевой задачи (28.12) – (28.13). Непосредственно проверяется, что такая предельная задача может иметь отличные от нуля решения только при $\lambda_k = (\pi k)^2$ $(k \in \mathbb{N})$, и эти решения будут $\varphi_k(x) = \sin(\pi k x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а соответствующая ортонормированная система решений дается формулой

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(\pi k x) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{28.14}$$

Для рассматриваемого примера ряд (28.2) будет равномерно сходящимся на $k_0 = [0,1] \times [0,1]$, и формула (28.3) принимает вид

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi x)\sin(k\pi t)}{k^2} = \begin{cases} t(1-x), & x \geq t, \\ x(1-t) & x \leq t. \end{cases} \tag{28.15}$$

§ 29. ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВИМЫЕ ЧЕРЕЗ ЯДРО

Ортонормированная система $\varphi_k(x)$ ядра $K(x,t)$ может, конечно, не быть замкнутой, и ряд Фурье какой-либо функции $F(x)$ по этой системе, даже если он равномерно сходится, может иметь сумму, отличную от $F(x)$. Выше в § 28 мы видели, что для ядра $K(x,t)$ из равномерной сходимости ряда

$$K(x,t) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}$$

следует, что его сумма равна ядру. Это, естественно, приводит к определению некоторого класса функций.

Определение 29.1. *Функция называется функцией, представимой через ядро $K(x,t)$, если ее можно представить в виде*

$$f(x) = \int\limits_a^b K(x,t)h(t)\,dt\,. \tag{29.1}$$

Если ядро $K(x,t)$ непрерывно или слабо полярно на конечном промежутке, то будем считать $h(t)$ непрерывной, и при этом $f(x)$ есть также непрерывная функция. Если ядро $K(x,t)$ из L_2, то и $h(t)$ будем считать из L_2. При этом и $f(x)$ из L_2. Определим коэффициенты Фурье по ортонормированной системе собственных функций ядра $K(x,t)$

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots . \tag{29.2}$$

Имеем

$$a_k = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)h(t)\,dt\right]\overline{\varphi_k(x)}\,dx = \left|K(x,t) = \overline{K(t,x)}\right| =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b \overline{K(t,x)}h(t)\,dt\right]\overline{\varphi_k(x)}\,dx = \int_a^b \left[\int_a^b \overline{K(t,x)}\ \overline{\varphi_k(x)}\,dx\right]h(t)\,dt\,.$$

Учитывая, что

$$\varphi_k(t) = \lambda_k \int_a^b K(t,x)\varphi_k(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \overline{\varphi_k(t)} = \lambda_k \int_a^b \overline{K(t,x)}\ \overline{\varphi_k(x)}\,dx\,,$$

получаем

$$a_k = \int_a^b \frac{\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\,h(t)\,dt = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b h(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt$$

или

$$a_k = \frac{h_k}{\lambda_k}, \qquad h_k = \int_a^b h(t)\overline{\varphi_k(t)}\,dt\,, \tag{29.3}$$

где h_k — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по системе (29.2).

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ по системе (29.2) имеет вид

$$\sum_k a_k\varphi_k(x) = \sum_k \frac{h_k}{\lambda_k}\,\varphi_k(x). \tag{29.4}$$

Будем считать число собственных функций бесконечным. Применяя неравенство Коши, получим

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \le \left(\sum_{k=n}^{n+p} |h_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|^2 \right)^{1/2}. \qquad (29.5)$$

Предположим, что ядро $K(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_a^b |K(x,t)|^2 \, dt \le C^2, \qquad (29.6)$$

где C^2 — некоторая постоянная, не зависящая от x. Тогда в силу неравенства Бесселя имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|^2 \le \int\limits_a^b |K(x,t)|^2 \, dt \le C^2,$$

и из (29.5) и (29.6) следует

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|^2 \le \left(\sum_{k=n}^{n+p} |h_k|^2 \right)^{1/2}. \qquad (29.7)$$

Но числовой ряд с общим членом $|h_k|^2$ сходится и из (29.7) следует теорема 29.1.

Теорема 29.1. *Ряд Фурье функции $f(x)$, представимой через ядро $K(x,t)$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} \, \varphi_k(x), \qquad (29.8)$$

при условии (29.6) регулярно сходится, то есть ряд модулей его членов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{h_k}{\lambda_k} \, \varphi_k(x) \right|$$

равномерно сходится.

Следствие 29.1. *Если выполнено условие (29.6), то ряд (29.8) сходится абсолютно и равномерно на промежутке $[a,b]$.*

Условие (29.6) выполняется для непрерывных и слабо полярных ядер на конечном промежутке $[a, b]$. Оно может соблюдаться при почти всех x для ядер из L_2.

Имеет место следующая теорема (без доказательства).

Теорема 29.2. *Если выполнено условие (29.6), то сумма ряда (29.8) равна $f(x)$ для ядер $K(x,t)$ из L_2, и ряд (29.8) сходится в среднем к $f(x)$:*

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} \frac{h_k}{\lambda_k}\,\varphi_k(x)\right|^2 dx = 0\,.$$

Определение 29.2. *Теорема 29.2 называется* *теоремой Гильберта – Шмидта.*

§ 30. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ ЧЕРЕЗ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{30.1}$$

с симметричным ядром $K(x,t)$. Предположим сначала, что λ отлично от характеристических значений, так что уравнение (30.1) имеет единственное решение. Обозначим через f_k коэффициенты Фурье заданной функции $f(x)$, через h_k — коэффициенты Фурье искомой функции $\varphi(x)$ относительно ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ собственных функций. Представляя функцию в правой части, представимую через ядро $K(x,t)$, в силу § 29 имеем

$$\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k}\,\varphi_k(x),$$

и, следовательно, (30.1) принимает вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \,. \tag{30.2}$$

Будем считать, что число характеристических значений λ_k бесконечно. Представляя $\varphi(x)$ и $f(x)$ их рядами Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} \varphi_k(x) \,.$$

Сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой частей, получим уравнение для определения h_k:

$$h_k = f_k + \lambda \frac{h_k}{\lambda_k} \,, \qquad \text{или} \qquad (\lambda_k - \lambda) h_k = f_k \lambda_k \,. \tag{30.3}$$

Если λ не есть характеристическое значение, то

$$h_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} f_k \tag{30.4}$$

и формула (30.2) дает

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) \,. \tag{30.5}$$

Ряд в правой части (30.5) сходится регулярно для непрерывных или слабо полярных ядер и в среднем для ядер из L_2. В этом можно убедиться непосредственно, используя формулу

$$\left| \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) \right| = |f_k| \, \frac{|\varphi_k(x)|}{|\lambda_k|} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|} \,,$$

неравенство Коши и тот факт, что

$$\frac{1}{\left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|} \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty \,.$$

Действительно,

$$\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) \right| \le \left(\sum_{k=n}^{n+p} |f_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+p} \left| \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right|^2 \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right|^2} \right)^{1/2} \le$$

$$\leq K\left(\sum_{k=n}^{n+p}|f_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Допустим теперь, что λ совпадает с одним из характеристических значений. Положим для простоты, что λ совпадает с характеристическим значением λ_1 третьего ранга, то есть

$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\,. \tag{30.6}$$

Тогда вторая из формул (30.3) приводит к необходимому условию разрешимости

$$f_k=\int\limits_a^b f(x)\,\overline{\varphi_k(x)}\,dx=0 \qquad (k=1,2,3)\,, \tag{30.7}$$

то есть свободный член $f(x)$ должен быть ортогонален к собственным функциям, соответствующим характеристическим значениям $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, и формула (30.4) определит коэффициенты h_k при $k>3$. Предположим, что условия (30.7) выполнены. Тогда общее решение уравнения (30.1) в рассматриваемом случае будет суммой какого-либо решения уравнения (30.1) и общего решения соответствующего однородного уравнения ($f(x)=0$):

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=4}^{\infty}\frac{f_k}{\lambda_k-\lambda}\,\varphi_k(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x)\,, \tag{30.8}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Кратко говоря, если λ совпадает с характеристическим значением, то в одной или нескольких дробях (30.4) знаменатель обратится в нуль. При этом соответствующий коэффициент Фурье f_k должен равняться нулю, а всю дробь надо заменить произвольной постоянной. Таким образом, условие (30.7) является не только необходимым, но и достаточным для разрешимости уравнения (30.1).

Замечание 30.1. В общем случае для построения решения интегрального уравнения с симметричным ядром используется резольвента.

Пример 30.1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt + f(x) \qquad (0 \le x \le 1) \tag{30.9}$$

с ядром (28.10). Как было показано в примере 28.1, характеристические значения ядра $\lambda_k = (\pi k)^2$ $(k \in \mathbb{N})$, а соответствующие собственные функции $\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$ $(k \in \mathbb{N})$. В нашем случае

$$f_k = \sqrt{2} \int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx \qquad (k \in \mathbb{N}), \tag{30.10}$$

и, следовательно, уравнение (30.3) принимает вид

$$\left[(\pi k)^2 - \lambda\right] h_k = (\pi k)^2 \sqrt{2} \int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{30.11}$$

Если $\lambda \ne (\pi k)^2$, где $n \in \mathbb{N}$ — фиксированное натуральное число, то решение уравнения (30.9) дается формулой (30.5):

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(k\pi x)}{(\pi k)^2 - \lambda} \int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx. \tag{30.12}$$

Если же $\lambda = (\pi k)^2$ $(k \in \mathbb{N})$, то из (30.11) получаем необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (30.9):

$$\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx = 0. \tag{30.13}$$

Если это условие выполняется, то уравнение (30.9) разрешимо и его общее решение имеет вид

$$\varphi(x) = C\sin(\pi n x) + f(x) + (\lambda n)^2 \sum_{k \ne n}^{\infty} \frac{2\sin(k\pi x)}{(\pi k)^2 - (\pi n)^2} \int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx, \tag{30.14}$$

где C — произвольная постоянная.

§ 31. КОСОСИММЕТРИЧНОЕ ЯДРО И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К УРАВНЕНИЯМ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

Определение 31.1. *Ядро $K(x,t)$ называется кососимметричным, если*

$$\overline{K(t,x)} = -K(x,t)\,, \tag{31.1}$$

и в случае вещественности ядра:

$$K(t,x) = -K(x,t)\,. \tag{31.2}$$

Если ввести ядро $L(x,t) = iK(x,t)$, то в силу (31.1) получим

$$\overline{L(t,x)} = L(x,t),$$

и интегральное уравнение с кососимметричным ядром

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \tag{31.3}$$

можно переписать в виде уравнения с симметричным ядром

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int\limits_a^b L(x,t)\varphi(t)\,dt\,, \tag{31.4}$$

где $\mu = -i\lambda$, то есть $\lambda = i\mu$. Отсюда согласно теореме 27.1 следует, что уравнение (31.3) с кососимметричным ядром имеет, по крайней мере, одно характеристическое значение и что все его характеристические значения чисто мнимые.

Укажем один класс интегральных уравнений, которые простым преобразованием приводятся к уравнениям с симметричным ядром. Это уравнения вида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)p(t)\varphi(t)\,dt\,, \tag{31.5}$$

где $K(x,t)$ — симметричное ядро, а функция $p(t) > 0$ непрерывна в промежутке $[a,b]$. Умножая обе части (31.5) на $\sqrt{p(x)}$ и введя новую искомую функцию $\psi(x) = \sqrt{p(x)}\varphi(x)$, придем к интегральному уравнению

$$\psi(x) = f(x)\sqrt{p(x)} + \lambda \int\limits_a^b L(x,t)\psi(t)\,dt \tag{31.6}$$

с симметричным ядром

$$L(x,t) = K(x,t)\sqrt{p(x)p(t)}\,. \tag{31.7}$$

Пусть λ_k и $\psi_k(x)$ — характеристические значения и собственные функции уравнения (31.6), образующие ортонормированную систему. Используя формулу $\psi(x) = \sqrt{p(x)}\varphi(x)$, получим для собственных функций уравнения (31.5) ортонормированность с весом $p(x)$:

$$\int\limits_a^b p(x)\varphi_k(x)\overline{\varphi_l(x)}\,dx = \begin{cases} 0\,, & k \neq l\,, \\ 1\,, & k = l\,. \end{cases} \tag{31.8}$$

Если ядро $K(x,t)$ непрерывно или слабо полярно, то для повторного ядра $L_2(x,t)$ получаем

$$L_2(x,t) = \int\limits_a^b K(x,\tau)K(\tau,t)p(\tau)\sqrt{p(x)p(t)}\,d\tau$$

и, сокращая на множитель $\sqrt{p(x)p(t)}$, получим

$$H_2(x,t) = \int\limits_a^b K(x,\tau)K(\tau,t)p(\tau)\,d\tau\,.$$

Используя формулу

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k}\,, \tag{31.9}$$

непосредственно проверяем, что $H_2(x,t)$ может быть представлено в виде

$$H_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^2}\,. \tag{31.10}$$

Аналогичным образом для функций

$$H_p(x,t) = \int_a^b H_{p-1}(x,\tau)K(\tau,t)p(\tau)\,d\tau \tag{31.11}$$

будем иметь

$$H_p(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}}{\lambda_k^p}\,. \tag{31.12}$$

Предположим, что функция $f(x)$ представима через ядро $L(x,t)$:

$$f(x) = \int_a^b L(x,t)h(t)\,dt\,. \tag{31.13}$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,\psi_k(x)\,, \tag{31.14}$$

где

$$f_k = \int_a^b f(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx - \int_a^b f(x)\sqrt{p(x)}\overline{\varphi_k(x)}\,dx\,. \tag{31.15}$$

Сокращая обе части (31.13) и (31.14) на $\sqrt{p(x)}$, получим для функции

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{p(x)}} = \int_a^b K(x,t)\sqrt{p(t)}h(t)\,dt \tag{31.16}$$

разложение

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,\varphi_k(x)\,. \tag{31.17}$$

§ 32. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{32.1}$$

с симметричным ядром $K(x,t)$. Мы считаем, что $K(x,t) \in L_2(k_0)$, $f(x) \in L_2(a,b)$, и будем искать решение $\varphi(x) \in L_2(a,b)$.

Определение 32.1. *Симметричное ядро $K(x,t)$ называется* <u>*полным*</u>*, если система его собственных функций полна (замкнута).*

Если ядро $K(x,t)$ не полно, то уравнение

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = 0 \tag{32.2}$$

имеет решение, не эквивалентное нулю, и если уравнение (32.1) разрешимо, то его решение не единственно.

Лемма 32.1. *Если ядро $K(x,t)$ полное, то уравнение (32.1) не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Допустим, что уравнение (32.1) имеет 2 не эквивалентных решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Тогда их разность $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ удовлетворяет уравнению (32.1). Это означает, что ядро $K(x,t)$ не является полным, что противоречит предположению.

Как и ранее в § 30, будем обозначать через f_k коэффициенты Фурье $f(x)$ относительно ортонормированной системы собственных функций ядра $K(x,t)$, а через λ_k — их характеристические значения.

Теорема 32.1. *Пусть $K(x,t)$ — полное ядро. Для разрешимости (32.1) необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2\,|f_k|^2 \tag{32.3}$$

сходился.

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть существует решение $\varphi(x) \in L_2(a,b)$ уравнения (32.1). Пусть a_k — коэффициенты Фурье $\varphi(x)$ относительно системы $\varphi_k(x)$: $a_k = \int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi_k(x)}\,dx$. Известно, см. (29.3), что коэффициенты Фурье функции $f(x)$, представимой согласно (32.1) через ядро $K(x,t)$, выражаются формулой

$$f_k = \frac{a_k}{\lambda_k}, \quad \text{то есть} \quad a_k = \lambda_k f_k\,. \tag{32.4}$$

Так как

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = \sum_k \frac{a_k}{\lambda_k}\varphi_k(x)\,, \qquad f(x) = \sum_k f_k\varphi_k(x)$$

и $\varphi(x) \in L_2[a,b]$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится. Тогда из (32.4) вытекает сходимость ряда (32.3).

Докажем достаточность условия (32.3). Пусть ряд (32.3) сходится. Тогда существует функция $\varphi(x) \in L_2$ с коэффициентами Фурье $\lambda_k f_k$, и в силу полноты системы $\varphi_k(x)$ такая функция единственна с точностью до эквивалентности:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k\, \varphi_k(x)\,, \tag{32.5}$$

при этом ряд в (32.5) сходится в среднем. Функция (32.5) удовлетворяет уравнению (32.1), так как при ее подстановке в уравнение (32.1) левая и правая части равенства (32.1) имеют одни и те же коэффициенты Фурье относительно полной ортонормированной системы $\varphi_k(x)$. Теорема доказана.

Полнота ядра, то есть системы $\varphi_k(x)$, является существенной не только для единственности, но и для существования решения уравнения (32.1) в L_2. Действительно, положим, что система $\varphi_k(x)$ — не полная, то есть существуют функции из L_2, не эквивалентные нулю и ортогональные ко всем $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $\omega(x)$ — такая функция. Покажем, что уравнение (32.1) при $f(x) = \omega(x)$ не имеет решений из L_2. Будем рассуждать от противного. Предположим, что такое решение $\varphi(x)$ существует:

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = \omega(x)\,, \tag{32.6}$$

и пусть h_k — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ относительно однородной системы $\{\varphi_k(x)\}$. Из уравнения (32.6), вычисляя коэффициенты Фурье левой части согласно § 29, находим

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k}\, \varphi_k(x)\,, \tag{32.7}$$

причем ряд в правой части сходится в среднем. Умножая обе части этого равенства на $\overline{\varphi_m(x)}$ и интегрируя, имеем

$$0 = \int_a^b \omega(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k}\,\varphi_k(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{\lambda_k} \int_a^b \varphi_k(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx = \frac{h_m}{\lambda_m}\,,$$

откуда вытекает, что $h_m = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$, и, следовательно, $\omega(x) \equiv 0$, что противоречит выбору $\omega(x)$.

Если же при неполном ядре для какой-либо $f(x)$ из L_2 уравнение (32.1) имеет решение $\varphi(x)$ из L_2, то очевидно, что функция $\varphi(x) + \omega(x)$, где $\omega(x)$ ортогональна ядру, также удовлетворяет уравнению. Следовательно, решение уравнения (32.1) в этом случае не единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 1 /В. И. Смирнов. М. : Наука, 1974.

2. *Забрейко, П. П.* Интегральные уравнения / П. П. Забрейко [и др.]. М. : Наука, 1968.

3. *Михлин, С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. М. : Физматгиз, 1959.

4. *Ловитт, У. В.* Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. М. : ГИТТЛ, 1957.

ОГЛАВЛЕНИЕ