

4. СХЕМОТЕХНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

4.1. Общие положения

Схемотехническое моделирование – важный этап проектирования многих изделий электронной техники (ИЭТ): цифровых и аналоговых интегральных схем (ИС), электронных схем разной степени сложности, реализованных на дискретных элементах, блоков радиоаппаратуры и электронных изделий в целом. Программы схемотехнического моделирования, развитие которых началось в 60-х годах XX века, достигли, в настоящее время, высокого уровня совершенства. При этом они, как правило, входят в состав высоко интегрированных систем автоматизированного проектирования (САПР).

На схемотехническом уровне, как и на этапе логического моделирования, основными задачами являются проблемы анализа. Задачи параметрической оптимизации требуют больших вычислительных затрат и применяются только к схемам небольшого размера. Принято выделять следующие основные задачи схемотехнического моделирования: расчет статического режима, переходных процессов и частотных характеристик. Современные программы схемотехнического моделирования, например, программа PSpice, позволяют решать и другие задачи: расчет малосигнальных передаточных функций и чувствительностей в режиме по постоянному току, спектральный анализ, расчет уровня внутреннего шума, некоторые виды многовариантного и статистического анализа.

Схемотехническое (электрическое, аналоговое) моделирование представляет собой моделирование электрических процессов в электронных устройствах, обычно изображаемых в виде принципиальных электрических схем, т.е. соединений условных обозначений элементов схемы (транзисторов, диодов, резисторов, конденсаторов и т.д.). Схемотехническое моделирование учитывает реальные физические ограничения в электрических процессах – законы сохранения. Этим оно отличается от логического моделирования, при котором рассматриваются только информационные потоки в схеме. Упомянутые ограничения описываются первым и вторым законами Кирхгофа, которые вытекают из законов сохранения заряда и энергии и называются обычно законами электрического равновесия. Необходимость выполнения этих законов в каждой расчетной точке требует решения соответствующих уравнений электрического равновесия.

В связи с этим в математическую модель электронного устройства (математическую модель схемы, ММС) входят не только модели отдельных элементов и уравнения их связи, как и в логическом моделировании, но и уравнения электрического равновесия, составляемые на основе законов Кирхгофа и называемые обычно топологическими уравнениями. Уравнения отдельных элементов схемы называются компонентными. Таким образом, математическая модель схемы в общем случае состоит из двух подсистем уравнений – компонентной и топологической.

Более высокая степень строгости описания электронных схем при схемотехническом моделировании позволяет получить более точные сведения о процессах в схеме по сравнению с логическим моделированием. Платой за это служит увеличение времени моделирования из-за необходимости решения уравнений равновесия.

Цель схемотехнического моделирования состоит обычно в определении формы и параметров величин тока и напряжения, возникающих в разных точках схемы. Далее можно вычислить параметры сигналов (фронт, длительность, задержку и др.), рассчитать спектр выходного сигнала, чувствительность схемы к изменению параметров ее элементов, решить задачи статистического анализа схемы и оптимизации ее параметров.

4.2. Область применимости законов Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа выражает тот факт, что алгебраическая сумма токов i в любом узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=0}^n i_k = 0. \quad (1)$$

Второй закон Кирхгофа состоит в том, что алгебраическая сумма напряжений $u_k = \varphi_j - \varphi_l$ ветвей в любом контуре электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=0}^n u_k = 0. \quad (2)$$

Законы Кирхгофа, безусловно справедливые в цепях постоянного тока, можно применить и для расчета переходных процессов, если выполняется условие квазистационарности токов и напряжений. Это условие заключается в том, что скорость изменения токов и напряжений в схеме предполагается достаточно малой по сравнению со скоростью c распространения этих изменений. Другими словами, необходимо, чтобы за время t , в течение которого изменения токов и напряжений передается от одного участка цепи к другому, сами токи и напряжения изменились незначительно, т.е. выполнялось бы условие

$$t \ll T, \quad (3)$$

где T – период колебаний для колебательных цепей или постоянная времени для апериодических цепей. Применительно к колебательным цепям после умножения обеих частей этого неравенства на c получим слева линейный размер цепи $l = c \cdot t$, а справа – длину электромагнитной волны $\lambda = c \cdot T$. Поэтому условие квазистационарности можно записать в следующем виде:

$$l \ll \lambda. \quad (4)$$

Для вакуума c – скорость света. При частоте 1 МГц, $\lambda = 300$ м. В схеме, собранной на дискретных компонентах (транзисторах, конденсаторах, резисторах), используются разные материалы (кремний – в транзисторах, диэлектрик – в конденсаторах, высокоомный материал – в резисторах, медь – для соединений элементов схемы). Величина скорости здесь будет существенно меньше. Так, скорость распространения электромагнитной волны в меди примерно в два раза меньше скорости света в вакууме. Поэтому, если предположить, что она в схеме в среднем в 10 раз меньше скорости света в вакууме, то $\lambda_{\text{схема}} = 30$ м. На печатной плате такой генератор будет занимать площадь порядка 10 см^2 , а его максимальный размер ~ 3 см. Для частоты 1 ГГц $\lambda = 0,3$ м и $\lambda_{\text{схема}} = 3$ см. Микропроцессор, имеющий такую тактовую частоту, изготавливается по проектным нормам не более 0,1 мкм и триггер, содержащий 8 транзисторов, будет иметь максимальный размер $\sim 0,5$ мкм. Таким образом, упомянутое приближение применимо при анализе достаточно больших блоков микропроцессора.

Здесь следует отметить еще одну особенность решаемой задачи. Все проводники в моделируемой схеме считаются идеальными, т. е. собственное сопротивление, индуктивность и емкость проводника равны нулю. Следовательно, потенциал в каждой точке проводника одинаков.

4.3. Математические модели электронных схем

При составлении уравнений ММС используются известные методы теории электрических цепей, позволяющие на основе законов Кирхгофа и соотношений, описывающих электрическое поведение элементов схемы, связать токи и напряжения различных ветвей электрической схемы. Однако эти методы развиты для тех случаев, когда в схеме имеются только простые двухвыводные компоненты, а именно сопротивления R , емкости C , индуктивности L , источники напряжения V и источники тока I . В реальных схемах используются элементы, имеющие большее число выводов, например, транзисторы. Поэтому, чтобы можно было применить упомянутые методы и в этом случае, необходимо использовать модель транзистора в виде эквивалентной схемы, содержащей только элементы R , C , L , V и I . Это же приходится делать и для такого двухвыводного компонента как полупроводниковый диод, т.к. его поведение слишком сложно, чтобы его можно было описать одним из этих элементов.

Совокупность соотношений (1) и (2) для всей схемы приводит к сильной избыточности задачи. Поэтому следует выбрать такой набор переменных (токов и/или напряжений), который позволил бы полностью описать процессы в схеме. Кроме того, следует иметь в ви-

ду, что не любую систему уравнений, образующую ММС, можно решить, причем решить с приемлемыми затратами машинного времени. При составлении уравнений ММС нужно учитывать, каким методом будет решаться эта задача.

Рассмотрим задачу анализа переходных процессов в схеме. Если в ней есть емкости и индуктивности, то она не мгновенно реагирует на входной сигнал. Ток i_C и напряжение v_C емкостной ветви и ток i_L и напряжение v_L индуктивной ветви связаны известными соотношениями:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C}; \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v_L}{L} \quad (5)$$

где C – величина емкости, L – величина индуктивности, t – время.

Соотношения (4) приводят к тому, что моделью схемы оказывается система обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Переменные v_C и i_L , производные которых присутствуют в этой системе, определяют состояние схемы в каждый момент переходного процесса и потому называются переменными состояния, а данный подход – метод переменных состояния. Обозначим вектор переменных состояния W .

Многие численные методы решения СОДУ требуют, чтобы решаемая система имела форму Коши:

$$\frac{dW}{dt} = F(W, t), \quad (6)$$

где каждое уравнение системы представляет собой явное выражение производной очередной переменной состояния через переменные состояния и время. Отсюда следует, что не все уравнения, вытекающие из законов Кирхгофа, могут быть использованы в этом случае. Рассмотрим, например, узел схемы, к которому подключены только резисторы. Ток, текущий через резистор i_R , определяется через напряжение на нем v_R соотношением:

$$i_R = R \cdot v_R, \quad (7)$$

где R – сопротивление резистора. Следовательно, если попытаться применить (1), уравнение для этого узла будет алгебраическим. Алгебраическим будет и уравнение, возникающее при использовании (2) для контура, содержащего только резисторы. Есть и другие ограничения.

В большинстве современных программ схемотехнического моделирования используется метод узловых потенциалов. Основными (базовыми) переменными в этом случае являются потенциалы в узлах схемы. Топологическая система уравнений составляется на основе первого закона Кирхгофа, поэтому ММС может не иметь форму Коши, что необходимо учитывать при выборе метода решения уравнений модели.

Рассмотрим, для примера, схему, приведенную на рис.1. Здесь стрелками показаны направления течения токов, цифры в рамках – номера узлов схемы.

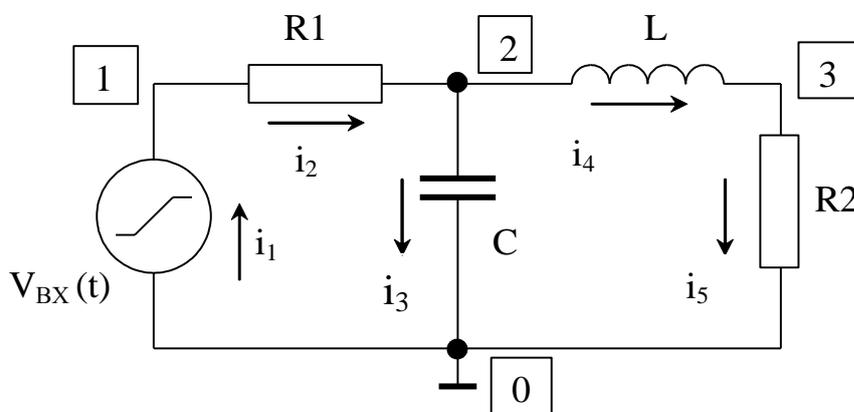


Рис.1

Будем считать втекающий ток положительным, вытекающий – отрицательным. Система уравнений, вытекающая из 1-го закона Кирхгофа, имеет вид:

$$\begin{aligned}
1) \quad & i_1 - i_2 = 0 \\
2) \quad & i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\
3) \quad & i_4 - i_5 = 0 \\
4) \quad & -i_1 + i_3 + i_5 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнения (1)-(3) записаны для соответствующих узлов, уравнение (4) – для нулевого узла.

Любое из этих четырех уравнений может быть получено как линейная комбинация остальных трех. Так, первое уравнение получается, если сложить второе, третье и четвертое уравнения и результат умножить на -1, а последнее уравнение есть умноженная на -1 сумма первых трех. Таким образом, эта топологическая система уравнений не является линейно независимой. Чтобы этого избежать, исключим последнее уравнение. Это позволяет решить еще одну задачу.

Из общего курса физики известно, что потенциал определен с точностью до константы. В этом случае полагают потенциал на бесконечности равным нулю, что определяет точку отсчета. Но при проведении численных расчетов пользоваться бесконечностью неудобно, поэтому положим потенциал нулевого узла равным нулю и он, нулевой узел, будет точкой отсчета (опорным узлом) конкретной схемы. Все остальные потенциалы отсчитываются от него.

Из рассмотрения исключаются также те узлы, потенциалы в которых известны по условиям задачи. Это, например, места подключения внешних генераторов напряжения (источник питания схемы, генератор входного сигнала, т.д.). В схеме рис.1 это 1-й узел. Таким образом, топологическая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
2) \quad & i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\
3) \quad & i_4 - i_5 = 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Она показывает, как между собой соединены элементы схемы и как связаны друг с другом токи, текущие через элементы. Эту систему дополним компонентными уравнениями, связывающими токи, текущие через выводы компонента, с потенциалами на выводах. В результате получаем систему уравнений, решением которой будут потенциалы в узлах схемы как функции времени

$$\varphi_k = f_k(t). \tag{10}$$

Подставив функции (10) в компонентные уравнения, найдем токи в любой момент времени. Таким образом, получим полную информацию о схеме.

Перепишем компонентные уравнения элементов в следующем виде:

$$i_R = \frac{v_R}{R}; \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}; \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}. \tag{11}$$

Последнее соотношение нельзя использовать в методе узловых потенциалов, т.к. необходимо явно выразить зависимость тока компонента от напряжения на нем. Поэтому компонентное уравнение для индуктивности запишем в виде

$$i_L = \frac{1}{L} \int v_L dt + Const. \tag{12}$$

ММС в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{V_{BX}(t) - \varphi_2}{R1} - C \frac{d\varphi_2}{dt} - \frac{1}{L} \int (\varphi_2 - \varphi_3) dt - Const = 0; \\
\frac{1}{L} \int (\varphi_2 - \varphi_3) dt + Const - \frac{\varphi_3}{R2} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Т.е. в этом случае ММС представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений. Более того, если в схеме есть узлы, к которым не подключены ни емкости, ни индуктивности, в модели появляются алгебраические уравнения.

В подавляющем большинстве случаев подобную задачу не удастся решить аналитически, единственный путь решения — численный. Для начала рассмотрим более простую ситуацию. Если в схеме на рис.1 индуктивность заменить конденсатором, в системе (13) вместо

интегралов появятся производные от потенциалов по времени, т.е. это будет система обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.4 Численные методы решения ОДУ

Пусть задано уравнение с начальным условием:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u, t), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (14)$$

Решить его – значит найти значения (приближенно) $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_T$ в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, T$.

Простейший способ построения численного метода – разложение в ряд Тейлора. Пусть уже найдены $u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j$. Построим правило вычисления $u_{j+1}=u(t_{j+1})$. Для этого разложим функцию u_{j+1} в ряд Тейлора в окрестности точки t_j :

$$u_{j+1} = u(t_j + h_j) = u_j + h_j \left. \frac{du}{dt} \right|_{t_j} + \frac{h_j^2}{2} \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t_j} + \dots$$

Оставив в разложении первые два члена, получим явный метод Эйлера:

$$u_{j+1} = u_j + h_j f(u_j, t_j). \quad (15)$$

Теоретические исследования показали, что такой подход позволяет получить решение с требуемой достаточно высокой точностью только при условии выбора очень малого шага по времени (шага интегрирования). Кроме того, этот метод применим к системам, содержащим только дифференциальные уравнения.

Построим неявный метод Эйлера. Пусть $u_j = u(t_{j+1} - h_j)$. Разложим эту функцию в ряд Тейлора в окрестности точки t_{j+1} :

$$u_j = u_{j+1} - h_j \left. \frac{du}{dt} \right|_{t_{j+1}} + \frac{h_j^2}{2} \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t_{j+1}} - \dots$$

Выразим отсюда u_{j+1} :

$$u_{j+1} = u_j + h_j \left. \frac{du}{dt} \right|_{t_{j+1}} - \frac{h_j^2}{2} \left. \frac{d^2u}{dt^2} \right|_{t_{j+1}} + \dots$$

Ограничимся двумя членами разложения

$$u_{j+1} = u_j + h_j f(u_{j+1}, t_{j+1}). \quad (16)$$

Это и есть неявный метод Эйлера. Для него выбор шага интегрирования определяется только требованием точности. Не возникает проблем и при наличии в системе алгебраических уравнений.

Большой эффективностью обладает неявный метод Шихмана. Он отличается от метода Эйлера тем, что здесь выполняется более точная аппроксимация производной. Для этого рассмотрим три последовательные точки (u_{j-1}, t_{j-1}) , (u_j, t_j) и (u_{j+1}, t_{j+1}) , причем u_{j-1} и u_j уже известны. Обозначим

$$h_{j-1} = t_j - t_{j-1}, \quad h_j = t_{j+1} - t_j. \quad (17)$$

Для определения значения функции в момент времени t_{j+1} аппроксимируем ее параболой по трем точкам. Параболу определим в виде:

$$u = c_0 + c_1(t - t_{j-1}) + c_2(t - t_{j-1})(t - t_j).$$

Решив СЛАУ

$$c_0 = u_{j-1}$$

$$c_0 + c_1 h_{j-1} = u_j$$

$$c_0 + c_1 (h_{j-1} + h_j) + c_2 (h_{j-1} + h_j) h_j = u_{j+1}$$

найдем значения коэффициентов

$$c_0 = u_{j-1}, \quad c_1 = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_{j-1}}, \quad c_2 = \frac{(u_{j+1} - u_j)h_{j-1} + (u_{j-1} - u_j)h_j}{(h_{j-1} + h_j)h_{j-1}h_j}.$$

Если учесть, что

$$\frac{du}{dt} = c_1 + c_2 (2t - t_{j-1} - t_j),$$

неявная аппроксимация (14) имеет вид

$$\frac{u_{j+1}h_{j-1}(2h_j + h_{j-1}) - u_j(h_j + h_{j-1})^2 + u_{j-1}h_j^2}{(h_{j-1} + h_j)h_{j-1}h_j} = f(u_{j+1}, t_{j+1}), \quad (18)$$

которую, по аналогии с (16), можно переписать

$$u_{j+1} = \frac{(h_j + h_{j-1})^2}{h_{j-1}(2h_j + h_{j-1})}u_j - \frac{h_j^2}{h_{j-1}(2h_j + h_{j-1})}u_{j-1} + \frac{h_j(h_j + h_{j-1})}{2h_j + h_{j-1}}f(u_{j+1}, t_{j+1}).$$

Обратимся теперь к проблеме построения математической модели методом узловых потенциалов.

4.2.2 Алгебраизованная модель

Основная идея схемотехнического моделирования методом узловых потенциалов – сведение интегро-дифференциальных уравнений в каждый момент времени $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots$ к системе алгебраических уравнений.

Проиллюстрируем методику такого сведения на нашем примере. Будем искать решение в момент времени t_{j+1} . Запишем уравнения баланса токов для этого момента времени:

$$i_{R1}^{j+1} - i_C^{j+1} - i_L^{j+1} = 0,$$

$$i_L^{j+1} - i_{R2}^{j+1} = 0.$$

Аппроксимируем производные, входящие в компонентные уравнения для C и L , применяя неявный метод Эйлера. Теперь неявный метод Эйлера перепишем в таком виде:

$$u_{j+1} = u_j + h_j \left. \frac{du}{dt} \right|_{t_{j+1}} \quad \text{или} \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t_{j+1}} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_j}.$$

Следовательно

$$i_C^{j+1} = c \left. \frac{d\varphi_1}{dt} \right|_{t_{j+1}} = c \frac{\varphi_1^{j+1} - \varphi_1^j}{h_j}.$$

Компонентное уравнение для индуктивности:

$$V_L^{j+1} = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t_{j+1}} \quad \text{или} \quad \varphi_1^{j+1} - \varphi_2^{j+1} = L \frac{i_L^{j+1} - i_L^j}{h_j}.$$

Откуда:

$$i_L^{j+1} = i_L^j + \frac{h_j}{L} (\varphi_1^{j+1} - \varphi_2^{j+1}).$$

После подстановки:

$$\frac{v_{BX}^{j+1} - \varphi_1^{j+1}}{R1} - C \frac{\varphi_1^{j+1} - \varphi_1^j}{h_j} - i_L^j - \frac{h_j}{L} (\varphi_1^{j+1} - \varphi_2^{j+1}) = 0, \quad (19)$$

$$i_L^j + \frac{h_j}{L} (\varphi_1^{j+1} - \varphi_2^{j+1}) - \frac{\varphi_2^{j+1}}{R2} = 0.$$

Получили на текущем шаге интегрирования систему из двух алгебраических уравнений. При наличии в схеме упомянутых выше узлов, к которым не подключены ни емкости, ни индуктивности, в такой системе появится соответствующее число дополнительных алгебраических уравнений.

Система (19) содержит только линейные уравнения. Это объясняется тем, что в нашем примере использованы простейшие линейные элементы схемы. В реальных схемах широко используются такие нелинейные элементы как диоды и транзисторы, что приводит к необходимости решать системы нелинейных алгебраических уравнений. Решение таких систем ищется методом Ньютона.

4.2.3 Метод Ньютона

Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений общего вида:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Ее решение $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ будем искать следующим образом. Пусть задано начальное приближение \mathbf{x}^0 . Построим итерационное правило вида:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k.$$

Будем полагать, что в точке \mathbf{x}^{k+1} достигается решение, т. е.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k+1}) = 0 \text{ или } \mathbf{F}(\mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k) = 0.$$

Разложим векторную функцию \mathbf{F} в ряд Тейлора, сохранив в разложении первые два члена:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x}^k = 0.$$

Относительно поправки $\Delta \mathbf{x}^k$ получаем систему линейных алгебраических уравнений n -го порядка:

$$\mathbf{J}^k \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}^k,$$

где $\mathbf{F}^k = \mathbf{F}(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{J}^k = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k}$ — $[n \times n]$ - матрица Якоби.

Метод Ньютона реализуется алгоритмом:

1. Задание \mathbf{x}^0 .
2. Выполнить в цикле ($k = 0, 1, 2, \dots$):
 - 2.1 Вычислить \mathbf{F}^k и \mathbf{J}^k .
 - 2.2 Решить $\mathbf{J}^k \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}^k$;
 - 2.3 $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$;
 - 2.4 Если $\|\Delta \mathbf{x}^k\| \leq \varepsilon_1$ и $\|\mathbf{F}^k\| \leq \varepsilon_2$, то завершить уточнение.

Анализ этого алгоритма показывает, что для того, чтобы выполнить шаг интегрирования по времени, необходимо уметь эффективно решать две задачи: 1) вычислять вектор невязок \mathbf{F}^k и матрицу Якоби \mathbf{J}^k ; 2) решать систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}^k \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}^k.$$

Обратимся теперь к проблеме решения систем линейных алгебраических уравнений. Но прежде отметим одну особенность матрицы системы (4) — ее сильную разреженность. Анализируемые схемы могут содержать десятки и даже сотни тысяч узлов. Среди них основная масса будет такими, которые приведены на рис.1. Для первого узла соседними (смежными) будут узлы 3, 2 и 0, т.е. потенциал φ_1 зависит только от φ_3 , φ_2 и φ_0 . Кроме того, $\varphi_0=0$ и φ_3 известен по условию задачи. Следовательно, в каждом уравнении системы ненулевыми будут только коэффициенты, соответствующие текущему (для 1-го уравнения это первый) узлу и всем смежным узлам. Причем и некоторые из смежных потенциалов могут быть известными и соответствующие им коэффициенты будут равны 0.

Еще одна особенность — ненулевые коэффициенты размещены в матрице нерегулярным образом. Для решения таких систем применяются прямые методы и в частности метода LU – разложения.

4.2.4 Метод LU-разложения

Пусть требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

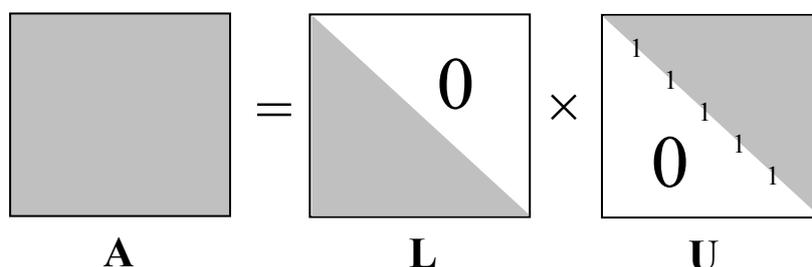
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

с неособенной $[n \times n]$ -матрицей \mathbf{A} .

Любую неособенную матрицу можно представить в виде произведения

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

где \mathbf{L} – нижняя треугольная матрица, \mathbf{U} – верхняя треугольная матрица с единичной диагональю. Число ненулевых элементов в матрице \mathbf{L} равно $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$, в матрице \mathbf{U} – $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$. Общее число ненулевых элементов в матрицах \mathbf{L} и \mathbf{U} равно n^2 .



Если по правилу умножения матриц

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kj}$$

раскрыть это матричное произведение, то получим n^2 уравнений с n^2 неизвестными. Эти уравнения преобразуются к виду:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i \geq j;$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right), \quad i < j.$$

Последовательность вычисления элементов матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} следующая: из первого соотношения вычисляем первый столбец матрицы \mathbf{L} , затем из второго соотношения – строку матрицы \mathbf{U} и т. д.

С учетом разложения система записывается следующим образом:

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}.$$

В итоге алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений примет вид:

1. Расчет матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} ;
2. Решение $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$;
3. Решение $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

На всех этапах алгоритма учитывается сильная разреженность матрицы системы.

4.2.5 Алгоритм анализа переходных процессов.

Таким образом, типичный алгоритм неявного интегрирования включает в себя следующие процедуры, повторяющиеся на каждом шаге по времени:

определение величины шага интегрирования по времени h_n ;

вычисление начального приближения φ_n^0 к искомому вектору φ_n ;

вычисление φ_n путем решения уравнений алгебраизованной модели.

Используются разные методы для оценки h_n [1], однако подход, примененный в программе PSpice, является достаточно удачным. При выполнении первого шага интегрирования величина шага выбирается в соответствии с начальными установками программы. После проведения расчетов выполняется оценка того, как сильно изменилось состояние схемы. Если изменения велики, например, максимальное изменение потенциала превышает заданное значение, расчет первого шага повторяется, но величина шага берется в два раза меньшей. При этом вновь выполняется проверка изменений. Когда таким, экспериментальным, путем найдена требуемая величина шага, расчет последнего прекращается и переходят к выполнению очередного шага по времени. Его величина считается равной величине предыдущего шага. Если же изменения в схеме очень малы, т.е. схема ведет себя очень медленно, повторный расчет не выполняется, но величина следующего шага по времени берется в два раза большей. Таким образом, программа отслеживает поведение схемы, выбирая величину шага по времени.

Такой подход позволяет легко решать и вторую задачу, задачу выбора начального приближения. В этом случае в качестве начального распределения потенциала берется решение, полученное на предыдущем шаге по времени. Малость шага обеспечивает хорошую точность такого выбора.

4.3. Моделирование статических режимов

Расчет статического состояния схемы можно выполнить, решив предыдущую задачу. Для этого можно, например, рассмотреть процесс включения схемы. Однако в реальных программах схемотехнического моделирования эта задача решается иначе. Топологическая система (1) дополняется компонентными уравнениями для стационарного состояния. В результате получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона.

4.4. Модели компонентов программ схемотехнического анализа

Для анализа электрических схем на постоянном токе, в частотной области и во временной области необходимы соответствующие модели компонентов схемы, поэтому модель каждого схемотехнического компонента имеет, по крайней мере, три разновидности моделей: статическую, частотную и временную (динамическую). По степени точности отображаемых физических процессов каждая модель может иметь целый ряд модификаций.

Модели объединяются в библиотеки. Каждый схемотехнический компонент имеет две составляющие: графическое обозначение, которое размещается в библиотеке графических примитивов и математическое описание, которое находится в библиотеке моделей.

Библиотека графических примитивов доступна графическому редактору, используя который можно готовить моделируемую схему, библиотека моделей – программе схемотехнического моделирования.

Имеется два типа аналоговых моделей: модели компонентов схемы и макромодели. Первый тип моделей соответствует таким компонентам, как источники напряжения, тока, резисторы, конденсаторы, диоды, транзисторы и т.п. Второй тип моделей описывает подсистемы. Строятся макромодели из таких компонентов, как резисторы, диоды, транзисторы, источники тока и напряжения. Основная задача макромодели – правильно описывать подсистему со стороны входов и выходов. Использование макромоделей позволяет ускорить процесс моделирования.

Каждая модель имеет набор параметров, с помощью которых конкретизируется тип компонента. Такие наборы параметров объединяются, в свою очередь, в библиотеки параметров.

К моделям компонентов схемы предъявляются достаточно жесткие требования. Модель должна достаточно точно описывать ВАХ прибора, обеспечивать непрерывную зависимость тока от напряжения и первой производной тока по напряжению. Желательно, чтобы формулы модели были относительно простыми, что позволит моделировать достаточно сложные схемы при относительно небольших затратах.

Рассмотрим динамические модели полупроводникового диода, биполярного и МОП транзисторов, отдавая предпочтение их наиболее простым вариантам, учитывающим только основные физические механизмы работы компонента. Все эти модели строятся на основе эквивалентных схем (схем замещения), содержащих только двухвыводные элементы, что необходимо для использования 1-го закона Кирхгофа. Каждый такой элемент отражает некоторую физическую особенность работы полупроводникового прибора.

4.4.1. Динамическая модель полупроводникового диода

В основу динамической модели диода положена эквивалентная электрическая схема, приведенная на рис. 2б. Управляемый источник $i_D(V_D)$ описывает ток инжекции перехода в

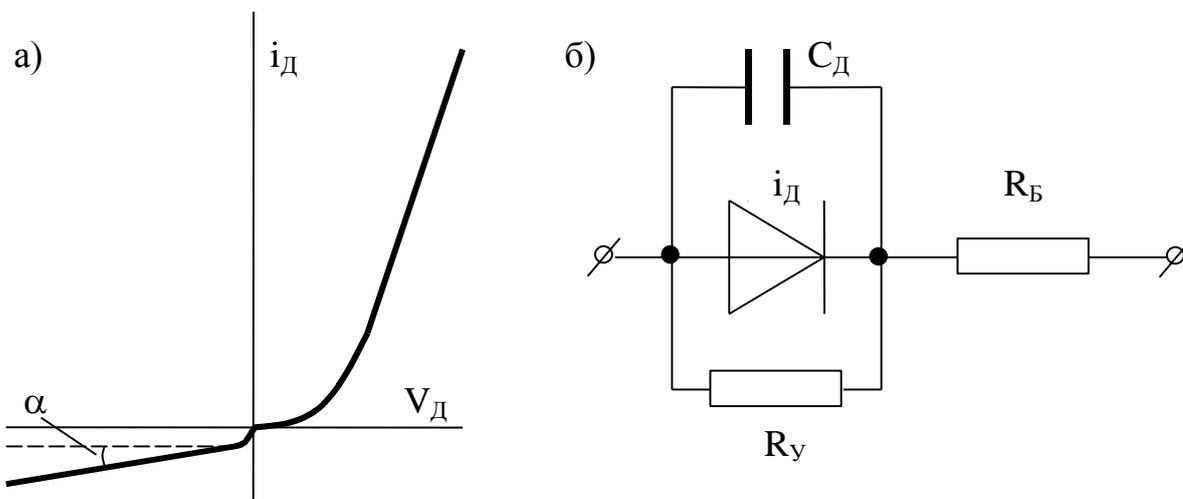


Рис.2

виде следующей функции:

$$i_D = i_T [e^{V_D / m_D \varphi_T} - 1].$$

Сопротивление R_y моделирует наличие токов утечки перехода (определяется из ВАХ величиной $1/\text{tg}\alpha$). Резистор R_B учитывает сопротивление тела базы. Вообще говоря, это сопротивление зависит от заряда не основных носителей, инжектируемых в базу. В интересах простоты будем R_B считать постоянным.

Конденсатор C_D моделирует инерционные свойства диода. Его емкость определяется соотношением:

$$c_D = c_{зД} + c_{дД} = c_{зД} + \frac{\tau_D}{m_D \varphi_T} (i_D + i_T),$$

в котором $c_{зД}$ – зарядная емкость, $c_{дД}$ – диффузионная емкость, τ_D – постоянная времени.

Параметрами модели являются R_B , R_U , i_T , m_D , τ_D , c_{3D} и их температурные коэффициенты.

Статическая модель диода отличается от динамической только отсутствием емкости.

4.4.2. Динамическая модель биполярного транзистора

Наиболее известной и самой простой является модель Эберса-Молла. Ее схема замещения приведена на рис. 3. Первоначально эта модель была предложена для моделирования работы транзистора на постоянном токе. Впоследствии она была дополнена элементами, отражающими накопление заряда в базе и изменение пространственного заряда в p-n переходах. Данная модель построена по принципу наложения нормальных и инверсных токов в транзисторе.

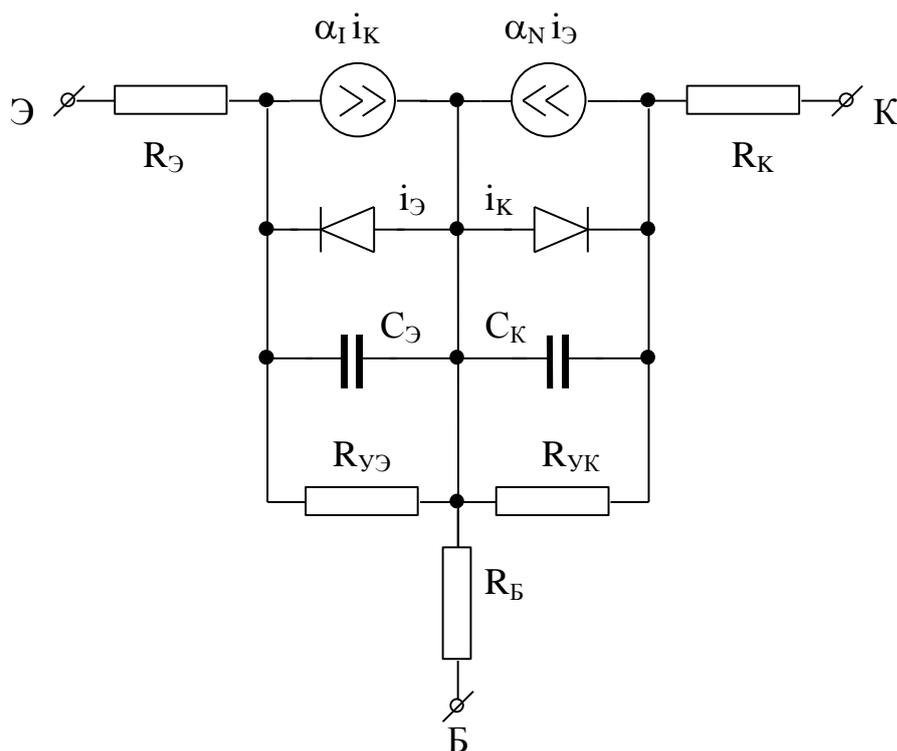


Рис.3

Здесь токи $i_Э$ и $i_К$ – это токи носителей заряда, инжектированных в базу соответственно эмиттерным и коллекторным переходами, α_N и α_I – коэффициенты передачи тока в схеме с общей базой при нормальном и инверсном включении. Генераторы тока $\alpha_N i_Э$ и $\alpha_I i_К$ учитывают взаимное влияние p-n переходов. Емкости $C_Э$ и $C_К$ моделируют инерционные свойства эмиттера и коллектора, $R_{У_Э}$ и $R_{У_К}$ позволяют учесть токи утечки переходов, $R_Э$, $R_Б$ и $R_К$ – объемные сопротивления соответствующих областей транзистора.

Рассмотренная модель имеет ряд серьезных недостатков, одним из которых является предположение о постоянстве коэффициентов передачи тока. Это условие выполняется только на низких уровнях инжекции, когда заряд не основных носителей, инжектированных p-n переходом, существенно меньше равновесного заряда основных носителей.

Более точной является модель Гуммеля – Пуна, которая в настоящее время является основной моделью биполярного транзистора, широко используемой при схемотехническом моделировании электронных схем. Здесь она не рассматривается в силу ее сложности. Отметим лишь, что набор параметров модели Гуммеля – Пуна, содержит 52 параметра (включая температурные коэффициенты).

4.4.3 Модель полевого транзистора

Динамическая схема замещения полевого транзистора (рис. 4) содержит источник тока $i_{ис}$, описывающий передачу носителей от истока к стоку, сопротивление $R_{ис}$, моделирующее ток утечки исток-сток, объемные сопротивления истока ($R_{и}$), затвора ($R_{з}$), стока ($R_{с}$) и подложки ($R_{п}$). Генератор тока $i_{ип}$ и конденсатор $C_{ип}$ моделируют истоковый p-n переход, элементы $i_{сп}$ и конденсатор $C_{сп}$ — стоковый переход. Конденсаторы $C_{зи}$, $C_{зс}$ и $C_{зп}$ моделируют емкости перекрытия затвор-исток, затвор-сток и емкость МОП конденсатора.

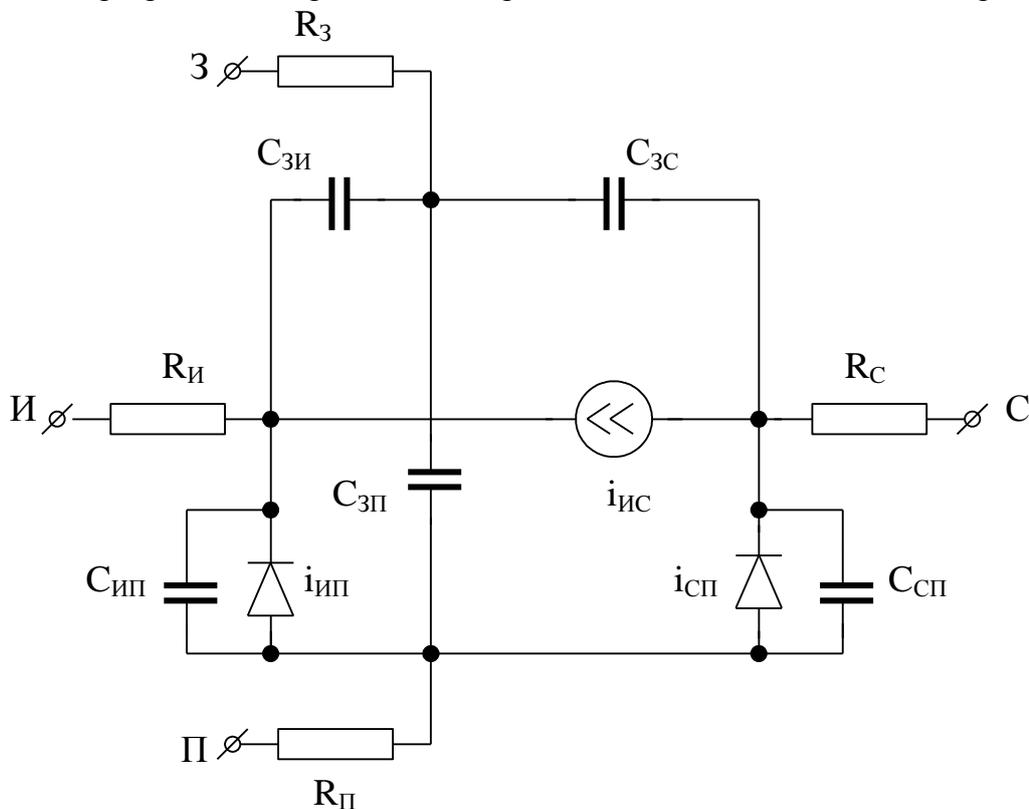


Рис.4

Основой этой модели является набор формул, описывающих генератор $i_{ис}$. Таких наборов может быть несколько. Так, например, в программе PSpice используется шесть разных наборов формул (шесть моделей), выбор которых определяется параметром LEVEL, принимающим значения от 1 до 6. Модель первого уровня (LEVEL=1) используются в тех случаях, когда требования к точности расчетов невысоки. Модели второго (LEVEL=2) и третьего (LEVEL=3) уровней учитывают многие тонкие эффекты, например, эффекты короткого и узкого каналов. Модель третьего уровня имеет некоторые преимущества по сравнению с моделью (LEVEL=2). Она включает более простые формулы и ее параметры легче определять. Параметры моделей с 4-го по 6-й уровень рассчитываются по справочным данным с помощью специальной программы идентификации.