

Таким образом, в общем случае, во-первых, нельзя пренебречь зависимостью между отсчетами случайного процесса, во-вторых, выражения для вычисления параметра размытости, полученные при $\rho = 1$, на практике дают приемлемые результаты для случайных процессов, коэффициенты корреляции между соседними отсчетами которых достаточно близки к единице. В частности, как следует из табл. 1, 2, параметры размытости $h_{(12)}$ и $h_{(14)}$ могут использоваться в качестве аппроксимаций для h_{MISE} в случае, когда $\Delta = 1/250$ и меньше.

1. Turlach B. A. Bandwidth selection in kernel density estimation: a review. Technical report. Louvain-la-Neuve, 1993.
2. Hardle W., Linton O. Handbook of Econometrics. 1994. Vol. 4. Chap. 38. P. 2297.
3. Krasnogir E. // Proceedings of the international conf. on computer data analysis and modeling. Minsk, 2007. Vol. 1. P. 132.
4. Vasicek O. // J. of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177.
5. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. // Econometrica. 1985. Vol. 53. № 2. P. 385.
6. Ahn D.-H., Gao B. // Rev. Financial Studies. 1999. Vol. 12. № 4. P. 721.
7. Медведев Г. А. Математические основы финансовой экономики: в 2 ч. Ч. 2. Определение рыночной стоимости ценных бумаг. Минск, 2003. С. 174.
8. Медведев Г. А. Диффузионные модели в финансовом анализе. Минск, 2010.
9. Ait-Sahalia Y. // J. of Finance. 1999. Vol. 54. № 4. P. 1361.
10. Ait-Sahalia Y. // Rev. Financial Studies. 1996. Vol. 9. № 2. P. 385.
11. Sun T.-S. // Rev. Financial Studies. 1992. Vol. 5. P. 581.
12. Duffie D., Singleton K. J. // J. of Finance. 1997. Vol. 52. № 4. P. 1287.
13. Мильштейн Г. Н. // Теория вероятностей и ее применение. 1978. Т. 23. № 2. С. 414.

Поступила в редакцию 10.05.12.

Евгений Григорьевич Красногир – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики.

УДК 512.55

В. М. ШИРЯЕВ

3-КОММУТАТИВНЫЕ m -КОЛЬЦА

An m -ring, in which any superposition of its elements to be preserved under the even substitutions, is called 3-commutative. It is shown, that the class of such m -rings is a subvariety of the variety of null-symmetric m -rings, strictly containing the variety of commutative m -rings. It is proved, that any 3-commutative m -ring is an extension of a 3-commutative nil- m -ring by a direct sum of two ideals, the first of them being a commutative idempotent m -ring, where the multiplication coincides with the superposition, the other has null multiplication and respective to addition and superposition is an commutative reduced ring. For finite 3-commutative m -rings the above description is refined using extensions and semidirect products with participation of 3-commutative 0-nilpotent m -rings and commutative reduced rings or Boolean rings.

Ключевые слова: m -кольцо, коммутативное m -кольцо, 3-коммутативное m -кольцо, расширения m -колец, полупрямые произведения m -колец, булево m -кольцо, идеал полугруппы.

Key words: m -ring, commutative m -ring, 3-commutative m -ring, extensions of m -rings, semi-direct products m -rings, Boolean rings.

Используются терминология и обозначения, введенные в [1–3], а также принятые в теории полугрупп и групп [4, 5], колец и полей [6, 7], почтиколец [8], решеток [9], универсальных алгебр [10, 11]. Универсальная алгебра $(K, +, \cdot, \circ)$ называется m -кольцом, если алгебра $(K, +, \cdot)$ является ассоциативным коммутативным кольцом с операциями сложения “+” и умножения “ $\cdot$ ” (редукт m -кольца K), алгебра $(K, \circ)$ – полугруппой с операцией суперпозиции “ $\circ$ ” (o -полугруппа m -кольца K), которая дистрибутивна справа относительно кольцевых операций сложения и умножения. Тогда универсальная алгебра $(K, +, \circ)$ является правым почтикольцом [8] (называемым o -почтикольцом m -кольца K).

В данной работе продолжается начатое в [3, 12] исследование m -колец с условиями, близкими к коммутативным (медиальные, слабо c -коммутативные, гибкие и др.). Здесь вводится в рассмотрение 3-коммутативное m -кольцо с условием на o -полугруппу, когда любая суперпозиция его элементов не изменяется при четной перестановке этих элементов. Показано, что каждое такое m -кольцо K является расширением 3-коммутативного ниль- m -кольца при помощи коммутативного m -кольца, которое изоморфно прямому произведению двух m -колец, первое из которых идемпотентно и его умножение совпадает с суперпозицией, а второе имеет нулевое умножение и его o -почтикольцо является редуцированным кольцом. Для конечных 3-коммутативных m -колец получено более подробное описание с помощью конструкций типа расширений и полупрямых произведений

с участием 3-коммутативных 0-нильпотентных m -колец, коммутативных редуцированных колец или булевых колец.

Перед формулировкой основных теорем приведем некоторые обозначения, определения и допущения. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Для тождественного преобразования множества X применяется обозначение $\text{Id}X$. При $n \in \mathbb{N}_2$ через A_n обозначается знакопеременная группа степени n . Пусть $(K, +, \cdot, \circ)$ есть m -кольцо. Будут часто использоваться соотношения правой дистрибутивности суперпозиции относительно кольцевых операций, т. е.

$$\forall a, b, c \in K ((a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c), \quad (1)$$

$$\forall a, b, c \in K ((a \cdot b) \circ c = (a \circ c) \cdot (b \circ c)). \quad (2)$$

Сохраняются обозначения из [3]: множество ненулевых элементов подмножества $X \subseteq K$ обозначается через $X^\#$; мощность множества X – через $|X|$; через ${}_+\langle X \rangle$ обозначается подгруппа группы $(K, +)$, порожденная множеством X ; при $n \in \mathbb{N}_2$ и для $a \in K$ $a^{[n]} = \underbrace{a \circ \dots \circ a}_n$. Далее, для $c \in K$ $\psi_c : x \mapsto x \circ c$ –

правый сдвиг o -полугруппы $(K, \circ)$; $\text{Im } \psi_c = K \circ c$ – его образ; $\text{Ker } \psi_c = \{x \in K \mid x \circ c = 0\}$ – его ядро.

Также $\mathcal{N}(K) = \{a \in K \mid \exists n \in \mathbb{N}_2 (a^{[n]} = 0)\}$ – множество всех нильпотентных элементов (ниль-элементов), $\mathcal{C}(K) = \{a \in K \mid \forall x \in K (a \circ x = x \circ a)\}$ – множество всех ее центральных элементов (под- m -кольца, содержащиеся в $\mathcal{C}(K)$, также называются центральными), $\mathcal{E}(K) = \{a \in K \mid a^{[2]} = a\}$ – множество всех идемпотентов m -кольца K . Единица (правая, левая) o -полугруппы считается единицей (правой, левой) m -кольца K . Дополнительно введем обозначение $\mathcal{D}(K) = \{x \in K \mid \forall a, b \in K (x \circ (a + b) = x \circ a + x \circ b)\}$ – множество всех аддитивно дистрибутивных элементов m -кольца K ; все под- m -кольца, содержащиеся в $\mathcal{D}(K)$, также называются аддитивно дистрибутивными. Заметим, что $\mathcal{C}(K) \subseteq \mathcal{D}(K)$. Если $\text{Ker } \psi_0 = K$, то m -кольцо K называется нуль-симметричным. Далее все m -кольца предполагаются нуль-симметричными. Если $\mathcal{C}(K) = K$, то m -кольцо K будем называть коммутативным (вместо термина c -коммутативного m -кольца в [1–3]). m -Кольцо K называется $\mathcal{E}$ -центральным, если $\mathcal{E}(K) \subseteq \mathcal{C}(K)$; с нулевым умножением, если $K \cdot K = \{0\}$; интралатентным, если

$$\forall a, b, c \in K (a \circ b = 0 \Rightarrow b \circ c \circ a = 0); \quad (3)$$

3-коммутативным (основной здесь объект изучения), если выполняется тождество

$$\forall a, b, c \in K (a \circ b \circ c = b \circ c \circ a); \quad (4)$$

ниль- m -кольцом, если $\mathcal{M}(K) = K$; 0-нильпотентным, если $\underbrace{K \circ \dots \circ K}_n = \{0\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$; вполне

полупростым (без нильпотентных элементов), если $\mathcal{M}(K) = \{0\}$; вполне простым (без делителей нуля), если $K^\# \circ K^\# \subseteq K^\#$; идемпотентным, если $\mathcal{E}(K) = K$, глобально идемпотентным, если $K \circ K = K$, глобально квазиидемпотентным, если ${}_+\langle K \circ K \rangle = K$; ортодоксальным, если $\mathcal{E}(K)$ является подполугруппой полугруппы $(K, \circ)$. Из теории полугрупп известно, что коммутативная полугруппа идемпотентов $(K, \circ)$ является нижней полурешеткой относительно порядка “ $\leq$ ”, заданного по формуле: для $a, b \in K$

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b \circ a, \quad (5)$$

где в качестве наибольшей общей миноранты $a \wedge b$ элементов a и b выступает $b \circ a$. В случае если эта полугруппа является o -полугруппой коммутативного идемпотентного m -кольца K , соответствующая полурешетка относительно такого порядка на самом деле является решеткой [1, 3, 9], где в качестве наименьшей общей мажоранты $a \vee b$ элементов a и b выступает $a + b - b \circ a$. Более того, решетка $(K, \wedge, \vee)$ является в этом случае обобщенной булевой решеткой, т. е. когда всякий ее главный идеал есть булева решетка. Если $a \leq b$, то дополнением элемента a в главном идеале, порожденном элементом b , будет $b - a$. В случае наличия наибольшего элемента (к примеру, конечности K) решетка $(K, \wedge, \vee)$ оказывается булевой и этот наибольший элемент является единицей m -кольца K . В соответствии с этим идемпотентное коммутативное m -кольцо $(K, +, \cdot, \circ)$ называется обобщенным булевым m -кольцом, если умножение “ $\cdot$ ” совпадает с суперпозицией “ $\circ$ ”, а если, кроме того, K имеет единицу, – то булевым m -кольцом. Умножение в m -кольце K называется тривиальным, если либо $K \cdot K = \{0\}$, либо m -кольцо K является двухэлементным булевым. Если $I \trianglelefteq K$ и факторкольцо K/I изоморфно m -кольцу L , то K называется расширением m -кольца I при помощи m -кольца L , центральным, если

$I \subseteq C(K)$. Расширение считается расщепляемым, если в K существует под- m -кольцо B , изоморфное L , такое, что $K = B + I$ и $B \cap I = \{0\}$. Тогда K также называют полупрямым произведением идеала I на под- m -кольцо B или полупрямым произведением m -кольца I на m -кольцо B . Аналогично определяется разложение полугруппы в полупрямое произведение ее идеала на подполугруппу. Если $(K, +, \cdot)$ – коммутативное кольцо, H – подполугруппа полугруппы $(K, \circ)$, $n \in \mathbb{N}$, $\{H_i\}_{i=1, \dots, n}$ – конечное семейство идеалов полугруппы H такое, что $H = \sum_{i=1}^n H_i$, то H считается прямой суммой этого семейства, если ка-

ждый элемент из H единственным образом представляется в виде суммы элементов из этих идеалов с точностью до перестановки слагаемых и добавления или удаления нулевых элементов.

Теорема 1. Если K – 3-коммутативное m -кольцо, то множество $\mathcal{N}(K)$ является его идеалом и m -кольцо K есть расширение 3-коммутативного ниль- m -кольца $\mathcal{M}(K)$ при помощи 3-коммутативного вполне полупростого m -кольца $L = K/\mathcal{M}(K)$.

В дальнейшем будем обозначать через ν естественный гомоморфизм $K/\mathcal{M}(K)$.

Теорема 2. Пусть L – 3-коммутативное вполне полупростое m -кольцо. Тогда имеются три возможности:

А) m -кольцо L является обобщенно булевым;

Б) m -кольцо L имеет нулевое умножение, а его o -почтикольцо является коммутативным редуцированным кольцом;

В) m -кольцо L разлагается в прямую сумму двух идеалов, которые как m -кольца удовлетворяют соответственно условиям А) и Б).

В условиях теоремы 2 используем запись $L = B \oplus U$, где B – или нулевое m -кольцо, или удовлетворяет условию А), а U – или нулевое, или удовлетворяет условию Б).

Следствие 1. Пусть L – 3-коммутативное вполне полупростое конечное m -кольцо. Тогда L есть коммутативное m -кольцо с единицей, которое разлагается в прямую сумму двух идеалов: $L = B \oplus U$, где B – или нулевое m -кольцо, или булево, а U – или нулевое, или имеет нулевое умножение, а его o -почтикольцо есть кольцо, разлагающееся в прямую сумму конечного семейства идеалов, являющихся конечными полями.

В обозначениях теоремы 2 и следствия 1 в случае ненулевого U будем считать, что кольцо $(U, +, \circ)$ есть прямая сумма семейства $\{H_i\}_{i \in A}$ идеалов, являющихся конечными полями, где i – единица поля H_i .

Теорема 3. Пусть K – 3-коммутативное конечное m -кольцо, не имеющее единицы, и $N = \mathcal{M}(K)$, $L = K/N$, $|L| > 1$, $|N| > 1$. В этом случае K является полупрямым произведением 0-нильпотентного 3-коммутативного идеала I на центральное под- m -кольцо $K_1 = K \circ 1$ с единицей, а N – полупрямым произведением того же идеала I на центральное в K под- m -кольцо $N_1 = N \circ 1$. В свою очередь, K_1 является центральным расширением 0-нильпотентного коммутативного m -кольца N_1 при помощи вполне полупростого коммутативного m -кольца $L = B \oplus U$ (разложение по следствию 1). При этом существует изоморфизм α решетки $\mathcal{E}(L)$ на $\mathcal{E}(K) = \mathcal{E}(K_1)$ такой, что $\nu \circ \alpha = \text{Id}_{\mathcal{E}(K)}$ и $\alpha \circ \nu = \text{Id}_{\mathcal{E}(L)}$. Далее, имеется подполугруппа L_1 полугруппы $(K_1, \circ)$ и семейство $\{B_1\} \cup \{H_i \mid i \in A\} \cup N_1$ ее идеалов такое, что их прямая сумма равна K_1 , а полугруппа L_1 разлагается в прямую сумму семейства $\{B_1\} \cup \{H_i \mid i \in A\}$ ее идеалов. При этом $\nu(B_1) = B$, $\nu(H_i) = H_i$ для $i \in A$.

Для доказательства этих теорем потребуется несколько лемм. Обозначим через $\mathfrak{P}$ класс всех (нуль-симметричных) 3-коммутативных m -колец. Так как $\mathfrak{P}$ является подмножеством [10] многообразия нуль-симметричных m -колец, то верна следующая

Лемма 1. Класс $\mathfrak{P}$ включает в себя все коммутативные m -кольца, замкнут слева и справа (т. е. всякое под- m -кольцо 3-коммутативного m -кольца 3-коммутативно и каждый его гомоморфный образ 3-коммутативен), а также замкнут относительно взятия прямых произведений любых семейств 3-коммутативных m -колец. □

Пример 1. Пусть $(K, +, \cdot, \circ)$ – дистрибутивное m -кольцо с нулевым умножением, а кольцо $(K, +, \circ)$ является свободным нильпотентным класса 3 (т. е. $K \circ K \circ K = \{0\}$) с двумя порождающими. Очевидно, что m -кольцо K является не коммутативным 3-коммутативным m -кольцом. □

Этот пример показывает, что класс $\mathfrak{P}$ не совпадает с классом коммутативных m -колец.

Лемма 2. Пусть K – 3-коммутативное m -кольцо. Тогда

- (i) $K \circ K \subseteq C(K)$;
- (ii) m -кольцо K $\mathcal{E}$ -центрально;
- (iii) m -кольцо K интралатентно.

Доказательство. Свойство (i) непосредственно следует из (4). Отсюда ввиду включения $\mathcal{E}(K) \subseteq K \circ K$ получаем (ii). Далее, если $a, b, c \in K$ и $a \circ b = 0$, то согласно (4) $0 = a \circ b \circ c = b \circ c \circ a$ и (3) выполняется, так что K интралатентно. $\square$

Следствие 2. Пусть K – 3-коммутативное m -кольцо, $n, k \in \mathbb{N}$; $n \leq k$; $a_1, a_2, \dots, a_k \in K$, при этом $a^{[n]} = 0$ и в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_k$ элемент a встречается по меньшей мере n раз. Тогда $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_k = 0$.

Доказательство. Благодаря интралатентности K в правую часть соотношения $a^{[n]} = 0$ между сомножителями, а также справа и слева можно вставлять любые элементы из K без нарушения равенства нулю, откуда и следует утверждение. $\square$

Следствие 3. Пусть K – 3-коммутативное m -кольцо, $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$; $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$; $\sigma \in A_n$. Тогда $a_{\sigma(1)} \circ a_{\sigma(2)} \circ \dots \circ a_{\sigma(n)} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$.

Доказательство следует из соотношения (4) и из того, что знакопеременная группа A_n порождается циклами длины 3. $\square$

Лемма 3. Если m -кольцо K вполне просто, $\mathcal{E}$ -центрально и имеет ненулевой идемпотент, то этот идемпотент является единицей этого m -кольца.

Доказательство. Пусть $a, e \in \mathcal{E}(K)^\#$. Тогда $a \circ e = a \circ e \circ e$, $(a - a \circ e) \circ a = 0$ и $a \circ e = 0$, так как K вполне просто. Теперь $a \circ e = e \circ a$ ввиду $\mathcal{E}$ -центральности K . $\square$

Лемма 4. Для того чтобы m -кольцо K было вполне простым 3-коммутативным, необходимо и достаточно, чтобы его o -почтикольцо было коммутативным кольцом с сокращением, а умножение тривиально.

Доказательство. Пусть K – 3-коммутативное вполне простое m -кольцо и $a \in K^\#$, $b \in K$. Исходя из (4), выводим $a \circ b \circ a = b \circ a \circ a$, $(a \circ b - b \circ a) \circ a = 0$. Сокращая на a справа, имеем $a \circ b = b \circ a$. Таким образом, m -кольцо K коммутативно, поэтому o -почтикольцо $(K, +, \circ)$ является коммутативным кольцом и ввиду отсутствия делителей нуля это кольцо является кольцом с сокращением. В заключение отметим, что согласно теореме 2 п. 1.1 гл. IV [3] умножение в m -кольце K тривиально. Необходимость доказана. Достаточность тривиальна. $\square$

Следствие 4. Пусть K – вполне полупростое 3-коммутативное m -кольцо. Тогда оно коммутативно.

Доказательство. При данных допущениях согласно следствию 6 п. 2.6 гл. IV [3] и лемме 1 m -кольцо K разлагается в подпрямое подпроизведение некоторого семейства вполне простых 3-коммутативных m -колец, которые коммутативны согласно лемме 4. Поэтому m -кольцо K коммутативно. $\square$

Доказательство теоремы 2. Предполагаем, что K – вполне полупростое 3-коммутативное m -кольцо. Доказательство опирается на лемму 4 и доказательство следствия 3 и следует доказательству теоремы 2 из [12]. $\square$

Доказательство следствия 1. Воспользуемся обозначениями теоремы 2 и ее доказательства. Пусть K – конечное вполне полупростое 3-коммутативное m -кольцо. Ввиду конечности обобщенное булево m -кольцо B является булевым m -кольцом с единицей.

Для обоснования утверждения о второй компоненте U рассмотрим разложение ее o -почтикольца в подпрямое произведение семейства $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_2}$ конечных вполне простых коммутативных колец. Так как некоторая степень каждого ненулевого элемента кольца $(K_\lambda, +, \circ)$ есть ненулевой идемпотент, приходим благодаря лемме 3 к тому, что это кольцо является конечной областью целостности и поэтому полем. Значит, U является подпрямым произведением конечного семейства конечных полей. Ввиду простоты этих колец согласно теореме Фостера – Пиксли [11, 13] это есть прямое произведение конечных полей. Благодаря конечности и коммутативности m -кольцо K должно иметь единицу. $\square$

Далее предполагаем, что K – 3-коммутативное m -кольцо.

Лемма 5. $\langle \mathcal{M}(K) \rangle \subseteq \mathcal{M}(K)$.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathcal{M}(K)$ и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $a^{[n]} = b^{[n]} = 0$. Можно считать, что $n \geq 3$. При $n = 3$ с использованием (1) и (3) получим

$$\begin{aligned} (a+b)^{[2n]} &= (a+b)^{[6]} = (a+b) \circ (a+b)^{[5]} = a \circ (a+b) \circ (a+b)^{[4]} + b \circ (a+b) \circ (a+b)^{[4]} = \\ &= (a+b) \circ (a+b)^{[4]} \circ a + (a+b) \circ (a+b)^{[4]} \circ b = a \circ (a+b)^{[4]} \circ a + b \circ (a+b)^{[4]} \circ a + \\ &+ b \circ (a+b)^{[4]} \circ a + a \circ (a+b)^{[4]} \circ b + b \circ (a+b)^{[4]} \circ b = a^{[6]} + a^{[5]} \circ b + \dots + a^{[2]} \circ b \circ a \circ b \circ a + \dots + b^{[6]}. \end{aligned}$$

В результате получим сумму одночленов, каждый из которых состоит из шести сомножителей a или b , содержащих по крайней мере три одного из них. Согласно следствию 2 каждый из этих одночленов равен 0. Поэтому $a+b \in \mathcal{M}(K)$. Также при $n > 3$. $\square$

Лемма 6. $\mathcal{M}(K) \cdot K \cup \mathcal{M}(K) \circ K \subseteq \mathcal{M}(K)$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{M}(K)$, $x \in K$ и $a^{[n]} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_2$. Используя (2), получим $(a \cdot x)^{[n]} = (a \cdot x) \circ (a \cdot x) \circ \dots \circ (a \cdot x) = \dots = (a \circ a \circ \dots \circ a) \cdot (x \circ \dots) = 0$. Для доказательства равенства $(a \circ x)^{[n]} = 0$ достаточно воспользоваться следствием 2. Таким образом, элементы $a \cdot x$ и $a \circ x$ нильпотентны и включение выполняется. $\square$

Лемма 7. Множество $\mathcal{M}(K)$ стабильно слева в K .

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{M}(K)$; $x, y \in K$. Положим $u = x \circ (y + a) - x \circ y$. Требуется показать, что $u \in \mathcal{M}(K)$. Для этого рассмотрим $u^{[2]}$ и применим свойства (1) и (4):

$$\begin{aligned} u^{[2]} &= (x \circ (y + a) - x \circ y) \circ u = x \circ (y + a) \circ u - x \circ y \circ u = (y + a) \circ u \circ x - y \circ u \circ x = \\ &= y \circ u \circ x - a \circ u \circ x + y \circ u \circ x = a \circ u \circ x. \end{aligned}$$

Теперь, так как согласно лемме 6 $u^{[2]} = a \circ u \circ x \in \mathcal{M}(K)$ и $u \in \mathcal{M}(K)$, *q. e. d.* $\square$

Доказательство теоремы 1. В совокупности утверждения лемм 5–8 означают, что $\mathcal{M}(K)$ является идеалом m -кольца K . 3-Коммутативность m -колец $\mathcal{M}(K)$ и $L = K/\mathcal{M}(K)$ следует из 3-коммутативности K согласно лемме 1. $\square$

Следствие 5. Если K есть 3-коммутативное глобально квазиидемпотентное m -кольцо, то K – коммутативное m -кольцо. Если, напротив, 3-коммутативное m -кольцо K не является глобально квазиидемпотентным, то его почтикольцо $(K, +, \circ)$ есть расширение коммутативного и дистрибутивного в нем идеала $\langle K \circ K \rangle$ при помощи кольца с нулевой суперпозицией.

Доказательство. Пусть K – 3-коммутативное m -кольцо. Согласно лемме 2 $K \circ K \subseteq C(K) \subseteq \mathcal{D}(K)$ и с использованием (1) и (4) устанавливается, что множество $\langle K \circ K \rangle$ дистрибутивно, содержится в центре почтикольца $(K, +, \circ)$ и является в нем идеалом, фактор-почтикольцо по которому имеет нулевую суперпозицию. $\square$

Далее будем рассматривать случай конечного 3-коммутативного m -кольца. Предполагаем, что K – 3-коммутативное конечное m -кольцо, $N = \mathcal{M}(K)$, $L = K/N$, $|L| > 1$, $L \mid N| > 1$ и K не имеет единицы, однако ортодоксально и множество $\mathcal{E}(K)$ является решеткой относительно порядка, заданного по формуле (5), с наибольшим элементом, который обозначаем через 1. При этом ввиду отсутствия единицы у o -полугруппы $K \circ 1 \neq K$. Согласно следствию 1 m -кольцо L является коммутативным и имеет единицу (обозначаемую далее через 1_L) и в общем случае разлагается в прямую сумму ненулевых идеалов $L = B \oplus U$, где B – булево m -кольцо (с наибольшим элементом 1_B), а U – m -кольцо с единицей 1_U (наибольшим элементом решетки $\mathcal{E}(U)$) с нулевым умножением, при этом его o -почтикольцо является прямой суммой некоторого конечного семейства конечных полей. Более подробно, если обозначить через $\mathcal{A}$ множество минимальных элементов (атомов) решетки $\mathcal{E}(U)$, а для каждого $i \in \mathcal{A}$ максимальное подполе кольца $(U, +, \circ)$ с единицей i обозначить через $\mathcal{H}_i$, тогда это кольцо согласно следствию 1 разлагается в прямую сумму семейства идеалов $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathcal{A}}$, являющихся конечными полями. Отметим также, что 1_L – наибольший элемент решетки $(L, \leq)$.

Лемма 8. Пусть $x \in K$ и $x + N \in \mathcal{E}(L)$. Тогда существует и единственный идемпотент $e \in \mathcal{E}(K)$ такой, что $e \in x + N$.

Доказательство. Так как смежный класс $x + N$ является подполугруппой конечной полугруппы $(K, \circ)$, то содержит идемпотент $e \in \mathcal{E}(K)$. Покажем, что этот идемпотент единственный. В самом деле, согласно лемме 2 $\mathcal{E}(x + N)$ есть полурешетка относительно порядка “ $\leq$ ”, заданного по формуле (5). Значит, в случае не одноэлементности этого множества для некоторого f выполняется соотношение $e < f$, т. е. $e = e \circ f = f \circ e$. Из $e + N = f + N$ следует, что $f - e = a$ для какого-то $a \in N$. Однако тогда

$$a^{[2]} = (f - e) \circ (f - e) = f \circ (f - e) - e \circ (f - e) = (f - e) \circ f - (f - e) \circ e = \\ = f \circ f - e \circ f - f \circ e + e \circ e = f - e = a,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, $|\mathcal{E}(x + N)| = 1$. $\square$

Отметим, что гомоморфизм v переводит ненулевой идемпотент из $\mathcal{E}(K)^\#$ в $\mathcal{E}(L)^\#$, поэтому и благодаря лемме 8 имеется биективное отображение α из $\mathcal{E}(L)$ на $\mathcal{E}(K)$ такое, что для $e \in \mathcal{E}(K)$ $\alpha(e + N) = e$. Отсюда вытекают также следующие свойства.

Лемма 9. *Имеют место равенства*

$$(v \circ \alpha = \text{Id } \mathcal{E}(K) \text{ и } \alpha \circ v = \text{Id } \mathcal{E}(L)), \quad (6)$$

а также если $i_1, i_2 \in \mathcal{E}(L)$; $i_3, i_4 \in B$, $i_5, i_6 \in \mathcal{E}(U)$, то

- A1) $\alpha(i_1 \circ i_2) = \alpha(i_1) \circ \alpha(i_2)$;
- A2) $\alpha(N) = 0$ и $\alpha(1_L) = 1$;
- A3) $\alpha(i_1) \circ 1 = \alpha(i_1)$;
- A4) $\alpha(i_1 + i_2 - i_1 \circ i_2) = \alpha(i_1) + \alpha(i_2) - \alpha(i_1) \circ \alpha(i_2)$;
- A5) $i_1 \leq i_2 \Rightarrow \alpha(i_1 - i_2) = \alpha(i_1) - \alpha(i_2)$;
- A6) $\alpha(i_1) + \alpha(i_2) \in \alpha(i_1 + i_2) + N = i_1 + i_2$;
- A7) $\alpha(i_3) \cdot \alpha(i_4) \in \alpha(i_3 \cdot i_4) + N = i_3 \cdot i_4$;
- A8) $\alpha(i_1) \cdot \alpha(i_5) \in N$.

Доказательство. Соотношение (6) следует из биективности α . Далее, ввиду коммутативности и идемпотентности полугруппы $(\mathcal{E}(K), \circ)$ должно выполняться включение $\mathcal{E}(K) \circ \mathcal{E}(K) \subseteq \mathcal{E}(K)$, поэтому благодаря лемме 8 α есть изоморфизм полурешетки $(\mathcal{E}(L), \circ)$ на $(\mathcal{E}(K), \circ)$, откуда следует A1). Одновременно α является изоморфизмом решетки $(\mathcal{E}(L), \wedge, \vee)$ на $(\mathcal{E}(K), \wedge, \vee)$, откуда следуют соотношения A2) – A5). A6), A7) следуют из (6) и из того, что v – гомоморфизм. Далее, поскольку $L \cdot U = \{0\}$, имеем $\alpha(i_1) \cdot \alpha(i_5) \in N$. $\square$

Рассмотрим эндоморфизм $\psi_1: x \mapsto x \circ 1$ редукта m -кольца K . Обозначим $I = \text{Ker } \psi_1$, $K_1 = K \circ 1 = \text{Im } \psi_1$. Ввиду идемпотентности 1 этот эндоморфизм является идемпотентным эндоморфизмом o -полугруппы и, значит, самого m -кольца K . Отсюда выводится

Лемма 10. *Пусть K – 3-коммутативное конечное m -кольцо, не являющееся коммутативным. Тогда оно разлагается в полупрямое произведение его 0-нильпотентного идеала на центральное коммутативное под- m -кольцо.*

Доказательство. Продолжая предыдущие рассуждения, отметим, что согласно лемме 2.3.1 гл. I из [2] наличие идемпотентного эндоморфизма ψ_1 приводит к разложению m -кольца K в полупрямое произведение идеала I на под- m -кольцо K_1 . Под- m -кольцо K_1 является центральным согласно лемме 2. Покажем, что $I \subseteq N$. В самом деле, допустим, что $x \in I$. Тогда $x \circ 1 = 0$. Предположим, что $x \notin N$. Тогда ввиду конечности K для некоторого идемпотента $e \in \mathcal{E}(K)^\#$ и $m \in \mathbb{N}$ будет $x^{[m]} = e$. При этом согласно лемме 2 $e = e \circ 1 = x^{[m]} \circ 1^{[m]} = (x \circ 1)^{[m]}$, откуда получим противоречие. Значит, $x \in N$ и $I \subseteq N$. $\square$

Положим $G_i = \{g \in K \mid g \circ \alpha(i) = g \text{ и } \exists k \in \mathbb{N} (g^{[k]} = \alpha(i))\}$. Согласно условию A3) леммы 9 для $g \in G_i$ будет $g \circ 1 = g \circ \alpha(i) \circ 1 = g \circ \alpha(i) = g$, поэтому $G_i \subseteq K_1$.

Лемма 11. *Пусть $i \in A$. Тогда G_i является максимальной подгруппой с идемпотентом $\alpha(i)$ коммутативной полугруппы $(K_1, \circ)$. При этом $v(G_i) = \mathcal{H}_i^\#$.*

Доказательство. Если g – элемент из максимальной подгруппы с идемпотентом $\alpha(i)$, то ввиду конечности K этот элемент в некоторой степени равен $\alpha(i)$, поэтому $g \in G_i$. Очевидно, что $(G_i, \circ)$ есть группа с единицей $\alpha(i)$. Далее, так как подгруппа $\mathcal{H}_i^\#$ полугруппы $(U, \circ)$ состоит из ее элементов, некоторая степень которых равна i , то $v(G_i) \subseteq \mathcal{H}_i^\#$. Обратно, если $x \in K$ и $x + N \in \mathcal{H}_i^\#$, тогда $x \circ \alpha(i) + N \in \mathcal{H}_i^\#$ и для некоторого $k \in \mathbb{N}$ $(x \circ \alpha(i))^{[k]} = e$, где $e \in \mathcal{E}(K)^\#$. Из-за того, что $v(e) \in \mathcal{E}(K)^\# \cap v(e) \in \mathcal{E}(K)^\# \cap \mathcal{H}_i$, имеем $v(e) = i$ и $e = \alpha(i)$. Так что $x \circ \alpha(i) \in G_i$ и $x + N = v(x \circ \alpha(i)) \in v(G_i)$. Ergo, $v(G_i) = \mathcal{H}_i^\#$. $\square$

Обозначим еще $\mathcal{H}_i = G_i \cup \{0\}$. Ясно, что $(H_i, \circ)$ есть группа с внешне присоединенным нулем и согласно лемме 11 $v(H_i) = \mathcal{H}_i$. Пусть теперь $i, j \in A$ и $i \neq j$. Покажем, что

$$H_i \circ H_j = H_i \cap H_j = \{0\}. \quad (7)$$

В самом деле, если $g \in G_i$ и $h \in G_j$, то $g \circ h = g \circ \alpha(i) \circ h \circ \alpha(j) = g \circ h \circ \alpha(i) \circ \alpha(j) = 0$, а также если $g = h$, то $g \circ \alpha(i) = h \circ \alpha(j)$, откуда $g \circ \alpha(i) \circ \alpha(i) = h \circ \alpha(j) \circ \alpha(i) = 0$, что приводит к противоречию. Так что (7) выполняется.

Введем еще обозначения $H = \sum_{i \in A} H_i$, $B_1 = \alpha(B)$, $L_1 = B_1 + H$, $N_1 = N \circ 1$. Тогда имеет место

Лемма 12. L_1 есть подполугруппа полугруппы $(K_1, \circ)$, а ее подполугруппы из семейства

$$\{B_1\} \cup \{H_i \mid i \in \mathcal{A}\} \quad (8)$$

суть ее идеалы, при этом L_1 есть прямая сумма этих идеалов. Также $L_1 \cap N_1 = \{0\}$.

Доказательство. Отметим сначала, что $v(B_1) = B$ и согласно лемме 11 $v(H) = U$, поэтому если $g \in B_1$, $h \in H$, то $g \in \alpha(B)$, $g \circ h = g \circ \alpha(1_U) \circ h = 0$. Так что $B_1 \circ H = \{0\}$, $B_1 \circ L_1 \subseteq B_1$. Далее с использованием (7) нетрудно показать, что для всякого $i \in \mathcal{A}$ H_i есть идеал полугруппы L_1 . Далее, для утверждения о прямой сумме требуется показать, что общим элементом одного из идеалов семейства (8) с суммой остальных является 0. Предположим сначала, что $g \in B_1 \cap H$. Тогда $g \in \alpha(B) \cap \alpha(E(U))$, поэтому $g = 0$. Пусть теперь для некоторого $i \in \mathcal{A}$ $g \in H_i \cap \sum_{j \in \mathcal{A}, j \neq i} H_j$. Тогда согласно лемме 11 $v(g) \in H_i \cap \sum_{j \in \mathcal{A}, j \neq i} \mathcal{H}_j = \{N\}$, поэтому $g \in N \cap H_i = \{0\}$ и $g = 0$. Значит, L_1 есть прямая сумма семейства идеалов (8).

Теперь предположим, что элемент $a \in N$ представлен в виде суммы нескольких ненулевых элементов из различных идеалов семейства (8). К примеру, пусть $a = \alpha(i) + g$, где $i \in B^\#$, $g \in G_j$, $j \in \mathcal{A}$. Тогда $g = g \circ \alpha(j) = a \circ \alpha(j) + \alpha(i) \circ \alpha(j) = a \circ \alpha(j) \in N$. Следовательно, $L_1 \cap N_1 = \{0\}$. $\square$

Лемма 13. Полугруппа $(K_1, \circ)$ разлагается в прямую сумму семейства $\{B_1\} \cup \{H_i \mid i \in \mathcal{A}\} \cup \{N_1\}$ ее идеалов.

Доказательство. Так как $v(L_1) = v(K_1) = L$, то каждый элемент $x \in K_1$ представляется в виде $x = u + a$, где $u \in L_1$, $a \in N$. Тогда $x = x \circ 1 = u \circ 1 + a \circ 1 \in L_1 + N_1$. Теперь ввиду равенства $L_1 \cap N_1 = \{0\}$ и доказательства леммы 12 следует утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 3. Предположим, что K – 3-коммутативное конечное m -кольцо, не имеющее единицы, и $N = \mathcal{N}(K)$, $L = K/N$, $|L| > 1$, $|N| > 1$. Согласно теореме 1 и лемме 10 множество N есть идеал m -кольца K , являющийся 3-коммутативным ниль- m -кольцом, а ввиду конечности это m -кольцо 0-нильпотентно. По той же теореме m -кольцо L есть 3-коммутативное вполне полупростое, которое согласно следствию 1 коммутативно, имеет единицу и разлагается в прямую сумму двух идеалов B и U , где B – или нулевое m -кольцо, или булево, а U имеет нулевое умножение, а его o -почтикольцо есть кольцо, разлагающееся в прямую сумму $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in \mathcal{A}}$ идеалов, являющихся конечными полями, где i – единица поля $\mathcal{H}_i$. Согласно лемме 10 расширение N при помощи L расщепляется. Далее, как уже сказано перед леммой 8, $\mathcal{E}(K)$ есть решетка с наибольшим элементом, обозначаемым через 1. При этом ввиду отсутствия единицы у K правый сдвиг ψ_1 есть не сюръективный идемпотентный эндоморфизм m -кольца K , так что K является полупрямым произведением его идеала $I = \text{Ker } \psi_1$ на центральное под- m -кольцо $K_1 = K \circ 1$ с единицей, а N является полупрямым произведением того же идеала I на центральное в K под- m -кольцо $N_1 = N \circ 1$. Из этого же следует, что K_1 является центральным расширением 0-нильпотентного коммутативного m -кольца N_1 при помощи вполне полупростого коммутативного m -кольца $L = B \oplus U$. Согласно лемме 1 существует изоморфизм α решетки $\mathcal{E}(L)$ на $\mathcal{E}(K) = \mathcal{E}(K_1)$ такой, что $v \circ \alpha = \text{Id } \mathcal{E}(K)$ и $\alpha \circ v = \text{Id } \mathcal{E}(L)$. Далее, из лемм 11, 12, 13 следует, что имеется подполугруппа L_1 полугруппы $(K_1, \circ)$ и семейство $\{B_1\} \cup \{H_i \mid i \in \mathcal{A}\} \cup N_1$ ее идеалов такое, что их прямая сумма равна K_1 , а полугруппа L_1 разлагается в прямую сумму семейства $\{B_1\} \cup \{H_i \mid i \in \mathcal{A}\}$ ее идеалов. При этом $v(B_1) = B$, $v(H_i) = \mathcal{H}_i$ для $i \in \mathcal{A}$.

1. Ширяев В. М. Кольца с дополнительной операцией суперпозиции. Минск, 2004.
2. Ширяев В. М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. Т. 1 [Электронный ресурс]. Минск, 2009. Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200934.
3. Ширяев В. М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. Т. 2 [Электронный ресурс]. Минск, 2009. Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200935.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. М., 1972. Т. 1.
5. Холл М. Теория групп. М., 1962.
6. Ленг С. Алгебра. М., 1968.
7. Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра: в 2 т. М., 1990. Т. 1.
8. Pilz G. Near-rings. 2nd ed. Amsterdam, 1983.
9. Биркгоф Г. Теория решеток. М., 1984.
10. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.
11. Пинус П. Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр. Иркутск, 1986.
12. Ширяев В. М. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 2. С. 76.
13. Foster A. L., Pixley A. F. // Math. Zeitschr. 1964. Bd. 85. № 2. S. 169.

Поступила в редакцию 10.02.12.

Владимир Михайлович Ширяев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.