Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. II

В. Ф. Жданович (Минск)

Предметом исследования настоящей второй части работы будет линейный дифференциальный оператор

$$Ly(x) = A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) \tag{1}$$

с областью определения Θ_0, состоящей из вектор-функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$ удовлетворяющих краевому условию

$$hy \equiv MA(0)\,y'(0) + [MB(0) + N]\,y(0) + PA(l)\,y'(l) + \\ + [PB(l) + Q]\,y(l) = 0. \tag{2}$$

Такой оператор, в отличие от оператора (1), определенного для всех функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$, будем обозначать через $L_0 y(x)$. При этом будем предполагать, что матрицы $A(x)$, $B(x)$, M, N, P и Q удовлетворяют всем требованиям, наложенным на них в первой части работы (см. [8], § 1). Налагая на матрицы M, N, P и Q некоторые дополнительные условия, невыполнение которых имеет характер вырождения, исследуем резольвенту оператора L_0 и изучим сходимость разложения начальной функции $f(x)$ из условия (3) ч. I по собственным и присоединенным функциям этого оператора в тех случаях, когда $f(x) \in \Theta_0$ и $f(x) \in D_2(0, l)$.

§ 1. Асимптотические формулы для фундаментальной матрицы системы с параметром

В этом параграфе будут построены асимптотические формулы для фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ системы

$$A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) = \lambda y(x) \tag{3}$$

при $\lambda \to \infty$. Это будет сделано методом, развитым Биркгофом и Лангером (см. [1], стр. 80), с использованием тех обобщений и уточнений, которые впоследствии вносились в этот метод рядом авторов (см. [2], стр. 24, а также [3], стр. 48 и [4]).

Лемма 1. *Систему* (3) *линейным преобразованием*

$$y(x) = K(x)\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] w(x), \tag{4}$$

где матрица $K(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция x $(0 \leqslant x \leqslant l)$, а $S(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция x $(0 \leqslant x \leqslant l)$, можно привести к виду

$$\Lambda(x)\,w'(x) + \frac{1}{\lambda} C(x, \lambda)\,w(x) = \lambda w(x),$$

где $\Lambda(x) = K^{-1}(x) A(x) K(x)$ — *диагональный вид матрицы* $A(x)$ (см. [1], § 1); *при достаточно большом* R *матрица* $C(x, \lambda)$ *непрерывна по* (x, λ), *аналитична по* λ (*в том числе и при* $\lambda = \infty$) *и равномерно ограничена по* (x, λ) *для* $x \in [0, l]$ *и* $|\lambda| > R > 0$.

Доказательство. Пусть $K_0(x)$ — какая-нибудь матрица, дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in [0, l]$ и приводящая $A(x)$ к диагональному виду $\Lambda(x)$. (Относительно $\Lambda(x)$ напомним, что она дважды непрерывно дифференцируема и ее элементы $\nu_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выбраны таким образом, что в матрице $\Lambda^{-1}(x)$ элементы по диагонали расположены в порядке убывания.) Тогда общим видом матриц, приводящих $A(x)$ к диагональному виду $\Lambda(x)$, будет $K(x) = K_0(x) H(x)$, где $H(x)$ — произвольная невырожденная для любого $x \in [0, l]$ диагональная матрица. Умножив левую и правую части равенства (3) на $K^{-1}(x)$ и произведя замену

$$y(x) = K(x) z(x), \tag{6}$$

получим:

$$\Lambda(x) z'(x) + B_1(x) z(x) = \lambda z(x), \tag{7}$$

где $B_1(x) = K^{-1}(x) A(x) K'(x) + K^{-1}(x) B(x) K(x)$. Матрицу $H(x)$ подберем так, чтобы матрица $B_1(x)$ имела по диагонали нули; это дает для нахождения элементов $\gamma_{ii}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ диагональной матрицы $H(x)$ дифференциальные уравнения

$$\nu_i(x) \frac{\gamma_{ii}'(x)}{\gamma_{ii}(x)} + \beta_{ii}(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где β_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — диагональные элементы матрицы $B_0(x) = K_0^{-1}(x) A(x) K_0'(x) + K_0^{-1}(x) B(x) K_0(x)$. В полученной после этого системе (7) сделаем еще одну замену

$$z(x) = \left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] w(x), \tag{9}$$

где матрица $S(x)$ остается произвольной. Тогда будем иметь:

$$\Lambda(x)\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] w'(x) + \frac{1}{\lambda} \Lambda(x) S'(x) w(x) + $$
$$+ B_1(x)\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] w(x) = \lambda\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] w(x). \tag{10}$$

Выберем теперь матрицу $S(x)$ так, чтобы было

$$\Lambda^{-1}(x) S(x) - \Lambda^{-1}(x) B_1(x) = S(x) \Lambda^{-1}(x). \tag{11}$$

Для элементов σ_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы $S(x)$ при $i \neq k$ получим формулы:

$$\sigma_{ik} = \frac{\nu_i^{-1}(x)\, b_{ik}(x)}{\nu_i^{-1}(x) - \nu_k^{-1}(x)}, \tag{12}$$

где $b_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ — элементы матрицы $B_1(x)$, причем $b_{ii}(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Диагональные элементы матрицы $S(x)$ остаются произвольными, и мы можем положить $\sigma_{ii}(x)=0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. В силу соотношения (11), равенство (10) можно переписать в виде

$$\left[E+\frac{1}{\lambda}S(x)\right]w'(x)+\frac{1}{\lambda}S'(x)w(x)+\frac{1}{\lambda}\Lambda^{-1}(x)B_1(x)S(x)w(x)=$$

$$=\lambda\left[E+\frac{1}{\lambda}S(x)\right]\Lambda^{-1}(x)w(x)$$

или

$$\Lambda(x)w'(x)+\frac{\Lambda(x)}{\lambda}\left[E+\frac{S(x)}{\lambda}\right]^{-1}[S'(x)+\Lambda^{-1}(x)B_1(x)S(x)]w(x)=\lambda w(x). \tag{13}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5), причем

$$C(x,\lambda)=\Lambda(x)\left[E+\frac{1}{\lambda}S(x)\right]^{-1}[S'(x)+\Lambda^{-1}(x)B_1(x)S(x)]. \tag{14}$$

Исследуем матрицу $C(x,\lambda)$. Матрица $K(x)$, как и матрица $K_0(x)$, будет дважды непрерывно дифференцируемой, а потому $B_1(x)=K^{-1}(x)A(x)K(x)+$ $+K^{-1}(x)B(x)K(x)$ будет непрерывно дифференцируемой по $x\in[0, l]$. Из формул (12) следует, что и матрица $S(x)$ будет непрерывно дифференцируемой, а это значит, что матрица $S'(x)+\Lambda^{-1}(x)B_1(x)S(x)$ будет непрерывной по x $(0\leqslant x\leqslant l)$. Так как $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\det\left[E+\frac{1}{\lambda}S(x)\right]=1$, то можно выбрать $R>0$ так, что $\left|\det\left[E+\frac{1}{\lambda}S(x)\right]\right|>\frac{1}{2}$ для $|\lambda|>R$. Но тогда для каждого λ, для которого $|\lambda|>R$, матрица $C(x,\lambda)$ будет непрерывной по $x\in[0, l]$, λ, и, поскольку она при этом равномерно ограничена и аналитична по λ в области $|\lambda|>R$, лемма доказана.

Теорема 1. *Если $\gamma>0$ — достаточно большое число, то для системы* (3) *и каждой из областей* 1) $\mathscr{R}\lambda<-\gamma$, 2) $|\mathscr{R}\lambda|\leqslant\gamma$ *и* 3) $\mathscr{R}\lambda>\gamma$ *можно построить при $x\in[0, l]$ фундаментальные матрицы $Y_{-1}(x,\lambda)$, $Y_0(x,\lambda)$ и $Y_1(x,\lambda)$ соответственно, которые будут непрерывными по (x,λ), аналитическими по λ и будут иметь представления*

$$Y_i(x,\lambda)=\left[K(x)+\frac{1}{\lambda}H_i(x,\lambda)\right]e^{\lambda\int\limits_0^x\Lambda^{-1}(\xi)\,d\xi}\qquad(i=-1, 0, 1), \tag{15}$$

где матрица $K(x)$ — та же, что и в лемме 1, *а матрицы $H_i(x,\lambda)$ $(i=-1, 0, 1)$ равно как и $\frac{1}{\lambda}H_i(x,\lambda)$, равномерно ограничены, когда $x\in[0, l]$, а λ остается в соответствующей области; при этом матрицу $Y_0(x,\lambda)$ можно взять такой, что $Y_0(0,\lambda)=K(0)$.*

Доказательство. Пусть $W(x,\lambda)$ — фундаментальная матрица системы (5); тогда

$$\Lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}W(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}C(x,\lambda)W(x,\lambda)=\lambda W(x,\lambda). \tag{16}$$

Сделаем замену

$$W(x, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right] e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi}. \tag{17}$$

После сокращения на $e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi}$ получим:

$$\frac{1}{\lambda} \Lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} V(x, \lambda) + \lambda \Lambda(x) \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right] \Lambda^{-1}(x) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} C(x, \lambda) \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right] = \lambda \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, \lambda) + \lambda \left[V(x, \lambda) \Lambda^{-1}(x) - \Lambda^{-1}(x) V(x, \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \Lambda^{-1}(x) C(x, \lambda) V(x, \lambda) + \Lambda^{-1}(x) C(x, \lambda) = 0. \tag{18}$$

Пусть $V(x, \lambda) = \| v_1(x, \lambda), \ v_2(x, \lambda), \ \ldots, \ v_n(x, \lambda) \|$, $C(x, \lambda) = \| c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda), \ldots, c_n(x, \lambda) \|$. Тогда из уравнения (18) получим для вектор-функций $v_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ уравнения

$$\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial x} - \lambda [\Lambda^{-1}(x) - \nu_i^{-1}(x) E] v_i(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \Lambda^{-1}(x) C(x, \lambda) v_i(x, \lambda) +$$

$$+ \Lambda^{-1}(x) c_i(x, \lambda) = 0. \tag{19}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция

$$v_i(x, \lambda) = \int\limits_0^x e^{\lambda \int\limits_\xi^x [\Lambda^{-1}(\xi) - \nu_i^{-1}(\xi) E] d\zeta} A_i f(\xi, \lambda) d\xi - \int\limits_x^l e^{-\lambda \int\limits_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} B_i f(\xi, \lambda) d\xi \tag{20}$$

при $A_i + B_i = E$ является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial x} - \lambda [\Lambda^{-1}(x) - \nu_i^{-1}(x) E] v_i(x, \lambda) = f(x, \lambda). \tag{21}$$

Если же в уравнение (21) вместо функции $f(x, \lambda)$ подставить $-\frac{\Lambda^{-1}(x)}{\lambda} C(x, \lambda) v_i(x, \lambda) - \Lambda^{-1}(x) c_i(x, \lambda)$, то оно превращается в уравнение (19), а формула (20) дает для вектора $v_i(x, \lambda)$ интегральное уравнение

$$v_i(x, \lambda) = \left\{-\int\limits_0^x e^{\lambda \int\limits_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} A_i \Lambda^{-1}(\xi) c_i(\xi, \lambda) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^l e^{-\lambda \int\limits_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} B_i \Lambda^{-1}(\xi) c_i(\xi, \lambda) d\xi \right\} +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\Big\{-\int_0^x e^{\lambda\int_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} A_i\Lambda^{-1}(\xi)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi+$$

$$+\int_x^l e^{-\lambda\int_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} B_i\Lambda^{-1}(\xi)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi\Big\} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (22)$$

В силу построения, каждое решение этого уравнения является решением уравнения (19). Положим

$$G_i(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} -e^{\lambda\int_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} A_i\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant\xi<x\leqslant l),\\ e^{-\lambda\int_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} B_i\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant x<\xi\leqslant l)\end{cases}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда уравнение (22) примет вид:

$$v_i(x,\lambda)=\int_0^l G_i(x,\xi,\lambda)c_i(\xi,\lambda)d\xi+\frac{1}{\lambda}\int_0^l G_i(x,\xi,\lambda)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi. \qquad (23)$$

Матрица $C(\xi,\lambda)$, в силу леммы 1, равномерно ограничена относительно (ξ,λ), непрерывна по ξ, λ и аналитична по λ для $\xi\in[0, l]$ и $|\lambda|>R$, где R — достаточно большое число, а это значит, что функции

$$g_i(x,\lambda)=\int_0^l G_i(x,\xi,\lambda)c_i(\xi,\lambda)d\xi \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

— аналитические по λ для $|\lambda|>R$ и непрерывные по x $(0\leqslant x\leqslant l)$.

Рассмотрим сначала область $\mathscr{R}\lambda<-R$ и докажем, что можно так подобрать матрицы A_i и B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, где $A_i+B_i=E$, что $\|G_i(x,\xi,\lambda)\|<$ $<M<+\infty$ для $i=1, 2, \ldots, n$; $0\leqslant x$, $\xi\leqslant l$. С этой целью заметим, что из того, что диагональные элементы матрицы $\Lambda^{-1}(x)$ расположены в убывающем порядке, следует, что первые $i-1$ диагональных элементов матрицы $\Lambda^{-1}(x)-\nu_i^{-1}(x)E$ будут положительны, i-ый элемент равен нулю, а последние $n-i$ элементов отрицательны. Положим

$$A_i=E^{(i)}=\begin{Vmatrix} E_{ii} & 0_{i\,n-i}\\ 0_{n-i\,i} & 0_{n-i\,n-i}\end{Vmatrix}, \quad B_i=E_{(n-i)}=\begin{Vmatrix} 0_{ii} & 0_{i\,n-i}\\ 0_{n-i\,i} & E_{n-i\,n-i}\end{Vmatrix}, \qquad (24)$$

где E_{ii} и $E_{n-i\,n-i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — единичные матрицы. Тогда при $\mathscr{R}\lambda\to-\infty$ матрицы $e^{\lambda\int_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta}E^{(i)}$ для $\xi<x$ и матрицы $e^{-\lambda\int_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta}E_{(n-i}$

для $\xi > x$ остаются ограниченными, т. е. $\| G_i^0(x, \xi, \lambda) \| < M < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где

$$G_i^0(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -e^{\lambda \int_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} E^{(i)} \Lambda^{-1}(\xi) & (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ e^{-\lambda \int_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i(\zeta) E] d\zeta} E_{(n-i)} \Lambda^{-1}(\xi) & (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{cases}$$

Будем предполагать, что число M выбрано настолько большим, что вместе с неравенством $\| G_i^0(x, \xi, \lambda) \| < M$ выполняются неравенства: $\| g_i^0(x, \lambda) \| < M$ и $\| G_i^0(x, \xi, \lambda) C(\xi, \lambda) \| < M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $0 \leqslant x, \xi \leqslant l$, $\mathcal{R}\lambda < -R$,

$$g_i^0(x, \lambda) = \int_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) c_i(\xi, \lambda) d\xi.$$

Тогда интегральные уравнения

$$v_i(x, \lambda) = \int_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) c_i(\xi, \lambda) d\xi + \frac{1}{\lambda} \int_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) C(\xi, \lambda) v_i(\xi, \lambda) d\xi$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно решать методом последовательных приближений. Для функций $v_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получим разложения

$$v_i(x, \lambda) = g_i^0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \int_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) C(\xi, \lambda) g_i^0(\xi, \lambda) d\xi + \ldots \quad (25)$$

Эти разложения сходятся равномерно относительно (x, λ), где $x \in [0, l]$, $\mathcal{R}\lambda < -\gamma_1 < -\max\{R, Ml\}$, в силу того, что ряд $\sum_{s=0}^{\infty} M \left(\frac{Ml}{|\lambda|}\right)^s$ будет мажорантным для ряда (25). Функции $v_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, полученные по формуле (25), будут аналитическими по λ для $\mathcal{R}\lambda < -\gamma_1$, как суммы рядов аналитических функций. Кроме того, они будут непрерывными и ограниченными относительно (x, λ), где $x \in [0, l]$, $\mathcal{R}\lambda < -\gamma_1$, а это значит, что такими же свойствами обладает и матрица $V_0(x, \lambda) = \| v_1(x, \lambda), \ldots, v_n(x, \lambda) \|$. Но тогда, используя замены (6), (9) и (17), получим:

$$Y_{-1}(x, \lambda) = K(x) \left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] \left[E + \frac{1}{\lambda} V_0(x, \lambda)\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi} =$$

$$= \left[K(x) + \frac{H_{-1}(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi}, \quad (26)$$

где $H_{-1}(x, \lambda) = K(x) \left[S(x) + V_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} S(x) V_0(x, \lambda)\right]$. Если число γ_1

выбрано настолько большим, что $\det\left[E+\frac{S(x)}{\lambda}\right]\neq 0$ и $\det\left[E+\frac{V_0(x,\lambda)}{\lambda}\right]\neq 0$ для $\mathcal{R}\lambda<-\gamma_1$ и $0\leqslant x\leqslant l$, то $\det Y_{-1}(x,\lambda)\neq 0$ и матрица $Y_{-1}(x,\lambda)$ будет фундаментальной матрицей уравнения (3) для $\mathcal{R}\lambda<-\gamma_1$, удовлетворяющей требованиям теоремы 1.

Пусть теперь $\mathcal{R}\lambda>R$. Тогда в интегральном уравнении (23) положим

$$G_i(x,\xi,\lambda)=G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)\quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} -e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x}[\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta}E_{(n-i)}\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant\xi<x\leqslant l),\\ e^{-\lambda\int\limits_{\xi}^{x}[\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta}E^{(i)}\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant x<\xi\leqslant l),\end{cases}$$

и получим:

$$v_i(x,\lambda)=g_i^{(1)}(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^l G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi\quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{27}$$

где

$$g_i^{(1)}(x,\lambda)=\int\limits_0^l G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)c_i(\xi,\lambda)d\xi.$$

Если M_1 достаточно велико, то для $0\leqslant x$, $\xi\leqslant l$, $\mathcal{R}\lambda>R$ будут иметь место неравенства

$$\| g_i^{(1)}(x,\lambda)\|<M_1\quad\text{и}\quad\| G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)C(x,\lambda)\|<M_1,$$

а потому, применяя метод последовательных приближений, получим для решений $v_i(x,\lambda)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ уравнений (27) разложения

$$v_i(x,\lambda)=g_i^{(1)}(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^l G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)C(\xi,\lambda)g_i^{(1)}(\xi,\lambda)d\xi+\ldots,$$

сходящиеся равномерно относительно (x,λ), $x\in[0,l]$, $\mathcal{R}\lambda>\gamma_2>\max\{R, M_1 l\}$. Матрица $V_1(x,\lambda)=\|v_1(x,\lambda), v_2(x,\lambda), \ldots, v_n(x,\lambda)\|$, построенная из этих решений, будет непрерывной и равномерно ограниченной относительно (x,λ) и аналитической по λ для $x\in[0,l]$, $\mathcal{R}\lambda>\gamma_2$. А тогда, если γ_2 выбрано достаточно большим, то матрица

$$Y_1(x,\lambda)=K(x)\left[E+\frac{S(x)}{\lambda}\right]\left[E+\frac{V_1(x,\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int\limits_0^x\Lambda^{-1}(\xi)d\xi}=$$

$$=\left[K(x)+\frac{H_1(x,\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int\limits_0^x\Lambda^{-1}(\xi)d\xi}, \tag{28}$$

где $H_1(x, \lambda) = K(x)\left[S(x) + V_1(x, \lambda) + \frac{S(x) V_1(x, \lambda)}{\lambda}\right]$, будет фундаментальной матрицей системы (3) для $\mathcal{R}\lambda > \gamma_2$. Увеличением меньшего из чисел γ_1 и γ_2 их можно сделать равными, а потому положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, после чего матрицы $Y_{-1}(x, \lambda)$ и $Y_1(x, \lambda)$ будут удовлетворять всем требованиям теоремы 1.

Пусть $Y_0(x, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant l;\ -\infty < \mathcal{R}\lambda < +\infty)$ — фундаментальная матрица системы (3) с начальными условиями $Y_0(0, \lambda) = K(0)$. Тогда матрица

$$W_0(x, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right]^{-1} K^{-1}(x) Y_0(x, \lambda) \tag{29}$$

будет фундаментальной матрицей системы (5) для $|\lambda| > R$ (см. лемму 1) с начальными условиями

$$W_0(0, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} S(0)\right]^{-1} K^{-1}(0) Y(0, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} S(0)\right]^{-1}. \tag{30}$$

Для этой матрицы выполняется равенство

$$\Lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} W_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} C(x, \lambda) W_0(x, \lambda) = \lambda W_0(x, \lambda). \tag{31}$$

Умножив равенство (31) слева на $e^{-\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(x)$ и проинтегрировав от 0 до x, получим интегральное уравнение

$$e^{-\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(x, \lambda) - W_0(0, \lambda) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi) C(\xi, \lambda) W_0(\xi, \lambda) d\xi = 0$$

или

$$W_0(x, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) -$$
$$- \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda \int_\xi^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi) C(\xi, \lambda) W_0(\xi, \lambda) d\xi. \tag{32}$$

Пусть теперь λ изменяется в области $|\lambda| > R$, $-\gamma \leqslant \mathcal{R}\lambda \leqslant \gamma$. Тогда к интегральному уравнению (32) можно применить метод последовательных приближений. Для этого заметим, что если число M — достаточно большое, то для $x \in [0, l]$, $|\lambda| > R$, $-\gamma \leqslant \mathcal{R}\lambda < \gamma$ выполняются неравенства

$$\left\| e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) \right\| \leqslant \left\| e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\| \cdot \left\| \left[E + \frac{S(0)}{\lambda}\right]^{-1} \right\| < M,$$

$$\| e^{-\lambda \int_{\xi}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi) C(\xi, \lambda) \| < M.$$

Из этих оценок следует, что разложение

$$W_0(x, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) -$$

$$-\frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda \int_{\xi}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi) C(\xi, \lambda) e^{\lambda \int_0^{\xi} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) d\xi + \dots, \tag{33}$$

полученное формальным применением метода последовательных приближений, будет равномерно сходиться относительно (x, λ) для $x \in [0, l]$, $|\mathcal{R}\lambda| \leqslant \gamma$ и $|\lambda| > R_1 > \max(R, M, l)$, ибо для него ряд $\sum_{s=0}^{\infty} M \left(\frac{Ml}{|\lambda|}\right)^s$ будет мажорантным рядом.

Из разложения (33) следует, что для $|\mathcal{R}\lambda| \leqslant \gamma$, $|\lambda| > R_1$

$$W_0(x, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) + \frac{1}{\lambda} F(x, \lambda) = \left[E + \frac{F_1(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta},$$

где $F(x, \lambda)$ и $F_1(x, \lambda)$ — ограниченные относительно (x, λ) и аналитические по λ функции для $x \in [0, l]$, $|\mathcal{R}\lambda| \leqslant \gamma$, $|\lambda| > R_1$. Но это значит, что матрица $Y_0(x, \lambda)$ для $|\mathcal{R}\lambda| < \gamma$, $|\lambda| > R$ имеет представление

$$Y_0(x, \lambda) = K(x)\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] W_0(x, \lambda) = \left[K(x) + \frac{H_0(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta},$$

где $H_0(x, \lambda) = K(x)\left[S(x) + F_1(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} S(x) F_1(x, \lambda)\right]$. Так как матрица $Y_0(x, \lambda)$ — аналитическая по λ в полосе $|\mathcal{R}\lambda| \leqslant \gamma$ (см. [8], теорема 3), то это представление можно продолжить на всю полосу $|\mathcal{R}\lambda| \leqslant \gamma$, причем функция $H_0(x, \lambda)$ при таком продолжении останется ограниченной на этой полосе, равно как и $\frac{1}{\lambda} H_0(x, \lambda)$. Теорема доказана.

§ 2. Асимптотика собственных значений оператора L_0

Теорему 1 и формулы (15) мы используем для изучения распределения собственных значений оператора L_0 при $\lambda \to \infty$.

Подставляя общее решение $y(x, \lambda) = Y(x, \lambda) c$ системы (3) в краевые условия (2), получим уравнение $D(\lambda) c = 0$, где

$$D(\lambda) = MA(0) \frac{\partial Y(0, \lambda)}{\partial x} + [MB(0) + N] Y(0, \lambda) + PA(l) \frac{\partial Y(l, \lambda)}{\partial x} +$$

$$+ [PB(l) + Q] Y(l, \lambda) \tag{34}$$

— характеристическая матрица краевой задачи для системы (3) с краевыми условиями (2). Собственные значения оператора L_0 являются тогда нулями определителя $\Delta(\lambda) = \det D(\lambda)$.

Преобразуем характеристическую матрицу $D(\lambda)$. Так как из системы (3) следует, что $A(x)\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial x} = [\lambda E - B(x)]\, Y(x, \lambda)$, то из формулы (34) получим:

$$D(\lambda) = (M\lambda + N)\, Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q)\, Y(l, \lambda). \tag{35}$$

Разложим матрицу $D(\lambda)$ на два множителя:

$$D(\lambda) = \mathscr{E}(\lambda)\cdot D_0(\lambda) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda E_{qq} & 0_{q\, n-q} \\ 0_{n-q\, q} & E_{n-q\, n-q} \end{Vmatrix} \left[\left(M^0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) Y(l, \lambda)\right], \tag{36}$$

где E_{qq} и $E_{n-q\, n-q}$ — единичные матрицы, а матрицы M_0, P_0, N_0 и Q_0 получаются из матриц

$$\| M, P \| = \begin{Vmatrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\, n} & 0_{n-q\, n} \end{Vmatrix}, \quad \| N, Q \| = \begin{Vmatrix} N_{qn} & Q_{qn} \\ N_{n-q\, n} & Q_{n-q\, n} \end{Vmatrix}$$

по формулам

$$\| M_0, P_0 \| = \begin{Vmatrix} M_{qn} & P_{qn} \\ N_{n-q\, n} & Q_{n-q\, n} \end{Vmatrix}, \quad \| N_0, Q_0 \| = \begin{Vmatrix} N_{qn} & Q_{qn} \\ 0_{n-q\, n} & 0_{n-q\, n} \end{Vmatrix}, \tag{37}$$

причем, согласно условию (13) из [8], $\operatorname{rang} \| M_0, P_0 \| = n$. После этого характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ представится в виде

$$\Delta(\lambda) = \lambda^q \Delta_0(\lambda), \tag{38}$$

где

$$\Delta_0(\lambda) = \det\left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) Y(l, \lambda)\right]. \tag{39}$$

Так как нули функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ совпадают (за исключением, может быть, $\lambda = 0$), то вместо асимптотического поведения нулей функции $\Delta(\lambda)$ будем изучать асимптотическое поведение нулей функции $\Delta_0(\lambda)$. При этом в качестве фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$ возьмем фундаментальную матрицу из теоремы 1 (следует иметь в виду, что при замене фундаментальной матрицы, если она остается при этом аналитической по λ, определитель $\Delta(\lambda)$ множится на аналитическую функцию, отличную от нуля, что не влияет на нули $\Delta(\lambda)$). Получим:

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{cases} \Delta_0^{(-1)}(\lambda) = \det\left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y_{-1}(0, \lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) Y_{-1}(l, \lambda)\right] \\ \qquad \text{для } \mathscr{R}\lambda < -\gamma, \\ \Delta_0^{(0)}(\lambda) = \det\left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y_0(0, \lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) Y_0(l, \lambda)\right] \\ \qquad \text{для } |\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma, \\ \Delta_0^{(1)}(\lambda) = \det\left[M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y_1(0, \lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) Y_1(l, \lambda)\right] \\ \qquad \text{для } \mathscr{R}\lambda > \gamma, \end{cases} \tag{40}$$

или, пользуясь асимптотическими формулами (15), будем иметь:

$$\Delta_0^{(i)}(\lambda) = \det\left\{M_0K(0) + \frac{1}{\lambda}H_i^{(1)}(\lambda) + \left[P_0K(l) + \frac{1}{\lambda}H_i^{(2)}(\lambda)\right]e^{\lambda\int\limits_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right\} \quad (41)$$

$$(i = -1, 0, 1),$$

где $H_i^{(1)}(\lambda)$ и $H_i^{(2)}(\lambda)$ — аналитические и равномерно ограниченные в соответствующих областях матрицы (причем $H_i^{(1)}(0) = H_i^{(2)}(0) = 0$). Разложив определитель (41) на сумму определителей, получим:

$$\Delta_0^{(i)}(\lambda) = \det\left[M_0K(0) + P_0K(l)e^{\lambda\int\limits_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right] + \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{\lambda}h_i^{(k)}(\lambda)e^{\alpha_k\lambda} \quad (i = -1, 0, 1), \tag{42}$$

где $h_i^{(k)}(\lambda)$ $(i = -1, 0, 1;\ k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ — аналитические и равномерно ограниченные функции в соответствующих областях, а α_k $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ пробегает расположенные в убывающем порядке числа: 0, каждое из чисел $\int\limits_0^l \nu_i^{-1}(\zeta)d\zeta$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$, их суммы по два, по три и т. д. до n.

Рассмотрим первое слагаемое в выражении (42):

$$\varphi(\lambda) = \det\left[M_0K(0) + P_0K(l)e^{\lambda\int\limits_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right].$$

Оно представляет собой, если раскрыть определитель, некоторый полином Дирихле $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k\lambda}$, где α_k $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ — те же, что и в выражении (42). В частности,

$$\text{a)}\quad \alpha_1 = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^l \nu_k^{-1}(\zeta)d\zeta, \qquad \text{b)}\quad \alpha_{2^n} = \sum_{k=m+1}^{n}\int\limits_0^l \nu_k^{-1}(\zeta)d\zeta, \tag{43}$$

где $\nu_1(\zeta), \nu_2(\zeta), \ldots, \nu_m(\zeta)$ $(0 \leqslant \zeta \leqslant l)$ — положительные, а $\nu_{m+1}(\zeta), \ldots, \nu_n(\zeta)$ $(0 \leqslant \zeta \leqslant l)$ — отрицательные собственные значения матрицы $A(\zeta)$. Коэффициенты a_i $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$ суть некоторые определители, составленные из столбцов матрицы $\| M_0K(0),\ P_0K(l) \|$. Вычислим, в частности, a_1 и a_{2^n}. Для этого произведем следующие разложения матриц $M_0K(0)$, $P_0K(l)$ и $\Lambda^{-1}(x)$:

$$M_0K(0) = \| M_{nm}^{(1)},\ M_{n\,n-m}^{(2)} \|, \qquad P_0K(l) = \| P_{nm}^{(1)},\ P_{n\,n-m}^{(2)} \|, \tag{44}$$

$$\Lambda^{-1}(x) = S_1(x) + S_2(x) = \left\|\begin{matrix}\Lambda_{(+)}^{-1}(x) & 0_{m\,n-m}\\ 0_{n-m\,m} & 0_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}0_{mm} & 0_{m\,n-m}\\ 0_{n-m\,m} & \Lambda_{(-)}^{-1}(x)\end{matrix}\right\|, \tag{45}$$

где

$$\Lambda_{(+)}(x)=\left\|\begin{matrix}\nu_1(x) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \nu_2(x) & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & \nu_m(x)\end{matrix}\right\| \text{ и } \Lambda_{(-)}(x)=\left\|\begin{matrix}\nu_{m+1}(x) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \nu_{m+2}(x) & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & \nu_n(x)\end{matrix}\right\|.$$

После этого можно записать:

$$M_0K(0)+P_0K(l)e^{\lambda\int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}=$$

$$=\left\|M_{nm}^{(1)},\ M_{n\,n-m}^{(2)}\right\|+\left\|P_{nm}^{(1)}e^{\lambda\int_0^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta},\ P_{n\,n-m}^{(2)}e^{\lambda\int_0^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta}\right\|=$$

$$=\left\|P_{nm}^{(1)}e^{\lambda\int_0^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta},\ M_{n\,n-m}^{(2)}\right\|+\left\|M_{nm}^{(1)},\ P_{n\,n-m}^{(2)}e^{\lambda\int_0^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta}\right\|,$$

т. е.

$$M_0K(0)+P_0K(l)e^{\lambda\int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}=A_0e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+B_0e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}, \tag{46}$$

где

$$A_0=\|P_{nm}^{(1)},\ M_{n\,n-m}^{(2)}\|,\ B_0=\|M_{nm}^{(1)},\ P_{n\,n-m}^{(2)}\|. \tag{47}$$

Из представления (46) для матрицы $M_0K(0)+P_0K(l)e^{\lambda\int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}$ заключаем, что

$$a_1=\det A_0,\quad a_{2^n}=\det B_0. \tag{48}$$

Определение. Краевые условия (2) (а также краевые условия (2) из [8]) называются регулярными, если

$$a_1=\det A_0\neq 0,\quad a_{2^n}=\det B_0\neq 0. \tag{49}$$

В дальнейшем будут рассматриваться только регулярные краевые условия. Для регулярных краевых условий первое слагаемое $\varphi(\lambda)$ из соотношений (42) достаточно полно определяет поведение нулей функции $\Delta(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$. Если же краевые условия нерегулярны, то существенное влияние на поведение нулей функции $\Delta(\lambda)$ могут оказывать члены высшего относительно $\frac{1}{\lambda}$ порядка малости, и для исследования асимптотического поведения нулей функции $\Delta(\lambda)$ формулы (15) оказываются недостаточно точными. Полином $\varphi(\lambda)$ будем в дальнейшем называть асимптотическим характеристическим полиномом Дирихле, а уравнение $\varphi(\lambda)=0$ — асимптотическим характеристическим уравнением. Показатели α_k ($k = 1, 2, \ldots, 2^n$), как это следует из построения, удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 > \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{2^n-1} > \alpha_{2^n}. \tag{50}$$

Среди слагаемых полинома $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k \lambda}$ могут быть подобные. После приведения подобных членов получим: $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k \lambda}$, где $N \leqslant 2^n$. Важно отметить для последующего, что

$$b_1 = a_1, \quad b_N = a_{2^n}, \quad \beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_N = \alpha_{2^n}. \tag{51}$$

Отметим теперь некоторые общие свойства полиномов Дирихле вида $\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k \lambda}$, где b_k ($k = 1, 2, \ldots, N$; $N \geqslant 2$) — произвольные не равные нулю комплексные числа, а β_k ($\beta_k > \beta_{k+1}$) — произвольные действительные числа.

Лемма 2. *Для каждого полинома* $\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k \lambda}$ ($\beta_k > \beta_{k+1}$) *найдется такое число* $\sigma_0 > 0$, *что будут выполняться неравенства*

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad |\psi(\lambda)| > \frac{2}{3} |b_1| e^{\beta_1 \sigma}, \quad \text{когда } \sigma = \mathcal{R}\lambda > \sigma_0, \\ &\text{b)} \qquad |\psi(\lambda)| > \frac{2}{3} |b_N| e^{\beta_N \sigma}, \quad \text{когда } \sigma = \mathcal{R}\lambda < -\sigma_0. \end{aligned} \tag{52}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}\lambda > 0$. Тогда полином $\psi(\lambda)$ можно представить в виде $\psi(\lambda) = e^{\beta_1 \lambda}\left[b_1 + \sum_{k=2}^{N} b_k e^{(\beta_k - \beta_1)\lambda}\right]$. Отсюда следует, что

$$|\psi(\lambda)| > e^{\beta_1 \mathcal{R}\lambda} \left\{ |b_1| - \sum_{k=2}^{N} |b_k| e^{(\beta_k - \beta_1)\mathcal{R}\lambda} \right\}.$$

Так как $\beta_k - \beta_1 < 0$ ($k = 2, 3, \ldots, N$), то $\sum_{k=2}^{N} |b_k| e^{(\beta_k - \beta_1)\mathcal{R}\lambda} \to 0$ для $\mathcal{R}\lambda \to \infty$, а потому $|b_1| - \sum_{k=2}^{N} |b_k| e^{(\beta_k - \beta_1)\mathcal{R}\lambda} > \frac{2}{3} |b_1|$, если $\mathcal{R}\lambda > \sigma_0$, где σ_0 — достаточно большое число. Это доказывает первое из неравенств (52).

Если же $\mathcal{R}\lambda < 0$, то доказательство проводится вполне аналогично, только нужно воспользоваться представлением $\psi(\lambda) = e^{\beta_N \lambda}\left[b_N + \sum_{k=1}^{N-1} b_k e^{(\beta_k - \beta_N)\lambda}\right]$.

Лемма доказана.

Следствие. *Нули полинома Дирихле* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ *лежат в некоторой полосе* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0<+\infty$.

Поскольку σ_0 мы можем произвольно увеличивать, можно считать, что нули полинома $\psi(\lambda)$ лежат не только в полосе $\mathcal{R}\lambda<\sigma_0$, но и в полосе $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0-2\delta$, где $\delta>0$ — некоторое достаточно малое число.

Полином $\psi(i\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{i\beta_k\lambda}$ является почти-периодической функцией λ (см. [5], стр. 343), а потому при изучении полинома Дирихле $\psi(\lambda)$ мы можем пользоваться общими свойствами таких функций.

Лемма 3. *Если нули полинома* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ $(\beta_k>\beta_{k+1})$ *лежат в полосе* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0-2\delta$, *где* $\delta>0$, *то существует число* $m(\delta)>0$, *для которого выполняется неравенство*

$$|\psi(\lambda)|>m(\delta), \tag{53}$$

если λ *принадлежит области* $G(\sigma_0,\delta)$, *полученной из полосы* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0+\delta$ *выбрасыванием кружков радиуса* δ *с центрами в нулях полинома* $\psi(\lambda)$.

Доказательство. Это утверждение сразу следует из леммы 1 книги [5] (стр. 347), если функцию $\psi(\lambda)$ рассмотреть в полосе $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0+2\delta$.

Теорема 2. *Если все нули полинома* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ $(\beta_k>\beta_{k+1})$ *лежат в полосе* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0$ *и если* $n(y_1,y_2)$ *обозначает число нулей полинома* $\psi(\lambda)$ *в прямоугольнике* $(-\sigma_0\leqslant\mathcal{R}\lambda\leqslant\sigma_0,\ y_1<\mathcal{J}\lambda\leqslant y_2)$, *то*

$$n(y_1,y_2)=\frac{\beta_1-\beta_N}{2\pi}(y_2-y_1)+\omega(y_1,y_2), \tag{54}$$

где $\omega(y_1,y_2)$ $(-\infty<y_1,\ y_2<+\infty)$ — *равномерно ограниченная функция.*

Эта теорема доказана в работе [4], и, кроме того, сразу следует из теоремы 3 § 2 гл. VI книги [5].

Следствие. *Нули* λ_s^0 $(s=0,\pm 1,\ldots)$ *полинома* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ $(\beta_k>\beta_{k+1})$ *допускают представление*

$$\lambda_s^0=\frac{2\pi i s}{\beta_1-\beta_N}+k(s), \tag{55}$$

где $k(s)$ $(s=0,\pm 1,\ldots)$ — *ограниченная функция.*

Доказательство. В формуле (54) положим $y_1=0$, а числу y_2 будем давать значения $\mathcal{J}\lambda_s^0$, где λ_s^0 $(s=0,\pm 1,\ldots)$ — нули полинома $\psi(\lambda)$, перенумерованные по мере их удаления от оси Ox в обе стороны таким образом, что λ_0^0 будет ближайшим к оси Ox нулем полинома $\psi(\lambda)$ (если таких нулей несколько, то в качестве λ_0^0 возьмем тот из этих нулей, который имеет наименьшую действительную часть) и т. д. Получим:

$$\mathcal{J}\lambda_s^0=\frac{2\pi s}{\beta_1-\beta_N}+2\pi\frac{\omega(0,\mathcal{J}\lambda_s^0)}{\beta_N-\beta_1}\qquad(s=0,\pm 1,\ldots),$$

откуда и следует формула (55)

В том случае, когда условия (2) регулярны, утверждения, аналогичные лемме 2, лемме 3 и теореме 2, имеют место и для функции $\Delta_0(\lambda)$. Перейдем к их доказательству.

Лемма 4. *Если краевые условия* (2) *регулярны и если число* γ *в формуле* (40) *выбрано достаточно большим, то*

$$
\begin{gathered}
|\Delta_0^{(-1)}(\lambda)| > \frac{1}{3}|a_{2^n}|e^{\alpha_{2^n}\sigma} \text{ для } \sigma = \mathscr{R}\lambda < -\gamma, \\
|\Delta_0^{(1)}(\lambda)| > \frac{1}{3}|a_1|e^{\alpha_1\sigma} \text{ для } \sigma = \mathscr{R}\lambda > \gamma.
\end{gathered} \tag{56}
$$

Доказательство. Из формул (42) следует, что

$$
\Delta_0^{(i)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n}\left[a_k + \frac{1}{\lambda}h_i^{(k)}(\lambda)\right]e^{\alpha_k\lambda} \quad (i = -1, 1). \tag{57}
$$

Если γ — достаточно большое число, то, повторяя доказательство леммы 2 для выражений (57), получим неравенства:

$$
\begin{gathered}
|\Delta_0^{(-1)}(\lambda)| > \frac{2}{3}\left|a_{2^n} + \frac{1}{\lambda}h_{(-1)}^{(2^n)}(\lambda)\right|e^{\alpha_{2^n}\sigma} \text{ для } \sigma < -\gamma, \\
|\Delta_0^{(1)}(\lambda)| > \frac{2}{3}\left|a_1 + \frac{1}{\lambda}h_{(1)}^{(1)}(\lambda)\right|e^{\alpha_1\sigma} \text{ для } \sigma > \gamma.
\end{gathered} \tag{58}
$$

Если γ — достаточно большое, то

$$
\left|a_1 + \frac{1}{\lambda}h_{(-1)}^{(1)}(\lambda)\right| > \frac{1}{2}|a_1|, \quad \left|a_{2^n} + \frac{1}{\lambda}h_{(1)}^{(2^n)}(\lambda)\right| > \frac{1}{2}|a_{2^n}|,
$$

что доказывает неравенства (56).

Следствие. *Если краевые условия* (2) *регулярны и если* γ *в формуле* (15) — *достаточно большое, то нули функции* $\Delta_0(\lambda)$ (*а значит, и собственные значения оператора* L_0) *лежат в полосе* $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$.

Без ограничения общности можно считать, что нули функции $\Delta_0(\lambda)$ лежат в полосе $|\mathscr{R}\lambda| < \sigma_0 - 2\delta$, где $\sigma_0 + \delta < \gamma$, а $\delta > 0$ — некоторое достаточно малое число.

Лемма 5. *Если краевые условия* (2) *регулярны и если нули функции* $\Delta_0(\lambda)$ *лежат в полосе* $|\mathscr{R}\lambda| < \sigma_0 - 2\delta$, *где* $\sigma_0 + \delta < \gamma$, *причем* γ — *число, входящее в условия теоремы* 1, *то найдется такое число* $m(\delta) > 0$, *что для области* $G(\sigma_0, \delta)$, *полученной из полосы* $|\mathscr{R}\lambda| < \sigma_0 + \delta$ *выбрасыванием кружков радиуса* δ *с центрами в нулях функции* $\Delta_0(\lambda)$, *будет выполняться неравенство*

$$
|\Delta_0(\lambda)| > m(\delta) > 0. \tag{59}
$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (42) для функции $\Delta_0^{(0)}(\lambda)$. Имеем:

$$
\Delta_0^{(0)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k\lambda} + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda)e^{\alpha_k\lambda}.
$$

Согласно лемме 3, существует такое число $m_0(\delta) > 0$, что для $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k \lambda}\right| > m_0(\delta)$. Найдем теперь такое $R > 0$, чтобы для $|\lambda| > R$ и $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$ было $\left|\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}\right| < \frac{m_0(\delta)}{2}$. Тогда для тех же λ будет иметь место неравенство $|\Delta_0^{(0)}(\lambda)| > \frac{m_0(\delta)}{2}$. Так как для $\lambda \in G(\sigma_0, \lambda)$ и $|\lambda| \leqslant R$ $\min |\Delta_0^{(0)}(\lambda)| = m_1(\delta) > 0$, то для $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$ выполняется неравенство $|\Delta_0^{(0)}(\lambda)| \geqslant \min\left\{\frac{m_0(\delta)}{2}, m_1(\delta)\right\}$, которое и доказывает лемму 5.

Теорема 3. *Если краевые условия (2) регулярны, то собственные значения λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ оператора L_0 допускают представление*

$$\lambda_s = \frac{2\pi s i}{\alpha_1 - \alpha_{2^n}} + \omega(s) \quad (s = 0, \pm 1, \ldots), \tag{60}$$

где комплекснозначная функция $\omega(s)$ $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ ограничена и α_1 и α_{2^n} — наибольший и наименьший показатели асимптотического полинома Дирихле $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k \lambda}$.

Доказательство. По формуле (42) $\Delta_0^{(0)}(\lambda) = \varphi(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}$.

Но, согласно следствию из теоремы 2, нули λ_s^0 $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ асимптотического полинома Дирихле $\varphi(\lambda)$ допускают представление

$$\lambda_s^0 = \frac{2\pi s i}{\alpha_1 - \alpha_{2^n}} + k(s). \tag{61}$$

Пусть $G(\sigma_0, \delta)$ — область, полученная из полосы $|\mathscr{R}\lambda| < \sigma_0 - 2\delta$, содержащей все нули полинома $\varphi(\lambda)$, выбрасыванием кружков радиуса δ, и пусть $m(\delta)$ (по лемме 3) — число, для которого $|\varphi(\lambda)| > m(\delta)$, когда $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$. Найдем такое $R > 0$, чтобы для $|\lambda| > R$ и $\lambda \in G(\sigma_0, \lambda)$ выполнялось неравенство $\left|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}\right| < m(\delta)$. Тогда для тех же λ

$$|\varphi(\lambda)| > \left|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}\right|. \tag{62}$$

Из формулы (54) следует, что $\sup\limits_{-\infty < y_1 < +\infty} n(y_1, y_1 + 1) = k_0 < +\infty$, т. е. на единице длины полосы $|\mathscr{R}\lambda| < \sigma_0 - \delta$ лежит лишь конечное число нулей полинома $\varphi(\lambda)$, а потому, если $\delta > 0$ — достаточно малое число, то соседние кружки с центрами в нулях полинома и радиуса δ, пересекаясь, образуют области диаметром не больше чем $2k_0\delta$. Из неравенства (62) и теоремы Руше следует, что для $|\lambda| > R$ эти области будут содержать одно и то же число нулей функций $\Delta_0^{(0)}(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, т. е. для нулей λ_s функции $\Delta_0^{(0)}(\lambda)$ при достаточно большом s будем иметь приближенную формулу:

$$\lambda_s = \lambda_s^0 + \rho_s, \tag{63}$$

где $|\rho_s| < 2k_0\delta$, а λ_s^0 — нуль функции $\varphi(\lambda)$. Если учесть (55), то формула (63) доказывает представление (60) для $|\lambda_s| > R$. При этом может случиться, что нумерация собственных значений λ_s в формуле (63) не будет совпадать с нумерацией λ_s в формуле (60). Но так как переход от одной нумерации к другой приведет лишь к замене в формуле (60) одной ограниченной функции $\omega(s)$ другой такой же функцией, то это обстоятельство не ограничивает общности рассуждений. Так как доказательство возможности представления (60) на круге $|\lambda| \leqslant R$ очевидно, то теорема доказана.

Следствие. *Кратности k_s нулей λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ ограничены, т. е.* $\sup k_s = k^0 < \infty$ $(s = 0, \pm 1, \ldots)$.

Замечание. Оператор

$$L^* z(x) = -\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)] + B^*(x) z(x) \tag{64}$$

с областью определения Θ_1, состоящей из функций $z(x) \in C^{(1)}(0, l)$, удовлетворяющих краевому условию

$$h^* z \equiv -R\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)]\Big|_{x=0} + [RB^*(0) - S] z(0) - V\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)]\Big|_{x=l} +$$

$$+ [VB^*(l) - W] z(l) = 0, \tag{65}$$

будем обозначать через $L_0^* z(x)$. В силу определений § 2 из [8], это — оператор, сопряженный с оператором $L_0 y(x)$. Если фундаментальные матрицы $Y(x, \lambda)$ и $Z(x, \lambda)$ систем $Ly(x) = \lambda y(x)$ и $L^* z(x) = \lambda z(x)$ выбраны таким образом, что $Z(x, \lambda) = A^{*-1}(x) Y^{-1}(x, \lambda)$ (см. лемму 5 из [8]), то, в силу замечания к теореме 5 из [8], между характеристическими определителями $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ операторов $L_0 y(x)$ и $L_0^* z(x)$ будет иметь место соотношение

$$\Delta_1(\lambda) = \overline{\Delta(\overline{\lambda})}\, e^{-h\lambda + \overline{a}}, \tag{66}$$

где $h = \int\limits_0^l \sum\limits_{k=1}^n \nu_k^{-1}(\zeta)\, d\zeta$, а a — некоторое комплексное число. Из (66) следует, что если для оператора L_0 условия (2) регулярны, то и для оператора L_0^* будут регулярными краевые условия (65).

Для доказательства этого достаточно разложение (42) подставить в формулу (38), а потом полученное выражение подставить в соотношение (66). Мы будем иметь разложение

$$\Delta_1(\lambda) = \lambda^q \left[\overline{\varphi(\overline{\lambda})}\, e^{-h\lambda + \overline{a}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\lambda} \overline{h_i^{(k)}(\overline{\lambda})}\, e^{\overline{(\alpha k - h)\lambda + a}}\right] \quad (i = -1, 0, 1).$$

Пусть, далее, $Z^{(1)}(x, \lambda)$ — фундаментальная матрица, построенная по формуле (15) для сопряженной системы $L^* z(x) = \lambda z(x)$. Она может отличаться от фундаментальной матрицы $Z(x, \lambda) = A^{*-1}(x)\, Y^{-1}(x, \lambda)$. Но, поскольку обе матрицы $Z(x, \lambda)$ и $Z^{(1)}(x, \lambda)$ при $x = 0$ во всей средней полосе $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ не зависят от λ (см. теорему 1), они там могут отличаться лишь постоянным матричным множителем. А тогда и характеристические определители, построенные с помощью этих матриц, могут в указанной полосе отличаться лишь постоянным множителем b, отличным от нуля. Отсюда следует, что асимптотический полином Дирихле $\psi(\lambda)$ для оператора L_0^* будет иметь вид:

$$\psi(\lambda) = \overline{b\varphi(\bar{\lambda})\, e^{-h\lambda + \bar{a}}} = \sum_{k=1}^{2^n} b\bar{a}_k e^{(\alpha_k - h)\lambda} e^{\bar{a}}.$$

Так как краевые условия (2) регулярны, то $b\bar{a}_1 e^{\bar{a}} \neq 0$ и $b\bar{a}_{2^n} e^{\bar{a}} \neq 0$, а это значит, что регулярны и краевые условия (65).

§ 3. Функция Грина

Оператор $R_\lambda f = (L_0 - \lambda E)^{-1} f$, определенный на области значений оператора L_0 (т. е. для каждого $f(x) \in C(0, l)$), будем называть **резольвентой оператора** L_0.

Теорема 4. *Если λ не является собственным значением оператора L_0, то найдется (и притом единственная) матрица-функция $G(x, \xi, \lambda)$, непрерывная на каждом из треугольников $(0 \leqslant x < \xi \leqslant l)$ и $(0 \leqslant \xi < x \leqslant l)$ вплоть до границы и такая, что для $f(x) \in C(0, l)$*

$$R_\lambda f(x) = [f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)]. \tag{67}$$

(Определение и свойства скалярного произведения [,] см. в [8], § 2.)

Функцию $G(x, \xi, \lambda)$ будем называть **функцией Грина оператора** $L_0 - \lambda E$.

Доказательство. Если функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ существует, то, поскольку $(L_0 - \lambda E) R_\lambda f(x) = f(x)$, функция $y(x, \lambda) = [f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)]$ для каждого $f(x) \in C(0, l)$ должна удовлетворять уравнению

$$A(x)\frac{\partial y(x, \lambda)}{\partial x} + B(x)\, y(x, \lambda) - \lambda y(x, \lambda) = f(x) \tag{68}$$

и краевым условиям (2). Нетрудно убедиться, что если функция Грина существует, то она не может быть непрерывной, а потому будем искать ее, по аналогии с другими случаями (см. [6], стр. 30), в виде разрывной функции со скачком вдоль диагонали $x = \xi$ квадрата $0 \leqslant x,\ \xi \leqslant l$. Удобнее искать две функции: $G(x, \xi, \lambda) = G_1(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l)$ и $G(x, \xi, \lambda) = G_2(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant l)$. Тогда представление (67) перепишется в виде

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) = \int_0^x G_1(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi + \int_x^l G_2(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi - \\ - [G_1(x, 0, \lambda) R^* + G_2(x, l, \lambda) V^*]\, [Mf(0) + Pf(l)]. \end{aligned} \tag{69}$$

Подставив это выражение в уравнение (68), получим:

$$A(x)[G_1(x, x, \lambda) - G_2(x, x, \lambda)] f(x) + \int_0^x [LG_1(x, \xi, \lambda) - \lambda G_1(x, \xi, \lambda)] f(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_x^l [LG_2(x, \xi, \lambda) - \lambda G_2(x, \xi, \lambda)] f(\xi) d\xi - \{[LG_1(x, 0, \lambda) - \lambda G_1(x, 0, \lambda)] R^* +$$

$$+ [LG_2(x, l, \lambda) - \lambda G_2(x, l, \lambda)] V^* \} [Mf(0) + Pf(l)] = f(x),$$

где $LG_i(x, \xi, \lambda) = A(x) \frac{\partial G_i(x,\xi,\lambda)}{\partial x} + B(x) G_i(x, \xi, \lambda)$ $(i = 1, 2)$. Для обеспечения тождества относительно $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ необходимо и достаточно положить:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad A(\xi)[G_1(\xi, \xi, \lambda) - G_2(\xi, \xi, \lambda)] = E, \\ &\text{b)} \quad A(x) \frac{\partial}{\partial x} G_1(x, \xi, \lambda) + B(x) G_1(x, \xi, \lambda) - \lambda G_1(x, \xi, \lambda) = 0, \\ &\text{c)} \quad A(x) \frac{\partial}{\partial x} G_2(x, \xi, \lambda) + B(x) G_2(x, \xi, \lambda) - \lambda G_2(x, \xi, \lambda) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Кроме того, функция $y(x, \lambda) = [f(\xi), G^*(x, \xi, \lambda)]$ должна еще удовлетворять краевым условиям (2). Пользуясь уравнением (68), эти условия преобразуем к виду

$$(M\lambda + N) y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) y(l, \lambda) + Mf(0) + Pf(l) = 0. \qquad (71)$$

Подставив сюда выражение (69), получим:

$$\int_0^l [(M\lambda + N) G_2(0, \xi, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, \xi, \lambda)] f(\xi) d\xi -$$

$$- \{[(M\lambda + N) G_1(0, 0, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, 0, \lambda)] R^* +$$

$$+ [(M\lambda + N) G_2(0, l, \lambda) + (P\lambda + Q) G_2(l, l, \lambda)] V^* \} [Mf(0) + Pf(l)] +$$

$$+ Mf(0) + Pf(l) = 0. \qquad (72)$$

Покажем, что если к соотношениям (70) добавить соотношение

$$(M\lambda + N) G_2(0, \xi, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, \xi, \lambda) = 0, \qquad (73)$$

то равенство (72) будет тождеством относительно $f(\xi) \in C(0, l)$. Для этого достаточно показать, что

$$[(M\lambda + N) G_1(0, 0, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, 0, \lambda)] R^* +$$

$$+ [(M\lambda + N) G_2(0, l, \lambda) + (P\lambda + Q) G_2(l, l, \lambda)] V^* = E_q, \qquad (74)$$

где $E_q = \begin{Vmatrix} E_{qq} & 0_{q\, n-q} \\ 0_{n-q\, q} & 0_{n-q\, n-q} \end{Vmatrix}$, а E_{qq} — единичная матрица, причем, $q = \operatorname{rang} \| M, P \|$ (см. [8], § 1).

Из равенства (70) а) следует, что

$$G_1(0, 0, \lambda) = G_2(0, 0, \lambda) + A^{-1}(0), \quad G_2(l, l, \lambda) = G_1(l, l, \lambda) - A^{-1}(l). \tag{75}$$

Тогда левая часть выражения (74) примет вид:

$$[(M\lambda + N) G_2(0, 0, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, 0, \lambda)] R^* +$$
$$+ [(M\lambda + N) G_2(0, l, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, l, \lambda)] V^* +$$
$$+ [(M\lambda + N) A^{-1}(0) R^* - (P\lambda + Q) A^{-1}(l) V^*].$$

Первые два слагаемые этого выражения равны нулю в силу равенства (73), а третье слагаемое преобразуем к виду

$$[MA^{-1}(0) R^* - PA^{-1}(l) V^*] \lambda + [- QA^{-1}(l) V^* + NA^{-1}(0) R^*].$$

Из соотношений (31) работы [8] следует, что это выражение будет равно E_q. Этим доказано соотношение (74), а вместе с ним и тождество (72).

Таким образом, если функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ существует, то она удовлетворяет системе уравнений (70), (73) (и, обратно, решение этой системы образует функцию Грина.) Найдем решение этой системы. Из уравнений (70) b) и (70) с) следует, что

$$G_1(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) \Gamma_1(\xi, \lambda), \quad G_2(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) \Gamma_2(\xi, \lambda), \tag{76}$$

где $Y(x, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы (3), а $\Gamma_1(\xi, \lambda)$ и $\Gamma_2(\xi, \lambda)$ — некоторые неизвестные матрицы. Для их определения из уравнений (70) а) и (73) получим систему:

$$\begin{gathered} A(\xi) Y(\xi, \lambda) [\Gamma_1(\xi, \lambda) - \Gamma_2(\xi, \lambda)] = E, \\ (M\lambda + N) Y(0, \lambda) \Gamma_2(\xi, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda) \Gamma_1(\xi, \lambda) = 0. \end{gathered} \tag{77}$$

Из этой системы находим, что

$$\begin{gathered} \Gamma_1(\xi, \lambda) = D^{-1}(\lambda) (M\lambda + N) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi), \\ \Gamma_2(\xi, \lambda) = - D^{-1}(\lambda) (P\lambda + Q) Y(l, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi), \end{gathered} \tag{78}$$

где $D(\lambda) = (M\lambda + N) Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda)$ — характеристическая матрица оператора L_0. А тогда, в силу формул (76),

$$\begin{gathered} G_1(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) D^{-1}(\lambda) (M\lambda + N) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ G_2(x, \xi, \lambda) = - Y(x, \lambda) D^{-1}(\lambda) (P\lambda + Q) Y(l, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{gathered} \tag{79}$$

Эти формулы доказывают существование функции Грина для каждого λ, не являющегося собственным значением оператора L_0.

Докажем единственность функции Грина. Для этого предположим, что существуют две функции Грина оператора $L_0 - \lambda E$: $G(x, \xi, \lambda)$ и $\overline{G}(x, \xi, \lambda)$.

Тогда из представления (67) следует, что для каждой функции $f(\xi) \in C(0, l)$ и каждого $x \in [0, l]$ $[f(\xi), G^*(x, \xi, \lambda) - \overline{G}^*(x, \xi, \lambda)] = 0$. Если же положить $f(0) = f(l) = 0$, то $\int\limits_0^l [G(x, \xi, \lambda) - \overline{G}(x, \xi, \lambda)] f(\xi) d\xi = 0$. В силу произвольности и непрерывности $f(\xi)$ внутри интервала $(0, l)$, а также в силу непрерывности матриц $G(x, \xi, \lambda)$ и $\overline{G}(x, \xi, \lambda)$ для $x \neq \xi$ $(0 \leqslant x, \xi \leqslant l)$, отсюда следует, что $G(x, \xi, \lambda) \equiv \overline{G}(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant x, \xi \leqslant l;\ x \neq \xi)$. Теорема доказана.

Замечание. При изучении функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ мы очень часто будем обращаться к формулам (79) для этой функции, полученным в ходе доказательства теоремы 4. Используем их, например, для построения функции Грина $G_{(k)}(x, \xi, \lambda)$ дифференциального оператора $L_{k-1}y(x) = A_k(x)\frac{dy(x)}{dx} + B_k(x)y(x) - \widetilde{J}_k^*(0)y(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, определенного для вектор-функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$M_kA_k(0)y'(0) + [M_kB_k(0) + N_k]y(0) + P_kA_k(l)y'(l) + \\ + [P_kB_k(l) + Q_k]y(l) = 0.$$

Здесь $A_k(x) = \mathcal{D}_kA(x)$, $B_k(x) = \mathcal{D}_kB(x)$ и т. д., а $\widetilde{J}_k(0)$ — матрица вида $\begin{Vmatrix} 0 & E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$, состоящая из $k \times k$ блоков размера $n \times n$ (E — единичная матрица); $y(x) = \begin{Vmatrix} y_1(x) \\ \cdots \\ y_k(x) \end{Vmatrix}$, где $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — n-мерные векторы. (Оператор $L_{k-1}y(x)$ порождается задачей (91), (92) из [8].) В силу леммы 7 из [8], матрица $\mathcal{D}_kY(x, \lambda)$ будет фундаментальной матрицей системы $L_{k-1}y(x) = \lambda y(x)$, а потому из свойств оператора $\mathcal{D}_k$ и формул (79) следует что

$$G_k(x, \xi, \lambda) = \mathcal{D}_kG(x, \xi, \lambda) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{80}$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L_0 - \lambda E$.

Лемма 6. *Если $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L_0 - \lambda E$, а $H(x, \xi, \mu)$ $(0 \leqslant x, \xi \leqslant \lambda)$ — функция Грина оператора $L_0^* - \mu E$, то между ними имеет место следующая связь:*

$$H(x, \xi, \mu) = G^*(\xi, x, \overline{\mu}). \tag{81}$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $\lambda = \lambda_0$ не является собственным значением оператора L_0, то для любых $f(\xi) \in C(0, l)$ и $g(\xi) \in C(0, l)$ имеет место тождество

$$[R_{\lambda_0}f(\xi),\ g(\xi)] = [f(\xi),\ R^0_{\overline{\lambda}_0}\, g(\xi)], \tag{82}$$

где R_λ и R^0_μ — резольвенты операторов L_0 и L_0^* соответственно. Так как $f_1(\xi) = R_{\lambda_0}f(\xi) \in \Theta_0$ и $g_1(\xi) = R^0_{\overline{\lambda}_0}g(\xi) \in \Theta_1$, то из тождества (78) работы [8] следует равенство

$$[f_1(\xi),\ (L_0^* - \overline{\lambda}_0 E)\, g_1(\xi)] = [(L_0 - \lambda_0 E)\, f_1(\xi),\ g_1(\xi)],$$

которое равносильно тождеству (82).

В силу теоремы 4, операторы $R_{\lambda_0} f(\xi)$ и $R^0_{\overline{\lambda}_0} g(\xi)$ имеют представления:

$$R_\lambda f(\xi) = [f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)] \text{ и } R_{\overline{\lambda}_0} g(\xi) = [g(\xi),\ H^*(x, \xi, \overline{\lambda}_0)],$$

а потому из тождества (82) будем иметь:

$$\big[[f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)],\ g(x)\big] = \big[f(x),\ [g(\xi),\ H^*(x, \xi, \overline{\lambda}_0)]\big]. \tag{83}$$

Пусть $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$. Тогда

$$\int_0^l \int_0^l g^*(x)\, G(x, \xi, \lambda_0)\, f(\xi)\, dx d\xi = \int_0^l \int_0^l g^*(\xi)\, H^*(x, \xi, \lambda_0)\, f(x)\, d\xi dx.$$

Производя очевидные преобразования, получим:

$$\int_0^l \int_0^l g^*(\xi)\,[G(\xi, x, \lambda_0) - H^*(x, \xi, \overline{\lambda}_0)]\, f(x)\, d\xi dx = 0. \tag{84}$$

В силу произвольности непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ внутри интервала $(0, l)$, а также непрерывности функций $G(x, \xi, \lambda)$ и $H^*(x, \xi, \lambda)$ внутри квадрата $(0 \leqslant x,\ \xi \leqslant l)$ при $x \neq \xi$ и произвольности λ_0, не являющегося собственным значением оператора L_0, из (84) следует равенство (81). Лемма доказана.

Следствие. *Если*

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} G_1(x, \xi, \lambda), & \xi < x, \\ G_2(x, \xi, \lambda), & \xi > x, \end{cases}$$

— функция Грина оператора $L_0 - \lambda E$, *то*

$$G_1(x, 0, \lambda)(-R^*\lambda + S^*) + G_2(x, l, \lambda)(-V^*\lambda + W^*) = 0. \tag{85}$$

Для доказательства заметим, что, согласно доказанной лемме,

$$H(x, \xi, \mu) = \begin{cases} H_1(x, \xi, \mu) = G_2^*(\xi, x, \overline{\mu}) & (\xi < x), \\ H_2(x, \xi, \mu) = G_1^*(\xi, x, \overline{\mu}) & (\xi > x) \end{cases} \tag{86}$$

будет функцией Грина оператора $L_0^* - \mu E$ и матрицы $H_1(x, \xi, \mu)$ и $H_2(x, \xi, \mu)$ будут удовлетворять системе, аналогичной системе (70), (73). В частности, вместо уравнения (73) будем иметь уравнение

$$(-R\mu + S)\, H_2(0, \xi, \mu) + (-V\mu + W)\, H_1(l, \xi, \mu) = 0, \tag{87}$$

которое, в силу формулы (86), и доказывает соотношение (85).

Получим сейчас из формул (79) асимптотические формулы для функции Грина при $\lambda \to \infty$. Для этого в формулах (79) вместо матрицы $D(\lambda)$ введем матрицу $D_0(\lambda) = \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) Y(l, \lambda)$. Получим:

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} G_1(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) \times \\ \times Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, l) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ G_2(x, \xi, \lambda) = -Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) \times \\ \times Y(l, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{cases} \tag{88}$$

Функция Грина, будучи единственной, не зависит от выбора фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$, а потому будем считать, что

$$Y(x, \lambda) = \begin{cases} Y_{-1}(x, \lambda), & \mathscr{R}\lambda < -\gamma, \\ Y_0(x, \lambda), & |\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma, \\ Y_1(x, \lambda), & \mathscr{R}\lambda > \gamma, \end{cases}$$

где $Y_i(x, \lambda)$ $(i = -1, 0, 1)$ — матрицы из теоремы 1. Но тогда, в силу этой же теоремы 1, $Y(x, \lambda) = \left[K(x) + \frac{H(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta}$, где $H(x, \lambda) = H_i(x, \lambda)$ $(i = -1, 0, 1)$ в зависимости от того, принадлежит ли λ области $\mathscr{R}\lambda < \gamma$, полосе $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ или области $\mathscr{R}\lambda > \gamma$. Из (88) получим тогда следующие асимптотические формулы для функции Грина:

$$\begin{gathered} G_1(x, \xi, \lambda) = \left[K(x) + \frac{H(x, \lambda)}{\lambda}\right] G_1^0(x, \xi, \lambda) \left[K(\xi) + \frac{H(\xi, \lambda)}{\lambda}\right]^{-1} A^{-1}(\xi) \\ (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ G_2(x, \xi, \lambda) = -\left[K(x) + \frac{H(x, \lambda)}{\lambda}\right] G_2^0(x, \xi, \lambda) \left[K(\xi) + \frac{H(\xi, \lambda)}{\lambda}\right]^{-1} A^{-1}(\xi) \\ (0 \leqslant x < \xi \leqslant l), \end{gathered} \tag{89}$$

где

$$\begin{gathered} \text{a)} \quad G_1^0(x, \xi, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \left\{\left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] + \right. \\ \left. + \left[P_0 K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\}^{-1} \left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta}, \end{gathered} \tag{90}$$

$$\begin{gathered} \text{b)} \quad G_2^0(x, \xi, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \left\{\left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] + \right. \\ \left. + \left[P_0 K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\}^{-1} \left[P_0 K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_\xi^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \end{gathered}$$

и матрицы $\Theta^{(1)}(\lambda)$ и $\Theta^{(2)}(\lambda)$ равномерно ограничены на всей комплексной плоскости. Пользуясь обозначениями (44):

$$M_0K(0) = \| M_{nm}^{(1)}, M_{n\,n-m}^{(2)} \|, \quad P_0K(l) = \| P_{nm}^{(1)}, P_{n\,n-m}^{(2)} \|,$$

где m — число положительных диагональных элементов у матрицы $\Lambda(x)$, запишем:

$$M_0K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda} = \left\| M_{nm}^{(1)} + \frac{\Theta_{nm}^{(1)}(\lambda)}{\lambda}, \; M_{n\,n-m}^{(2)} + \frac{\Theta_{n\,n-m}^{(1)}(\lambda)}{\lambda} \right\|,$$

$$P_0K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda} = \left\| P_{nm}^{(1)} + \frac{\Theta_{nm}^{(2)}(\lambda)}{\lambda}, \; P_{n\,n-m}^{(2)} + \frac{\Theta_{n\,n-m}^{(2)}(\lambda)}{\lambda} \right\|,$$

где

$$\| \Theta_{nm}^{(1)}(\lambda), \Theta_{n\,n-m}^{(1)}(\lambda) \| = \Theta^{(1)}(\lambda) \text{ и } \| \Theta_{nm}^{(2)}(\lambda), \Theta_{n\,n-m}^{(2)}(\lambda) \| = \Theta^{(2)}(\lambda).$$

Если

$$\begin{aligned} B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \left\| M_{nm}^{(1)} + \frac{\Theta_{nm}^{(1)}(\lambda)}{\lambda}, \; P_{n\,n-m}^{(2)} + \frac{\Theta_{n\,n-m}^{(2)}(\lambda)}{\lambda} \right\|, \\ A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= \left\| P_{nm}^{(1)} + \frac{\Theta_{nm}^{(2)}(\lambda)}{\lambda}, \; M_{n\,n-m}^{(2)} + \frac{\Theta_{n\,n-m}^{(1)}(\lambda)}{\lambda} \right\|, \end{aligned} \tag{91}$$

то, повторяя преобразования, приведенные при доказательстве формулы (46), получим:

$$\begin{aligned} \left[M_0K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] + \left[P_0K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta} &= \\ = A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int_0^l S_1(\zeta)d\zeta} + B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}&, \end{aligned} \tag{92}$$

де (см. § 2)

$$S_1(x) = \left\| \begin{matrix} \Lambda_{(+)}^{(1)}(x) & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & 0_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\| \text{ и } S_2(x) = \left\| \begin{matrix} 0_{mm} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & \Lambda_{(-)}^{-1}(x) \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} \Lambda_{(+)}^{-1}(x) & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & \Lambda_{(-)}^{-1}(x) \end{matrix} \right\| = \Lambda^{-1}(x).$$

Лемма 7. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то для достаточно больших* $|\lambda|$ *матрицы* $A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ *и* $B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ (см. (91)) *невырождены и для них имеют место соотношения*

а) $$B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] = \left\| \begin{matrix} E_{mm} & R_{m\,n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ 0_{n-m\,m} & R_{n-m\,n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{matrix} \right\|,$$

$$\text{b)}\qquad B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right]=\left\|\begin{matrix} S^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\,n-m}\\ S^{(2)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\|,$$

(93)

$$\text{c)}\qquad A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]=\left\|\begin{matrix} R^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\,n-m}\\ R^{(2)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\|,$$

$$\text{d)}\qquad A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right]=\left\|\begin{matrix} E_{mm} & S^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ 0_{n-m\,m} & S^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|,$$

где матрицы $R^{(i)}_{pq}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $S^{(i)}_{pq}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(i=1, 2, 3, 4;\ p, q=m, n-m)$ *при* $\lambda\to\infty$ *имеют конечные пределы, а* E_{mm} *и* $E_{n-m\,n-m}$ — *единичные матрицы.*

Доказательство. Из того, что $A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=A_0+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и $B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=B_0+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, где матрицы A_0 и B_0 строятся по формуле (47), следует, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\det A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\det A_0=a_1$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\det B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\det B_0=a_{2^n}$. Так как условия (2) регулярны, то $a_1\neq 0$ и $a_{2^n}\neq 0$, а потому для достаточно больших $|\lambda|$ матрицы $A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и $B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ невырождены.

Доказательство соотношений (93) проводится во всех четырех случаях аналогично, а потому проведем его только для случая (93)a). Если

$$B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left\|\begin{matrix} B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & B^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & B^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|$$

и

$$B_0^{-1}(\lambda)=\left\|\begin{matrix} X^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ X^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|,$$

то из равенства $B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=E$ следует, что

$$X^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+X^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=E_{mm},$$

(94)

$$X^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+X^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0_{n-m\,m}.$$

Если

$$M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda} = \left\| M^{(1)}_{nm}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ M^{(2)}_{n\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right\|,$$

где

$$M^{(2)}_{n\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left\| \begin{matrix} M^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ M^{(2)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{matrix} \right\|,$$

то из соотношений (91) следует, что

$$M^{(1)}_{nm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \left\| \begin{matrix} B^{(1)}_{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{matrix} \right\|.$$

Но тогда из соотношений (94) получим, что

$$B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} X^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ X^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & M^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & M^{(2)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} E_{mm} & R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{matrix} \right\|,$$

и соотношение (93)а) доказано.

Лемму 7 мы используем для доказательства следующей теоремы о поведении функции Грина при изменении параметра λ.

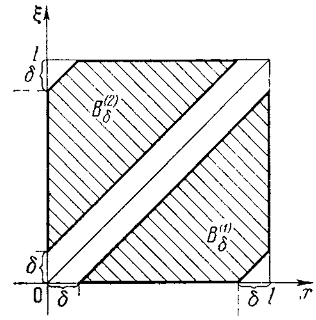
Теорема 5. *Пусть краевые условия* (2) *регулярны и пусть* $G(\rho)$ — *область, полученная из комплексной плоскости* λ *после удаления кружков радиуса* ρ *с центрами в собственных значениях оператора* L_0, *а* B_δ — *множество, полученное из квадрата* $(0 \leqslant x,\ \xi \leqslant l)$ *после удаления из него полоски* $x - \delta < \xi < x + \delta$, *содержащей диагональ* $x = \xi$, *и треугольников* $0 \leqslant x < \delta$, $x + l - \delta < \xi \leqslant l$ *и* $l - \delta < x \leqslant l$, $0 \leqslant \xi < x - l + \delta$. *Тогда:*

1) *Функция Грина оператора* L_0 *равномерно ограничена по норме для* $x \in [0, l]$, $\xi \in [0, l]$ *и* $\lambda \in G(\rho)$.

2) *Если* $(x, \xi) \in B_\delta$ *и* $|\mathscr{R}\lambda| > h(\varepsilon, \delta)$, *где* $h(\varepsilon, \delta)$ — *достаточно большое число, а* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ — *произвольные положительные числа, то* $\| G(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$.

Доказательство. При доказательстве будем исходить из асимптотических формул (89). Так как множители $K(x) + \frac{H(x,\lambda)}{\lambda}$ и

$\left[K(\xi)+\frac{H(\xi\lambda)}{\lambda}\right]^{-1}A^{-1}(\xi)$ в этих формулах равномерно ограничены относительно x, ξ и λ $(0 \leqslant x,\ \xi \leqslant l,\ -\infty < \mathscr{R}\lambda < +\infty)$, то теорему достаточно доказать для функций $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant \xi < x \leqslant l)$ и $G_2^0(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant x < \xi \leqslant l)$.



Докажем сначала вторую часть теоремы, причем разобьем доказательство на четыре случая: два случая ($\mathscr{R}\lambda > 0$ и $\mathscr{R}\lambda < 0$) для $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ и два — для $G_2^0(x, \xi, \lambda)$.

1. $\mathscr{R}\lambda < 0$, $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)} = [\delta \leqslant x \leqslant l,\ \ m_0(x) \leqslant \xi \leqslant x - \delta]$, где $m_0(x) = \max(0,\ x - l + \delta)$ (см. чертеж).

Докажем, что существует такая прямая $\mathscr{R}\lambda = -h_1(\varepsilon, \delta)$, что для $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ и $\mathscr{R}\lambda < -h_1(\varepsilon, \delta)$ будет $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$.

Пользуясь тем, что

$$\left\{\left[M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]+\left[P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right\}^{-1}=$$

$$=\left[A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}=$$

$$=\left[B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}\cdot B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{95}$$

из леммы 7 выводим, что выражение (90)а) для функции $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ можно переписать в виде

$$G_1^0(x, \xi, \lambda)=e^{\lambda\int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\left[B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\|\begin{matrix} E_{mm} & R^{(3)}_{m\ n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ 0_{n-m\ m} & R^{(4)}_{n-m\ n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\|, \tag{96}$$

где

$$\left\|\begin{matrix}\Lambda_{(+)}(x) & 0 \\ 0 & \Lambda_{(-)}(x)\end{matrix}\right\| = \Lambda(x).$$

Последние две матрицы в выражении (96) преобразуем следующим образом:

$$\left\| \begin{matrix} E_{mm} & R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| =$$

$$= e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}S_1(\zeta)d\zeta} \left\| \begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}\Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| . \qquad (97)$$

Первый множитель полученного выражения объединим со вторым множителем формулы (96) и преобразуем так:

$$\left[B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_0^{l}S_1(\zeta)d\zeta} + e^{\lambda\int\limits_0^{l}S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}S_1(\zeta)d\zeta} =$$

$$= \left[e^{\lambda\int\limits_0^{\xi}S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_0^{l}S_1(\zeta)d\zeta} + e^{\lambda\int\limits_0^{\xi}S_1(\zeta)d\zeta} e^{\lambda\int\limits_0^{l}S_2(\zeta)d\zeta} \right]^{-1} =$$

$$= e^{-\lambda\int\limits_0^{\xi}S_1(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int\limits_0^{l}S_2(\zeta)d\zeta} \left[e^{\lambda\int\limits_0^{\xi}S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{l}S_1(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int\limits_0^{l}S_2(\zeta)d\zeta} + E \right]^{-1}. \qquad (98)$$

Первые два множителя из полученного выражения объединим с первым множителем из формулы (96) и перемножим:

$$e^{\lambda\int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} = \left\| \begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_\xi^x \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_x^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\|. \tag{99}$$

Преобразования (97), (98) и (99) приведут матрицу (96) к виду

$$G_1^0(x, \xi, \lambda) = \left\| \begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_\xi^x \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_x^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left[e^{\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_\xi^l S_1(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} + E \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{m\,n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R_{n-m\,n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\|. \tag{100}$$

Так как

$$e^{\lambda\int\limits_\xi^l S_1(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} = \left\| \begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_\xi^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_0^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \to 0$$

при $\mathcal{R}\lambda \to -\infty$ равномерно относительно ξ $(0 \leqslant \xi \leqslant l - \delta)$ $(\delta > 0)$, а матрица $e^{\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ остается при этом ограниченной, то средний множитель в выражении (100) равномерно стремится к E при $\mathcal{R}\lambda \to -\infty$ и $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. На основании этого, при доказательстве равномерного приближения $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ к нулю для $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ и $\mathcal{R}\lambda \to -\infty$ средний множитель в выражении (100) можно заменить на E (так как крайние множители ограничены). Получим:

$$\left\| \begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x}\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_{x}^{l}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{m\,n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R_{n-m\,n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x}\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & e^{\lambda\int\limits_{0}^{x}\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{m\,n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_{x}^{l}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\|.$$

Так как для $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ и $\mathscr{R}\lambda \to -\infty$

$$\left\| e^{\lambda\int\limits_{\xi}^{x}\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \right\| \to 0, \quad \left\| e^{\lambda\int\limits_{0}^{x}\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{m\,n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \right\| \to 0,$$

$$\left\| e^{-\lambda\int\limits_{x}^{l}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \right\| \to 0$$

равномерно, то при $\mathscr{R}\lambda \to -\infty$ $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| \to 0$ равномерно относительно $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. После этого существование прямой $\mathscr{R}\lambda = -h_1(\varepsilon, \delta)$ со свойством $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ для $\mathscr{R}\lambda \leqslant -h(\varepsilon, \delta)$ и $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ очевидно.

2. $\mathscr{R}\lambda > 0$, $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. Докажем, что найдется такая прямая $\mathscr{R}\lambda = h_2(\varepsilon, \delta)$, для которой при $\mathscr{R}\lambda \geqslant h_2(\varepsilon, \delta)$ будет $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ равномерно относительно $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. Для этого вынесем из второго множителя выражения (90)а) матрицу $A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и воспользуемся соотношением (93) с) для преобразования матрицы $A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]$. Получим:

$$G_1^0(x, \xi, \lambda) = e^{\lambda\int\limits_{0}^{x}\Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta} \left[e^{\lambda\int\limits_{0}^{l}S_1(\zeta)d\zeta} + A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_{0}^{l}S_2(\zeta)d\zeta} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\,n-m} \\ R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_{0}^{\xi}\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\|. \qquad (101)$$

Последние две матрицы в этом выражении перемножим и представим в виде

$$\left\|\begin{matrix} R^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\,n-m} \\ R^{(2)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| =$$

$$= e^{-\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} \cdot \left\|\begin{matrix} R^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{(-1)}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\, R^{(2)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\|. \qquad (102)$$

Первый множитель из полученного выражения объединим со вторым множителем из (101) и, подобно выражению (98), преобразуем так:

$$\left[e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta} + A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} e^{-\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} =$$

$$= \left[e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta}\, e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta} + e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} =$$

$$= e^{-\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}\left[E + e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_\xi^l S_2(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}. \qquad (103)$$

Первые два множителя полученного выражения объединим с первым множителем выражения (101). В результате получим, что

$$G_1^0(x,\xi,\lambda) = \left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int_x^l \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{\lambda\int_\xi^x \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| \times$$

$$\times\left[E + e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_\xi^l S_2(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} R^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\, R^{(2)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\|. \qquad (104)$$

На том же основании, что и в предыдущем пункте, заменим средний множитель на E и в полученном выражении матрицы перемножим:

$$\left\| \begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_x^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{\lambda\int\limits_\xi^x \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_x^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda\int\limits_0^x \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\|.$$

При $\mathscr{R}\lambda \to +\infty$ все элементы последней матрицы, а вместе с ними и вся матрица, а также матрицы $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ равномерно стремятся к нулю для $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. Это доказывает существование прямой $\mathscr{R}\lambda = h_2(\varepsilon, \delta)$ такой, что $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$, когда $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ и $\mathscr{R}\lambda > h_2(\varepsilon, \delta)$.

3. $\mathscr{R}\lambda < 0$, $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)} = [0 \leqslant x \leqslant l - \delta < l, \quad x + \delta \leqslant \xi \leqslant m_1(x)]$, где $m_1(x) = \min(x + l - \delta, l)$. Как и для $B_\delta^{(1)}$, докажем сначала существование такой прямой $\mathscr{R}\lambda = -h_3(\varepsilon, \delta) < 0$, что при $\mathscr{R}\lambda \leqslant -h_3(\varepsilon, \delta)$ будет $\| G_2^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ для $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$. Для этого из второго множителя в выражении (90) b) вынесем матрицу $B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, воспользуемся соотношением (93) b), произведем преобразования, аналогичные преобразованиям (97), (98) и (99), и представим матрицу $G_2^0(x, \xi, \lambda)$ в виде

$$G_2^0(x, \xi, \lambda) = \left\| \begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_0^x \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_x^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left[e^{-\lambda\int\limits_\xi^l S_2(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_0^l S_1(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int\limits_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} + E \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} S_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_\xi^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{-\lambda\int\limits_\xi^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} S_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_\xi^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\|. \qquad (105)$$

Затем по той же схеме, что и в первых двух пунктах, доказываем, что $G_2^0(x, \xi, \lambda) \to 0$ равномерно при $\mathscr{R}\lambda \to -\infty$ для $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$, а это обеспечивает существование прямой $\mathscr{R}\lambda = -h_3(\varepsilon, \delta)$ с указанными выше свойствами.

4. $\mathscr{R}\lambda > 0$, $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$. Посредством преобразований, аналогичных предыдущим, представим матрицу $G_2^0(x, \xi, \lambda)$ в виде

$$G_2^0(x, \xi, \lambda) = \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda \int_x^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\, n-m} \\ 0_{n-m\, m} & e^{\lambda \int_0^x \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left[E + e^{-\lambda \int_\xi^l S_1(\zeta)d\zeta} \cdot A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int_0^l S_2(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda \int_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} E_{mm} & e^{-\lambda \int_\xi^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} S_{m\, n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int_\xi^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\, m} & S_{n-m\, n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int_\xi^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\|, \qquad (106)$$

из которого заключаем, что $G_2^0(x, \xi, \lambda) \to 0$ равномерно относительно $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$ при $\mathscr{R}\lambda \to +\infty$, а это доказывает существование прямой $\mathscr{R}\lambda = h_4(\varepsilon, \delta)$ со свойством: $\| G_2^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ для $\mathscr{R}\lambda \geqslant h_4(\varepsilon, \delta)$ и $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$.

Этим доказана вторая часть теоремы 5.

Из представлений (100), (104), (105), (106) следует, что функции $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ и $G_2^0(x, \xi, \lambda)$ (а следовательно, и $G(x, \xi, \lambda)$) ограничены вне достаточно широкой полосы не только для $(x, \xi) \in B_\delta$, но и для любых $(x, \xi) \in [0, l] \times [0, l]$. Так как $G(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant x, \xi \leqslant l;\ x \neq \xi;\ -\infty < \mathscr{R}\lambda < +\infty)$ (что следует из формул (79)) есть мероморфная функция λ с полюсами в собственных значениях оператора L_0 и кусочно-непрерывная по (x, ξ, λ) (со скачком при $x = \xi$), то она ограничена во всякой области, полученной из круга $|\lambda| \leqslant R$ выбрасыванием кружков радиуса ρ с центрами в собственных значениях оператора L_0, лежащих в этом круге. Отсюда следует, что для доказательства ограниченности функции $G(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant \xi, x \leqslant l)$ в области $G(\rho)$ достаточно доказать ее ограниченность в той части $H(h, R, \rho)$ области $G(\rho)$, которая лежит внутри достаточно широкой полосы $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant h$ и вне достаточно большого круга $|\lambda| \leqslant R$. Для этого воспользуемся формулами (79).

Из асимптотических формул (15) для матрицы $Y(x, \lambda)$ следует, что требует доказательства только ограниченность матрицы $D_0^{-1}(\lambda)$, так как все остальные множители, включая $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)$ и $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)(P\lambda+Q)$ (см. (36)), равномерно ограничены в области $H(h, R, \rho)$. Но $D_0^{-1}(\lambda)=\frac{D_0'(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$, где матрица $D_0'(\lambda)$, как матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов ограниченной в $H(h, R, \rho)$ матрицы $D_0(\lambda)$, ограничена. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что ограничена для $\lambda\in H(h, R, \rho)$ функция $\frac{1}{\Delta_0(\lambda)}$. Но так как краевые условия (2) регулярны, то это следует из леммы 5. Теорема доказана.

Следствием из этой теоремы является

Лемма 8. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то функция*

$$y(x, \lambda)=[f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)] \tag{107}$$

равномерно ограничена относительно (x, λ), *где* $x\in[0, l]$ *и* $\lambda\in G(\rho)$ $(\rho>0)$, *для каждого* $f(\xi)\in D_2(0, l)$, *причем* $\| y(x, \lambda)\| <\varepsilon$ *для* $x\in[0, l]$ *и* $|\mathscr{R}\lambda|>h(\varepsilon)$, *где* $h(\varepsilon)$ — *достаточно большое число.*

Доказательство. Если $f(\xi)\in D_2(0, l)$ и $g(\xi)\in D_2^*(0, l)$, то имеет место неравенство (см. [8], формула (61)):

$$|[f(\xi),\ g(\xi)]|\leqslant \| f(\xi)\|_{D_2(0,l)}\cdot \| g(\xi)\|_{D_2^*(0,l)},$$

из которого следует, что

$$\| y(x, \lambda)\| \leqslant \| f(\xi)\|_{D_2(0,l)}\, \| G^*(x, \xi, \lambda)\|_{D_2^*(0,l)} \quad (0\leqslant x\leqslant l), \tag{108}$$

где

$$\| G^*(x, \xi, \lambda)\|^2_{D_2^*(0,l)}=$$
$$=\int_0^l \| G^*(x, \xi, \lambda)\|^2 d\xi+\| RG^*(x, 0, \lambda)+VG^*(x, l, \lambda)\|^2 \tag{109}$$
$$(0\leqslant x\leqslant l).$$

Из ограниченности $\| G^*(x, \xi, \lambda)\|$ для $(x, \xi)\in[0, l]\times[0, l]$ и $\lambda\in G(\rho)$ и из неравенства (108) вытекает ограниченность $\| y(x, \lambda)\|$ для $x\in[0, l]$ и $\lambda\in G(\rho)$. Этим доказана первая часть леммы.

Из формулы (85) следует, что

$$\| RG_1^*(x, 0, \lambda)+VG_2^*(x, l, \lambda)\| =\left\| \frac{1}{\lambda}[SG_1^*(x, 0, \lambda)+WG_2^*(x, l, \lambda)]\right\| .$$

Если $|\mathscr{R}\lambda|\to\infty$, то $G_1^*(x, 0, \lambda)$ и $G_2^*(x, l, \lambda)$ остаются ограниченными, а потому $\| RG_1^*(x, 0, \lambda)+VG_2^*(x, l, \lambda)\| \to 0$ равномерно относительно $x\in[0, l]$. Но при этом и $\int_0^l \| G(x, \xi, \lambda)\|^2 d\xi\to 0$, что сразу вытекает из теоремы 5. Поэтому из формулы (109) следует, что $\| G(x, \xi, \lambda)\|_{D_2^*(0,l)}\to 0$ равномерно относительно $x \in [0, l]$ при $|\mathscr{R}\lambda| \to \infty$, а тогда неравенство (108) доказывает вторую часть леммы.

Для выяснения дальнейших свойств функции Грина нам потребуются некоторые вспомогательные предложения, доказательством которых мы сейчас и займемся.

Лемма 9. *Если* $\operatorname{rang} A_{mn} = r$, *где* $0 < r \leqslant \min(m, n)$, *то матрицу* A_{mn} *можно представить в виде произведения* $A_{mn} = S_{mr}T_{rn}$, *где* $\operatorname{rang} S_{mr} = \operatorname{rang} T_{rn} = r$, *и, обратно, если матрица* A_{mn} *представлена в виде произведения* $A_{mn} = S_{mr}T_{rn}$, *где* $\operatorname{rang} S_{mr} = \operatorname{rang} T_{rn} = r$, *то* $\operatorname{rang} A_{mn} = r$, *причем если* $A_{mn} = S^{(1)}_{mr}T^{(1)}_{rn}$ *и* $A_{mn} = S^{(2)}_{mr}T^{(2)}_{rn}$ — *два таких представления, то найдется невырожденная матрица* K_{rr} *такая, что* $S^{(1)}_{mr} = S^{(2)}_{mr}K_{rr}$, $T^{(2)}_{rn} = K_{rr}T^{(1)}_{rn}$.

Доказательство. Так как $\operatorname{rang} A_{mn} = r$, то у матрицы A_{mn} имеется минор r-го порядка, отличный от нуля. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что он стоит в левом верхнем углу. Тогда если $A_{mn} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(n)}_{m1} \|$, где c^{s}_{m1} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — столбцы матрицы A_{mn}, то векторы $c^{(s)}_{m1}$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ линейно независимы и все столбцы матрицы A_{mn} являются их линейными комбинациями. А это значит, что если $S_{mr} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(r)}_{m1} \|$, то $\operatorname{rang} S_{mr} = r$ и $c^{(s)}_{m1} = S_{mr}a^{(s)}_{m1}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, где $a^{(s)}_{m1}$ — некоторые векторы, причем $a^{(s)}_{m1}$ при $s \leqslant r$ равен i-му единичному вектору. Подставляя последние равенства для $c^{(s)}_{m1}$ в равенство $A_{mn} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(n)}_{m1} \|$, получим:

$$A_{mn} = S_{mr} \| a^{(1)}_{m1}, a^{(2)}_{m1}, \ldots, a^{(n)}_{m1} \| = S_{mr}T_{rn}, \tag{110}$$

где $T_{rn} = \| a^{(1)}_{m1}, a^{(2)}_{m1}, \ldots, a^{(n)}_{m1} \|$. Так как $\| a^{(1)}_{m1}, \ldots, a^{(r)}_{m1} \| = E_{rr}$, то и $\operatorname{rang} T_{rn} = r$.

Пусть, наоборот, дано разложение $A_{mn} = S_{mr}T_{rn}$ и известно, что $\operatorname{rang} S_{mr} = \operatorname{rang} T_{rn} = r$. Так как каждый столбец матрицы A_{mn} является линейной комбинацией r столбцов матрицы S_{mr}, то $\operatorname{rang} A_{mn} \leqslant r$. Матрицы S_{mr} и T_{rn} имеют, по крайней мере, по одному минору r-го порядка, отличному от нуля. Так как произведение этих миноров будет минором r-го порядка матрицы A_{mn}, то это доказывает, что $\operatorname{rang} A_{mn} = r$.

Пусть теперь $A_{mn} = S^{(1)}_{mr}T^{(1)}_{rn}$ и $A_{mn} = S^{(2)}_{mr}T^{(2)}_{rn}$ — два каких-нибудь разложения матрицы A_{mn}, причем $\operatorname{rang} S^{(i)}_{mr} = \operatorname{rang} T^{(i)}_{rn} = r$ $(i = 1, 2)$. Тогда если

$$A_{mn} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(n)}_{m1} \|, \quad T^{(1)}_{rn} = \| b^{(1)}_{r1}, b^{(2)}_{r1}, \ldots, b^{(n)}_{r1} \|,$$

$$T^{(2)}_{rn} = \| d^{(1)}_{r1}, d^{(2)}_{r1}, \ldots, d^{(n)}_{r1} \|,$$

то

$$c^{(s)}_{m1} = S^{(1)}_{mr}b^{(s)}_{r1} = S^{(2)}_{mr}d^{(s)}_{r1} \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{111}$$

Пусть еще $A_{mn} = S_{mr}T_{rn}$ — третье специальное разложение (110). В этом разложении $S_{mr} = \| c_{m1}^{(1)}, c_{m1}^{(2)}, \ldots, c_{m1}^{(r)} \|$. Из формул (111) следует, что

$$S_{mr} = \| c_{m1}^{(1)}, c_{m1}^{(2)}, \ldots, c_{m1}^{(r)} \| = S_{mr}^{(1)} \| b_{r1}^{(1)}, b_{r1}^{(2)}, \ldots, b_{r1}^{(r)} \| =$$

$$= S_{mr}^{(2)} \| d_{r1}^{(1)}, d_{r1}^{(2)}, \ldots, d_{r1}^{(r)} \|. \tag{112}$$

Если $P_{rr} = \| b_{r1}^{(1)}, b_{r1}^{(2)}, \ldots, b_{r1}^{(r)} \|$ и $Q_{rr} = \| d_{r1}^{(1)}, d_{r1}^{(2)}, \ldots, d_{r1}^{(r)} \|$, то из того, что $S_{mr} = S_{mr}^{(1)}P_{rr}$ и $\operatorname{rang} S_{mr} = \operatorname{rang} S_{mr}^{(1)} = r > 0$, легко следует, что $\det P_{rr} \neq 0$; аналогично $\det Q_{rr} \neq 0$. А тогда из соотношений (112) получим, что $S_{mr}^{(1)}P_{rr} = S_{mr}^{(2)}Q_{rr}$ или $S_{mr}^{(1)} = S_{mr}^{(2)}K_{rr}$, где $K_{rr} = Q_{rr}P_{rr}^{-1}$. Если полученное соотношение подставить в равенство $S_{mr}^{(1)}T_{rn}^{(1)} = S_{mr}^{(2)}T_{rn}^{(2)}$, то будем иметь:

$$S_{mr}^{(2)} [K_{rr}T_{rn}^{(1)} - T_{rn}^{(2)}] = 0. \tag{113}$$

Так как $\operatorname{rang} S_{mr}^{(2)} = r$, то вычеркиванием $m - r$ строк из матрицы $S_{mr}^{(2)}$ можно получить матрицу M_{rr}, для которой $\det M_{rr} \neq 0$. Из равенства (113) следует, что $M_{rr} [K_{rr}T_{rn}^{(1)} - T_{rn}^{(2)}] = 0$, т. е. $T_{rn}^{(2)} = K_{rr}T_{rn}^{(1)}$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если λ_0 — нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности k_0, а матрицы $Y_{nk_0}(x)$ и $Z_{nk_0}(x)$ построены по формулам* (153), (154) *работы* [8] (§ 4) *из собственных и присоединенных функций операторов L_0 и L_0^* для собственных значений λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ соответственно, то для любой регулярной при $\lambda = \lambda_0$ скалярной функции $\varphi(\lambda)$ имеет место разложение*

$$\mathcal{D}_{k_0} \left[D'(\lambda)(M\lambda + N) Y(0, \lambda) \varphi(\lambda) \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)} \right] \Bigg|_{\lambda = \lambda_0} = P_{nk_0, k_0} C Q_{nk_0, k_0}^*. \tag{114}$$

Здесь $C = C_{k_0k_0}$ — некоторая квадратная матрица, зависящая от выбора φ; P_{nk_0,k_0} и Q_{nk_0,k_0} — матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\text{a)} \qquad E_{k_0}^* [\mathcal{D}_{k_0} Y(x, \lambda)] \big|_{\lambda=\lambda_0} P_{nk_0,k_0} = Y_{nk_0}(x),$$

$$\text{b)} \qquad E_1^* [\mathcal{D}_{k_0}^0 A^{*-1}(x) Y^{*-1}(x, \bar{\lambda})] \big|_{\lambda = \bar{\lambda}_0} Q_{nk_0,k_0} = Z_{nk_0}(x), \tag{115}$$

где матрицы E_{k_0} и E_1 состоят из k_0 блоков размерности $n \times n$ и имеют следующее строение:

$$E_{k_0} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ E \end{Vmatrix}, \quad E_1 = \begin{Vmatrix} E \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{Vmatrix} \quad (E \text{ — единичная матрица}),$$

а операторы $\mathcal{D}_{k_0}$ и $\mathcal{D}_{k_0}^0$ определяются по формулам (95) *из* [8].

Доказательство. Из равенства $\dfrac{D'(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = D^{-1}(\lambda)$ следует, что $D(\lambda)\, D'(\lambda) = \Delta(\lambda)\, E$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{D}_{k_0}$, для $\lambda = \lambda_0$ получим:

$$\mathcal{D}_{k_0} D(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} \mathcal{D}_{k_0} D'(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0.$$

Это значит, что каждый столбец матрицы $\mathcal{D}_{k_0} D'(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}$ является решением уравнения

$$\mathcal{D}_{k_0} D(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} c = 0. \tag{116}$$

Если $B_{nk_0,k_0}(x)$ — матрица, столбцами которой являются собственные функции задачи (91), (92) из [8] для $k = k_0$ и $\lambda = \lambda_0$, выбранные и расположенные так, как это требует формула (126) из [8], то последние n строк этой матрицы образуют матрицу $Y_{nk_0}(x)$, о которой идет речь в условии леммы, т. е.

$$Y_{nk_0}(x) = \overset{*}{E}_{k_0} B_{nk_0,k_0}(x). \tag{117}$$

Так как матрица $\mathcal{D}_{k_0} Y(x, \lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}$, в силу леммы 7 из [8], является фундаментальной матрицей системы (91) из [8] для $k = k_0$ и $\lambda = \lambda_0$, то, по определению собственной функции, найдется матрица P_{nk_0,k_0} ранга k_0, столбцами которой являются решения уравнения (116), такая, что

$$B_{nk_0,k_0}(x) = \mathcal{D}_{k_0} Y(x, \lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} P_{nk_0,k_0}. \tag{118}$$

Из формулы (117) следует, что матрица P_{nk_0,k_0} удовлетворяет соотношению (115).

Поскольку столбцы матрицы $\mathcal{D}_{k_0} D'(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы P_{nk_0,k_0}, то найдется такая матрица $R^{(1)}_{k_0,nk_0}$, что

$$\mathcal{D}_{k_0} D'(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = P_{nk_0,k_0} R^{(1)}_{k_0,nk_0}, \tag{119}$$

а тогда

$$\mathcal{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda + N)\, Y(0, \lambda)\, \varphi(\lambda) \frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = P_{nk_0,k_0} R^{(2)}_{k_0,nk_0},$$

где

$$R^{(2)}_{k_0,nk_0} = R^{(1)}_{k_0,nk_0} \mathcal{D}_{k_0}\left[(M\lambda + N)\, Y(0, \lambda)\, \varphi(\lambda) \frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Если окажется, что $0 < \operatorname{rang} R^{(2)}_{k_0,nk_0} = r < k_0$, то, пользуясь леммой 9, произведем дальнейшее разложение:

$$R^{(2)}_{k_0,nk_0} = T_{k_0,r} \cdot R^{(3)}_{r,nk_0}, \tag{120}$$

где $\operatorname{rang} R^{(3)}_{r,nk_0} = \operatorname{rang} T_{k_0,r} = r$. Получим:

$$\mathcal{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda + N)\, Y(0, \lambda)\, \varphi(\lambda) \frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = P_{nk_0,k_0} T_{k_0,r} R^{(3)}_{r,nk_0}. \tag{121}$$

Пользуясь равенством

$$\mathscr{D}_{k_0} F^*(\bar{\lambda})\big|_{\lambda=\lambda_0} = [\mathscr{D}^0_{k_0} F(\lambda)]^*\big|_{\lambda=\bar{\lambda}_0}, \qquad (122)$$

выполняющимся для любой аналитической функции $F(\lambda)$ (см. [8], формула (97)), и равенством

$$D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda) = Y^{-1}(l,\lambda)\,A^{-1}(l)(-V^*\lambda+W^*)\,D_1^{*-1}(\bar{\lambda}) \qquad (123)$$

(см. [8], § 3, формула (75) а)), левую часть выражения (121) перепишем так:

$$\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^* =$$

$$= \left\{\mathscr{D}_{k_0} D_1^{*'}(\bar{\lambda})\,\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[Y^{-1}(l,\lambda)\,A^{-1}(l)(-V^*\lambda+W^*)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta_1(\bar{\lambda})}\right]\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^* =$$

$$= \mathscr{D}^0_{k_0} D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\bar{\lambda}_0} S^{(0)}_{nk_0,nk_0}, \qquad (124)$$

где

$$S^{(0)}_{nk_0,nk_0} = \left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[Y^{-1}(l,\lambda)\,A^{-1}(l)(-V^*\lambda+W^*)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\bar{\lambda})}\right]\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*.$$

Из того, что $D_1(\lambda)\,D_1'(\lambda) = \Delta_1(\lambda)\,E$, следует, что $\mathscr{D}^0_{k_0} D_1(\lambda)\big|_{\lambda=\bar{\lambda}_0} \mathscr{D}^0_{k_0} D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0} = 0$, а это значит, что столбцы матрицы $\mathscr{D}^0_{k_0} D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\bar{\lambda}_0}$ являются решениями уравнения

$$\mathscr{D}^0_{k_0} D_1(\lambda)\big|_{\lambda=\bar{\lambda}_0}\, c = 0. \qquad (125)$$

Пусть столбцы матрицы Q_{nk_0,k_0} образуют ту полную систему решений уравнения (125), пользуясь которой была построена матрица $Z_{nk_0}(x)$. Тогда имеет место соотношение (115) b) и

$$\mathscr{D}^0_{k_0} D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0} = Q_{nk_0,k_0} S^{(1)}_{k_0,nk_0}, \qquad (126)$$

где $S^{(1)}_{k_0,nk_0}$ — некоторая прямоугольная матрица. Из формулы (124) получим:

$$\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^* = Q_{nk_0,k_0}\cdot S^{(2)}_{k_0,nk_0}, \qquad (127)$$

где $S^{(2)}_{k_0,nk_0} = S^{(1)}_{k_0,nk_0}\cdot S^{(0)}_{nk_0,nk_0}$. Пусть $0 < \operatorname{rang} S^{(2)}_{k_0,nk_0} = r_1 \leqslant k_0$. Тогда, пользуясь леммой 9, матрицу $S^{(2)}_{k_0,nk_0}$ можно разложить на два множителя: $S^{(2)}_{k_0,nk_0} = T^{(1)}_{k_0,r_1} S^{(3)}_{r_1,nk_0}$, где $\operatorname{rang} T^{(1)}_{k_0,r_1} = \operatorname{rang} S^{(3)}_{r_1,nk_0} = r_1$. Из соотношения (127) тогда следует, что

$$\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^* = Q_{nk_0,k_0} T^{(1)}_{k_0,r_1} S^{(3)}_{r_1,nk_0}. \qquad (128)$$

Из представлений (121) и (128) получим, что

$$\operatorname{rang}[P_{nk_0,k_0}T_{k_0,r}R^{(3)}_{r,nk_0}] = \operatorname{rang}[Q_{nk_0,k_0}T^{(1)}_{k_0,r_1}S^{(3)}_{r_1,nk_0}]. \tag{129}$$

Используя лемму 9, нетрудно подсчитать, что

$$\operatorname{rang}[P_{nk_0,k_0}T_{k_0r}\,R^{(3)}_{r,nk_0}] = r \text{ и } \operatorname{rang}[Q_{nk_0,k_0}T^{(1)}_{k_0,r_1}S^{(3)}_{r_1,nk_0}] = r_1.$$

Из равенства (129) следует, что $r_1 = r$, а тогда разложение (128) можно переписать так:

$$\mathcal{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda + N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = S^{(3)^*}_{r,nk_0}T^{(1)^*}_{k_0,r}Q^*_{nk_0,k_0}. \tag{130}$$

Сравнивая между собой правые части представлений (121) и (130) и пользуясь леммой 9, убеждаемся, что существует невырожденная матрица $K_{r,r}$, такая, что

$$S^{(3)^*}_{r,nk_0} = P_{nk_0,k_0}T_{k_0,r}K_{r,r}, \qquad R^{(3)}_{r,nk_0} = K_{r,r}T^{(1)^*}_{k_0,r}\,Q^*_{nk_0,k_0}. \tag{131}$$

А тогда из представления (128) (или (121)) получим, что

$$\mathcal{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda + N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = P_{nk_0,k_0}C_{k_0k_0}Q^*_{nk_0,k_0},$$

где $C_{k_0k_0} = T_{k_0,r}K_{r,r}T^{(1)^*}_{k_0,r}$ (в случае $r = 0$ или $r_1 = 0$ можно положить $C = 0$), что и требовалось доказать.

Как уже упоминалось ранее, из формул (79) для функции Грина следует, что она является мероморфной функцией λ с полюсами в собственных значениях оператора L_0. Вместе с функцией Грина $G(x,\xi,\lambda)$ мероморфными будут функции $G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}$ и $G(x,\xi,\lambda)\frac{1}{\lambda}$. Имеет место

Лемма 11. *Если λ_0 — нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности k_0 и собственное значение оператора L_0 кратности p_0, то*

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t} = -Y_{nk_0}(x)e^{I_0 t}B_0^{-1}Z^*_{nk_0}(\xi),\\ &\text{b)}\ \operatorname*{выч}_{\lambda\neq\lambda_0\neq 0} G(x,\xi,\lambda)\frac{1}{\lambda} = -Y_{nk_0}(x)\,I_0^{-1}B_0^{-1}Z^*_{nk_0}(\xi) \end{aligned} \tag{132}$$

$(0 \leqslant x,\ \xi \leqslant l,\ x \neq \xi)$, *где*

$$Y_{nk_0}(x) = \|\,Y_{nm_1}(x),\ Y_{nm_2}(x),\ \ldots,\ Y_{nm_{p_0}}(x)\,\|$$

и $Z_{nk_0}(\xi) = \|\,Z_{nm_1}(\xi),\ Z_{nm_2}(\xi),\ \ldots,\ Z_{nm_{p_0}}(\xi)\,\|$ *— матрицы, образованные из основной системы собственных матриц по формулам* (153), (154) *работы* [8], *а*

$$B_0 = [Y_{nk_0}(x),\ Z_{nk_0}(x)] = \int_0^l Z^*_{nk_0}(\xi)\, Y_{nk_0}(\xi)\, d\xi -$$

$$- [RZ_{nk_0}(0) + VZ_{nk_0}(l)]^* \, [MY_{nk_0}(0) + PY_{nk_0}(l)]$$

и

$$I_0 = \begin{Vmatrix} J_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_{p_0}} \end{Vmatrix},$$

где J_{m_i} $(i = 1, 2, \dots, p_0)$ — m_i-*мерные клетки Жордана.*

Доказательство. Для вычисления $\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)e^{\lambda t}$ воспользуемся выражением (79) для функции Грина. С этой целью преобразуем его следующим образом: умножим левую и правую части равенства $D(\lambda) = (M\lambda + N)\, Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q)\, Y(l, \lambda)$ на $D^{-1}(\lambda)$ и полученное выражение $-D^{-1}(\lambda)(P\lambda + Q)\, Y(l, \lambda) = D^{-1}(\lambda)(M\lambda + N)\, Y(0, \lambda) - E$ подставим в формулы (79). Будем иметь:

$$G(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda)\, D^{-1}(\lambda)(M\lambda + N)\, Y(0, \lambda)\, Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi) + H(x, \xi, \lambda) \tag{133}$$

где

$$H(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ -Y(x, \lambda)\, Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi) & (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{cases}$$

Так как $H(x, \xi, \lambda)$ — целая аналитическая функция λ для $x \neq \xi$ $(0 \leqslant x, \xi \leqslant l)$, то ее вычет равен нулю, а тогда по правилу вычисления вычетов (см., например, [7], стр. 311) будем иметь:

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)\, e^{\lambda t} =$$

$$= \frac{1}{(k_0 - 1)!} \frac{d^{k_0-1}}{d\lambda^{k_0-1}} \left[Y(x, \lambda)\, D'(\lambda)\, (M\lambda + N)\, Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi)\, e^{\lambda t} \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)} \right] \Bigg|_{\lambda=\lambda_0}. \tag{134}$$

Для преобразования выражения (134) воспользуемся следующей формулой, являющейся очевидным следствием определения оператора $\mathcal{D}_{k_0}$:

$$\frac{1}{(k_0 - 1)!} \frac{d^{k_0-1}}{d\lambda^{k_0-1}} F(\lambda) = E^*_{k_0} [\mathcal{D}_{k_0} F(\lambda)] \cdot E_1, \tag{135}$$

где $E_{k_0} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ E \end{Vmatrix}$, $E_1 = \begin{Vmatrix} E \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $F(\lambda)$ — произвольная аналитическая матрица-функция. Согласно этой формуле, в силу свойств оператора $\mathcal{D}_{k_0}$, выражение (134) можно переписать в виде

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)\, e^{\lambda t} =$$

$$= E^*_{k_0}\mathcal{D}_{k_0}\left[Y(x, \lambda) D'(\lambda)(M\lambda + N)\, Y(0, \lambda)\, Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)\, e^{\lambda t}\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} E_1 =$$

$$= E^*_{k_0}\mathcal{D}_{k_0} Y(x, \lambda)\,|_{\lambda=\lambda_0}\cdot \mathcal{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\, Y(0, \lambda)\, e^{\lambda t}\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}\times$$

$$\times\, \mathcal{D}_{k_0} Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)\,|_{\lambda=\lambda_0}\cdot E_1. \tag{136}$$

Для преобразования последнего множителя в выражении (136) применим формулу

$$\mathcal{D}_{k_0} H(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_0} E_1 = [\mathcal{D}^0_{k_0} H^*(\overline{\lambda})]^*|_{\lambda=\overline{\lambda}_0} E_1, \tag{137}$$

которая получается из (122), если в последней положить $F^*(\overline{\lambda}) = H(\lambda)$ и умножить левую и правую части на матрицу E_1. Пусть в формуле (137) $H(\lambda) = Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)$. Тогда

$$\mathcal{D}_{k_0} Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)\,|_{\lambda=\lambda_0} E_1 = [\mathcal{D}^0_{k_0} A^{*-1}(\xi)\, Y^{*-1}(\xi, \overline{\lambda})]^*|_{\lambda=\overline{\lambda}_0} E_1 =$$

$$= \{E^*_1 \mathcal{D}^0_{k_0} A^{*-1}(\xi)\, Y^{*-1}(\xi, \overline{\lambda})\}^*|_{\lambda=\overline{\lambda}_0}. \tag{138}$$

Пользуясь равенством (138) и формулами (114) и (115), соотношение (136) можно переписать в виде:

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)\, e^{\lambda t} =$$

$$= [E^*_{k_0}\mathcal{D}_{k_0} Y(x, \lambda)\,|_{\lambda=\lambda_0} P_{nk_0,k_0}]\, C_{k_0k_0}(t)\, [E^*_1\mathcal{D}^0_{k_0} A^{*-1}(\xi)\, Y^{*-1}(\xi, \overline{\lambda})]|_{\lambda=\overline{\lambda}_0} Q_{nk_0,k_0}]^* =$$

$$= Y_{nk_0}(x)\, C_{k_0k_0}(t)\, Z^*_{nk_0}(\xi). \tag{139}$$

Для доказательства формулы (132)а) остается только доказать, что $C_{k_0k_0}(t) = -e^{I_0 t} B_0^{-1}$. Для этого рассмотрим одну из матриц $Y_{nm_s}(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, p_0)$, из которых состоит матрица $Y_{nk_0}(x) = \| Y_{nm_1}(x), Y_{nm_2}(x), \ldots, Y_{nm_{p_0}}(x) \|$.

Пусть $Y_{nm_s}(x) = \| y^0_1(x), y^0_2(x), \ldots, y^0_{m_s}(x) \|$, где $y^0_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m_s)$ — столбцы. Составим из этих столбцов вектор

$$y_0(x) = \left\| \begin{matrix} y^0_1(x) \\ y^0_2(x) \\ \cdots \\ y^0_{m_s}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Из построения матриц $Y_{nm_s}(x)\,(s=1, 2, \ldots, p_0)$ следует, что вектор-функция $y_0(x)$ будет собственной функцией оператора (см. замечание к теореме 4)

$$L_{(m_s-1)}\,y(x) = A_{m_s}(x)\frac{dy(x)}{dx} + B_{m_s}(x)\,y(x) - \mathcal{J}^*_{m_s}(0)\,y(x), \tag{140}$$

где $y(x) = \begin{Vmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{m_s}(x) \end{Vmatrix}$, $\mathcal{J}^*_{m_s}(0) = \mathcal{D}_{m_s}(\lambda E)\,|_{\lambda=\lambda_0}$ (E — единичная матрица размерности $n \times n$), с областью определения $\Theta^{(m_s-1)}$, состоящей из тех вектор-функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$M_k A_k(0)\,y'(0) + [M_k B_k(0) + N_k]\,y(0) + P_k A_k(l)\,y'(l) +$$
$$+ [P_k B_k(l) + Q_k]\,y(l) = 0. \tag{141}$$

Собственным значением будет $\lambda = \lambda_0$. Ввиду этого

$$L_{(m_s-1)}\,y_0(x) - \lambda y_0(x) = (\lambda_0 - \lambda)\,y_0(x). \tag{142}$$

Поскольку функцией Грина оператора $L_{(m_s-1)}$ будет матрица $G_{m_s}(x, \xi, \lambda) = \mathcal{D}_{m_s}G(x, \xi, \lambda)$ (см. замечание к теореме 4), из равенства (142) и теоремы 4 следует, что

$$y_0(x) = [(\lambda_0 - \lambda)\,y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s}G(x, \xi, \lambda)\}^*]$$

или

$$[y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s}G(x, \xi, \lambda)\}^*] = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\,y_0(x) \tag{143}$$

(ср. [6], стр. 37). Умножим слева правую и левую части равенства (143) на $\mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)$. Так как

$$\mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)\,[y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s}G(x, \xi, \lambda)\}^*] = [y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s}G(x, \xi, \lambda)\}^*\{\mathcal{D}_{m_s}e^{\lambda t}E\}^*] =$$
$$= [y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s}G(x, \xi, \lambda)\,e^{\lambda t}\}^*],$$

то из равенства (143) следует, что

$$[y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s}G(x, \xi, \lambda)\,e^{\lambda t}\}^*] = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)\,y_0(x). \tag{144}$$

Нетрудно проверить правильность формул:

$$\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0}[f(\xi),\ \Phi^*(\xi, \lambda)] = [f(\xi),\ \{\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0}\Phi(\xi, \lambda)\}^*], \quad \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0}\mathcal{D}_{m_s}F(\lambda) = \mathcal{D}_{m_s}\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0}F(\lambda), \tag{145}$$

где $F(\lambda)$ — аналитическая по λ функция, $\Phi(\xi, \lambda)$ — аналитическая по λ и кусочно-непрерывная по (ξ, λ) $(0 \leqslant \xi \leqslant l;\ \lambda \neq \lambda_0)$ функция, $f(\xi)$ — кусочно-непрерывная функция. Из этих формул, приравнивая вычеты обеих частей равенства (144), получим, что

$$[y_0(\xi),\ \{\mathscr{D}_{m_s} \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t}\}^*] = -\mathscr{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)\,|_{\lambda=\lambda_0} y_0(x), \tag{146}$$

где

$$\mathscr{D}_{m_s} \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \operatorname*{выч}\limits_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname*{выч}\limits_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \operatorname*{выч}\limits_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t} \end{matrix} \right\|.$$

Так как

$$\mathscr{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)\,|_{\lambda=\lambda_0} y_0(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t}E & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t}{1!} e^{\lambda_0 t}E & e^{\lambda_0 t}E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{m_s-1}}{(m_s-1)!} e^{\lambda_0 t}E & \frac{t^{m_s-2}}{(m_s-2)!} e^{\lambda_0 t}E & \dots & e^{\lambda_0 t}E \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} y_1^0(x) \\ y_2^0(x) \\ \dots \\ y_{m_s}^0(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t} y_1^0(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_{2-k}^0(x) \\ \dots \\ \sum\limits_{k=0}^{m_s-1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_{m_s-k}^0(x) \end{matrix} \right\|, \tag{147}$$

то равенство (146) можно записать в виде

$$\left\| \begin{matrix} [y_1^0(\xi),\ \{\operatorname*{выч}\limits_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t}\}^*] \\ [y_2^0(\xi),\ \{\operatorname*{выч}\limits_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t}\}^*] \\ \dots \\ [y_{m_s}^0(\xi),\ \{\operatorname*{выч}\limits_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)\, e^{\lambda t}\}^*] \end{matrix} \right\| = - \left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t} y_1^0(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{t^k}{k!} y_{2-k}^0(x) \\ \dots \\ \sum\limits_{k=0}^{m_s-1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_{m_s-k}^0(x) \end{matrix} \right\|. \tag{148}$$

Если же n-мерные компоненты векторов в правой и левой частях последнего равенства расположить в виде столбцов матрицы, то, принимая во внимание, что

$$\left\| e^{\lambda_0 t} y_1^0(x),\ \frac{t}{1!} e^{\lambda_0 t} y_1^0(x) + e^{\lambda_0 t} y_2^0(x),\ \ldots,\ \sum_{k=0}^{m_s-1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_k^0(x) \right\| =$$

$$= \| y_1^0(x), y_2^0(x), \ldots, y_{m_s}^0(x) \| \cdot \left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda_0 t} & \ldots & \frac{t^{m_s-1}}{(m_s-1)!} e^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} & \ldots & \frac{t^{m_s-2}}{(m_s-2)!} e^{\lambda_0 t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_0 t} \end{matrix} \right\| =$$

$$= Y_{nm_s}(x) e^{J_{m_s} t},$$

где J_{m_s} — m_s-мерная клетка Жордана, получим, что

$$[Y_{nm_s}(\xi),\ \{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}} G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t}\}^*] = - Y_{nm_s}(x) e^{J_{m_s} t}. \tag{149}$$

Объединяя равенства (149) для $s = 1, 2, \ldots, p_0$ в одно, будем иметь:

$$[Y_{nk_0}(\xi),\ \{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}} G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t}\}^*] = - Y_{nk_0}(x) e^{I_0 t}. \tag{150}$$

Подставляя сюда найденное ранее выражение (139) для $\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t}$, получим:

$$[Y_{nk_0}(\xi),\ \{Y_{nk_0}(x) C_{k_0 k_0}(t) Z^*_{nk_0}(\xi)\}^*] = - Y_{nk_0}(x) e^{I_0 t}$$

или

$$Y_{nk_0}(x) C_{k_0 k_0}(t) B_0 = - Y_{nk_0}(x) e^{I_0 t},$$

где

$$B_0 = [Y_{nk_0}(\xi),\ Z_{nk_0}(\xi)].$$

Отсюда

$$Y_{nk_0}(x) \{C_{k_0 k_0}(t) B_0 + e^{I_0 t}\} = 0. \tag{151}$$

Поскольку столбцы матрицы $Y_{nk_0}(x)$ (см. [8], § 3) линейно независимы, из равенства (151) следует, что

$$C_{k_0k_0}(t)B_0+e^{I_0t}=0. \tag{152}$$

Из (152) вытекает, во-первых, что матрица B_0 — невырожденная, а, во-вторых, — что $C_{k_0k_0}(t)=-e^{I_0t}B_0^{-1}$. Формула (132) а) доказана.

Доказательство формулы (132) b) проводится по той же схеме. Заменяя в равенстве (139) функцию $e^{\lambda t}$ на $\frac{1}{\lambda}$ (все предыдущие вычисления в обоих случаях совпадают), получим:

$$\underset{\lambda=\lambda_0\neq 0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}=Y_{nk_0}(x)C_{k_0k_0}Z^*_{nk_0}(\xi), \tag{153}$$

где $C_{k_0k_0}$ в отличие от предыдущего случая, — постоянная матрица. Для вычисления ее используем тождество (143). Умножим его слева на матрицу $\mathscr{D}_{m_s}\left(\frac{1}{\lambda}E\right)$:

$$[y_0(\xi),\ \left\{\mathscr{D}_{m_s}G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*=\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\mathscr{D}_{m_s}\left(\frac{1}{\lambda}E\right)y_0(x),$$

приравняем вычеты обеих частей:

$$\left\|\begin{matrix}\left[y_1^0(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]\\ \left[y_2^0(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[y_{m_s}^0(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]\end{matrix}\right\|=-\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\lambda_0}y_1^0(x)\\ -\frac{1}{\lambda_0^2}y_1^0(x)+\frac{1}{\lambda_0}y_2^0(x)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{k=0}^{m_s-1}-\left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)^{k+1}y_{m_s-k}^0(x)\end{matrix}\right\|,$$

и, записывая n-мерные компоненты левой и правой части в виде столбцови двух матриц, получим равенство

$$\left[Y_{nm_s}(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]=-Y_{nm_s}(x)J_{m_s}^{-1}(\lambda_0). \tag{154}$$

Полагая в этом равенстве $s=1,\ 2,\ \ldots,\ p_0$ и объединяя все полученные таким образом равенства в одно, будем иметь:

$$\left[Y_{nk_0}(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]=-Y_{nk_0}(x)I_0^{-1}. \tag{155}$$

Подставляя сюда выражение для $\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)\frac{1}{\lambda}$ из формулы (153) и производя такие же преобразования, как над равенством (150) в предыдущем случае, придем к соотношению $Y_{nk_0}(x)(C_{k_0k_0}B_0 + I_0^{-1}) = 0$, из которого следует, что $C_{k_0k_0} = -I_0^{-1}B_0^{-1}$. Это доказывает формулу (132) b), а вместе с ней и лемму.

Следствие 1. *Если λ_0 — собственное значение оператора L_0, то*

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) = -Y_{nk_0}(x)B_0^{-1}Z^*_{nk_0}(\xi). \tag{156}$$

Следствие 2. *Если δ — кусочно-гладкий спрямляемый контур, на котором не лежит ни одно из собственных значений оператора L_0, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\delta G(x, \xi, \lambda)e^{\lambda t}d\lambda = -\sum_{s=s_1}^{s_2} Y^{(s)}_{nk_s}(x)e^{I_s t}B_s^{-1}Z^{(s)*}_{nk_s}(\xi), \tag{157}$$

где $s_1, s_1+1, \ldots, s_2-1, s_2$ — номера собственных значений λ_s, лежащих внутри контура δ, а $Y^{(s)}_{nk_s}(x)$, I_s, B_s, $Z^{(s)}_{nk_s}(\xi)$ — соответствующие им матрицы, построенные по формулам (153), (130), (172) *и* (154) *из* [8].

На основании леммы 11 легко доказывается следующая теорема о разложении функции Грина оператора L_0.

Теорема 6. *Если ни одно из собственных значений оператора L_0 не лежит на окружности C с центром в начале координат и если число $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L_0, то имеет место разложение*

$$G(x, \xi, 0) = \sum_{s=-N_1}^{N_2} Y^{(s)}_{nk_s}(x)I_s^{-1}B_s^{-1}Z^{(s)*}_{nk_s}(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}d\lambda, \tag{158}$$

где λ_s $(s = -N_1, -N_1+1, \ldots, N_2-1, N_2)$ — собственные значения оператора L_0, лежащие внутри окружности C, а матрицы $Y^{(s)}_{nk_s}(x)$, I_s, B_s и $Z^{(s)}_{nk_s}(\xi)$ строятся по формулам (153), (130), (172) *и* (154) *из* [8].

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}d\lambda$. Полюсами подынтегральной функции являются число 0 и собственные значения оператора L_0, а потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}d\lambda = G(x, \xi, 0) + \sum_{s=-N_1}^{N_2} \underset{\lambda=\lambda_s}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)\frac{1}{\lambda}.$$

Но, в силу формулы (132),

$$\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_s} G(x, \xi, \lambda)\frac{1}{\lambda} = -Y^{(s)}_{nk_s}(x) I_s^{-1} B_s^{-1} Z^{(s)*}_{nk_s}(\xi),$$

откуда следует (158). Это и доказывает теорему.

§ 4. Теорема разложения

Доказанные в предыдущем параграфе свойства функции Грина дают возможность доказать следующую теорему разложения.

Теорема 7. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то для каждой функции* $f(x) \in \Theta_0$ *разложение*

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y^{(s)}_{nk_s}(x)\, a_s, \tag{159}$$

где

$$a_s = [f(\xi),\ Z^{(s)}_{nk_s}(\xi) B_s^{*-1}], \tag{160}$$

сходится равномерно к $f(x)$ *при некоторой, не зависящей от выбора* $f(x)$, *группировке членов ряда* (159).

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 12. *Пусть* $G(\rho)$, *как и прежде* (см. теорему 5), — *область, полученная из комплексной плоскости* λ *после удаления из нее кружков радиуса* ρ *с центрами в собственных значениях оператора* L_0. *Тогда если краевые условия* (2) *регулярны и если* ρ *достаточно мало, то существует такая последовательность* $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ *концентрических окружностей с центром в начале координат, что:*

1) *каждая из окружностей целиком лежит в области* $G(\rho)$,

2) *в кольце между двумя последовательными окружностями лежит, по меньшей мере, один выброшенный кружок,*

3) $R_{k+1} - R_k < m < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где R_k — радиус окружности C_k $(k = 1, 2, \ldots)$, *а* m — *некоторое достаточно большое число.*

Доказательство. Пусть $h_0 = \sup|\lambda_{s+1} - \lambda_s|$ $(s = 0, \pm 1, \ldots)$. Из асимптотической формулы (60) для собственных значений λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ оператора L_0 следует, что $h_0 < +\infty$. Пусть, кроме того, $\{C_k^{(0)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — последовательность концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусами $R_k^{(0)} = hk$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $h > h_0$. Число $n(k)$ собственных значений λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$, лежащих между двумя последовательными окружностями $C_k^{(0)}$ и $C_{k+1}^{(0)}$, как нетрудно заключить из той же формулы (60), удовлетворяет неравенству $1 \leqslant n(k) < n_0 < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где n_0 — достаточно большое число. Возьмем $\rho < \frac{h}{4n_0}$ и построим еще одну последовательность окружностей $\{C_k^{(1)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ с радиусами $R_k^{(1)} = \frac{h}{2n_0} k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда хотя бы одна из окружностей $C_k^{(1)}$ (обозначим ее через C_{k_0}), лежащих между двумя последовательными окружностями $C_{2k_0}^{(0)}$ и $C_{2k_0+1}^{(0)}$, будет целиком лежать в области $G(\rho)$. (В самом деле, между $C_{k_0}^{(0)}$ и $C_{k_0+1}^{(0)}$ лежит $2n_0-1$ окружностей из последовательности $C_k^{(1)}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Если бы каждая из них пересекала выброшенный кружок радиуса ρ, то между окружностями $C_{k_0}^{(0)}$ и $C_{k_0+1}^{(0)}$ было бы расположено не менее, чем $2n_0-1>n_0$ кружков, что невозможно.) Произведя такой выбор для $k_0=1, 2, \ldots,$ получим последовательность окружностей $\{C_s\}$ $(s=1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих всем условиям леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть C_k $(k=1, 2, \ldots)$ — последовательность окружностей, удовлетворяющих условиям предыдущей леммы. Тогда если число $\lambda=0$ не является собственным значением оператора L_0, то для каждой из окружностей C_k $(k=1, 2, \ldots)$ можно построить разложение (158) функции Грина оператора L_0:

$$G(x, \xi, 0)=\sum_{s=-m_k^{(0)}}^{m_k^{(1)}} Y_{nk_s}^{(s)}(x) I_s^{-1} B_s^{-1} Z_{nk_s}^{(s)*}(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}\,d\lambda, \tag{161}$$

где $-m_k^{(0)}, -m_k^{(0)}+1, \ldots, m_k^{(1)}-1, m_k^{(1)}$ — номера собственных значений, лежащих внутри окружности C_k.

Пусть $f(x)\in\Theta_0$ и $g(x)=Lf(x)\equiv A(x)f'(x)+B(x)f(x)$. Из определения (67) функции Грина следует, что

$$f(x)=[g(\xi), G^*(x, \xi, 0)]. \tag{162}$$

Подставляя сюда разложение (161), получим, что

$$f(x)=\sum_{s=-m_k^{(0)}}^{m_k^{(1)}} Y_{nk_s}^{(s)}(x) I_s^{-1} b_s+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{[g(\xi), G^*(x, \xi, \lambda)]}{\lambda}\,d\lambda, \tag{163}$$

где $b_s=[g(\xi), Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)B_s^{*-1}]$ $(s=-m_k^{(0)}, -m_k^{(0)}+1, \ldots, m_k^{(1)})$. Но на основании тождества (156) из [8] имеем:

$$I_s^{-1}b_s=[L_0f(\xi), Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)B_s^{*-1}I_s^{*-1}]=[f(\xi), L_0^*Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)B_s^{*-1}I_s^{*-1}]=$$

$$=[f(\xi), Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)I_s^*B_s^{*-1}I_s^{*-1}]. \tag{164}$$

Покажем, что $I_s^*B_s^{*-1}I_s^{*-1}=B_s^{*-1}$. Для этого достаточно показать, что матрицы B_s и I_s перестановочны. Из определения матриц $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$, $Z_{nk_s}^{(s)}(x)$ и I_s

следует, что

$$LY^{(s)}_{nk_s}(x) = Y^{(s)}_{nk_s} I_s, \quad L^* Z^{(s)}_{nk_s}(x) = Z^{(s)}_{nk_s}(x) I^*_s.$$

Но из тождества (156) работы [8] имеем:

$$[LY^{(s)}_{nk_s}(x),\ Z^{(s)}_{nk_s}(x)] = [Y^{(s)}_{nk_s}(x),\ L^* Z^{(s)}_{nk_s}(x)],$$

а это значит, что $[Y^{(s)}_{nk_s}(x) I_s,\ Z^{(s)}_{nk_s}(x)] = [Y^{(s)}_{nk_s}(x),\ Z^{(s)}_{nk_s} I^*_s]$, т. е. $B_s I_s = I_s B_s$. Таким образом, доказано, что $I^*_s B^{*-1}_s I^{*-1}_s = B^{*-1}_s$.

Из соотношений (164) следует тогда, что $I_s^{-1} b_s = a_s$, где $a_s = [f(\xi),\ Z^{(s)}_{nk_s}(\xi) B^{*-1}_s]$, а из равенства (163) будем иметь разложение

$$f(x) = \sum_{s=-m_k^{(0)}}^{m_k^{(1)}} Y^{(s)}_{nk_s}(x) a_s + f_k(x), \tag{165}$$

где

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{[g(\xi),\ G^*(x,\ \xi,\ \lambda)]}{\lambda}\, d\lambda. \tag{166}$$

Докажем, что при $k \to \infty$ $\| f_k(x) \| \to 0$ равномерно относительно $x \in [0,\ l]$. Для этого, сделав в интеграле (166) замену $\lambda = R_k e^{i\varphi}$, где R_k — радиус окружности C_k, получим:

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [g(\xi),\ G^*(x,\ \xi,\ R_k e^{i\varphi})]\, d\varphi. \tag{167}$$

Отсюда на основании леммы 8 следует, что при $k \to \infty$ $\| f_k(x) \| \to 0$ равномерно по $x \in [0,\ l]$. Это доказывает равномерную сходимость ряда (159) при такой группировке, когда члены этого ряда, соответствующие собственным значениям, лежащим между двумя последовательными окружностями C_k и C_{k+1}, объединяются в одну группу. А это значит, что для того случая, когда $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L_0, теорема доказана. Если же $\lambda = 0$ является собственным значением оператора L_0, то рассмотрим разложение функции $f(x) \in \Theta_0$ по собственным и присоединенным функциям оператора $L_0 - \varepsilon E$, где ε не является собственным значением оператора L_0. Это разложение совпадает с разложением (159), ибо собственные и присоединенные функции у операторов L_0 и $L_0 - \varepsilon E$ — одни и те же. Но, с другой стороны, поскольку $\lambda = 0$ не будет собственным значением оператора $L_0 - \varepsilon E$, на это второе разложение переносится приведенное выше доказательство. Теорема доказана.

Замечание. Группировка членов в разложении (159) не зависит от выбора разлагаемой функции. Более того, в случае регулярности условий

(65) она переносится и на разложение любой функции $g(x) \in \Theta_1$ по собственным и присоединенным функциям оператора $\overset{*}{L_0}$. Во всех последующих рассуждениях будем считать, что эта группировка остается неизменной, и будем называть ее группировкой в смысле теоремы разложения.

Теорема разложения дает возможность исследовать некоторые вопросы сходимости разложения (159) в пространстве $D_2(0, l)$ для $f(x) \in D_2(0, l)$. Исследуем, например, вопрос о полноте и замкнутости системы собственных и присоединенных функций оператора L_0 в этом пространстве.

Определение 1. Система функций $\{\varphi_k(x)\}$ $(\varphi_k(x) \in D_2(0,l))$ $(k = 1, 2, \ldots)$ называется полной в пространстве $D_2(0, l)$, если любую функцию $f(x) \in D_2(0, l)$ можно представить в виде предела (в смысле $D_2(0, l)$) последовательности линейных комбинаций функций $\varphi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 8. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора L_0 полна в пространстве $D_2(0, l)$.*

Доказательство этой теоремы является очевидным следствием теоремы разложения 7 и следующей леммы.

Лемма 13. *Каждую функцию $f(x) \in D_2(0, l)$ можно представить в виде предела (в смысле сходимости в пространстве $D_2(0, l)$) последовательности функций из Θ_0.*

Доказательство. Найдем векторы g_0, g_1, g_0' и g_1' такие, чтобы они удовлетворяли равенствам

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad Mg_0 + Pg_1 = Mf(0) + Pf(l), \\ &\text{b)} \quad MA(0)g_0' + [MB(0) + N]g_0 + PA(l)g_1' + [PB(l) + Q]g_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Для доказательства того, что эта система разрешима и такие векторы найдутся, положим

$$A(0)g_0' + B(0)g_0 = 0, \quad A(l)g_1' + B(l)g_1 = 0. \tag{169}$$

Тогда из уравнений (168) следует, что

$$\begin{aligned} &M_{qn}g_0 + P_{qn}g_1 = M_{qn}f(0) + P_{qn}f(l), \\ &Ng_0 + Qg_1 = 0, \end{aligned} \tag{170}$$

где $\|M, P\| = \left\| \begin{matrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{matrix} \right\|$ (см. [8], § 1). Так как, согласно § 1 работы [8], $\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} M_{qn} & P_{qn} \\ N & Q \end{matrix} \right\| = n + q$, то система (170) разрешима, и мы найдем из нее векторы g_0 и g_1, а тогда из системы (169) следует, что $g_0' = -A^{-1}(0)B(0)g_0$ и $g_1' = -A^{-1}(l)B(l)g_0$.

Будем теперь аппроксимировать $f(x)$ в смысле $L_2(0, l)$ непрерывно дифференцируемыми функциями $g(x)$, удовлетворяющими условиям $g(0)=g_0$, $g'(0)=g_0'$, $g(l)=g_1$, $g'(l)=g_1'$. Тогда $g(x)\in\Theta_0$ и $M[f(0)-g(0)]+ +P[f(l)-g(l)]=0$ и, поскольку аппроксимация возможна с любой степенью точности, лемма доказана.

Определение 2. Система функций $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $\varphi_i(x)\in D_2(0, l)$, называется замкнутой в пространстве $D_2(0, l)$, если из условий $[\varphi_i(x), g_0(x)]=0$, выполняющихся для $i=1, 2, \ldots$, следует, что $\| g_0(x)\|_{D_2^*(0, l)}=0$.

Теорема 9. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора L_0 замкнута в пространстве $D_2(0, l)$.*

Доказательство. Пусть для $s=0, \pm 1, \ldots$ и для $g_0(x)\in D_2^*(0, l)$ имеют место равенства $[Y_{nk_s}^{(s)}(x), g_0(x)]=0$ и пусть $f(x)\in D_2(0, l)$. Так как в случае регулярных краевых условий система функций, состоящая из столбцов матриц $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$, полна в пространстве $D_2(0, l)$, то найдется последовательность $\{f_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $f_i(x)\in\Theta_0$, линейных комбинаций функций этой системы, сходящаяся по норме пространства $D_2(0, l)$ к функции $f(x)$, т. е. $\| f_i(x)-f(x)\|_{D_2(0,l)}\to 0$ при $i\to\infty$. Так как $[f_i(x), g_0(x)]=0$ для $i=1, 2, \ldots$, то и $[f(x), g_0(x)]=0$. Таким образом, для всякой функции $f(x)\in D_2(0, l)$ имеет место равенство $[f(x), g_0(x)]=0$, а тогда из свойств билинейной формы $[f(x), g(x)]$ ($f(x)\in D_2(0, l)$, $g(x)\in D_2^*(0, l)$) (см. [8], § 2) следует, что $\| g_0(x)\|_{D_2^*(0,l)}=0$. Теорема доказана.

Определение 3. Система функций $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ называется базисом пространства $D_2(0, l)$, если любая функция $f(x)\in D_2(0, l)$ разлагается единственным образом в ряд по системе функций $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, причем сходимость этого ряда понимается по норме пространства $D_2(0, l)$ (возможно, с некоторой группировкой членов, не зависящей от выбора функции $f(x)$).

Теорема 10. *Если краевые условия* (65) *регулярны и ряд*

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, a_s, \tag{159}$$

где $a_s=[f(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x)\, B^{*-1}]$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$ и $f(x)\in D_2(0, l)$, сходится по норме пространства $D_2(0, l)$ при такой же группировке, как и в теореме разложения, то сумма этого ряда совпадает с функцией $f(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)=f(x)-\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, a_s$. Тогда

$$[\varphi(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x)]=\left[f(x)-\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, a_s,\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)\right]=0 \quad (s=0, \pm 1, \ldots).$$

Из замкнутости в пространстве $D_2^*(0, l)$ системы собственных и присоединенных функций оператора L_0^* следует, что $\|\varphi(x)\|_{D_2(0, l)}=0$. Это и доказывает теорему.

Замечание. В продолжении настоящей работы, как следствие более общей теоремы, будет получено утверждение, что в случае регулярных краевых условий для любой функции $f(x) \in D_2(0, l)$ разложение (159) сходится по норме пространства $D_2(0, l)$ (при такой же группировке, как и в теореме разложения 7). А поскольку единственность разложения показана в конце работы [8], это значит, что в случае регулярных краевых условий (2) система собственных и присоединенных функций оператора L_0 образует базис пространства $D_2(0, l)$.

(Поступило в редакцию 20/V 1957 г.)

Литература

1. G. D. Birkhoff, R. E. Langer, The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., **58** (1923), 51—128.
2. В. С. Пугачев, Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Матем. сб., **15** (**57**) (1944), 13—54.
3. И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, 1954.
4. J. D. Tamarkine, Some general problems of the theory of the ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeitschr., **27** (1927), 1—54.
5. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.
6. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Гостехиздат, 1954.
7. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1950.
8. В. Ф. Жданович, Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. I, Матем. сб., **47** (**89**) (1959), 307—354.