1961 г. июль—август *т. XVI, вып. 4 (100)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

О ФАКТОРИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ

В. Ф. Жданович

В линейном дифференциальном выражении

$$Ly(x) = A_0(x)\frac{d^k y(x)}{dx^k} + A_1(x)\frac{d^{k-1} y(x)}{dx^{k-1}} + \ldots + A_k(x)\, y(x) \tag{1}$$

коэффициенты $A_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, k)$ будем считать n-мерными квадратными матрицами, элементами которых являются комплекснозначные функции от x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$; $y(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ будет означать n-мерную вектор-функцию. В настоящей заметке доказывается

Теорема. *Если в дифференциальном выражении* (1) *коэффициенты* $A_i(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ i=0, 1, \ldots, k)$ *непрерывны на сегменте* $[0, 1]$ *и* $\det A_0(x) \neq 0$ *для всех* $x \in [0, 1]$, *то существуют матрицы* $B_i(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ i=1, 2, \ldots, k)$ *с* i *раз непрерывно дифференцируемыми элементами* (*соответственно*) *такие, что*

$$Ly(x) = A_0(x)\left(\frac{d}{dx} + B_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx} + B_2(x)\right)\ldots\left(\frac{d}{dx} + B_k(x)\right)y(x). \tag{2}$$

Разложение (2) *неединственно и зависит от* $p=(k-1)!\,(2n^2)^{k-1}$ *действительных параметров, образующих многообразие* p *измерений.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно доказать возможность разложения

$$Ly(x) = \left(A_0(x)\frac{d}{dx} + Q_0(x)\right)\left(\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + Q_1(x)\frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} + \ldots + Q_{k-1}(x)\right)y(x), \tag{3}$$

где $Q_i(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ i=0, 1, \ldots, k-1)$ — матрицы с непрерывно дифференцируемыми элементами. Производя дифференцирование и сравнивая коэффициенты при производных одного и того же порядка в выражениях (1) и (3), для нахождения матриц $Q_i(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ i=0, 1, \ldots, k-1)$ получим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &Q_0(x) + A_0(x)Q_1(x) = A_1(x), \\ &Q_0(x)Q_{i-1}(x) + A_0(x)Q_i(x) + A_0(x)\frac{d}{dx}Q_{i-1}(x) = A_i(x) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (i=2,\ 3, \ldots,\ k-1), \\ &Q_0(x)Q_{k-1}(x) + A_0(x)\frac{d}{dx}Q_{k-1}(x) = A_k(x). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Введем новые неизвестные матрицы $U_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ по формулам

$$Q_0(x)=A_0(x)U_0^{-1}(x)\frac{d}{dx}U_0(x),\quad Q_i(x)=U_0^{-1}(x)U_i(x)\quad (i=1, 2, \ldots, k-1).$$

Получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} U_i &= -\frac{d}{dx}U_{i-1}+U_0A_0^{-1}(x)A_i(x)\quad (i=1, 2, \ldots, k-1),\\ 0 &= -\frac{d}{dx}U_{k-1}+U_0A_0^{-1}(x)A_k(x), \end{aligned}\right\}\tag{5}$$

с общим решением $U_i=\sum\limits_{j=0}^{k-1}C_jV_{ji}(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1;\ i=0,\ 1, \ldots, k-1)$, где $V_{ji}(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ $(i,\ j=0,\ 1, \ldots, k-1)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, для которых $\det\|V_{ji}(x)\|\neq 0$ для всех $x\in[0, 1]$ и где C_j $(j=0, 1, \ldots, k-1)$ — произвольные постоянные комплексные матрицы. Теперь для доказательства возможности разложения (3) достаточно доказать, что существует решение системы (5), для которого $\det U_0(x)\neq 0$ для всех $x\in[0, 1]$. Пусть Ω множество систем матриц $\{C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}\}$ таких, что хотя бы для одного $x\in[0, 1]$

$$\det U_0(x)=\det\sum_{j=0}^{k-1}C_jV_{j0}(x)=0,\tag{6}$$

и пусть R — евклидово (действительное) $2N$-мерное ($N=kn^2$) пространство, которое образуют всевозможные системы матриц $(C_0, C_1, \ldots, C_{k-1})$, а $\xi=(\xi_1\ \xi_1 \ldots, \xi_N)$ — точка этого пространства. Тогда для доказательства первой части теоремы достаточно доказать, что существует точка $\xi=\xi_0\in R$, не принадлежащая Ω. Последнее же утверждение будет доказано, если мы докажем, что $2N$-мерная мера Лебега множества Ω равна нулю.

Для доказательства этого изучим подробнее множество решений (ξ, x) уравнения (6), которое перепишем в виде

$$\Phi(\xi, x)\equiv\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{N}M_{i_1i_2\ldots i_n}(x)\,\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_n}=0\tag{7}$$

$(0\leqslant x\leqslant 1)$. Коэффициенты $M_{i_1i_2\ldots i_n}(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ в этом уравнении отличаются от тождественного нуля только в том случае, когда $i_p\neq i_q$ и $p\neq q$ $(p,\ q=1, 2, \ldots, N)$, причем для любого $x\in[0, 1]$ эти коэффициенты одновременно в нуль не обращаются, так как они являются n-мерными минорами прямоугольной матрицы $\|V_{00}(x),\ V_{10}(x), \ldots, V_{k-10}(x)\|$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, имеющей для каждого $x\in[0,\ 1]$ ранг n. Пусть $\xi=\xi^0$, $x=x_0$ удовлетворяют уравнению (7) и $i_1^0,\ i_2^0, \ldots, i_n^0$ — тот набор индексов, для которого $M_{i_1^0i_2^0\ldots i_n^0}(x_0)\neq 0$. Так как $\Phi(\xi, x)$ — однородная функция аргументов $\xi_1\ \xi_2, \ldots, \xi_N$, то уравнение (7) при $\xi=\xi^0=(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_N^0)$ и $x=x_0$ можно записать в виде

$$\xi_{i_1^0}^0=-\frac{\sum\limits_{s\neq i_1^0}\xi_s^0\Phi_s(\xi^0, x_0)}{\Phi_{i_1^0}(\xi_1^0, x_0)},\tag{8}$$

где $\Phi_s(\xi, x)=\dfrac{\partial\Phi(\xi, x)}{\partial\xi_s}$, если только $\Phi_{i_1^0}(\xi^0, x_0)\neq 0$. Если же $\Phi_{i_1^0}(\xi^0, x_0)=0$, то, поскольку $\Phi_{i_1^0}(\xi, x)$ однородная функция от ξ_i $(i=1, 2, \ldots, N,\ i\neq i_1^0)$, получим, что

$$\xi^0_{i^0_2} = -\frac{\sum\limits_{s \neq i^0_2} \xi^0_s \Phi_{i^0_1 s}(\xi^0, x_0)}{\Phi_{i^0_1 i^0_2}(\xi^0, x_0)}, \tag{9}$$

где $\Phi_{i^0_1 s}(\xi, x) = \frac{\partial \Phi_{i^0_1}(\xi, x)}{\partial \xi_s}$ (если только $\Phi_{i^0_1 i^0_2}(\xi^0, x_0) \neq 0$). Если, продолжая таким образом, мы не остановимся до $(n-1)$-го шага, то получим, что $\xi = \xi^0$, $x = x_0$ удовлетворяют уравнениям

$$\Phi(\xi, x) = 0, \quad \Phi_{i^0_1}(\xi, x) = 0, \ldots, \Phi_{i^0_1 i^0_2 \ldots i^0_{n-1}}(\xi, x) = 0.$$

Но последнее из этих уравнений — линейное, причем коэффициентом при $\xi_{i^0_n}$ является функция $M_{i^0_1 i^0_2 \ldots i^0_n}(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, которая при $x = x_0$ в нуль не обращается. А это значит, что из равенства $\Phi_{i^0_1 i^0_2 \ldots i^0_{n-1}}(\xi^0, x_0) = 0$ следует, что

$$\xi^0_{i^0_n} = -\frac{\sum\limits_{s \neq i^0_n} \xi^0_s \Phi_{i^0_1 i^0_2 \ldots i^0_{n-1} s}(\xi^0, x)}{M_{i^0_1 i^0_2 \ldots i^0_n}(x_0)}. \tag{10}$$

Из этих рассуждений и формул (8), (9) и последующих (если нужно, то и до формулы (10)) следует, что если $\xi = \xi^0$, $x = x_0$ есть решение уравнения (7), то $\xi = \xi^0$, $x = x_0$ есть также решение уравнения вида

$$\xi_s = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_N; x), \tag{11}$$

где функция $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_N; x)$ определена и непрерывно дифференцируема по всем аргументам в некоторой области H_s $(2N-1)$-мерного пространства с координатами $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_N; x)$, открытой по отношению к множеству $G_s(x \in [0, 1]; -\infty < |\xi_i| < +\infty; i = 1, 2, \ldots, N; i \neq s)$. Если же теперь менять ξ^0, x_0 так, чтобы ξ^0, x_0 оставалось решением уравнения (7), то ξ^0, x_0 будем удовлетворять уравнениям вида (8), (9) и т. д. до (10), только, вообще говоря, с другими индексами. Так как таких уравнений лишь конечное число, то это значит, что нами доказана

Лемма 1. *Все решения (ξ, x) уравнения (7) содержатся среди решений конечного числа уравнений вида*

$$\xi_s = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_N; x), \tag{11}$$

где функция $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_N; x)$ определена и непрерывно дифференцируема по всем аргументам в некоторой открытой относительно множества $G_s(x \in [0, 1]; -\infty < |\xi_i| < +\infty; i = 1, 2, \ldots, N; i \neq s)$ области H_s $(2N-1)$-мерного пространства T_s, точкой которого является $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_N; x)$.

Если же рассмотреть последовательность разбиений пространства T_s на $2N-1$ кубов посредством гиперплоскостей

$$x = \frac{k_1}{n}, \quad \xi'_j = \frac{k'_j}{n}, \quad \xi''_j = \frac{k''_j}{n}, \quad \text{где } \xi_j = \xi'_j + i\xi''_j$$

$$(k_1, k'_j, k''_j = 0, \pm 1, \ldots; j = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, N;$$
$$n = 1, 2, 2^2, \ldots, 2^m, \ldots),$$

то, так же как это делается в книге [1] (стр. 351), получим, что множество H_s можно представить в виде объединения не более чем счетного множества замкнутых кубов. Пусть аргументы в формуле (11) изменяются в одном из полученных замкнутых кубов. Тогда точка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ будет пробегать (в силу непрерывности $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_N; x)$) замкнутое ограниченное множество (кусок гиперповерхности) в пространстве R. Таким образом, получается

Лемма 2. *Множество Ω содержится в объединении не более чем счетного множества замкнутых ограниченных множеств L_r $(r = 1, 2, \ldots)$ (кусков гиперповерхностей) в пространстве R, допускающих представление*

$$\xi_{s_r} = F_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s_r-1}, \xi_{s_r+1}, \ldots, \xi_N; x) \tag{12}$$

$(r = 1, 2, \ldots)$, *где функции $F_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s_r-1}, \xi_{s_r+1}, \ldots, \xi_N; x)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ определены и непрерывно дифференцируемы на замкнутом кубе (каждая, вообще говоря, на своем) $(2N-1)$-мерного пространства точек с координатами* $(\xi_1', \xi_1'', \xi_2', \xi_2'', \ldots, \xi_{s_r-1}', \xi_{s_r-1}'', \xi_{s_r+1}', \xi_{s_r+1}'', \ldots, \xi_N', \xi_N''; x)$, *где* $\xi_m = \xi_m' + i\xi_m''$ $(m = 1, 2, \ldots, N;\ m \neq s_r)$.

Рассмотрим одно из множеств L_r (кусок гиперповерхности), о которых говорилось в лемме 2. Отделяя действительную и мнимую части в формуле (12), получим параметрические уравнения этого куска

$$\left.\begin{aligned} \xi_{s_r}' &= \operatorname{Re} F_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s_r-1}, \xi_{s_r+1}, \ldots, \xi_N; x), \\ \xi_{s_r}'' &= \operatorname{Im} F_r(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s_r-1}, \xi_{s_r+1}, \ldots, \xi_N; x). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Так как правые части формул (13) непрерывно дифференцируемы, то гиперповерхность имеет в каждой своей точке касательную гиперплоскость. Для каждой точки $\xi = \xi_0$, поверхности L_r построим замкнутое множество Σ_r точек ξ этой поверхности таких, что нормали в точках ξ и ξ_0 образуют угол, не превосходящий $\frac{\pi}{4}$. Поскольку множество Σ_r содержит открытое по отношению к L_r множество Σ_r' точек ξ из L_r таких, что угол между нормалями в точках ξ и ξ_0 меньше $\frac{\pi}{4}$, то, применяя теорему Бореля, получим, что кусок гиперповерхности L_r можно представить в виде объединения конечного числа замкнутых кусков L_{rl} $(l = 1, 2, \ldots, h_r)$, каждый из которых обладает тем свойством, что он проектируется взаимно однозначно на одну из своих касательных гиперплоскостей. Возьмем эту касательную гиперплоскость за новую координатную плоскость. Тогда уравнение куска L_{rl} будет иметь вид

$$\sigma_{2N} = f_{rl}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2N-1}),$$

где функция $f_{rl}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2N-1})$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой замкнутой ограниченной области, а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2N}$ — новые координаты в пространстве R. Но такой кусок гиперповерхности имеет ограниченную $(2N-1)$-мерную площадь (см. [2], гл. V), а это значит, что он имеет нулевую $2N$-мерную меру Лебега. Объединяя все вышесказанное, получим, что множество Ω можно представить в виде объединения не более чем счетного множества замкнутых множеств, имеющих нулевую $2N$-мерную меру Лебега, а это значит, что $2N$-мерная мера Лебега множества Ω также будет нулевой. Первая часть теоремы доказана.

Заметим теперь, что множество Ω — замкнутое, но тогда множество $\Lambda = R \setminus \Omega$ — открытое и, как доказано, не пустое и, значит, имеет размерность $2N = 2n^2k$. Так как каждой точке $\xi \in \Lambda$ соответствует одно и только одно решение системы (5) со свойством $\det U_0(x) \neq 0$, а при переходе от системы (5) к системе (4) число параметров (действительных) уменьшается на $2n^2$, то размерность многообразия параметров, от которых зависит разложение (3), будет $(k-1)\,2n^2$. Если же в разложении (3) выделить еще один множитель первого порядка, то для нового разложения пространство параметров увеличит размерность в $(k-2)\,2n^2$ раз. Продолжая разложение, получим, что многообразие параметров разложения (2) будет иметь размерность $(k-1)!\,(2n^2)^{k-1}$. Теорема доказана.

Если же в дифференциальных выражениях (1) и (2) рассматривать только действительные матрицы $A_i(x)$ и $B_{i+1}(x)$ $(i=0, 1, \ldots, k-1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$, то, как показывает пример $Ly = y'' + a^2y$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ a \geqslant \pi)$, разложение (2) не всегда возможно[1]).

Поступило в редакцию 18 ноября 1959 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.

[2] С. Сакс, Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.

[3] G. Mammana, Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori e applicazione relative allo studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zs. **33** (1931), 186—231.

[1]) О разложении действительного одномерного дифференциального выражения на действительные множители см. работу [3], в которой, между прочим, доказано разложение (2) в однородном случае.