УДК 517.955

А.А. ВОРОШИЛОВ, А.А. КИЛБАС

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

Посвящается 80-летию академика В.А. Ильина

Рассмотрим задачу типа Коши

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)=\lambda^2\Delta_x u(x,t)\quad (x\in\mathbb{R}^m,\ t>0,\ \lambda>0),\tag{1}$$

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,0+)=f_k(x)\quad (k=1,\ldots,n=-[-\alpha],\ x\in\mathbb{R}^m).\tag{2}$$

Здесь $\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)$ – частная производная Римана—Лиувилля порядка $\alpha>0$ функции $u(x,t)$ по второй переменной [1, с.342]

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\quad (n=-[-\alpha],x\in\mathbb{R}^m,t>0),\tag{3}$$

$\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,t)$ определяется (3) при $k=1,\ldots,n-1$, и

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-n}u\right)(x,t)=\left(I_{0+,t}^{n-\alpha}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}},$$

выражение $\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}\right)(x,0+)$ понимается как предел

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}\right)(x,0+)=\lim_{t\to 0+}\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,t)\quad (k=1,\ldots,n),\tag{4}$$

а Δ_x – оператор Лапласа относительно $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$: $\Delta_x=\sum\limits_{j=1}^m\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.

В последнее время появилось большое количество публикаций, посвященных исследованию уравнений вида (1), обобщающих классические уравнение теплопроводности и волновое уравнение. Это обусловлено их обширными применениями в задачах физики, механики, химии и других прикладных наук, в частности, приложениями к процессам субдиффузии и супердиффузии. Приведем краткий обзор основных исследований в этом направлении.

А.Н. Кочубей [2] рассмотрел задачу Коши

$$\left(D_{0+,t}^{(\alpha)}u\right)(x,t)=Lu(x,t)\quad (0<\alpha<1;\ x\in\mathbb{R}^m,\ 0<t\le T),\tag{5}$$

$$u(x,0)=f(x)\quad (x\in\mathbb{R}^m),\tag{6}$$

где $\left(D_{0+,t}^{(\alpha)}u\right)(x,t)$ – "регуляризованная" дробная производная Римана—Лиувилля по переменной t

$$\left(D_{0+,t}^{(\alpha)}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\frac{u(x,s)ds}{(t-s)^{\alpha}}-\frac{u(x,0)}{t^{\alpha}}\right],\tag{7}$$

а L – эллиптический дифференциальный оператор n переменных второго порядка

$$L=\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_i a_i\frac{\partial^i}{\partial x_i}+a.$$

А.Н. Кочубей доказал, что задача Коши (5)-(6) имеет единственное решение $u(x,t)$ при соответствующих условиях на функцию $f(x)$ и коэффициенты a_{ij}, a_i и a оператора L, а также указал условия, при которых эта задача с $f(x)=0$ имеет ненулевое решение. В случае, когда $L=\Delta_x$ есть Лапласиан, он получил в явном виде фундаментальное решение $u(x,t)$ в терминах так называемой H-функции [3].

И. Подлюбный [4, п.4.1.2] применил технику интегральных преобразований Фурье и Лапласа для получения решения задачи типа Коши для уравнения

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\lambda^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\quad (x\in\mathbb{R},\ t>0,\ 0<\alpha<1) \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}u\right)(x,t)\Big|_{t=0}=f(x),\quad \lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=0, \tag{9}$$

и для уравнения типа Шнайдера-Вайса

$$u(x,t)=f(x)+\lambda^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t\frac{u(x,s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}\quad (x\in\mathbb{R};\ 0<\alpha\le 1) \tag{10}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=f(x)\ (x\in\mathbb{R}),\quad \lim_{x\to\pm\infty}u(x,t)=0\ (t>0) \tag{11}$$

в виде

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G^{\alpha}(x-\tau,t)f(\tau)d\tau, \tag{12}$$

где

$$G^{\alpha}(x,t)=\frac{1}{2\lambda}t^{(\alpha-2)/2}\varphi\left(-\frac{|x|}{\lambda}t^{-\alpha/2};-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right). \tag{13}$$

Р. Хилфер [5] получил фундаментальное решение многомерного уравнения вида (1) порядка $0<\alpha<1$ с краевым условием (9), где $f(x)=\delta(x)$ есть дельта-функция Дирака, в терминах $H^{2,0}_{1,2}$-функции.

А.В. Псху [6] рассмотрел уравнение

$$u_{xx}(x,y)-D^{\alpha}_{0+,y}u(x,y)=f(x,y) \tag{14}$$

в области D, целиком лежащей в верхней полуплоскости и обладающей тем свойством, что вместе с точкой $(x,y)\in D$ она содержит интервал с концами в точках (x,y) и $(x,0)$. Методом редукции к системе уравнений меньшего порядка построено решение $u(x,y)$ задачи Коши для уравнения (14) с $0<\alpha\le 1$ в области $D=\{(x,y):x\in\mathbb{R},0<y<T\}$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{y\to 0}D^{\alpha-1}_{0+,y}u(x,y)=\tau(x),\ x\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

в терминах функции типа Райта. В [7] А.В. Псху построено общее представление решения диффузионно-волнового уравнения (14) ($0<\alpha<2$) в прямоугольной области, и получены функции Грина основных краевых задач.

Обзор других работ, посвященных исследованию краевых задач для уравнения (1) и его аналогов с частной производной Капуто, приведен в [8, глава 6.1].

Решение задачи (1)-(2) при $0<\alpha\le 1$ и $1<\alpha<2$ получено в [9] соответственно в виде

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}G^{\alpha}_1(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau\quad (0<\alpha\le 1), \tag{16}$$

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[G_1^{\alpha}(x-\tau,t)f_1(\tau)+G_2^{\alpha}(x-\tau,t)f_2(\tau)\right]d\tau\quad(1<\alpha<2),\tag{17}$$

где

$$G_k^{\alpha}(x,t)=\frac{2^{-m}|x|^{\frac{2-m}{2}}}{\lambda^{1+\frac{m}{2}}\pi^{\frac{m-1}{2}}}t^{-k-\frac{\alpha(m-2)}{4}}H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda}t^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\begin{array}{c}\left(\frac{m}{4},\frac{1}{2}\right),\left(1-k-\frac{\alpha(m-2)}{4},\frac{\alpha}{2}\right)\\ \left(\frac{m}{2}-1,1\right),\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{4},\frac{1}{2}\right)\end{array}\right.\right]\quad(k=1,2).\tag{18}$$

С помощью свойств H-функции [3, (2.1.5)]

$$z^{\sigma}H_{p,q}^{r,n}\left[z\left|\begin{array}{c}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]=H_{p,q}^{r,n}\left[z\left|\begin{array}{c}(a_i+\sigma\alpha_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j+\sigma\beta_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]\quad(\sigma\in\mathbb{C}),$$

функции $G_1^{\alpha}(x,t)$ и $G_2^{\alpha}(x,t)$ приводятся к более простому виду:

$$G_k^{\alpha}(x,t)=\pi^{-\frac{m}{2}}|x|^{-m}t^{\alpha-k}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^{\alpha}}\left|\begin{array}{c}(\alpha-k+1,\alpha)\\\left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{array}\right.\right]\quad(k=1,2).\tag{19}$$

Функцию $u(x,t)$ $(x\in\mathbb{R}^m,\ t>0)$, в соответствии с [2], будем называеть классическим решением задачи типа Коши (1), (2), если: 1) $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x при каждом $t>0$; 2) при каждом $x\in\mathbb{R}^m$ $u(x,t)$ непрерывна по t и имеет непрерывную частную производную порядка α по t; 3) выполнены равенства (1), (2).

Исследуем решения (16) $(0<\alpha\le1)$ и (17) $(1<\alpha<2)$. Для этого оценим функции $G_k^{\alpha}(x,t)$ $(k=1,2)$ и их производные по x.

Найдем асимптотическую оценку $H_{1,2}^{2,0}$-функций в (19).

Л е м м а 1. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<2$; $k=1$ при $0<\alpha\le1$ и $k=1,2$ при $1<\alpha<2$. Тогда справедливы следующие асимптотические оценки:*

$$H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^{\alpha}}\left|\begin{array}{c}(\alpha-k+1,\alpha),\\\left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{array}\right.\right]=A_k\exp\left[-(2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2\,t^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{m}{2}-\alpha+k\right)}\left[1+O\left(\frac{t^{\alpha}}{|x|^2}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right]\quad(|x|^2t^{-\alpha}\to\infty,\ k=1,2),\tag{20}$$

где A_k $(k=1,2)$ - некоторые постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с теоремой [3, Т. 1.10], H-функция $H_{p,q}^{q,0}(z)$ имеет при $\Delta>0$ и $a^*>0$ экспоненциальное поведение на бесконечности:

$$H_{p,q}^{q,0}(z)=C_1e^{D_1z^{1/\Delta}}z^{(\mu+1/2)/\Delta}\left[1+O\left(\frac{1}{z}\right)^{1/\Delta}\right]\quad(z\to\infty),\tag{21}$$

где C_1 и D_1 – константы, выражающиеся через параметры Δ, a^*, a_1^*, μ и δ H-функции $H_{p,q}^{q,0}(z)$. В соответствии с определениями [3, (1.1.7)—(1.1.11)], для $H_{p,q}^{r,n}\left[z\left|\begin{array}{c}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_q,\beta_q)\end{array}\right.\right]$ имеем

$$a^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i+\sum_{j=1}^{r}\beta_j-\sum_{j=r+1}^{q}\beta_j,\qquad\Delta=\sum_{j=1}^{q}\beta_j-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i,$$

$$\delta=\prod_{i=1}^{p}\alpha_i^{-\alpha_i}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{\beta_j},\qquad\mu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{i=1}^{p}a_i+\frac{p-q}{2},\qquad a_1^*=\sum_{j=1}^{r}\beta_j-\sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i.$$

Найдем значения этих параметров для функции $H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^{\alpha}}\left|\begin{array}{c}(\alpha-k+1,\alpha)\\\left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{array}\right.\right]$:

$$\Delta=a^*=a_1^*=2-\alpha>0\quad\text{при }0<\alpha<2,\tag{22}$$

$$\delta = \alpha^{-\alpha}, \qquad \mu = \frac{m-1}{2} - \alpha + k. \tag{23}$$

Формула для константы D_1 имеет вид [3, (1.7.2)]:

$$D_1 = \Delta \left(\frac{e^{ia_1^* \pi}}{\delta} \right)^{1/\Delta}. \tag{24}$$

Из равенств (22), (23) получим

$$D_1 = -(2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}. \tag{25}$$

Подставляя параметры (22), (23) и (25) в формулу (21), получим оценку (20), что доказывает лемму.

Из оценки (20) выведем асимптотические соотношения для функций $G_1^\alpha(x,t)$ и $G_2^\alpha(x,t)$ при $|x|^2 t^{-\alpha} \to \infty$:

$$G_k^\alpha(x,t) = B_k \exp\left[-(2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \right] \times$$

$$\times |x|^{-m} t^{\alpha-k} \left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{m}{2}-\alpha+k\right)} \left[1 + O\left(\frac{t^\alpha}{|x|^2} \right)^{\frac{1}{2-\alpha}} \right], \tag{26}$$

где $k=1$ при $0<\alpha\le 1$ и $k=1,2$ при $1<\alpha<2$.

Из соотношения (26) следует, что функции $G_1^\alpha(x,t)$ и $G_2^\alpha(x,t)$ для любого фиксированного $t>0$ стремятся к нулю при $|x|\to\infty$,

$$\lim_{|x|\to\infty} G_1^\alpha(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} G_2^\alpha(x,t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^m). \tag{27}$$

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0<\alpha<2$; $k=1$ при $0<\alpha\le 1$ и $k=1,2$ при $1<\alpha<2$. Тогда $G_k^\alpha(x,t_0) \in L(\mathbb{R}^m)$ при любом $t_0>0$.*

Доказательство.

Выведем асимптотические оценки для функций $G_k^\alpha(x,t)$ при $|x|^2 t^{-\alpha} \to 0$. Найдем асимптотическое разложение в нуле H-функции

$$H_{1,2}^{2,0}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha-k+1,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix} \right]. \tag{28}$$

В соответствии с теоремой [3, Т.1.12],

$$H_{p,q}^{r,n}(z) \equiv H_{p,q}^{r,n}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_1,\alpha_1),\dots,(a_p,\alpha_p) \\ (b_1,\beta_1),\dots,(b_q,\beta_q) \end{matrix} \right] =$$

$$= \sum_j{}' \left[h_j^* z^{b_j/\beta_j} + o\left(z^{b_j/\beta_j}\right) \right] + \sum_j{}'' \left[H_j^* z^{b_j/\beta_j} [\ln z]^{N_j^*-1} + o\left(z^{b_j/\beta_j} [\ln z]^{N_j^*-1} \right) \right] \quad (z\to 0), \tag{29}$$

где $a_i, b_h \in \mathbb{C}$; $\alpha_i, \beta_h \in \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ $(i=1,2,\dots,p;\ h=1,2,\dots,q)$, а $\sum'$ и $\sum''$– суммирование по таким j $(j=1,\dots,r)$, что гамма-функции $\Gamma(b_j+\beta_j s)$ имеют простые полюсы и полюсы порядка N_j^* в точках b_{j0} соответственно, $b_{jl} = \frac{-b_j-l}{\beta_j}$ $\quad (j=1,\dots,r; l=0,1,2,\dots)$

Гамма-функции $\Gamma\left(\frac{m}{2}+s\right)$ и $\Gamma(1+s)$ имеют полюсы в точках $b_{1l} = -\frac{m}{2} - l$ и $b_{2l} = -1-l$ $(l=0,1,2,\dots)$.

Если m нечетно, то полюсы $b_{10} = -\frac{m}{2}$ и $b_{20}=-1$ имеют первый порядок и, в соответствии с формулой (29),

$$H_{1,2}^{2,0}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha-k+1,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix} \right] = h_1^* z^{\frac{m}{2}} + o\left(z^{\frac{m}{2}}\right) + h_2^* z + o(z) \quad (z\to 0), \tag{30}$$

где h_1^* и h_2^* – некоторые константы.

Если $m=2$, то полюс $b_{10}=-1=b_{20}$ имеет порядок 2, и справедливо соотношение

$$H_{1,2}^{2,0}\left[z\left|\begin{array}{c}(\alpha-k+1,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{array}\right.\right]=H_1^* z\ln z+o\left(z\ln z\right)\quad(z\to 0), \tag{31}$$

где H_1^* – константа.

Если m – четное число больше 2, то полюс $b_{10}=-\frac{m}{2}$ имеет порядок 2, а полюс $b_{20}=-1$ – простой. Поэтому, в соответствии с (29),

$$H_{1,2}^{2,0}\left[z\left|\begin{array}{c}(\alpha-k+1,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{array}\right.\right]=H_1^* z^{\frac{m}{2}}\ln z+o\left(z^{\frac{m}{2}}\ln z\right)+h_2^* z+o(z)\quad(z\to 0), \tag{32}$$

где H_1^* и h_2^* – константы.

Из соотношений (30) – (32) получим оценку функций $G_k^\alpha(x,t)$ при $|x|^2t^{-\alpha}<1,\ x\neq 0$:

$$|G_k^\alpha(x,t)|\le Ct^{-k}|x|^{-m+2}\qquad(k=1,2,\ x\in\mathbb{R}^m,\ m>2), \tag{33}$$

$$|G_k^\alpha(x,t)|\le Ct^{-k}\left[\left|\ln\left(|x|^2t^{-\alpha}\right)\right|+1\right]\qquad(k=1,2,\ x\in\mathbb{R}^2), \tag{34}$$

$$|G_k^\alpha(x,t)|\le Ct^{\frac{\alpha}{2}-k}\qquad(k=1,2,\ x\in\mathbb{R}). \tag{35}$$

Из неравенств (33) – (35) следует, что функции $|G_1^\alpha(x,t)|$ и $|G_2^\alpha(x,t)|$ интегрируемы по x в нуле в $\mathbb{R}^m$ при любом $t>0$.

Учитывая асимптотику (26) этих функций на бесконечности, получим, что $G_k^\alpha(x,t_0)\in L(\mathbb{R}^m)$ для любого $t_0>0$.

З а м е ч а н и е. Правая часть формулы (29) для функции $H_{1,2}^{2,0}\left[z\left|\begin{array}{c}(\alpha-k+1,\alpha)\\ (m/2,1),(1,1)\end{array}\right.\right]$ может быть записана как сумма вычетов функции $\frac{\Gamma(1+s)\Gamma(s+m/2)}{\Gamma(\alpha-k+1+\alpha s)}z^{-s}$. Эта функция не имеет особенности в точке $s=-1$ $(k=1,2)$, за исключением случая $m=2$. А при $m=2$ в точке $s=-1$ она имеет полюс первого порядка. Поэтому асимптотические формулы (30)–(32) могут быть улучшены. Например, в формуле (30) вместо $\ldots+h_2^*z+o(z)$ может быть записано $\ldots+h_2^*z^2+o(z^2)$. Однако для нашего случая достаточно оценок (33)–(35), вытекающих из (30)–(32).

Из лемм 1 и 2 получаем следующий результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $0<\alpha<2$, $m\in\mathbb{N}$ *и* $\lambda>0$.

(a) *Если* $0<\alpha\le 1$ *и* $f_1(x)\in L(\mathbb{R}^m)$, *то решение* (16) *задачи типа Коши* (1), (2) *принадлежит* $L(\mathbb{R}^m)$ *для любого фиксированного* $t>0$. *Если дополнительно* $\lim\limits_{|x|\to\infty}f_1(x)=0$, *то для любого фиксированного* $t>0$

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=0. \tag{36}$$

(b) *Если* $1<\alpha<2$, $f_1(x)\in L(\mathbb{R}^m)$ *и* $f_2(x)\in L(\mathbb{R}^m)$, *то решение* (17) *задачи типа Коши* (1), (2) *принадлежит* $L(\mathbb{R}^m)$ *для любого фиксированного* $t>0$. *Если дополнительно* $\lim\limits_{|x|\to\infty}f_1(x)=\lim\limits_{|x|\to\infty}f_2(x)=0$, *то для любого фиксированного* $t>0$

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=0\quad(x\in\mathbb{R}^m). \tag{37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Докажем сначала утверждение (a). Решение (16) задачи типа Коши (1), (2) представляет собой свертку Фурье функций $G_1^\alpha(x,t)$ и $f_1(x)$ по переменной x.

Так как по лемме 2 функция $G_1^\alpha(x,t)\in L(\mathbb{R}^m)$ для любого фиксированного $t>0$, а $f_1(x)\in L(\mathbb{R}^m)$ по условию, то свертка (16) существует и принадлежит $L(\mathbb{R}^m)$ в силу известной теоремы о свертке; см., например, [10, Теорема 1.3].

Если $\lim\limits_{|x|\to\infty} f_1(x) = 0$, то, учитывая асимптотику $G_1^\alpha(x,t)$ на бесконечности, $\forall\varepsilon > 0\ \exists A > 0$ такое, что при $|x| > A$ $|G_1^\alpha(x,t)| < \varepsilon$ и $|f_1(x)| < \varepsilon$.

Тогда для $|x| > 2A$ имеем

$$|u(x,t)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^m} G_1^\alpha(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau\right| \leq \int\limits_{|\tau|\leq A} |G_1^\alpha(x-\tau,t)|\, |f_1(\tau)| d\tau + \int\limits_{|\tau|>A} |G_1^\alpha(x-\tau,t)|\, |f_1(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{|\tau|\leq A} |f_1(\tau)| d\tau + \varepsilon \int\limits_{|\tau|>A} |G_1^\alpha(x-\tau,t)|\, d\tau \leq \varepsilon(I_1 + I_2), \tag{38}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f_1(\tau)| d\tau, \quad I_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |G_1^\alpha(\tau,t)|\, d\tau.$$

Из неравенства (38) следует, что функция $u(x,t)$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$, что доказывает случай (a).

В случае (b) доказательство теоремы аналогично случаю (a).

Найдем асимптотику производных функций $G_k^\alpha(x,t)$ при $|x|^2 t^{-\alpha} \to \infty$ и $|x|^2 t^{-\alpha} \to 0$. Так как функции $G_k^\alpha(x,t)$ зависят от $|x|$, обозначим $\rho = |x|$ и, в соответствии с формулой для производных H-функции [3, (2.2.2)]

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k \left\{ z^\omega H_{p,q}^{r,n} \left[cz^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \right\} = (-1)^k z^{\omega-k} H_{p+1,q+1}^{r+1,n} \left[cz^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p}, (-\omega,\sigma) \\ (k-\omega,\sigma), (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \tag{39}$$

$$(\omega, c \in \mathbb{C}, \quad \sigma > 0),$$

получим

$$\frac{\partial^n G_k^\alpha(x,t)}{\partial\rho^n} = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^n \left(\pi^{-\frac{m}{2}} \rho^{-m} t^{\alpha-k} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha-k+1,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right), (1,1) \end{matrix} \right] \right) =$$

$$= (-1)^n \pi^{-\frac{m}{2}} \rho^{-m-n} t^{\alpha-k} H_{2,3}^{3,0} \left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha-k+1,\alpha), (m,2) \\ (m+n,2), \left(\frac{m}{2},1\right), (1,1) \end{matrix} \right]; \tag{40}$$

$$(\rho > 0,\ t > 0,\ n \in \mathbb{N},\ k = 1,2).$$

H-функция в выражении (40) имеет на бесконечности экспоненциальное поведение (21). В соответствии с определениями [3, (1.1.7)—(1.1.11)] и (24), найдем для функции $H_{2,3}^{3,0} \left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \,\middle|\, \begin{matrix} (\alpha-k+1,\alpha), (m,2) \\ (m+n,2), \left(\frac{m}{2},1\right), (1,1) \end{matrix} \right]$ значения параметров

$$\Delta = a^* = a_1^* = 2 - \alpha > 0 \quad \text{при } 0 < \alpha < 2, \tag{41}$$

$$\delta = \alpha^{-\alpha}, \qquad \mu = \frac{m-1}{2} - \alpha + k + n, \tag{42}$$

$$D_1 = -(2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}. \tag{43}$$

Учитывая неравенства

$$\left|\frac{\partial G_k^\alpha(x,t)}{\partial x_i}\right| = \left|\frac{\partial G_k^\alpha(x,t)}{\partial\rho} \cdot \frac{x_i}{\rho}\right| \leq \left|\frac{\partial G_k^\alpha(x,t)}{\partial\rho}\right|, \tag{44}$$

$$\left|\frac{\partial^2 G_k^\alpha(x,t)}{\partial x_i^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 G_k^\alpha(x,t)}{\partial\rho^2} \cdot \frac{x_i^2}{\rho^2} + \frac{\partial G_k^\alpha(x,t)}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3}\right)\right| \leq \left|\frac{\partial^2 G_k^\alpha(x,t)}{\partial\rho^2}\right| + \frac{2}{\rho}\left|\frac{\partial G_k^\alpha(x,t)}{\partial\rho}\right|, \tag{45}$$

с помощью соотношения (21) получим оценку для производных:

$$\left|\frac{\partial^n G_k^\alpha(x,t)}{\partial x_i^n}\right| \le B_k \exp\left[-(2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right]\times$$

$$\times|x|^{-m-n}t^{\alpha-k}\left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{m}{2}-\alpha+k+n\right)} \quad (|x|^2 t^{-\alpha}>1, \quad k=1,2). \tag{46}$$

Найдем асимптотику производных $\frac{\partial^n G_k^\alpha(x,t)}{\partial x_i^n}$ при $|x|^2 t^{-\alpha}\to 0$. В соответствии с оценкой (29), формулой для производной (40) и неравенствами (44)-(45), при $|x|^2 t^{-\alpha}<1,\ x\ne 0$

$$\left|\frac{\partial^n G_k^\alpha(x,t)}{\partial x_i^n}\right| \le C t^{-k}|x|^{-m-n+2} \qquad (k=1,2,\ x\in\mathbb{R}^m, m\ge 2). \tag{47}$$

Для получения оценки при m=1 воспользуемся представлением $G_k^\alpha(x,t)$ через $H_{1,1}^{1,0}$-функцию, которое получается из формулы (19) с помощью свойств H-функции:

$$G_k^\alpha(x,t)=\frac{1}{2\lambda}t^{\frac{\alpha}{2}-k}H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda t^{\alpha/2}}\middle|\begin{array}{c}\left(\frac{\alpha}{2}-k+1,\frac{\alpha}{2}\right)\\(0,1)\end{array}\right].$$

По формуле дифференцирования H-функции (39),

$$\frac{\partial^n G_k^\alpha(x,t)}{\partial x^n}=\frac{(-1)^n}{2\lambda}t^{\frac{\alpha}{2}-k}|x|^{-n}H_{2,2}^{2,0}\left[\frac{|x|}{\lambda t^{\alpha/2}}\middle|\begin{array}{c}\left(\frac{\alpha}{2}-k+1,\frac{\alpha}{2}\right),(0,1)\\(n,1),(0,1)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2\lambda}t^{\frac{\alpha}{2}-k}|x|^{-n}H_{1,1}^{1,0}\left[\frac{|x|}{\lambda t^{\alpha/2}}\middle|\begin{array}{c}\left(\frac{\alpha}{2}-k+1,\frac{\alpha}{2}\right)\\(n,1)\end{array}\right].$$

С помощью соотношения (29) получим при $|x|^2 t^{-\alpha}<1,\ x\ne 0$

$$\left|\frac{\partial^n G_k^\alpha(x,t)}{\partial x^n}\right| \le C t^{\frac{\alpha(1-n)}{2}-k} \quad (k=1,2,\ x\in\mathbb{R}). \tag{48}$$

Л е м м а 3. *Функции $G_1^\alpha(x,t)$ и $G_2^\alpha(x,t)$ в* (19) *удовлетворяют диффузионно-волновому уравнению* (1) *при $0<\alpha<1$ и $0<\alpha<2$, соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы непосредственно проверяется с использованием формулы дифференцирования H-функции (39) и формулы дробной производной Римана–Лиувилля H-функции [3, 2.7.22]:

$$\left(D_{0+}^\alpha t^\omega H_{p,q}^{r,n}\left[t^\sigma\middle|\begin{array}{c}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right]\right)=t^{\omega-\alpha}H_{p+1,q+1}^{r,n+1}\left[t^\sigma\middle|\begin{array}{c}(-\omega,\sigma),(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q},(-\omega+\alpha,\sigma)\end{array}\right]. \tag{49}$$

Введем пространство $C_\gamma[0,\infty)=\{g: g(t)\in C(0,\infty), \lim\limits_{t\to+0}t^\gamma g(t)<+\infty\}$.

Т е о р е м а 2. (a) *Пусть функция $f_1(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$, имеет не более чем экспоненциальный рост на бесконечности*

$$|f_1(x)|\le C\exp(h|x|^\mu) \quad \left(C,h>0,\ \mu<\frac{2}{2-\alpha}\right) \tag{50}$$

и локально гельдерова, если $m>1$. И пусть $G_1^\alpha(x,t)$ определяется (19). *Тогда функция* (16) *является классическим решением задачи* (1), (2), *при этом $u(x,t)\in C_{1-\alpha}[0,\infty)$ для любого $x\in\mathbb{R}^m$.*

(b) *Пусть для функции $f_1(x)$ выполнены условия пункта* (a), *функция $f_2(x)$ удовлетворяет оценке* (50) *и принадлежит классу $H^{1+\mu}$ с $\mu > \frac{2-\alpha}{\alpha}$, т.е. $f_2(x) \in C^1(\mathbb{R}^m)$ и ее частные производные первого порядка локально гельдеровы с показателем μ. И пусть $G_1^\alpha(x,t)$, $G_2^\alpha(x,t)$ определяются* (19). *Тогда функция* (17) *является классическим решением задачи* (1), (2), *при этом $u(x,t) \in C_{2-\alpha}[0,\infty)$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$.*

Доказательство.

Используем схему, предложенную А.Н. Кочубеем [2] для доказательства существования классического решения задачи Коши для уравнения (5).

Рассмотрим случай (a).

Зафиксируем $t > 0$. Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^m} G_1^\alpha(\tau,t) f_1(x-\tau)d\tau \quad (x \in \mathbb{R}^m, t > 0). \tag{51}$$

и представим его в виде суммы

$$I = I_1 + I_2 = \int\limits_{|\tau| \le t^{\alpha/2}} G_1^\alpha(\tau,t) f_1(x-\tau)d\tau \quad + \int\limits_{|\tau| > t^{\alpha/2}} G_1^\alpha(\tau,t) f_1(x-\tau)d\tau. \tag{52}$$

Зафиксируем произвольное $A > 0$ и исследуем сходимость этих интегралов на множестве $\Omega = \{x : |x| \le A\}$.

Функция $f_1(x-\tau)$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$, поэтому она ограничена при $|\tau| \le t^{\alpha/2}$ и $|x| \le A$. А функция $G_1^\alpha(\tau,t)$, в соответствии с леммой 2, интегрируема по τ в нуле. Таким образом, подынтегральная функция в интеграле I_1 (52) мажорируется интегрируемой функцией, не зависящей от x, в силу чего этот интеграл сходится равномерно по x на Ω.

Пользуясь оценкой (50), получим

$$|f_1(x-\tau)| \le C \exp\left(h(|\tau| + A)^\mu\right) \tag{53}$$

при $x \in \Omega$. Принимая во внимание асимптотику (26) функции G_1^α на бесконечности, получим неравенство

$$|G_1^\alpha(\tau,t) f_1(x-\tau)| \le C \exp\left[h(|\tau| + A)^\mu - (2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}(4\lambda^2 t^\alpha)^{-\frac{1}{2-\alpha}}|\tau|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right] \times$$

$$\times |\tau|^{-m} t^{\alpha-1} \left(\frac{|\tau|^2}{4\lambda^2 t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}\left(\frac{m}{2}-\alpha+1\right)}. \tag{54}$$

Так как $\mu < \frac{2}{2-\alpha}$, то функция (54) интегрируема на бесконечности. Таким образом, подынтегральная функция в интеграле I_2 (52) также мажорируется интегрируемой функцией, не зависящей от x. Следовательно, этот интеграл сходится равномерно по x на Ω.

Из непрерывности подынтегральных функций в I_1 и I_2 в области интегрирования и равномерной сходимости этих интегралов по x на Ω следует, что функция (51) существует и непрерывна по x при $|x| \le A$. Ввиду произвольности выбора A получаем, что она непрерывна по x на $\mathbb{R}^m$.

Тогда, по свойству симметричности свертки, функция (16) также определена и непрерывна по x.

Докажем, что функция (16) непрерывно дифференцируема по x. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial G_1^\alpha(x-\tau,t)}{\partial x_i} f_1(\tau)d\tau, \tag{55}$$

полученный дифференцированием по x_i $(1 \le i \le m)$ подынтегральной функции в (16). Сравнивая асимптотику (26) и (33)—(35) функции G_1^α и ее производной (46)—(48), видим, что доказательство существования и непрерывности функции (55) аналогично проведенному для свертки

(16). Таким образом, функция (16) непрерывно дифференцируема по x и справедлива формула

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial G_1^\alpha(x-\tau,t)}{\partial x_i} f_1(\tau)d\tau. \tag{56}$$

Для второй производной функции G_1^α при $m \geq 2$ оценка (47) имеет вид

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} G_1^\alpha(x,t)\right| \leq Ct^{-1}|x|^{-m} \qquad (x \in \mathbb{R}^m,\ m \geq 2), \tag{57}$$

и не является достаточной для интегрируемости этой функции в нуле в $\mathbb{R}^m$. Поэтому доказательство, проведенное для функции $u(x,t)$ и ее первой производной, непосредственно не переносится на этот случай.

В соответствии с леммой 2, функция $G_1^\alpha(x,t)$ интегрируема на $\mathbb{R}^m$. Зафиксируем $t > 0$ и обозначим

$$G = \int\limits_{\mathbb{R}^m} G_1^\alpha(x,t)dx.$$

Тогда для любого $x_0 \in \mathbb{R}^m$ можно записать решение (16) в виде

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} G_1^\alpha(x-\tau,t)[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau + Gf(x_0) \quad (x \in \mathbb{R}^m, t > 0), \tag{58}$$

а его производную

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial G_1^\alpha(x-\tau,t)}{\partial x_i}[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau \quad (x \in \mathbb{R}^m, t > 0). \tag{59}$$

Вычислим $\frac{\partial^2 u(x_0,t)}{\partial x_i^2}$ при $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$. Разобьем область интегрирования в (59) на два множества: $\Omega_1 = \left\{\tau \in \mathbb{R}^m : |\tau - x_0|^2 \geq t^\alpha\right\}$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^m \setminus \Omega_1$. Соответственно интеграл распадается на сумму двух слагаемых $v_1(x,t) + v_2(x,t)$.

Если x лежит в малой окрестности x_0, а $\tau \in \Omega_1$, то величина $|x - \tau|$ отделена от нуля. Поэтому

$$\frac{\partial v_1(x_0,t)}{\partial x_i} = \int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial^2 G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau. \tag{60}$$

Пусть $d > 0$, $\vec{d} = (0, \ldots, d, \ldots, 0)$ (d на i-ом месте). Тогда

$$\begin{gathered}\frac{1}{d}\left[v_2(x_0+\vec{d},t) - v_2(x_0,t)\right] - \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial^2 G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau = \\
= \frac{1}{d}\int\limits_{|x_0-\tau|\leq 2d} \frac{\partial G_1^\alpha(x_0+\vec{d}-\tau,t)}{\partial x_i}[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau - \frac{1}{d}\int\limits_{|x_0-\tau|\leq 2d} \frac{\partial G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i}[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau - \\
- \int\limits_{|x_0-\tau|\leq 2d} \frac{\partial^2 G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau + \\
+ \int\limits_{2d\leq|x_0-\tau|\leq t^{\alpha/2}} \left\{\frac{1}{d}\left[\frac{\partial G_1^\alpha(x_0+\vec{d}-\tau,t)}{\partial x_i} - \frac{\partial G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial^2 G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}\right\}[f_1(\tau) - f_1(x_0)]d\tau.\end{gathered} \tag{61}$$

Интегралы в (61) сходятся ввиду локальной гельдеровости f. Каждый из интегралов в правой части последнего равенства стремится к нулю при $d \to 0$. Это следует из оценок (47) с учетом локальной гельдеровости f, а для последнего интеграла применим формулу Тейлора

$$\frac{1}{d}\left[\frac{\partial G_1^\alpha(x_0+\vec{d}-\tau,t)}{\partial x_i}-\frac{\partial G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i}\right]-\frac{\partial^2 G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}=$$

$$=\frac{d}{2}\frac{\partial^3 G_1^\alpha(x'-\tau,t)}{\partial x_i^3}, \quad x'=x_0+\theta\vec{d},\ 0<\theta<1,$$

учитывая, что при $|x_0-\tau|\geq 2d$

$$|x'-\tau|\geq|\tau-x_0|-|x'-x_0|\geq|\tau-x_0|-d\geq\frac{1}{2}|\tau-x_0|.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial v_2(x_0,t)}{\partial x_i}=\int\limits_{\Omega_2}\frac{\partial^2 G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}[f_1(\tau)-f_1(x_0)]d\tau. \tag{62}$$

Вместе с (60) это дает

$$\frac{\partial^2 u(x_0,t)}{\partial x_i^2}=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\partial^2 G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}[f_1(\tau)-f_1(x_0)]d\tau. \tag{63}$$

В случае $m=1$ эта формула получается непосредственным дифференцированием под знаком интеграла.

Таким образом, мы доказали, что функция (16) дважды непрерывно дифференцируема по x.

Далее, покажем, что $u(x_0,t)\in C(0,+\infty)$ для любого $x_0\in\mathbb{R}^m$. Разобьем интеграл в (16) на два слагаемых:

$$I=I_1+I_2=\int\limits_{|x_0-\tau|\leq t^{\alpha/2}}G_1^\alpha(x_0-\tau,t)f_1(\tau)d\tau\quad+\int\limits_{|x_0-\tau|>t^{\alpha/2}}G_1^\alpha(x_0-\tau,t)f_1(\tau)d\tau. \tag{64}$$

Исследуем сходимость этих интегралов на $t\in[b,B]$ $(0<b<B<\infty)$. Из оценок (26) и (33)–(35) следует, что при $t\in[b,B]$ подынтегральные функции в (64) мажорируются интегрируемыми функциями, не зависящими от t, следовательно, эти интегралы сходятся равномерно по t на $[b,B]$. Тогда из непрерывности подынтегральных функций следует непрерывность $u(x_0,t)$ по t на $[b,B]$. Ввиду произвольности выбора $b>0$ и B получаем, что $u(x_0,t)\in C(0,+\infty)$.

Докажем, что $u(x_0,t)\in C_{1-\alpha}[0,\infty)$. Непрерывность этой функции при $t>0$ следует из непрерывности $u(x_0,t)$ на $(0,+\infty)$. Покажем, что существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+0}t^{1-\alpha}u(x_0,t)$. В соответствии с (16),

$$t^{1-\alpha}u(x_0,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}G_1'(x_0-\tau,t)f_1(\tau)d\tau, \tag{65}$$

где

$$G_1'(x,t)=t^{1-\alpha}G_1^\alpha(x,t)=|x|^{-m}\pi^{-\frac{m}{2}}H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}(\alpha,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{matrix}\right]. \tag{66}$$

С помощью леммы 2 получим, что функция $G_1'(x_0-\tau,t)$ интегрируема на $\mathbb{R}^m$ при каждом фиксированном t. Обозначим

$$A=\int\limits_{\mathbb{R}^m}G_1'(x_0-\tau,t)d\tau,$$

тогда функцию (65) можно записать в виде

$$t^{1-\alpha}u(x_0,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^m} G_1'(x_0-\tau,t)[f_1(\tau)-f_1(x_0)]d\tau+Af(x_0). \tag{67}$$

Из формулы (66) непосредственно проверяется, что

$$G_1'(xt^{\frac{\alpha}{2}},t)=t^{-\frac{\alpha m}{2}}G_1'(x,1), \tag{68}$$

откуда с помощью замены переменных получаем

$$t^{1-\alpha}u(x_0,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^m} G_1'(\theta,1)[f_1(x_0-\theta t^{\frac{\alpha}{2}})-f_1(x_0)]d\theta+Af(x_0) \tag{69}$$

и из неравенств (26) и (33)–(35) и теоремы Лебега следует, что $t^{1-\alpha}u(x_0,t)\to Af(x_0)$, если $t\to +0$ при каждом $x_0\in\mathbb{R}^m$.

Покажем, что функция $u(x,t)$ имеет непрерывную производную порядка α по t. По определению (3) частной производной Лиувилля,

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{u(x,\theta)d\theta}{(t-\theta)^{\alpha}}.$$

По формуле [3, (2.7.9)] дробного интеграла от H-функции и свойствам H-функции [3, (2.1.3),(2.1.1)], получим

$$\left(D^{\alpha-h}_{0+,t}G^{\alpha}_k\right)(x,t)=\pi^{-\frac{m}{2}}|x|^{-m}t^{h-k}H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^{\alpha}}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-k+h,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{matrix}\right]\quad (k=1,2;h=0,1,2). \tag{70}$$

В соответствии с оценками [3, Т. 1.10] и [3, Т. 1.12],

$$\left|\left(D^{\alpha-h}_{0+,t}G^{\alpha}_k\right)(x,t)\right|\le C|x|^{-m}t^{h-k}\exp\left[-(2-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2-\alpha}}\right]\left(\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^{\alpha}}\right)^{\frac{m+2k-2h}{2(2-\alpha)}}$$
$$(|x|^2t^{-\alpha}>1), \tag{71}$$

$$\left|\left(D^{\alpha-h}_{0+,t}G^{\alpha}_k\right)(x,t)\right|\le Ct^{h-k-\alpha}|x|^{-m+2}\qquad (|x|^2t^{-\alpha}<1,\ x\in\mathbb{R}^m,\ m>2,\ x\neq 0), \tag{72}$$

$$\left|\left(D^{\alpha-h}_{0+,t}G^{\alpha}_k\right)(x,t)\right|\le Ct^{h-k-\alpha}\left[\left|\ln\left(|x|^2t^{-\alpha}\right)\right|+1\right]$$
$$(|x|^2t^{-\alpha}<1,\ x\in\mathbb{R}^2,\ x\neq 0), \tag{73}$$

$$\left|\left(D^{\alpha-h}_{0+,t}G^{\alpha}_k\right)(x,t)\right|\le Ct^{h-k-\frac{\alpha}{2}}\qquad (|x|^2t^{-\alpha}<1,\ x\in\mathbb{R},\ x\neq 0), \tag{74}$$

откуда при $h=0$, $k=1$ следует равномерная сходимость интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau\quad (x\in\mathbb{R}^m,t>0) \tag{75}$$

по x.

Таким образом, доказано существование непрерывной частной производной Лиувилля порядка α по t функции (16).

Покажем теперь, что рассматриваемая функция (16) является решением диффузионно-волнового уравнения (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

Из доказанной равномерной сходимости интеграла (75) следует, что

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D^{\alpha}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t) f_1(\tau)d\tau. \tag{76}$$

Из формул (76) и (63) для любого $x \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) - \lambda^2 \Delta_x u(x,t) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\left(D^{\alpha}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t) - \lambda^2 \Delta_x G^{\alpha}_1(x-\tau,t)\right] \left[f_1(\tau) - f_1(x)\right] d\tau + f_1(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D^{\alpha}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t)d\tau. \tag{77}$$

Из леммы 3 следует, что функция $G^{\alpha}_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), поэтому первый интеграл в формуле (77) равен нулю. Покажем, что

$$J = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D^{\alpha}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t)d\tau = 0. \tag{78}$$

В соответствии с формулой (70) с $h = 0$ и $k = 1$,

$$J = \pi^{-\frac{m}{2}} t^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tau|^{-m} H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{|\tau|^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (0,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix}\right] d\tau. \tag{79}$$

Используя замену

$$\tau = \rho\theta, \quad d\tau = \rho^{m-1} d\rho\, d\theta, \tag{80}$$

где $\rho = |\tau|$, а $\theta = \frac{\tau}{\rho}$ принадлежит единичной сфере S_{m-1} в $\mathbb{R}^m$, получим

$$J = \pi^{-\frac{m}{2}} t^{-1} \int\limits_0^{\infty} \rho^{-m} H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (0,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix}\right] \rho^{m-1} d\rho \int\limits_{S_{m-1}} d\theta =$$

$$= \pi^{-\frac{m}{2}} t^{-1} \int\limits_0^{\infty} \rho^{-1} H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (0,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix}\right] d\rho \cdot \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} =$$

$$= \frac{2t^{-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int\limits_0^{\infty} \rho^{-1} H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (0,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix}\right] d\rho. \tag{81}$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся следствием [3, Corollary 2.2.1], дающим формулу [3, (2.5.12)] преобразования Меллина H-функции:

$$\left(\mathcal{M} x^w H^{m,n}_{p,q}\left[ax^{\sigma} \,\middle|\, \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix}\right]\right)(s) = \frac{a^{-(s+w)/\sigma}}{\sigma} \mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left[\begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \,\middle|\, \frac{s+w}{\sigma}\right]. \tag{82}$$

при выполнении условия $a^* \geq 0$ и

$$-\sigma \min_{1\leq j\leq m}\left[\frac{\mathrm{Re}(b_j)}{\beta_j}\right] < \mathrm{Re}(s+w) < \sigma \min_{1\leq i\leq n}\left[\frac{1-\mathrm{Re}(a_i)}{\alpha_j}\right]. \tag{83}$$

В нашем случае

$$J = \frac{2t^{-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \mathcal{M}\left(H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (0,\alpha) \\ (\frac{m}{2},1),(1,1) \end{matrix}\right]\right)(0), \tag{84}$$

$a^* = 2 - \alpha \geq 0$ и условие (83), принимающее вид $-2\min[\frac{m}{2}, 1] < 0$, выполняется, поэтому, применяя формулу (82) с параметрами

$$w = 0, \quad a = \frac{1}{4\lambda^2 t^\alpha}, \quad \sigma = 2, \quad s = 0,$$

получим

$$J = \frac{2t^{-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\left(\frac{1}{4\lambda^2 t^\alpha}\right)^0}{2} \mathcal{H}_{1,2}^{2,0}\left[\begin{array}{c} (0,\alpha) \\ (\frac{m}{2},1),(1,1) \end{array} \middle| 0 \right] = \frac{t^{-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1\cdot 0)\Gamma(1+1\cdot 0)}{\Gamma(0+\alpha\cdot 0)} = \frac{t^{-1}}{\Gamma(0)} = 0. \tag{85}$$

Следовательно, правая часть формулы (77) равна нулю, т.е. функция (16) является решением диффузионно-волнового уравнения (1).

Покажем, что функция (16) удовлетворяет начальному условию (2). Имеем

$$\lim_{t\to 0+} D_{0+,t}^{\alpha-1} \int\limits_{\mathbb{R}^m} G_1^\alpha(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau = \lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau. \tag{86}$$

По формуле (70) с $h = 1$, $k = 1$ находим

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x,t) = \pi^{-\frac{m}{2}} |x|^{-m} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \middle| \begin{array}{c} (1,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{array} \right]. \tag{87}$$

Используя замену (80) и формулу (82), вычислим интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(\tau,t) d\tau = \pi^{-\frac{m}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tau|^{-m} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|\tau|^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \middle| \begin{array}{c} (1,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{array} \right] d\tau =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int\limits_0^\infty \rho^{-1} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^\alpha} \middle| \begin{array}{c} (1,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{array} \right] d\rho = \frac{2}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1\cdot 0)\Gamma(1+1\cdot 0)}{2\Gamma(1+\alpha\cdot 0)} = 1, \tag{88}$$

что позволяет нам представить интеграл из (85) в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x-\tau,t)[f_1(\tau) - f_1(x)] d\tau + f_1(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x-\tau,t) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x-\tau,t)[f_1(\tau) - f_1(x)] d\tau + f_1(x), \tag{89}$$

откуда с помощью замены

$$\tau = x - \theta t^{\frac{\alpha}{2}} \tag{90}$$

запишем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(\theta,1)[f_1(x-\theta t^{\frac{\alpha}{2}}) - f_1(x)] d\tau + f_1(x). \tag{91}$$

Используя оценки (71) – (74) с $h = k = 1$ и применяя теорему Лебега, из формулы (91) получаем

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^\alpha\right)(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau = f_1(x),$$

что с учетом равенства (85) доказывает выполнение начального условия (2) для функции (16).

Это завершает доказательство теоремы 2 в случае (a).

В случае (b) решение представляет собой сумму двух сверток, содержащих функции $G_1^\alpha(x,t)$ и $G_2^\alpha(x,t)$. В соответствии с оценками этих функций и их производных (26), (33)—(35) и (46)—(48) получим, что доказательство непрерывности и дифференцируемости каждой свертки аналогично доказательству, проведенному для случая (a).

Докажем, что функция (17) является решением диффузионно-волнового уравнения (1) при $1<\alpha<2$ и удовлетворяет начальным условиям (2).

По формуле (70) с $h=0$ и $k=2$,

$$\left(D^\alpha_{0+,t}G_2^\alpha\right)(x,t)=\pi^{-\frac{m}{2}}|x|^{-m}t^{-2}H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{|x|^2}{4\lambda^2t^\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}(-1,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{matrix}\right]. \tag{92}$$

В соответствии с оценками (71) – (74) следует равномерная сходимость интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_2^\alpha\right)(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau \quad (x\in\mathbb{R}^m, t>0) \tag{93}$$

по x. Отсюда с учетом результатов предыдущего пункта имеем

$$\left(D^\alpha_{0+,t}u\right)(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_1^\alpha\right)(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_2^\alpha\right)(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau. \tag{94}$$

Аналогично (63) получаем формулу

$$\frac{\partial^2u(x_0,t)}{\partial x_i^2}=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\partial^2G_1^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}[f_1(\tau)-f_1(x_0)]d\tau+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\partial^2G_2^\alpha(x_0-\tau,t)}{\partial x_i^2}[f_2(\tau)-f_2(x_0)]d\tau. \tag{95}$$

Из формул (94) и (95) для любого $x\in\mathbb{R}^m$ имеем

$$\left(D^\alpha_{0+,t}u\right)(x,t)-\lambda^2\Delta_xu(x,t)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\left(D^\alpha_{0+,t}G_1^\alpha\right)(x-\tau,t)-\lambda^2\Delta_xG_1^\alpha(x-\tau,t)\right][f_1(\tau)-f_1(x)]\,d\tau+f_1(x)\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_1^\alpha\right)(x-\tau,t)d\tau+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\left(D^\alpha_{0+,t}G_2^\alpha\right)(x-\tau,t)-\lambda^2\Delta_xG_2^\alpha(x-\tau,t)\right][f_2(\tau)-f_2(x)]\,d\tau+f_2(x)\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_2^\alpha\right)(x-\tau,t)d\tau. \tag{96}$$

С помощью леммы 3 формула (96) примет вид

$$\left(D^\alpha_{0+,t}u\right)(x,t)-\lambda^2\Delta_xu(x,t)=f_1(x)\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_1^\alpha\right)(x-\tau,t)d\tau+f_2(x)\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_2^\alpha\right)(x-\tau,t)d\tau. \tag{97}$$

Используя замену (80) и формулу (82), вычислим второй интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^\alpha_{0+,t}G_2^\alpha\right)(\tau,t)d\tau=\pi^{-\frac{m}{2}}t^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|\tau|^{-m}H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{|\tau|^2}{4\lambda^2t^\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}(-1,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{matrix}\right]d\tau=$$

$$=\frac{2t^{-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\int\limits_0^\infty\rho^{-1}H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2t^\alpha}\,\middle|\,\begin{matrix}(-1,\alpha)\\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1)\end{matrix}\right]d\rho=\frac{2t^{-2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1\cdot0)\Gamma(1+1\cdot0)}{2\Gamma(-1+\alpha\cdot0)}=0, \tag{98}$$

что вместе с формулой (85) дает

$$\left(D^\alpha_{0+,t}u\right)(x,t)-\lambda^2\Delta_xu(x,t)=0, \tag{99}$$

т.е. функция (17) является решением диффузионно-волнового уравнения (1).

Покажем, что функция (17) удовлетворяет начальным условиям (2). Имеем

$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0+,t}u(x,t) = \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau + \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau, \tag{100}$$

$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-2}_{0+,t}u(x,t) = \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-2}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau + \lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-2}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau. \tag{101}$$

Исследуем интегралы, стоящие в правых частях формул (100) и (101). По доказанному ранее,

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t)f_1(\tau)d\tau = f_1(x), \tag{102}$$

кроме того, из формулы (70) вытекает равенство $\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x,t) = \left(D^{\alpha-2}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x,t)$, поэтому

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-2}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau = f_2(x). \tag{103}$$

Далее, в пункте a) было доказано равенство (78). Так как, в соответствии с (70), $\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x,t) = \left(D^{\alpha}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x,t)$, то справедлива формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)d\tau = 0. \tag{104}$$

Это позволяет представить второй интеграл из равенства (100) в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)[f_2(\tau)-f_2(x)]d\tau + f_2(x)\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_1\right)(x-\tau,t)[f_2(\tau)-f_2(x)]d\tau, \tag{105}$$

откуда с помощью замены (90) находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau = t^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(\theta,1)[f_2(x-\theta t^{\frac{\alpha}{2}})-f_2(x)]d\theta. \tag{106}$$

Применяя к $f_2(x)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим

$$f_2(x-\theta t^{\frac{\alpha}{2}}) - f_2(x) = -\sum_{i=1}^{m}\theta_i t^{\frac{\alpha}{2}}\left(\partial_i f_2\right)(x-\xi\theta t^{\frac{\alpha}{2}}) \qquad (0<\xi<1), \tag{107}$$

формула (106) принимает вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(x-\tau,t)f_2(\tau)d\tau = -t^{\frac{\alpha}{2}-1}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(D^{\alpha-1}_{0+,t}G^{\alpha}_2\right)(\theta,1)\theta_i\left(\partial_i f_2\right)(x-\xi\theta t^{\frac{\alpha}{2}})d\theta \qquad (0<\xi<1). \tag{108}$$

Принимая во внимание соотношение (104), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_2^{\alpha}\right)(x-\tau,t) f_2(\tau) d\tau =$$

$$= -t^{\frac{\alpha}{2}-1} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_2^{\alpha}\right)(\theta,1)\theta_i \left[(\partial_i f_2)(x-\xi\theta t^{\frac{\alpha}{2}}) - (\partial_i f_2)(x)\right] d\theta \qquad (0<\xi<1), \tag{109}$$

откуда с учетом гельдеровости функций $(\partial_i f_2)(x)$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_2^{\alpha}\right)(x-\tau,t) f_2(\tau) d\tau\right| \le t^{\frac{\mu\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-1} \xi^{\mu} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|\left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_2^{\alpha}\right)(\theta,1)\theta_i\right| |\theta|^{\mu} d\theta. \tag{110}$$

Так как показатель Гельдера $\mu > \frac{2-\alpha}{\alpha}$, то $\frac{\mu\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - 1 > 0$. Учитывая оценки (71) – (74) с $h=1$ и $k=2$, из соотношения (110) заключаем

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_2^{\alpha}\right)(x-\tau,t) f_2(\tau) d\tau = 0. \tag{111}$$

Для исследования первого интеграла из равенства (101) рассмотрим сначала его частный случай $f_1(\tau)=1$, и согласно формул (70), (80) и (82), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-2} G_1^{\alpha}\right)(\tau,t) d\tau = \pi^{-\frac{m}{2}} t \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tau|^{-m} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{|\tau|^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (2,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix}\right] d\tau =$$

$$= \frac{2\,t}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int\limits_0^{\infty} \rho^{-1} H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{\rho^2}{4\lambda^2 t^{\alpha}} \,\middle|\, \begin{matrix} (2,\alpha) \\ \left(\frac{m}{2},1\right),(1,1) \end{matrix}\right] d\rho = \frac{2t}{\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1\cdot 0)\Gamma(1+1\cdot 0)}{2\Gamma(2+\alpha\cdot 0)} = t, \tag{112}$$

на основании этого

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-2} G_1^{\alpha}\right)(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-2} G_1^{\alpha}\right)(x-\tau,t)[f_1(\tau)-f_1(x)] d\tau + f_1(x) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-2} G_1^{\alpha}\right)(x-\tau,t) d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-1} G_1^{\alpha}\right)(x-\tau,t)[f_1(\tau)-f_1(x)] d\tau + f_1(x)\, t, \tag{113}$$

откуда с помощью замены (90) следует представление

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-2} G_1^{\alpha}\right)(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-2} G_1^{\alpha}\right)(\theta,1)[f_1(x-\theta t^{\frac{\alpha}{2}}) - f_1(x)] d\tau + f_1(x)\, t. \tag{114}$$

Используя оценки (71) – (74) с $h=2$, $k=1$ и применяя теорему Лебега, из формулы (114) получаем

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(D_{0+,t}^{\alpha-2} G_1^{\alpha}\right)(x-\tau,t) f_1(\tau) d\tau = 0. \tag{115}$$

Таким образом, с помощью формул (102) и (111) соотношение (100) принимает вид $\lim\limits_{t\to 0+} D_{0+,t}^{\alpha-1} u(x,t) = f_1(x)$, а соотношение (101) с учетом формул (103) и (115) запишется $\lim\limits_{t\to 0+} D_{0+,t}^{\alpha-2} u(x,t) = f_2(x)$, что завершает доказательство теоремы 2 в случае б).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф05МС-050).

Summary

Cauchy-type problem for the differential equation with Riemann—Liouville partial fractional derivative of order $0 < \alpha < 2$ is investigated. Conditions when a solution of the problem tends to zero as $|x| \to \infty$ obtained. The existence theorem of a classical solution for the Cauchy-type problem is proved, and it is shown that the solution has a singularity of order $1 - \alpha$ for $0 < \alpha \leq 1$ and of order $2 - \alpha$ for $1 < \alpha < 2$, as $t \to 0$.

Список литературы

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн., 1987.

[2] Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. N. 4. С. 660-670.

[3] Kilbas A. A., Saigo M. H-transforms. Theory and Applications. Boca Raton, 2004.

[4] Podlulny I. Fractional differential equations. Mathematics in Sciences and Engineering. — San Diego, 1999. — 198 p.

[5] Hilfer R. Fractional diffusion based on Riemann—Liouville fractional derivatives // J. Phys. Chem. B. — 2000. — Vol. 104., N 3. — P. 914-924.

[6] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. — 199 с.

[7] Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, N 10. — С. 1430-1433.

[8] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations // North-Holland Mathematics Studies. — Vol. 204. — Amsterdam: Elsrvier, 2006. — 540 p.

[9] Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана-Лиувилля // Доклады Академии наук. 2006. Т.406. N 1. С. 12-16.

[10] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.

Белорусский государственный университет г.Минск

Поступила в редакцию

Название статьи на английском языке: Conditions for the existence of a classical solution of the Cauchy-type problem to diffusion equation with Riemann-Liouville partial derivative

Фамилия и инициалы авторов на английском языке: Voroshilov A.A., Kilbas A.A.

УДК 517.955

Ворошилов А. А., Килбас А. А. **Условия существования классического решения задачи типа Коши для уравнения диффузии с частной производной Римана—Лиувилля**

Исследуется задача типа Коши для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана—Лиувилля порядка $0 < \alpha < 2$. Получены условия, при которых решение задачи стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Доказана теорема существования классического решения задачи типа Коши и показано, что решение имеет при $t \to 0$ особенность порядка $1-\alpha$ для $0 < \alpha \leq 1$ и порядка $2-\alpha$ для $1 < \alpha < 2$ соответственно.

Библиогр. — 10 назв.