Дискретная математика

том 19 выпуск 3 * 2007

УДК 519.8

Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования

© 2007 г. В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Рассматривается многокритериальная задача целочисленного линейного программирования с конечным множеством допустимых решений. С использованием неравенства Минковского–Малера получена верхняя оценка границы изменений в пространстве параметров задачи с произвольной нормой, сохраняющих парето-оптимальность решения. В случае монотонной нормы выведена формула радиуса устойчивости такого решения. В качестве следствия приводится формула радиуса устойчивости в случае нормы Гельдера и, в частности, чебышевской нормы в пространстве параметров векторного критерия.

Работа выполнена при поддержке Межвузовской программы Республики Беларусь «Фундаментальные и прикладные исследования», проект 492/28.

Изучению различных характеристик понятий устойчивости как скалярных, так и векторных задач дискретной оптимизации посвящен ряд публикаций (см., например, [1]–[11]. Как правило, в этих работах исследование устойчивости ведется в предположении, что норма в пространстве изменяющихся параметров чебышевская (l_∞). Хотя имеется ряд работ (см., например, [5, 9, 13, 14, 15, 16]), где получены количественные характеристики устойчивости комбинаторных задач с другими метриками. Настоящая работа продолжает начатые в [17] исследования радиуса устойчивости парето-оптимальных решений векторной задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и рассматривает случай, когда метрика в пространстве возмущающих параметров векторного критерия произвольна.

Пусть m — число критериев, n — число целочисленных переменных, C — матрица размера $n \times m$ со столбцами $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})^T \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subset \mathbf{Z}^n$, причем $1 < |X| < \infty$.

На множестве решений X зададим векторный критерий

$$C^T x = ((C_1, x), (C_2, x), \dots, (C_m, x))^T \to \min_{x \in X}.$$

Под m-критериальной задачей ЦЛП $Z^m(C)$ будем понимать задачу поиска множества парето-оптимальных (эффективных) решений

$$P^m(C) = \{x \in X : X_x(C) = \varnothing\},$$

где

$$X_x(C) = \{x' \in X : C^T x \geqslant C^T x' \ \& \ C^T x \neq C^T x'\}.$$

Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная норма в пространстве $\mathbf{R}^n$, в котором векторы суть матрицы размера $n \times 1$, и пусть $\|\cdot\|^*$ — сопряженная норма, то есть

$$\|v\|^* = \max\left\{\frac{|(u,v)|}{\|u\|} : \ u \in \mathbf{R}^n \setminus \{0^{(n)}\}\right\},$$

$$\|u\| = \max\left\{\frac{|(u,v)|}{\|v\|^*} : \ v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0^{(n)}\}\right\},$$

где $0^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Тогда для любых векторов $u, v \in \mathbf{R}^n$ справедливо неравенство Минковского–Малера (см., например, [18], с. 46)

$$|(u,v)| \leqslant \|u\| \ \|v\|^*. \tag{1}$$

Кроме того, очевидна формула

$$\forall \theta > 0 \ \forall v \in \mathbf{R}^n \ \exists u^0 \in \mathbf{R}^n \ (|(u^0, v)| = \theta \|v\|^* \ \& \ \|u^0\| = \theta). \tag{2}$$

Будем исследовать устойчивость парето-оптимального решения задачи $Z^m(C)$ при возмущении элементов матрицы $C \in \mathbf{R}^{n\times m}$, которое будем осуществлять путем прибавления к матрице C возмущающих матриц из $\mathbf{R}^{n\times m}$.

В пространстве $\mathbf{R}^m$ зададим произвольную норму $\|\cdot\|$, вообще говоря, отличную от нормы, заданной в $\mathbf{R}^n$. Под нормой матрицы C со столбцами $C_1, C_2, \ldots, C_m$ будем понимать норму числового m-вектора

$$\|C\| = \|(\|C_1\|, \|C_2\|, \ldots, \|C_m\|)^T\|. \tag{3}$$

По аналогии с [13]–[17], радиусом устойчивости решения $x \in P^m(C)$ назовем число

$$\rho^m(x, C) = \begin{cases} \sup \Xi(x, C), & \text{если } \Xi(x, C) \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

здесь

$$\Xi(x, C) = \{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega(\varepsilon) \ \& \ (x \in P^m(C + C'))\}$$

— множество возмущающих матриц, где

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{n\times m} : \|C'\| < \varepsilon\}.$$

Таким образом, радиус устойчивости задает предельный уровень возмущений исходных данных задачи в пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$ параметров векторного критерия, которые сохраняют парето-оптимальность решения.

Введем в рассмотрение оператор проектирования вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ из $\mathbf{R}^m$ на неотрицательный ортант $a^+ = (a)^+ = (a_1^+, a_2^+, \ldots, a_m^+)$, где знак $+$ над вектором означает положительную срезку этого вектора, то есть $a_i^+ = (a_i)^+ = \max\{0, a_i\}$.

Лемма 1. *Пусть решения $x \neq x'$ и вектор $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ с положительными компонентами связаны условиями*

$$\eta_i \|x' - x\|^* > (C_i, x' - x)^+, \qquad i \in N_m. \tag{4}$$

Тогда при любом числе $\varepsilon > \|\eta\|$ существует такая матрица $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что $x' \in X_x(C + C^0)$.

Доказательство. Согласно неравенству Минковского–Малера (1), для любой матрицы $C' \in \mathbf{R}^{n\times m}$ со столбцами C'_i, $i \in N_m$, верны неравенства

$$(C'_i, x' - x) \leqslant \|C'_i\| \|x' - x\|^*, \qquad i \in N_m.$$

Поэтому для каждого индекса $i \in N_m$ согласно (2) найдется такой вектор-столбец C_i^0 с нормой $\|C_i^0\| = \eta_i$, что $(C_i^0, x' - x) = -\eta_i \|x' - x\|^*$. Отсюда, принимая во внимание (4), выводим неравенства

$$(C_i + C_i^0, x' - x) \leqslant (C_i, x' - x)^+ - \eta_i \|x' - x\|^* < 0, \qquad i \in N_m,$$

которые свидетельствуют о том, что $x' \in X_x(C + C^0)$, причем $\|C^0\| = \|\eta\| < \varepsilon$, то есть $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$.

Лемма 1 доказана.

Как обычно, норму $\|\cdot\|$, заданную в пространстве $\mathbf{R}^m$, будем называть монотонной, если для любых векторов $y, y' \in \mathbf{R}^m$ из неравенства $y \leqslant y'$ следует неравенство $\|y\| \leqslant \|y'\|$. Отметим, что условию монотонности удовлетворяет достаточно широкий класс норм. Например, все нормы Гельдера l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, являются монотонными.

Лемма 2. *Если норма в пространстве $\mathbf{R}^m$ монотонна, а число φ и решения x и x' таковы, что выполняются неравенства*

$$0 < \varphi \|x' - x\|^* \leqslant \|(C^T(x' - x))^+\|,$$

то для любой матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ справедливо соотношение $x' \notin X_x(C + C')$.

Доказательство. Допустим, что, наоборот, существует такая матрица $C^0 \in \Omega(\varphi)$, что $x' \in X_x(C + C^0)$. Тогда для каждого $i \in N_m$ справедливо неравенство $(C_i + C_i^0)(x' - x) \leqslant 0$, где C_i^0, $i \in N_m$, — столбцы матрицы C^0. Поэтому, ввиду неравенства (1), справедливы неравенства

$$(C_i, x' - x)^+ \leqslant \|C_i^0\| \, \|x' - x\|^*, \qquad i \in N_m,$$

которые в силу монотонности нормы дают неравенства

$$\begin{aligned}
\|(C^T(x' - x))^+\| &= \|((C_1, x' - x)^+, (C_2, x' - x)^+, \ldots, (C_m, x' - x)^+)^T\| \\
&\leqslant \|(\|C_1^0\|, \|C_2^0\|, \ldots, \|C_m^0\|)^T\| \|x' - x\|^* \\
&= \|C^0\| \|x' - x\|^* < \varphi \|x' - x\|^*,
\end{aligned}$$

что противоречит условию леммы.

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ заданы произвольные нормы. Тогда для радиуса устойчивости $\rho^m(x, C)$ парето-оптимального решения $x^0 \in P^m(C)$ задачи $Z^m(C)$, $C \in \mathbf{R}^{n\times m}$, справедлива верхняя оценка*

$$\rho^m(x^0, C) \leqslant \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|(C^T(x - x^0))^+\|}{\|x - x^0\|^*}, \tag{5}$$

причем

$$\rho^m(x^0, C) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|(C^T(x - x^0))^+\|}{\|x - x^0\|^*}, \tag{6}$$

если норма в пространстве $\mathbf{R}^m$ монотонна.

Доказательство. Для краткости правую часть формулы (6) обозначим через φ. Легко видеть, что $\varphi \geqslant 0$.

Сначала докажем неравенство (5). Пусть $\varepsilon > \varphi$ и решение $\hat{x} \neq x^0$ таково, что

$$\varphi\|\hat{x} - x^0\|^* = \|(C^T(\hat{x} - x^0))^+\|.$$

Тогда существует такое число $\theta > 1$, что $\varepsilon > \|\eta\| = \theta\varphi > \varphi$, где $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m)$ — вектор с компонентами, определяемыми равенствами

$$\eta_i\|\hat{x} - x^0\|^* = \theta(C_i, \hat{x} - x^0)^+, \qquad i \in N_m.$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 1, убеждаемся в существовании матрицы $C^0 \in \Omega(\varepsilon)$ с условием $\hat{x} \in X_{x^0}(C + C^0)$. Значит, x^0 не является эффективным решением задачи $Z^m(C + C^0)$. Тем самым, доказано, что для любого числа $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho^m(x^0, C) < \varepsilon$. Следовательно, $\rho^m(x^0, C) \leqslant \varphi$.

Теперь покажем, что $\rho^m(x^0, C) \geqslant \varphi$ в случае монотонности нормы вектора. Если $\varphi = 0$, то это неравенство очевидно. Пусть $\varphi > 0$. Тогда в соответствии с определением величины φ для любого решения $x \neq x^0$ имеют место неравенства

$$0 < \varphi\|x - x^0\|^* \leqslant \|(C^T(x - x^0))^+\|.$$

Поэтому, согласно лемме 2, при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega(\varphi)$ решение $x \notin X_{x^0}(C + C')$. Это значит, что $x^0 \in P^m(C + C')$ при любой матрице $C' \in \Omega(\varphi)$. Поэтому справедливо неравенство $\rho^m(x^0, C) \geqslant \varphi$, которое вместе с доказанным неравенством (5) дает равенство (6).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в пространствах* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{R}^m$ *задана норма Гельдера*

$$\|z\|_{l_p} = \left(\sum_i |z_i|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

то для радиуса устойчивости решения $x^0 \in P^m(C)$ *справедлива формула*

$$\rho^m_{l_p}(x^0, C) = \min_{x \in X\setminus\{x^0\}} \frac{\|(C^T(x - x^0))^+\|_{l_p}}{\|x - x^0\|_{l_q}},$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Частными случаями следствия 1 являются следующие утверждения.

Следствие 2 ([17]). *Если в пространствах* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{R}^m$ *задана чебышевская норма* l_∞, *то*

$$\rho^m_{l_\infty}(x^0, C) = \min_{x \in X\setminus\{x^0\}} \max_{i \in N_m} \frac{(C_i, x - x^0)}{\|x - x^0\|_{l_1}}.$$

Следствие 3. *Если в пространствах* $\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{R}^m$ *задана октаэдрическая норма* l_1, *то*

$$\rho^m_{l_1}(x^0, C) = \min_{x \in X\setminus\{x^0\}} \sum_{i \in N_m} \frac{(C_i, x - x^0)^+}{\|x - x^0\|_{l_\infty}}.$$

Отсюда, в частности, получаем формулу из [13] для радиуса устойчивости эффективного решения векторной линейной комбинаторной задачи в метрике l_1.

Список литературы

1. Леонтьев В. К., Устойчивость в линейных дискретных задачах. *Проблемы кибернетики* (1979) **35**, 169–184.
2. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач*. Наукова думка, Киев, 1995.
3. Сергиенко И. В., Шило В. П., *Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования*. Наукова думка, Киев, 2003.
4. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N., Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization. *Discrete Appl. Math.* (1995) **58**, №2, 169–190.
5. Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К., Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации. *Журн. вычисл. математики и матем. физики* (1996) **36**, №1, 66–72.
6. Chakravarti N., Wagelmans A. Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems. *Oper. Res. Lett.* (1998) **23**, №1, 1–7.
7. Libura M., van der Poort E., Sierksma G., van der Veen J., Stability aspects of the travelling salesman problem based on k-best solutions. *Discrete Appl. Math.* (1998) **87**, 159–185.
8. Hoesel S., Wagelmans A., On the complexity of postoptimality analysis of 0–1 programs. *Discrete Appl. Math.* (1999) **91**, 251–263.
9. Гордеев Э. Н., Исследование устойчивости задачи о кратчайшем остове в метрике l_1. *Журн. вычисл. математики и матем. физики* (1999) **39**, №5, 770–778.
10. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P., Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Optimization* (2002) **51**, №4, 645–676.
11. Сотсков Ю. Н., Сотскова Н. Ю., *Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами*. НАН Беларуси, Минск, 2004.
12. Greenberg N. J., An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization. In: *Computational and stochastic optimization, logic programming, and heuristic search*. Kluwer, Boston, 1998, pp. 97–108.
13. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М., Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации. *Автоматика и телемеханика* (2004), № 2 79–92.
14. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Анализ устойчивости строго эффективного решения одной векторной задачи булева программирования в метрике l_1. *Дискретная математика* (2004) **16**, №4, 14–19.
15. Emelichev V. A., Kuzmin K. G., Nikulin Yu. V., Stability analysis of the Pareto optimal solution for some vector boolean optimization problem. *Optimization* (2005) **54**, №6, 545–561.
16. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., О радиусе устойчивости эффективного решения одной векторной задачи булева программирования в метрике l_1. *Докл. РАН* (2005) **401**, №6, 733–735.
17. Емеличев В. А., Никулин Ю. В., Об устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования. *Докл. НАН Беларуси* (2000) **44**, №4, 26–28.
18. Беккенбах Э., Беллман Р., *Неравенства*. Мир, Москва, 1965.

Статья поступила 26.05.2006.