

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

A theorem on the stability and the totally stability of the zero solution for the system of nonautonomous differential equations is proved. The results are based on the method of semi definite Lyapunov's functions. The resulting synthesis of known results of the direct method A. M. Lyapunov, I. G. Malkin and N. N. Krasovskii is based on the concept of B -stability. The B -stability of the equilibrium introduced by the author. It is «stronger» than the known properties of stability, but the «weaker» of asymptotic stability. Article provides an illustrative example.

Ключевые слова: неавтономные дифференциальные уравнения, устойчивость, B -устойчивость, функция Ляпунова, устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Key words: nonautonomous differential equations, stability, B -stability, Lyapunov function, totally stability.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n; \quad f(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (1)$$

определенную в открытой связной окрестности D начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f: D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x . Тогда через каждую точку (x_0, t_0) области определения системы проходит единственное решение $x(x_0, t_0, t)$, $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$. Пусть $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ означает функцию расстояния, а $\|\bullet\|$ – норму в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для замкнутого множества M из $\mathbb{R}^n$ и числа $\alpha > 0$ положим

$$B(M, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, M) < \alpha\} \quad \text{и} \quad B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \alpha\}.$$

Будем пользоваться следующими устойчивоподобными свойствами [1, 2]. Нулевое решение системы (1) называется:

– *равномерно устойчивым*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\delta)(\forall t_0 \geq 0) \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0;$$

– *равномерно притягивающим*, если

$$(\exists \eta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists T = T(\varepsilon) > 0)(\forall x_0 \in B_\eta)(\forall t_0 \geq 0) \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 + T;$$

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчивое и равномерно притягивающее.

В работе автора [3] дан критерий неасимптотической устойчивости компактного инвариантного множества M локально компактной динамической системы $(X, \mathbb{R}, \pi)$ в рамках метода знакопостоянных функций Ляпунова. Этот критерий основывается на свойстве B -устойчивости, введенном в [4]. Для систем автономных обыкновенных дифференциальных уравнений этот результат включает в себя известные утверждения о неасимптотической устойчивости прямого метода Ляпунова [5, 6] и представляется следующим утверждением.

Теорема 1 [3]. Пусть система (1) автономна, т. е. $f(x, t) \equiv f(x)$. Нулевое решение системы устойчиво, если существует окрестность U точки $x = 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что выполняются следующие условия:

1) $V(0) = 0$;

2) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$;

3) решение $x = 0$ B -устойчиво относительно границы множества

$$Y_0 = \{x \in \bar{U} : V(x) = 0\};$$

4) решение $x = 0$ устойчиво относительно множества $Y_0 \cup Y_0^-$, где $Y_0^- = \{x \in \bar{U} : V(x) < 0\}$.

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 функция Ляпунова V , вообще говоря, не предполагается знакопостоянной (она может быть и знакопеременной). Для случая, когда функция V знакопостоянная, условие 4) теоремы 1 становится тривиальным и его можно опустить.

Настоящая работа является продолжением исследований [3]. Ее цель – дать критерий устойчивости в классе знакопостоянных функций Ляпунова на основе свойства B -устойчивости для неавтономной системы (1), а также указать приложения свойства B -устойчивости для задачи об устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

2. В-притяжение и В-устойчивость. Понятие В-устойчивости введено автором [4] для динамических систем на метрическом пространстве. В работе [6] показана связь нового определения со свойствами устойчивости в смысле Ляпунова: В-устойчивость влечет устойчивость, а из асимптотической устойчивости вытекает В-устойчивость. Введем это свойство для неавтономных систем дифференциальных уравнений.

Определение 1. Пусть Y – замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Нулевое решение системы (1) называется:

– *равномерно В-притягивающим относительно Y* , если всякая окрестность начала координат содержит компактное, положительно инвариантное, равномерно притягивающее относительно Y подмножество K такое, что $0 \in K$;

– *равномерно В-устойчивым относительно Y* , если оно равномерно устойчиво относительно Y и для любой окрестности U начала координат существует компактное, положительно инвариантное, равномерно асимптотически устойчивое относительно Y множество K такое, что $0 \in K$.

Если при этом множество Y совпадает с фазовым пространством $\mathbb{R}^n$, то будем говорить, что нулевое решение системы (1) соответственно *равномерно В-притягивающее* и *равномерно В-устойчивое*.

Замечание 2. а) На основании исследований [7, 8] можно сделать вывод о том, что введенное в определении 1 свойство нулевого решения совпадает с определением В-устойчивости [4] для автономного случая.

б) Если нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, то в соответствии с данным определением оно будет равномерно В-устойчивым.

Через K обозначим множество непрерывных строго монотонно возрастающих функций (функций Хана [9]) $a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ таких, что $a(0) = 0$. Дадим характеристику свойства В-устойчивости для неавтономного случая.

Теорема 1. Нулевое решение системы (1) равномерно В-устойчиво, если для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ существуют компактное множество K ($0 \in K \subset B_\varepsilon$), непрерывно дифференцируемая функция $V: B(K, \varepsilon) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и функции $a, b, c \in K$ такие, что для всех точек $(x, t) \in B(K, \varepsilon) \times \mathbb{R}^+$ имеют место следующие условия:

$$1) \ a(d(x, K)) \leq V(x, t) \leq b(d(x, K));$$

$$2) \ \dot{V}(x, t) \leq -c(d(x, K)).$$

Доказательство. Пусть выполнены предположения теоремы. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы шар B_ε содержался в области D . Тогда с учетом функции Ляпунова с заданными свойствами K является равномерно асимптотически устойчивым множеством [10]. Действительно, в силу предположений 1) и 2) функция $V(x, t) = 0$, если $x \in K$ для всех $t \geq 0$, и поэтому множество K положительно инвариантно. Доказательство равномерной асимптотической устойчивости K можно осуществить точно так же, как, например, доказательство теоремы 8.3 [10] (теорема о равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1)). Отсюда в силу определения 2 и следует требуемое утверждение теоремы.

Пример 1. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = |y|^{1+\alpha(t)} \sin(1/y) \quad (\text{для } y \neq 0 \text{ и } \dot{y} = 0 \text{ для } y = 0), \quad (2)$$

где $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $0 < \alpha_1 \leq \alpha(t) \leq \alpha_2 < \infty \quad \forall t \geq 0$. Видно, что это уравнение имеет два счетных множества состояний равновесия $(a_k)_{k \geq 1}$ и $(b_k)_{k \geq 1}$, сходящихся к нулю, причем $-1 < a_k < 0 < b_k < 1$. Каждая соседняя пара точек покоя уравнения (2) такова, что одна из них асимптотически устойчива, а другая неустойчива. Поэтому в любой достаточно малой окрестности точки $y = 0$ можно выбрать компактное, инвариантное, равномерно асимптотически устойчивое множество вида $K = [a_m, b_n]$, $m, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, нулевое решение такого уравнения является равномерно В-притягивающим и равномерно В-устойчивым. Заметим, что здесь нулевое решение не обладает областью притяжения и поэтому не является асимптотически устойчивым.

3. Условие Сейберта и устойчивость. В статьях П. Сейберта [11, 12] дано определение понятия «пороговое свойство» (threshold property) и приведено свойство устойчивости вблизи некоторого множества. Для системы (1) эти два свойства формулируются следующим образом.

Пусть K и Y – два замкнутых положительно инвариантных множества, причем $K \subset Y$. Будем говорить, что пара (K, Y) обладает *свойством Сейберта* [11, 12], если для любого $\mu > 0$ существует

$v = v(\mu) > 0$ такое, что если решение $x(x_0, t_0, t)$, $x_0 \in B_v$, $t_0 \geq 0$, при некотором $T > 0$ удовлетворяет неравенству

$$d(Y, x(x_0, t_0, t)) < v \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

тогда

$$d(K, x(x_0, t_0, t)) < \mu \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Другими словами, если некоторое решение $x(x_0, t_0, t)$ «удаляется» от множества K , то сначала оно начинает «удаляться» от множества Y .

Пусть K и Y – два замкнутых положительно инвариантных множества таких, что Y содержит K . Будем говорить, что Y *локально устойчиво вблизи K* [12], если существует окрестность U множества K , в которой выполняется следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ $\overline{B_\varepsilon} \subset U$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых начальных состояний $x_0 \in B(K, \delta)$, $t_0 \geq 0$ и любого $T > 0$, удовлетворяющего условию

$$d(x(x_0, t_0, t), K) < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

выполняется также и условие

$$d(x(x_0, t_0, t), Y) < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Для системы (1) имеют место следующие утверждения.

Лемма 1 [11]. Пусть K и Y – два замкнутых положительно инвариантных множества, причем $K \subset Y$. Если множество K равномерно Y -притягивающее, тогда пара (K, Y) обладает свойством Сейберта.

Лемма 2 [11]. Пусть K и Y – два замкнутых положительно инвариантных множества таких, что Y содержит K . Если Y равномерно устойчиво вблизи K и пара (K, Y) удовлетворяет свойству Сейберта, то множество K равномерно устойчиво.

Покажем, что для системы (1) справедлив следующий результат.

Лемма 3. Пусть Y – замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Тогда если нулевое решение равномерно B -притягивающее относительно Y , то пара $(0, Y)$ удовлетворяет условию Сейберта.

Доказательство. Пусть выполнены все предположения леммы, но пара $(0, Y)$ не удовлетворяет условию Сейберта. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательность состояний $(x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, последовательности моментов времени (t_{0n}) , $t_{0n} \geq 0$, и $(t'_n) \in \mathbb{R}^+$, $t'_n > t_{0n}$, $\forall n \geq 1$, такие, что

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d_1(x(x_n, t_{0n}, [t_{0n}, t'_n]), Y) = 0, \quad x(x_n, t_{0n}, t'_n) \notin B_\varepsilon. \quad (3)$$

С учетом равномерного B -притяжения начала координат относительно множества Y существует компактное равномерно притягивающее относительно Y множество K такое, что $K \subset B_\varepsilon$ и $0 \in K \subset Y$. Поэтому из (3) следует существование числа ε' , $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, и последовательности $(t_n) \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq t_n \leq t'_n$, такой, что

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d_1(x(x_n, t_{0n}, [t_{0n}, t_n]), Y) = 0, \quad x(x_n, t_{0n}, [t_{0n}, t_n]) \notin B(K, \varepsilon'). \quad (4)$$

Приведенные построения наряду с соотношением (4) фактически означают, что пара (K, Y) не удовлетворяет свойству Сейберта. Более того, поскольку множество K – равномерно притягивающее относительно Y , то с учетом леммы 1 это приводит к противоречию, что и доказывает утверждение леммы.

Сформулируем теперь основной результат – теорему о неасимптотической устойчивости метода знакопостоянных функций Ляпунова.

Теорема 2. Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V: U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и функции $a, b \in K$ такие, что для всех значений $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ выполняются следующие условия:

$$1) a(d(Y_0, x)) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|), \text{ где } Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x, t) = 0 \forall t \geq 0\}};$$

$$2) \dot{V}(x, t) \leq 0;$$

$$3) \text{ решение } x = 0 \text{ равномерно } B\text{-притягивающее относительно множества } Y_0.$$

Тогда начало координат системы (1) равномерно устойчиво.

Доказательство. Согласно предположению 1) множество Y_0 непусто, замкнуто и с учетом 2) положительно инвариантно. Покажем сначала, что множество Y_0 равномерно устойчиво вблизи начала координат. С этой целью зафиксируем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\overline{B_\varepsilon} \subset U$. Согласно 1) существует $\lambda > 0$ такое, что $V(x, t) > \lambda \forall t \geq 0$, если $d(Y, x) > \varepsilon$.

Далее, так как $V(0, t) = 0$, то в силу того, что $V(x, t) \leq b(\|x\|)$, для числа λ можно указать такое $\delta > 0$, что $V(x_0, t_0) \leq \lambda \quad \forall t_0 \geq 0$, если $\|x_0\| < \delta$ ($\delta = b^{-1}(\lambda)$). Следовательно, если решение $x(x_0, t_0, t)$ остается в окрестности U на интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ для некоторого числа $T > 0$, то согласно предположению 2) будем иметь

$$V(x(x_0, t_0, t), t) \leq \lambda, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Таким образом, с учетом предыдущих построений решение $x(x_0, t_0, t)$ удовлетворяет неравенству $d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \varepsilon$ для $t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad \forall t_0 \geq 0$.

Поэтому множество Y равномерно устойчиво вблизи начала координат. Кроме того, согласно предположению 3) и леммы 1 пара $(0, Y)$ удовлетворяет свойству Сейберта. Тогда, используя лемму 2 для случая $K = \{0\}$, получаем равномерную устойчивость состояния равновесия $x = 0$. Теорема доказана.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V: U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и функции $a, b \in K$ такие, что для всех значений $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$ выполняются следующие условия:

$$1) a(d(Y_0, x)) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|), \text{ где } Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x, t) = 0 \quad \forall t \geq 0\}};$$

$$2) \dot{V}(x, t) \leq 0;$$

$$3) \text{ решение } x = 0 \text{ равномерно притягивающее относительно множества } Y_0.$$

Тогда начало координат системы (1) равномерно устойчивое.

Замечание 3. а) В требовании 3) следствия 1 можно заменить свойство равномерного притяжения относительно множества Y_0 на свойство равномерной асимптотической устойчивости относительно множества Y_0 .

б) Из теоремы 2 или следствия 1 при условии, что функция Ляпунова V является определенно положительной, получаем известную теорему К. П. Персидского о равномерной устойчивости [13].

Пример 2. Рассмотрим в круге $x^2 + y^2 < 1$ систему второго порядка

$$\dot{x} = -xy^2, \quad \dot{y} = |y|^{1+\alpha(t)}(h(t)x + \sin(1/y)) \quad (\text{для } y \neq 0 \text{ и } \dot{y} = 0 \text{ для } y = 0), \quad (5)$$

где функция $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям примера 1, а функция $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена при всех $t \geq 0$.

Знакопостоянная функция Ляпунова $V = x^2$ имеет неположительную производную по времени вдоль решений уравнения (5), равную $\dot{V} = -2x^2y^2$. На множестве, где функция $V = 0$, система переходит в скалярное дифференциальное уравнение (2), нулевое решение которого, как было показано, является равномерно B -устойчивым.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2 и, следовательно, нулевое решение системы (5) равномерно устойчиво.

В заключение этого пункта отметим, что вопрос о развитии теоремы Ляпунова об устойчивости является актуальным. Многочисленные исследования качественного характера поведения траекторий в окрестности состояний равновесия динамических систем выявляют сложность описания имеющегося разнообразия типов таких равновесий и их классификаций в случае неасимптотической устойчивости по сравнению со свойством асимптотической устойчивости [14]. Именно по этой причине возникают трудности в задаче об обращении теоремы о неасимптотической устойчивости второго метода Ляпунова, в частности об обращении теоремы Лагранжа – Дирихле для механических систем [2, гл. 2], имеющей важное прикладное значение. Если для неавтономных систем дифференциальных уравнений теорема обращения доказана [13], то для автономных уравнений в общем случае невозможно указать независящую от времени функцию Ляпунова $V(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы Ляпунова об устойчивости. В этой связи удивительным является тот факт, что известные контрпримеры механических систем с устойчивыми состояниями равновесия, но не удовлетворяющие наиболее общим теоремам об устойчивости (см. [2, с. 84 и 86]) обладают свойством B -устойчивости этих равновесий.

4. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Как отмечалось в работе [6], свойство B -устойчивости и свойство устойчивости при постоянно действующих возмущениях достаточно близки друг другу. Наряду с (1) введем в рассмотрение следующее уравнение:

$$\dot{x} = f(x, t) + R(x, t), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n; \quad f(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (6)$$

где функция $R(x, t)$ играет роль постоянно действующих возмущений. Такие возмущения, как правило, заранее неизвестны и не обязательно исчезают в начале координат фазового пространства $\mathbb{R}^n$

(см., например, [2]). Однако предполагается, что возмущенное уравнение (6) сохраняет свойство единственности решений в области своего определения.

Напомним, что нулевое решение системы (1) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $\eta_1(\varepsilon) > 0$ и $\eta_2(\varepsilon) > 0$ такие, что всякое решение (6) с начальными данными (x_0, t_0) , $\|x_0\| \leq \eta_1(\varepsilon)$, $t_0 \geq 0$, при произвольной функции подчинено в области $B_\varepsilon \times \mathbb{R}^+$ неравенству $\|R(x, t)\| \leq \eta_2(\varepsilon)$ и удовлетворяет при всех $t > t_0$ неравенству $\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon$.

Теорема 3. *Предположим, что существуют число $\Delta > 0$, непрерывно дифференцируемая функция $V : (B_\Delta \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность пар чисел $(\delta_n, \varepsilon_n)$, $0 < \delta_n < \varepsilon_n < \Delta$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, числа (σ_n) , $\sigma_n > 0$, и последовательности функций (a_n) и (b_n) из $\mathbf{K}$ такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются следующие условия:*

$$1) a_n(\|x\|) \leq V(x) \leq b_n(\|x\|) \text{ при } \delta_n \leq \|x\| \leq \varepsilon_n;$$

$$2) \sup_{\delta_n \leq \|x\| \leq \varepsilon_n, t \geq 0} \dot{V}_{(1)}(x, t) \leq -\sigma_n, \text{ где } \dot{V}_{(1)}(x, t) - \text{производная по времени функции } V(x) \text{ в силу уравнения (1);}$$

$$3) b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n).$$

Тогда нулевое решение (1) равномерно B -устойчиво и устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы 3 следует из того факта, что при выполнении условий 1), 2) и 3) поверхности $V(x) = c_n$ для $b_n(\delta_n) < c_n < a_n(\varepsilon_n)$ расположены в шаровом слое $B_{\varepsilon_n} \setminus \overline{B_{\delta_n}}$, а множество $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c_n\}$ – компактно, положительно инвариантно и равномерно асимптотически устойчиво [10]. Более того, из свойства функций Хана (a_n) и (b_n) вытекает, что $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, при достаточно большом натуральном n множество K_n располагается в любой достаточно малой окрестности начала координат. Это и доказывает равномерную B -устойчивость нулевого решения системы (1).

Докажем вторую часть утверждения теоремы 3. Так как функция V непрерывно дифференцируема, то можно указать число $c > 0$ такое, что $\|\partial V(x) / \partial x\| \leq c \quad \forall x \in B_\Delta$. Положим

$$\dot{V}_R(x, t) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)' (f(x, t) + R(x, t)).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Зафиксируем натуральное n из $\mathbb{N}$ так, чтобы $\varepsilon_n < \varepsilon$, и пусть $0 < \eta_1 \leq \delta_n$, $0 < \eta_2 < \sigma_n / (2c)$. С учетом 3) для любой точки x , принадлежащей границе множества B_{ε_n} , будем иметь неравенства $V(x) \leq b_n(\delta_n) < a_n(\varepsilon_n)$.

Теперь покажем, что для начальных данных (x_0, t_0) , $\|x_0\| \leq \eta_1$, $t_0 \geq 0$, и любой функции возмущения $R(x, t)$ такой, что $\|R(x, t)\| \leq \eta_2$, решение $x(x_0, t_0, t)$ уравнения (6) будет располагаться в шаре B_ε при всех $t \geq t_0$. В самом деле, если $\delta_n \leq \|x\| \leq \varepsilon_n$, то имеем следующие оценки:

$$\dot{V}_R(x, t) \leq -\sigma_n + \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)' R(x, t) \leq -\sigma_n + \left\| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\| \|R(x, t)\| \leq -\sigma_n + c \frac{\sigma_n}{2c} < 0.$$

Это значит, что выбранное решение не может выйти на границу шара B_{ε_n} и, следовательно, не покинет шар B_ε . Таким образом, выполнены условия определения устойчивости при постоянно действующих возмущениях.

Обратимся к дифференциальному уравнению примера 1 и покажем, что решение $y = 0$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Действительно, возьмем две последовательности чисел $\delta_n = 1 / (2\pi n - 1/n)$, $\varepsilon_n = 1 / ((2n-1)\pi + 1/n)$, постоянные функции $a_n = b_n = 0,5y^2$ класса $\mathbf{K}$ и функцию Ляпунова $2V(y) = y^2$. Тогда производная по времени от V , равная $\dot{V}(y, t) = y|y|^{1+\alpha(t)} \sin \frac{1}{y}$, будет удовлетворять соотношению

$$\sup_{\delta_n \leq |y| \leq \varepsilon_n, t \geq 0} \dot{V}(y, t) \leq -\sigma_n, \text{ где } \sigma_n = \varepsilon_n^{1+\alpha_1} \sin \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, можно непосредственно проверить, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $b_n(\delta_n) < a_n(\epsilon_n)$.

Таким образом, выполнены все требования теоремы 3, а значит, нулевое решение уравнения (2) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Отметим, что теорема 3 дополняет утверждения теоремы 4 [8] и теоремы 9 [6] на случай неавтономных дифференциальных уравнений.

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Л., 1950.
2. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М., 1980.
3. Kalitine B. // C. R. Acad. Sci. Ser. I 338. Paris, 2004. P. 163.
4. Калитин Б. С. // Вестн. БГУ. Сер. I. 1984. № 3. С. 61.
5. Булгаков Н. Г. Знакопостоянные функции в теории устойчивости. Минск, 1984.
6. Калитин Б. С. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 5. С. 758.
7. Калитин Б. С. // Там же. 1999. Т. 35. № 4. С. 453.
8. Калитин Б. С., Сари Т. // Там же. 2001. Т. 37. № 1. С. 12.
9. Hahn W. Stability of motion. Berlin, 1967.
10. Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo, 1966.
11. Seibert P. // Seminar on Differential Equations and Dynamical systems II. Berlin; Heidelberg; New York, 1970. Vol. 144. P. 185.
12. Seibert P. // Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. 1997. Vol. 30. № 7. P. 4675.
13. Персидский К. П. // Мат. сб. 1933. Т. 40. С. 284.
14. Калитин Б. С. Качественная теория устойчивости движения динамических систем. Минск, 2002.

Поступила в редакцию 28.12.11.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры экономической информатики и математической экономики.

УДК 517.984

О. В. ГУЛИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННО РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ КОМПАКТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

The stability properties of the essentially regular operators and of the corresponding essential spectrum under compact perturbations are discussed in this article. It is proved that the essentially regular operators occupy the intermediate position between Fredholm and normally solvable operators in Banach space but the stability properties of the essentially regular operators are different from the operators above. The reasons for instability of the essentially regular operators under compact perturbations are revealed and confirmed by the counterexamples. The addition conditions for the essentially regular operator and for the perturbing compact operator which provides the stability of the essentially regular operator under compact perturbation are displayed. The result for the stability of the essential spectrum corresponding to the essentially regular operators under compact perturbations in Banach space is given.

Ключевые слова: относительно регулярный оператор, обобщенная область значений оператора, регулярный оператор, существенно регулярный оператор, существенное включение Като, фредгольмовый оператор, нормально разрешимый оператор, компактный оператор, устойчивость оператора, существенный спектр оператора.

Key words: relatively regular operator, generalized range of value, regular operator, essentially regular operator, Kato's essential inclusion, Fredholm operator, normally solvable operator, compact operator, stability of operator, essential spectrum of operator.

Пусть T – ограниченный линейный оператор на бесконечномерном банаховом пространстве X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и $\mathbf{B}(X)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов на X . Рассмотрим оператор $T \in \mathbf{B}(X)$. Обозначим через $N(T) := \{x \in X : Tx = 0\}$ ядро оператора T , а через $R(T)$ – область значений оператора T , через $N^\infty(T) := \bigcup \{N(T^k) : k = 1, 2, 3, \dots\}$ – обобщенное ядро линейного ограниченного оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ и через $R^\infty(T) := \bigcap \{R(T^k) : k = 1, 2, 3, \dots\}$ – обобщенную область значений оператора $T \in \mathbf{B}(X)$. Для оператора $T \in \mathbf{B}(X)$ определим также следующие числовые характеристики: $\alpha(T) := \dim N(T)$ – нуль оператора T (размерность ядра); $\beta(T) := \operatorname{codim} R(T) = \dim (X / R(T))$ – дефект оператора T (размерность коядра).

Говорят, что оператор T , действующий из банахова пространства X в банахово пространство X , имеет обобщенный обратный оператор (или псевдообратный), если существует такой оператор $S : X \rightarrow X$, что выполняется равенство $TST = T$ [1].

Определение 1. Оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ называется *относительно регулярным*, если для оператора T существует обобщенный обратный, т. е. такой оператор $S \in \mathbf{B}(X)$, что $TST = T$.