С.Г.Самко/А.А.Килбас/О.И.Маричев

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1987

УДК 517.3

С а м к о С. Г., К и л б а с А. А., М а р и ч е в О. И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.** Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Книга посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложениям теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты указанной теории. В конце каждой главы приводятся исторические сведения и обзоры работ по тематике главы. Книга носит энциклопедический характер, охватывает самые разнообразные известные формы дробного интегрирования и дифференцирования и огромное число публикаций в этой области вплоть до 1986 г.

Включение в книгу необходимых предварительных сведений и подробное изложение доказательств делают ее доступной студентам физико-математических факультетов, а также технических вузов.

Предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим анализом и его приложениями.

Табл. 11. Ил. 6. Библиогр.: 1421 назв.

Р е д а к т о р
академик АН СССР С. М. Никольский

Р е ц е н з е н т ы:
П. И. Лизоркин, д-р физ.-мат. наук,
М. М. Смирнов, д-р физ.-мат. наук,
А. П. Прудников, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. Брычков, канд. физ.-мат. наук

С $\frac{1702050000-088}{M316(03)-87}$ 55—87

ГЛАВА 8

Приложения к дифференциальным уравнениям

В настоящей главе излагаются некоторые приложения аппарата дробного интегро-дифференцирования к исследованию дифференциальных уравнений в частных производных типа уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу и обыкновенных дифференциальных уравнений дробного и целого порядка. В частности, в замкнутом виде решаются краевые задачи Коши, Дирихле и Неймана с начальными данными на особых линиях и доказываются теоремы существования и единственности решений некоторых классов дифференциальных уравнений дробного порядка. Построенные решения имеют широкие применения при исследовании краевых задач типа задачи Трикоми для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа.

§ 40. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЧЕРЕЗ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В данном параграфе после изложения ряда аспектов общей теории эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами, разработанной в монографии И. Н. Векуа [3], 1948 г., рассмотрим ее приложения к исследованию так называемого обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца и покажем, что аналитические функции после применения к ним по каждой переменной оператора Эрдейи—Кобера (18.8) $I_{\eta,\alpha}$, а также обобщенного оператора Эрдейи—Кобера (37.45) $J_\lambda(\eta, \alpha)$ преобразуются в решения указанного уравнения Гельмгольца. Эти результаты используем для построения решений ряда краевых задач.

1°. Предварительные сведения. Пусть заданы следующие общие однородные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными и аналитическими коэффициентами:

$$Hu \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta)\, u_\eta + c(\xi, \eta)\, u = 0, \tag{40.1}$$

$$H_1u \equiv u_{xx} - u_{yy} + A_1(x, y)\, u_x + B_1(x, y)\, u_y + C_1(x, y)\, u = 0, \tag{40.2}$$

$$Ku \equiv u_{xx} + u_{yy} + A(x, y)\, u_x + B(x, y)\, u_y + C(x, y)\, u = 0, \tag{40.3}$$

а также *сопряженные* к (40.1) и (40.3) уравнения вида

$$H^*v \equiv v_{\xi\eta} - (a(\xi, \eta)v)_\xi - (b(\xi, \eta)v)_\eta + c(\xi, \eta)v = 0, \tag{40.4}$$

$$K^*v \equiv v_{xx} + v_{yy} - (A(x, y)v)_x - (B(x, y)v)_y + C(x, y)v = 0. \tag{40.5}$$

Допустим, что комплексные (вообще говоря) переменные x, y, ξ, η связаны формулами

$$\xi = x + iy, \ \eta = x - iy, \ x = (\xi + \eta)/2, \ y = (\xi - \eta)/(2i). \tag{40.6}$$

Обозначив через $\bar{\xi}$ сопряженное к ξ число, отметим, что $\bar{\xi} = \eta$ справедливо лишь в случае, когда x и y действительны.

Введем дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{40.7}$$

для которых, в частности, очевидно формальное соотношение

$$4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta_2, \tag{40.8}$$

где через Δ_2 обозначен двумерный *лапласиан*.

Тогда, если коэффициенты уравнений (40.1)—(40.3) связаны равенствами

$$\left.\begin{matrix} 4a(\xi, \eta) \\ 4b(\xi, \eta) \end{matrix}\right\} = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2i}\right) \pm iB\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2i}\right),$$
$$4c(\xi, \eta) = C\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2i}\right), \tag{40.9}$$

$$A_1(x, y) = A(x, -iy), \ B_1(x, y) = iB(x, -iy), \ C_1(x, y) = C(x, -iy), \tag{40.10}$$

то уравнения (40.1)—(40.3) и соответственно (40.4), (40.5) могут быть преобразованы друг в друга заменами (40.6) и изменением y на iy при переходе от (40.2) к (40.3). Тем не менее в случае действительных переменных ξ, η, x, y указанные уравнения классифицируются по типам: уравнения (40.1), (40.4) и (40.2) называются уравнениями *гиперболического типа* соответственно в 1-й и 2-й канонических формах, а уравнения (40.3), (40.5) относятся к уравнениям *эллиптического типа*.

Пусть точка $\xi = x + iy$ принадлежит некоторой односвязной области $\mathfrak{D}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (в принципе x и y сами могут быть комплексными). Обозначим тогда через $\bar{\mathfrak{D}}$ область, которой принадлежит точка η, связанная с ξ формулами (40.6), а через $(\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}})$ — декартово произведение $\mathfrak{D}$ и $\bar{\mathfrak{D}}$, называемое еще *цилиндрической областью*. Тогда введем следующее

Определение 40.1. *Односвязная область $\mathfrak{D}$ плоскости $\mathbb{C}$ называется основной для уравнений (40.1), (40.3), если их коэффициенты a, b, c аналитичны по двум переменным $(\xi, \eta) \in (\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}})$, а A, B, C аналитичны при $(x, y) \in \mathfrak{D}$ и имеют место равенства (40.9).*

Укажем наиболее важные формулы представлений решений уравнения (40.3) через аналитические функции, которые ниже в частных случаях будут широко применяться. Первая из этих формул использует понятие *функции Римана*, которая определяется следующим образом.

Определение 40.2. *Решение $v = R(\xi, \eta) = R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ краевой задачи Гурса для сопряженного уравнения (40.4) с условиями*

$$R|_{\xi=\xi_0} = \exp \int_{\eta_0}^{\eta} a(\xi_0, t)\,dt, \quad R|_{\eta=\eta_0} = \exp \int_{\xi_0}^{\xi} b(\tau, \eta_0)\,d\tau \tag{40.11}$$

называется функцией Римана оператора H (40.1), соответствующей точке $(\xi_0, \eta_0) \in \mathfrak{D}$.

Из свойств функции Римана отметим следующие:

а) если a, $b \in C^1(\mathfrak{D})$, $c \in C(\mathfrak{D})$, то функция Римана R оператора H в области $\mathfrak{D}$ существует и единственна;

б) на *характеристиках* $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ выполняются соотнощения $R_\eta(\xi_0, \eta) = a(\xi_0, \eta) R(\xi_0, \eta)$, $R_\xi(\xi, \eta_0) = b(\xi, \eta_0) R(\xi, \eta_0)$;

в) выполняется *условие нормировки* $R(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = 1$;

г) справедливо *свойство взаимности*: $R^*(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = R(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, т. е. по последним переменным ξ_0, η_0 функция $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ является функцией Римана R^* сопряженного уравнения (40.4), соответствующей точке ξ, η.

Более подробную информацию о функции Римана и ее таблицы для различных частных уравнений вида (40.1) можно найти в книгах В. М. Бабича и др. [1], Н. С. Кошлякова, Э. Б. Глинера, М. М. Смирнова [1] и в статье А. А. Андреева, В. Ф. Волкодавова, Г. Н. Шевченко [1], см. также цитированную там литературу.

Имеет место следующая теорема, см. И. Н. Векуа [3, с. 31].

Теорема 40.1. *Пусть* $\mathfrak{D}$ *— некоторая основная область уравнения (40.3). Тогда все регулярные в* $\mathfrak{D}$ *(т. е. разложимые там в ряды Тейлора) решения уравнения (40.3) могут быть представлены в виде*

$$u(x, y) = \alpha_0 R(\xi_0, \eta_0; \xi, \bar{\xi}) + \int_{\xi_0}^{\xi} \Phi(t) R(t, \eta_0; \xi, \bar{\xi})\,dt +$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\bar{\xi}} \Phi^*(\tau) R(\xi_0, \tau; \xi, \bar{\xi})\,d\tau, \quad (\xi_0, \eta_0) \in (\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}}), \tag{40.12}$$

где α_0 *— некоторая постоянная, а* $\Phi(\xi)$ *и* $\Phi^*(\eta)$ *— некоторые аналитические соответственно в* $\mathfrak{D}$ *и* $\bar{\mathfrak{D}}$ *функции, однозначно определяемые через функцию* $u(x, y)$, *причем предполагается, что выполняются соотношения (40.6).*

Следующая теорема отражает еще несколько аналогичных интегральных представлений решений (40.3) через функции, подчиненные менее ограничительным условиям, чем функция Римана.

Теорема 40.2. *Пусть функция* $\gamma(\xi, \eta, \theta)$ *аналитична в цилиндре* $(\mathfrak{D}, \bar{\mathfrak{D}}, \mathfrak{D})$, *где* $\mathfrak{D}$ *— некоторая основная область уравнения (40.1), а по переменным* ξ, η *удовлетворяет уравнению (40.1). Пусть еще* $\varphi(\xi)$ *— произвольная аналитическая в* $\mathfrak{D}$ *функция и все приведенные ниже интегралы существуют. Тогда интеграл*

$$u(x, y) = \int_L \gamma(\xi, \bar{\xi}, \theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta \tag{40.13}$$

по некоторому замкнутому контуру L *из области* $\mathfrak{D}$ *удовлетворяет уравнению (40.3) при условиях (40.6), (40.9). Если еще выполняется приведенное ниже условие (40.14) (или соответственно (40.15)) вида*

$$\lim_{\theta\to\xi} \left[\frac{\partial}{\partial\eta} \gamma(\xi, \eta, \theta) + a(\xi, \eta)\,\gamma(\xi, \eta, \theta) \right] = 0, \tag{40.14}$$

$$\lim_{\theta\to\eta} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \gamma(\xi, \eta, \theta) + b(\xi, \eta)\,\gamma(\xi, \eta, \theta) \right] = 0, \tag{40.15}$$

то интеграл (40.16) (или соответственно (40.17)) вида

$$u(x,\ y)=\int\limits_{\xi_0}^{\xi}\gamma(\xi,\ \bar{\xi},\ \theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta, \tag{40.16}$$

$$u(x,\ y)=\int\limits_{\bar{\xi}_0}^{\bar{\xi}}\gamma(\xi,\ \bar{\xi},\ \theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta, \tag{40.17}$$

где ξ_0 лежит на границе области $\mathfrak{D}$, является регулярным решением уравнения (40.3) в области $\mathfrak{D}$.

Замечание 40.1. По отношению к уравнению (40.2) теорема 40.2 также сохраняет силу, но при условиях $\xi=x+y$, $\bar{\xi}=x-y$, (40.10) вместо (40.6), (40.9). Требование аналитичности функций $\gamma(\xi,\ \bar{\xi},\ \theta)$, $\varphi(\xi)$ в этом случае можно ослабить до условия существования непрерывных вторых производных.

Замечание 40.2. К примерам функций $\gamma(\xi,\ \eta,\ \theta)$, удовлетворяющих условиям теоремы 40.2, можно отнести следующие две функции:

$$R(\theta,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta),\ \ \eta_0\in\bar{\mathfrak{D}};\ \int\limits_{\theta}^{\xi}R(t,\ \eta_0;\ \xi,\ \eta)(t-\theta)^{\alpha-1}\,dt,\ \ \mathrm{Re}\,\alpha>0.$$

Теорема 40.3. *Если A, B, C — аналитические в $\mathfrak{D}$ функции, то любое регулярное в $\mathfrak{D}$ решение уравнения (40.3) является там аналитической функцией от x, y.*

2°. Представления решений обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. В этом пункте получим различные интегральные представления решений и некоторые частные формулы их обращений для двух взаимосвязанных случаев уравнений (40.3) и (40.2), а именно для *обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца*

$$H^{\lambda}_{p,\mu}u\equiv u_{xx}+u_{yy}+\frac{2\mu}{x}u_x+\frac{2p}{y}u_y+\lambda^2u=0,\ \ p,\ \mu,\ \lambda-\mathrm{const}, \tag{40.18}$$

и соответствующего ему гиперболического уравнения

$$h^{\lambda}_{p,\mu}u\equiv u_{xx}-u_{yy}-\frac{2p}{y}u_y+\frac{2\mu}{x}u_x+\lambda^2u=0, \tag{40.19}$$

получаемого из (40.18) заменой y на $-iy$.

Уравнение (40.18) в частном случае $\mu=\lambda=0$ представляет собой так называемое уравнение осесимметрической теории потенциала (подробнее о нем см. в § 41, п. 1°, § 43, п. 2°). Здесь отметим лишь, что само уравнение (40.18) появляется (при частных значениях $x=X$, $y=Y$, $2\mu=m-1$, $2p=n-1$), если искать монохроматические решения вида $u=u(X,\ Y,\ t)=u_1(X,\ Y)e^{\pm i\lambda t}$, $X^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2$, $Y^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$ в пространстве с координатами $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ и временем t для волнового уравнения Даламбера

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial y_k^2}-\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0. \tag{40.19'}$$

Возможность эффективного построения решений уравнения (40.18) во многом обусловлена двумя замечательными свойствами оператора $H^{\lambda}_{p,\mu}$: «формулами соответствий»

$$H^{\lambda}_{p,\mu}(x^{1-2\mu}u)=x^{1-2\mu}H^{\lambda}_{p,1-\mu}u,\ \ H^{\lambda}_{p,\mu}(y^{1-2p}u)=y^{1-2p}H^{\lambda}_{1-p,\mu}u \tag{40.20}$$

и композиционной представимостью решений уравнения (40.18) через операторы типа Эрдейи—Кобера (18.8), (37.45) от четных по x и y гармонических функций, вытекающей из формулы

$$I^{(x)}_{-1/2,\mu} I^{(y)}_{-1/2,p} J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0)\,\Delta f = H^{\lambda}_{p,\mu} I^{(x)}_{-1/2,\mu} I^{(y)}_{-1/2,p} J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f, \quad (40.21)$$

где индексы x, y в операторах означают переменную, по которой действуют эти операторы. Соотношения (40.20) каждому решению $\tilde{u}$ уравнения (40.18) ставят в соответствие другое решение, получаемое из $\tilde{u}$ заменой μ на $1-\mu$ (или p на $1-p$) и домножением на $x^{1-2\mu}$ (или y^{1-2p}). А соотношение (40.21) показывает, что если функция f гармоническая (т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$), то функция $u = H^{\lambda}_{p,\mu} \bar{I}^{(x)}_{-1/2,\mu} \times I^{(y)}_{-1/2,p} J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f$ является решением уравнения (40.18). Аналогичные свойства имеют место и для уравнения (40.19).

Формулы (40.20) легко проверяются непосредственным вычислением. А соотношение (40.21) проще всего установить как прямое следствие первых двух из следующих трех лемм, характеризующих действие операторов типа Эрдейи—Кобера на дифференциальный оператор

$$L^{(x)}_{\eta} = x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}x^{2\eta+1}\frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\eta+1}{x}\frac{d}{dx}, \quad L^{(x)}_{-1/2} = \frac{d^2}{dx^2}. \quad (40.22)$$

Эти леммы были доказаны соответственно в работах J. S. Lowndes [7, 5, 9] (см. также A. Erdelyi [8, 10]).

Лемма 40.1. *Пусть $f(x) \in C^2(0,\ b)$, $b > 0$, и $f(0) = f''(0) = 0$. Тогда* $J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f''(x) = \left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right) J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0) f(x)$.

Лемма 40.2. *Пусть $\alpha > 0$, $f \in C^2(0,\ b)$, $b > 0$, функция $x^{2\eta+1} f(x)$ интегрируема в нуле и $x^{2\eta+1} f'(x) \to 0$ при $x \to 0$. Тогда $J^{(x)}_{\lambda}(\eta,\ \alpha) L^{(x)}_{\eta} f(x) = (L^{(x)}_{\eta+\alpha} + \lambda^2) J^{(x)}_{\lambda}(\eta,\ \alpha) f(x)$, а, в частности, при $\lambda = 0$ справедливо $I_{\eta,\alpha} L^{(x)}_{\eta} f(x) = L^{(x)}_{\eta+\alpha} I_{\eta,\alpha} f(x)$.*

Лемма 40.3. *Пусть $\alpha > 0$, $f(x) \in C^2(0,\ b)$, $b > 0$, функции $x^{\eta+k} f^{(k)}(x)$ при $k = 0,\ 1,\ 2$ интегрируемы в нуле. Тогда*

$$(x^{-\eta-\alpha} \bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda} x^{\eta}) x^2 L^{(x)}_{\alpha+\eta} f(x) = x^2 (L^{(x)}_{\alpha+\eta} + \lambda^2)(x^{-\eta-\alpha} \bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda} x^{\eta}) f(x),$$

где $\bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda}$ — оператор, получаемый из (37.68) заменой $\bar{I}$ на $\bar{J}$.

Последняя лемма, как показано в работе J. S. Lowndes [9], дает возможность найти полную систему решений уравнения (40.18) в окрестности начала координат в виде

$$\begin{gathered} u_n(x,\ y) = A_n r^{-\mu-p} J_{2n+\mu+p}(\lambda r)\, P^{(p-1/2,\mu-1/2)}_n(\cos 2\theta), \\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ A_n \text{ — const},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{gathered} \quad (40.23)$$

где $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя (1.83), а $P^{(a,b)}_n(z)$ — многочлены Якоби (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 170]), пользуясь известным результатом для случая $\lambda = 0$ уравнения (40.18), получаемым методом разделения переменных в полярных координатах. (Отметим здесь, что, в частности, для уравнения (40.18) при $\mu = 0$ система (40.23) принимает вид $A_n r^{-p} J_{n+p}(\lambda r) \times C^p_n(\cos\theta)$, а при $\mu = \lambda = 0$ — вид $A_n r^n C^p_n(\cos\theta)$, где $C^p_n(z)$ — многочлены Гегенбауэра.)

Однако для нахождения интегральных представлений решений (40.18) более удобно воспользоваться другим подходом, основанным на применении теоремы 40.2 и формулы (40.21). Обозначим через $\Gamma(x,\ y,\ t)$

частное решение уравнения (40.18), связанное с решением $\gamma(\xi, \eta, t)$ из теоремы 40.2 формулами (40.6). Пользуясь формулой (40.21) и ее частными случаями при $\mu p\lambda=0$, можно заключить, что это решение следует искать в виде

$$\Gamma(x, y, t) = x^a y^b \rho^c \theta(\tilde{x}, \tilde{y}), \tag{40.24}$$

где $\tilde{x} = -\rho/(4xt)$, $\tilde{y} = -\lambda^2\rho/4$, $\rho = (x-t)^2 + y^2$, а параметры a, b, c подлежат определению. Подставив (40.24) в (40.18), после некоторых выкладок придем к уравнению в частных производных второго порядка относительно функции $\theta(\tilde{x}, \tilde{y})$, которое будет линейной комбинацией двух уравнений 5.9 (29) из книги Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1] (с $\theta = \Xi_2$ с коэффициентами x^{-2}, λ^2) лишь в двух случаях, связанных свойством (40.20), а именно при:

1) $a = -\mu$, $b = 1-2p$, $c = p-1$, $\alpha\beta = \mu(1-\mu)$, $\alpha+\beta = 1$, $\gamma = p$;

2) $a = -\mu$, $b = 0$, $c = -p$, $\alpha\beta = \mu(1-\mu)$, $\alpha+\beta = 1$, $\gamma = 1-p$.

Таким образом, заключаем, что $\theta(\tilde{x}, \tilde{y}) = \Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; \tilde{x}, \tilde{y})$, где

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k x^k y^l}{(\gamma)_{k+l} k! l!}, \quad |x|<1, \tag{40.25}$$

— одна из вырожденных гипергеометрических функций Гумберта с параметрами $\alpha=\mu$, $\beta=1-\mu$. Интегральное представление такой функции через функции Лежандра $P_\nu^0(z)=P_\nu(z)$ (1.79) и Бесселя—Клиффорда (37.8) получил М. Б. Капилевич [1, с. 1243] в виде

$$\Xi_2(\mu, 1-\mu; \gamma; x, y) = (\gamma-1)\int_0^1 (1-t)^{\gamma-2} P_{-\mu}(1-2tx)\bar{I}_{\gamma-2}(2\sqrt{(1-t)y})\,dt,$$
$$\operatorname{Re}\gamma > 1. \tag{40.25'}$$

Здесь следует отметить, что при $xt<0$, $\mu\neq 0$ переменная $\tilde{x}=-\rho/(4xt)$ может попадать на разрез (особую линию) функции Гумберта. Чтобы исключить эту ситуацию, умножим частное решение (40.24) с указанными в 1) параметрами на кусочно-постоянный множитель $l_1\tau(t)|t|^\mu(\operatorname{sign} xt + 1)^{|\operatorname{sign}\mu|}$, где $0^0 \overset{\text{def}}{=} 1$, l_1 — const, и проинтегрируем его в соответствии с (40.13) по параметру t. Тогда получим функцию

$$u(x, y) = l_1|x|^{-\mu}y^{1-2p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(t)|t|^\mu(\operatorname{sign} xt+1)^{|\operatorname{sign}\mu|}}{[(x-t)^2+y^2]^{1-p}}\,\Xi_2\left(\mu, 1-\mu; p; -\frac{\rho}{4xt}, -\frac{\lambda^2\rho}{4}\right)dt. \tag{40.26}$$

Аналогично на основе условий 2) получается вторая функция

$$u(x, y) = l_2|x|^{-\mu}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(t)|t|^\mu(\operatorname{sign} xt+1)^{|\operatorname{sign}\mu|}}{[(x-t)^2+y^2]^{p}}\,\Xi_2\left(\mu, 1-\mu; 1-p; -\frac{\rho}{4xt}, -\frac{\lambda^2\rho}{4}\right)dt, \tag{40.27}$$

которая, как и первая, очевидно, является решением уравнения (40.18). Отметим здесь, что при $p=0, -1, -2, \ldots$ и соответственно $p=1, 2, \ldots$ эти функции не определены и к построению решений в этих случаях требуется специальный подход.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что построенные решения вида (40.24) удовлетворяют соответствующему условию (40.14).

Поэтому на основе формулы (40.16) и замечания 40.1 из равенства (40.26) после замены y на $-iy$ и промежутка $-\infty<t<\infty$ на $0<x-y<t<x+y$, $t=x+\theta y$, можно получить функцию

$$u(x,\ y)=l_3 x^{-\mu}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(x+\theta y)}{(1-\theta^2)^{1-p}}(x+\theta y)^{\mu}\,\Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{y^2(1-\theta^2)}{4x(x+\theta y)},\ \frac{\lambda^2}{4}y^2(1-\theta^2)\right)d\theta, \tag{40.28}$$

которая при $p>0$ будет удовлетворять гиперболическому уравнению (40.19).

Совершив в (40.28) обратную замену y на iy, придем к формуле

$$u(x,\ y)=-i(2i)^{1-2p}\,l_3 x^{-\mu}\int_L \tau(\sigma)\,\sigma^{\mu}(\zeta-\zeta^{-1})^{2p-1}\,\Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{y^2(\zeta-\zeta^{-1})^2}{16x\sigma},\ \frac{\lambda^2y^2}{16}(\zeta-\zeta^{-1})^2\right)\frac{d\zeta}{\zeta},\quad \sigma=x+iy\cos\varphi, \tag{40.29}$$

$$L=\{\zeta=e^{i\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\},\ p>0,$$

которую после замены $\theta=y\cos\varphi$ также можно записать в виде

$$u(x,\ y)=l_3 x^{-\mu}y\,|y|^{-2p}\int_{-y}^{y}\tau(x+i\theta)(x+i\theta)^{\mu}(y^2-\theta^2)^{p-1}\times$$
$$\times\,\Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{\theta^2-y^2}{4x(x+i\theta)},\ \frac{\lambda^2}{4}(\theta^2-y^2)\right)d\theta,\ p>0. \tag{40.30}$$

В формулах (40.26) — (40.30) функции τ и ν полагаются такими, чтобы указанные интегралы существовали. Условия для этого приводятся ниже и в теоремах следующего пункта. Следует отметить, что интегральные операторы в этих формулах представляют собой композиции типа $I^{(x)}_{-1/2,\mu}I^{(y)}_{-1/2,p}J^{(x)}_{\lambda}(0,\ 0)f$, см. (40.21), что прослеживается ниже при исследовании их граничных значений.

Проведенные рассуждения дают возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема 40.4. *Пусть $p>0$ и $\mu\geqslant 0$, а $\tau(z)$ в окрестности точки $z=0$ является аналитической по $z=x+iy$ и четной по x и y функцией (т. е. $\tau(\bar z)=\overline{\tau(z)}$, $\tau(-\bar z)=\overline{\tau(z)}$, $\operatorname{Re}\tau$ четна по x и y, а $\operatorname{Im}\tau$ нечетна по x и y и $\operatorname{Im}\tau=0$ при $xy=0$). Тогда формулы (40.29), (40.30) доставляют все классические ($u\in C^2$) в окрестности $(0,\ 0)$, четные по x и y решения уравнения (40.18), для которых значение $u(x,\ \pm 0)$ ограничено и при $0<p<1/2$ (соответственно при $0<\mu<1/2$) справедливо равенство $u_y(x,\ 0)=0$, точнее, $u_y(x,\ y)=O(y)$ ($u_x(0,\ y)=0$, точнее, $u_x(x,\ y)=O(x)$). Если еще*

$$l_3=[\mathrm{B}(p,\ 1/2)]^{-1}=\Gamma(p+1/2)\,[\sqrt{\pi}\,\Gamma(p)]^{-1}, \tag{40.31}$$

то функции (40.28) — (40.30) удовлетворяют условию Дирихле

$$u(x,\ 0)=\tau(x), \tag{40.32}$$

причем $u(x,\ y)=\tau(x)+O(y^2)$ при $y\to 0$. Если в точках $z=z_1$ и $z=-z_1$ функция $\tau(z)$ имеет особенности, то точки $\pm z_1$, $\pm\bar z_1$ будут особыми и для решения $u(x,\ y)$ (40.29), (40.30).

Доказательство основных утверждений этой теоремы можно найти в монографии R. P. Gilbert [2]. Условие (40.32) можно проверить непосредственным предельным переходом при $y \to 0$ в (40.28), (40.29).

Теорема 40.4 показывает, что оператор (40.29) осуществляет отображение аналитических функций в решения уравнения (40.18). Обратный ему оператор в общем случае построен в монографии R. P. Gilbert [2, с. 205—206] в виде громоздкого ряда. В частном же случае $\mu=\lambda=0$ такой оператор находится явно и относительно просто, см. статью R. P. Gilbert [1]. Покажем, что и другие частные случаи обратного оператора (при $\mu\lambda=0$) могут быть построены в замкнутом виде.

Случай А. Пусть $\mu=0$, $p>0$. Предположим, что $\tau(\bar{z})=\overline{\tau(z)}$. Тогда формула (40.30) с условием (40.31) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{y^{1-2p}}{\mathrm{B}(p, 1/2)} \int_{-y}^{y} \tau(x+i\theta)(y^2-\theta^2)^{p-1}\bar{J}_{p-1}(\lambda\sqrt{y^2-\theta^2})\,d\theta = \\ &= \frac{2y^{1-2p}}{\mathrm{B}(p, 1/2)} \int_0^y \operatorname{Re}\tau(x+i\theta)(y^2-\theta^2)^{p-1}\bar{J}_{p-1}(\lambda\sqrt{y^2-\theta^2})\,d\theta = \\ &= \pi^{-1/2}\Gamma(p+1/2)J_\lambda^{(y)}(-1/2, p)\operatorname{Re}\tau(x+iy) = \\ &= \pi^{-1/2}\Gamma(p+1/2)y^{1-2p}(C_{0+}^{p;\lambda}f)(w),\ f(t)=\operatorname{Re}\tau(x+i\sqrt{t})t^{-1/2},\ w=y^2, \end{aligned} \tag{40.33}$$

где $\bar{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда (37.8), а $J_\lambda^{(y)}(\eta, \alpha)$ и $C_{0+}^{p;\lambda}$ — операторы (37.45), (37.4), примененные по второй переменной. Воспользовавшись формулами (37.57), (37.37) обращения этих операторов, получим следующее представление обратного к (40.33) оператора:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\tau(x+iy) &= \sqrt{\pi}\Gamma^{-1}(p+1/2)\,J_{i\lambda}^{(y)}(p-1/2, -p) = \\ &= \frac{2^{1-m}\sqrt{\pi}y}{\Gamma(p+1/2)} \int_0^y \frac{(y^2-t^2)^{m-p-1}}{\Gamma(m-p)} \bar{I}_{m-p-1}(\lambda\sqrt{y^2-t^2}) \times \\ &\times \left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^m (t^{2p-1}u(x, t))\,t\,dt \end{aligned} \tag{40.34}$$

и соответствующую теорему, вытекающую из теоремы 37.2.

Теорема 40.5. *Пусть* $g(y)=u(x, \sqrt{y})y^{p-1/2} \in AC^m([0, b])$, $b<\infty$, *при всех* x, *причем* $g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(m-1)}(0)=0$ *и* $0<p<m$. *Тогда каждому решению* $u(x, y)$ *уравнения (40.18) при* $\mu=0$ *соответствует по формуле (40.34) некоторая гармоническая функция* $\operatorname{Re}\tau(x+iy)$; *причем если* $u(x, y)$ *четна по* x *и* y, *то и* $\operatorname{Re}\tau(x+iy)$ *будет четной по* x *и* y, *а для соответствующей аналитической функции* $\tau(z)$ *будет выполняться условие* $\tau(\bar{z})=\overline{\tau(z)}$.

Случай Б. Пусть $\lambda=0$, $p>0$. Предположим, что на границе Γ единичного круга $|z|\leqslant 1$ задано значение четной функции u:

$$u(x, y)|_\Gamma = f(\varphi),\ \Gamma=\{x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ |\varphi|\leqslant\pi\}, \tag{40.35}$$
$$f(\varphi)=f(-\varphi)=f(\pi-\varphi),\ \varphi\neq\pm\pi/2.$$

Положив в (40.30) $z=x+iy=e^{i\varphi}$, $x+i\theta=t$ и воспользовавшись (40.35), придем к следующему интегральному уравнению:

$$\frac{x^{-\mu}|y|^{2-2p}}{iy\mathrm{B}(p, 1/2)} \int_{\bar{z}}^{z} \tau(t)t^\mu[(z-t)(\bar{z}-t)]^{p-1}{}_2F_1\left(\mu, 1-\mu; p; \frac{(z-t)(t-\bar{z})}{2t(z+\bar{z})}\right)dt = f(\varphi),\ |\varphi|<\pi,\ \varphi\neq\pm\pi/2. \tag{40.36}$$

Вертикальный отрезок, соединяющий точки $\bar{z}$ и z, по которому ведется интегрирование в (40.36), можно заменить на дугу окружности Г вида $t=e^{i\alpha}$, $|\alpha|\leqslant\varphi$, поскольку функция $\tau(t)$ аналитична в единичном круге всюду, а остальные подынтегральные функции аналитичны всюду, кроме точек $t=z$, $\bar{z}$, 0, ∞, которые лежат на границе или за пределами соответствующего кругового сегмента. При таком изменении пути интегрирования в силу интегральной теоремы Коши величина интеграла не изменится. Для выделения однозначной ветви функции (40.36) относительно переменной z сделаем разрез по полуоси $y=0$, $x\leqslant 0$ и положим $|\varphi|<\pi$. Тогда функция $[(z-t)(\bar{z}-t)]^{p-1}=[2t(\cos\alpha-\cos\varphi)]^{p-1}$ станет однозначной функцией с разрывом в точке $t=-1$, а формула (40.36) примет вид

$$\int_{-\varphi}^{\varphi}\frac{\tau(e^{i\alpha})\,e^{i\alpha(p+\mu)}}{(\cos\alpha-\cos\varphi)^{1-p}}\,{}_2F_1\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)\right)d\alpha=$$
$$=2^{1-p}\mathrm{B}(p,\ 1/2)\sin\varphi\,|\sin\varphi|^{2p-2}\cos^{\mu}\varphi f(\varphi). \qquad (40.37)$$

Так как аргумент гипергеометрической функции не должен лежать на разрезе $[1,\infty)$, то следует полагать $|\varphi|<\pi/2$, исключая тем самым переход через особую линию уравнения $x=0$.

Разбив последний интеграл на два: по $[-\varphi, 0]$ и по $[0,\varphi]$, $0\leqslant\varphi<\pi/2$, совершив в первом замену $\alpha=-\alpha_1$ и учтя четность $\tau(t)$ и формулу (1.79), придем к интегральному уравнению типа свертки Меллина с функцией Лежандра в ядре (35.18), где

$$\mathfrak{f}(\cos\alpha)\,|\sin\alpha|=\mathrm{Re}\,(\tau(t)\,t^{p+\mu}),\quad \eta=\cos\alpha,\quad x=\cos\varphi,\quad d=1,$$
$$0\leqslant\alpha<\pi/2,\ 0\leqslant\varphi<\pi/2,\ g(x)=\frac{2^{-p}\sqrt{\pi}}{\Gamma(p+1/2)}\,(1-x^2)^{p-1/2}\,x^{\mu}f(\arccos x). \qquad (40.38)$$

Воспользовавшись теоремой 35.2 об обращении этого уравнения, можно сформулировать следующий результат.

Теорема 40.6. *Пусть* $p>0$, $\mu<1/2$, *а функция* $f(\varphi)$ *такая, что соответствующая ей функция* $g(x)$ *из (40.38) представима в виде* $g(x)=(I^p_{1-}h)(x)$, *где* $h\in L_1(\varepsilon,\ 1)$, $\varepsilon>0$, *а* $(I^p_{1-}h)(x)$ — *дробный интеграл (2.18). Тогда решение уравнения (40.36) на окружности* $|z|=1$, $xy\neq 0$, *в классе четных функций* $\tau(t)=\tau(-t)=\overline{\tau(t)}$ *сводится к решению следующей краевой задачи Гильберта (см. Ф. Д. Гахов [1]).*

Задача Гильберта 40.1. В четвертькруге $|z|<1$, $x>0$, $y>0$, найти аналитическую функцию $\tau(z)=\xi(x,\ y)+i\eta(x,\ y)$, непрерывную вплоть до его границы l, предельные значения действительной и мнимой частей которой удовлетворяют на l линейному соотношению

$$a(t)\,\xi(t)+b(t)\,\eta(t)=c(t),\quad t\in l, \qquad (40.39)$$

где $a=c=0$, $b(t)=1$ на осях $x=0$ и $y=0$, а на четвертьокружности $a(t)=\cos\alpha(p+\mu)$, $b(t)=-\sin\alpha(p+\mu)$, $c(t)=\mathfrak{f}(\cos\alpha)\sin\alpha$, $0\leqslant\alpha<\pi/2$, причем функция $\mathfrak{f}$ выражается через заданную функцию $f(\varphi)$ (40.35) формулами (35.34), (40.38). Решение следует искать в классе функций $\tau(z)$, ограниченных вблизи $z=1$ и допускающих интегрируемую особенность в точке $z=i$.

Замечание 40.3. Если $\mu>1/2$, то $1-\mu<1/2$ и имеет место аналог теоремы 40.6, получаемый с помощью свойств (40.20). Тогда вместо t^{μ} следует подставить $t^{1-\mu}$, а в формуле (35.34) μ заменить на $1-\mu$.

Доказательство теоремы 40.6. После обращения уравнения (35.18) возникает задача восстановления предельного значения $\tau(t)$ четной аналитической в правом полукруге функции $\tau(z)$ по известному краевому значению (40.38) вида $\mathrm{Re}[\tau(t)t^{p+\mu}]=\mathfrak{f}(\cos\alpha)|\sin\alpha|$. На осях координат функция $\tau(z)$, как отмечалось в теореме 40.4, должна обладать свойством $\mathrm{Im}\,\tau(z)=0$ при $xy=0$. Эти три условия объединяются в одно (40.39) с указанными коэффициентами.

Вычислим индекс $\varkappa$ и количество решений задачи (40.39). Поступив, как в монографии Ф. Д. Гахова [1, § 30], преобразуем условие $\mathrm{Re}[\tau(t)t^{p+\mu}]=c(t)$ к форме $2c(t)=t^{p+\mu}\tau^+(t)+\overline{t^{p+\mu}\tau^+(t)}=t^{p+\mu}\tau^+(t)+\overline{t^{p+\mu}}\tau^-(t)$. Отсюда получим краевое условие соответствующей задачи Римана

$$\tau^+(t)=-e^{-2i\alpha(p+\mu)}\tau^-(t)+2e^{-i\alpha(p+\mu)}c(t),\quad t\in\Gamma, \tag{40.40}$$

где $\tau^+(t)$ — предельное значение на окружности $|z|=1$ аналитической функции $\tau(z)$ при $z\to t=e^{i\alpha}$, $0\leqslant\alpha<\pi/2$, изнутри, а $\tau^-(t)$ — предельное значение извне некоторой функции $\tau^-(z)$, $|z|>1$, которая может и не быть аналитической. На осях таким же образом выводится равенство $\tau^+=\tau^-$, отражающее аналитичность τ на осях.

В силу четности $\tau(t)$ однородное условие $\tau^+(t)=-t^{-2p-2\mu}\tau^-(t)$ можно продолжить на всю окружность, кроме особой точки $t=-1$, лежащей на разрезе. При переходе t через -1 аргумент функции $t^{-2p-2\mu}$ имеет скачок (см. Ф. Д. Гахов [1, § 43.2]), равный $-4\pi(p+\mu)$. Таким образом, в классе интегрируемых в точке $t=-1$ решений индекс $\varkappa$ равен $[-2p-2\mu]+1$, а величина $|\varkappa|$ характеризует количество решений однородной задачи Гильберта (при $\varkappa\geqslant0$) или количество условий разрешимости неоднородной задачи (при $\varkappa<0$). Само же решение этой задачи строится по формулам из монографии Ф. Д. Гахова [1, § 46]. Подставив найденную функцию $\tau(z)$ в (40.30) при $\lambda=0$, придем к решению $u(x, y)$ следующей задачи Дирихле.

Задача Дирихле 40.2. Найти вещественную функцию $u(x, y)$, четную по x, y и непрерывную в круге $|z|\leqslant1$ всюду, кроме, быть может, линии $x=0$, которая удовлетворяет в круге при $xy\neq0$ уравнению (40.18), где $\lambda=0$, $0<p<1/2$, принимает на окружности $|z|=1$ заданные значения (40.35), а на линии $y=0$ непрерывна и ограничена, причем $u_y(x, 0)=0$ (на оси $x=0$ эта функция ограничена лишь при $\mu<1/2$).

3°. **Краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца.** В настоящем пункте на основе формул (40.26)—(40.28) построим решения задач Дирихле, Неймана в полуплоскости для уравнения (40.18) и полуоднородной задачи Коши в характеристическом треугольнике для уравнения (40.19). При этом укажем характер поведения решений вблизи особых линий и условия на функции, обеспечивающие существование интегралов.

Выясним вначале картину поведения решения (40.26) при $x\to0$. Из (40.25) следует, что имеют место представления

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{y^l}{(\gamma)_l l!}\,{}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma+l; x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k x^k}{(\gamma)_k k!}\,\bar{J}_{\gamma+k-1}(2i\sqrt{y}). \tag{40.41}$$

Подставив сюда разложение функции Гаусса вида (10.13), придем к следующим главным членам (40.41) при $x\to\infty$, $|\arg(-x)|<\pi$:

$$\Xi_2(\alpha, \beta; \gamma; x, y)\sim\Gamma\begin{bmatrix}\gamma, & \beta-\alpha\\ \beta, & \gamma-\alpha\end{bmatrix}{}_0F_1(\gamma-\alpha; y)(-x)^{-\alpha}+$$
$$+\Gamma\begin{bmatrix}\gamma, & \alpha-\beta\\ \alpha, & \gamma-\beta\end{bmatrix}{}_0F_1(\gamma-\beta; y)(-x)^{-\beta},\quad \alpha\neq\beta; \tag{40.42}$$

$$\Xi_2(\alpha,\ \alpha;\ \gamma;\ x,\ y) \sim \Gamma\begin{bmatrix} \gamma \\ \alpha,\ \gamma-\alpha \end{bmatrix}(-x)^{-\alpha}\ln(-x), \quad \beta=\alpha,$$

(последнее соотношение следует из формулы 2.10 (7) справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1]). Применив (40.42) к (40.26), установим, что при $\mu<1/2$ существует значение $u(0,\ y)$, при $\mu>1/2$ существует предел $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{2\mu-1}u(x,\ y)$, а при $\mu=1/2$ — предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln^{-1}|x|\,u(x,\ y)$. Последние свойства показывают, что решение (40.26) на линии $x=0$ при $\mu>1/2$ имеет степенную особенность порядка $O(x^{1-2\mu})$, а при $\mu=1/2$ — логарифмическую особенность порядка $O(\ln|x|)$.

Воспользуемся теперь разложением ${}_0F_1(\nu;\ -y)=O[y^{(1-2\nu)/4}\cos(2\sqrt{y}+\pi(1-2\nu)/4)]$, $y\to\infty$, см. книгу О. И. Маричева [10, с. 76]. Тогда из (40.42) получим, что

$$\Xi_2(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x,\ y)=O(y^{1/4+(\alpha-\gamma)/2}\,x^{-\alpha})+O(y^{1/4+(\beta-\gamma)/2}\,x^{-\beta}),$$
$$\alpha\neq\beta,\ x,\ y\to\infty. \tag{40.43}$$

Отсюда следует, что подынтегральная функция из (40.26) при $t\to\infty$ имеет порядок $O[\tau(t)|t|^{\mu+p-3/2}]$, если $\lambda\neq 0$, и $O[\tau(t)|t|^{2p-2}(1+|t|^{2\mu-1})]$, если $\lambda=0$. Значит, для существования интеграла (40.26) на бесконечности последние порядки следует считать интегрируемыми.

Результаты таких исследований сводятся в следующие две теоремы.

Теорема 40.7. *Пусть $\tau(t)$ является непрерывной, ограниченной на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией, удовлетворяющей на бесконечности условиям $|\tau(t)|<C|t|^{1/2-\mu-p-\varepsilon}$ при $\mu>0$, $\lambda\neq 0$ или $|\tau(t)|<C|t|^{2-2\mu-2p-\varepsilon}$ при $\mu\geqslant 1/2$, $\lambda=0$ и $|\tau(t)|<C|t|^{1-2p-\varepsilon}$ при $0<\mu<1/2$, $\lambda=0$, где C — const, $\varepsilon>0$. Тогда задача Дирихле в полуплоскости $y>0$ о нахождении решения $u\in C^2(y>0,\ x\neq 0)$ уравнения (40.18) по условию (40.32) в точках x, $-\infty<x<\infty$, $x\neq 0$, разрешима при $p<1/2$, $p\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ формулой (40.26) с коэффициентом*

$$l_1=[\mathrm{B}(1/2,\ \ 1/2-p)]^{-1}=\Gamma(1-p)\,[\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2-p)]^{-1}. \tag{40.44}$$

Поведение производной u_y при $y\to 0$ характеризуется табл. 41.1 (при $q=0$), а поведение u и u_x при $x\to 0$ также отражается табл. 41.1, но при $q=0$ и с заменой p на μ и x, y местами. При $y\to\infty$ решение (40.26) имеет следующее поведение:

$$u(x,\ y)=O\,[y^{-p-\mu-1/2}(1+y^{2\mu-1})] \qquad \text{при } \lambda\neq 0,$$
$$u(x,\ y)=O\,[y^{-2\mu-1}(1+y^{4\mu-2})] \qquad \text{при } \lambda=0.$$

Теорема 40.8. *Пусть $\nu(t)$ является непрерывной на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией, удовлетворяющей на бесконечности условиям $|\nu(t)|<C|t|^{p-\mu-1/2-\varepsilon}$ при $\lambda\neq 0$ и $|\nu(t)|<C|t|^{2p-1-\varepsilon}(1+|t|^{1-2\mu})$ при $\lambda=0$, где C — const, $\varepsilon>0$. Тогда весовая задача Неймана в полуплоскости $y>0$ об отыскании решения $u\in C^2(y>0,\ x\neq 0)$ уравнения (40.18) по условию*

$$\lim_{y\to+0} y^{2p}u_y(x,\ y)=\nu(x),\ -\infty<x<\infty,\quad x\neq 0, \tag{40.45}$$

разрешима при $p>-1/2$, $p\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, по формуле

$$u(x,\ y)=u_2(x,\ y)+C_1u_{01}(x,\ y)+C_2u_{02}(x,\ y),\quad C_1,\ C_2\text{ — const}, \tag{40.46}$$

где $u_2(x,\ y)$ имеет вид (40.27) с коэффициентом

$$l_2=-\frac{\mathrm{B}(p,\ 1/2)}{2\pi}, \tag{40.47}$$

а функции $u_{0j}=r^{-p-\mu}J_{(-1)^j(p+\mu)}(\lambda r)$, $r^2=x^2+y^2$, $j=1,\ 2$, *являются особыми решениями уравнения (40.18), удовлетворяющими однородному условию вида (40.45). Поведение решения* u *и его производных при* $x\to 0$ *и* $y\to 0$ *устанавливается из табл. 41.1 способом, указанным в теореме 40.7, а поведение* u *при* $y\to\infty$ *получается из теоремы 40.7 на основе формул (40.20).*

Замечание 40.4. Формула (40.46) показывает, что решения задач с условиями на особых линиях без дополнительных ограничений на класс могут быть не единственными. В случае $p=1/2$ к решению (40.46) может быть добавлено еще одно решение, содержащее в ядре функцию $\ln(\rho/y)$. Подробнее об этом см. в § 41, п. 4°.

Замечание 40.5. Разложив функцию (40.27) с постоянной (40.47) по степеням p: $u_2=p^{-1}u_{20}+\tilde{u}_2+O(p)$, выпишем второй член этого разложения

$$\tilde{u}_2(x,\ y)=\frac{|x|^{-\mu}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(t)\,|t|^{\mu}(\operatorname{sign}xt+1)^{|\operatorname{sign}\mu|}\sum_{k,\,l=0}^{\infty}\frac{(\mu)_k(1-\mu)_k}{(k+l)!\,k!\,l!}\times$$
$$\times\left(-\frac{\rho}{4xt}\right)^k\left(-\frac{\lambda^2\rho}{4}\right)^l\left[\ln\rho+\mathbf{C}-\sum_{j=1}^{k+l}\frac{1}{j}\right]dt,\quad \rho=(x-t)^2+y^2, \tag{40.48}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная Эйлера—Маскерони. Эта функция является решением задачи (40.45) в особом случае $p=0$, а при $\lambda=\mu=0$ и необходимом условии разрешимости задачи Неймана в полуплоскости вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(t)\,dt=0 \tag{40.49}$$

соотношение (40.48) приводится к известной формуле Дини решения задачи Неймана в полуплоскости $y>0$ для уравнения Лапласа

$$u(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(t)\ln[(x-t)^2+y^2]\,dt. \tag{40.50}$$

Замечание 40.6. Формула (40.27) при $p\geqslant 1/2$ доставляет также решения следующих весовых задач Дирихле:

$$\lim_{y\to+0}y^{2p-1}u(x,\ y)=\frac{1}{1-2p}\nu(x),\quad p>1/2,\quad p\neq 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{40.51}$$

$$\lim_{y\to+0}\ln^{-1}y\ u(x,\ y)=\nu(x),\quad p=1/2, \tag{40.52}$$

причем решением задачи (40.52) также является функция (40.48).

В заключение параграфа отметим, что, опираясь на формулу (40.28), аналогичным образом можно получить решение следующей полуоднородной задачи Коши для гиперболического уравнения (40.19):

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\quad \lim_{y\to+0}y^{2p}u_y(x,\ y)=0,\quad 0<x<1, \tag{40.53}$$

и соответствующую теорему о ее разрешимости.

Теорема 40.9. *Если* $\tau\in C^2([0,\ 1])$, $0<p<1/2$, *а* l_3 *имеет вид (40.31), то в треугольнике* $D=\{0<x-y<x+y<1\}$ *задача Коши (40.53) имеет классическое* ($u\in C^2(D)$) *решение вида (40.28).*

§ 41. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА — ПУАССОНА — ДАРБУ

В этом параграфе получаются различные интегральные представления решений уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу в эллиптическом и гиперболическом случаях и на их основе строятся решения краевых задач Дирихле, Неймана и Коши. Затрагивается многомерный случай. Как и в § 40, показывается, что с помощью операторов Эрдейи—Кобера (18.8) решения простейших уравнений с постоянными коэффициентами отображаются в решения уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу.

1°. Представления решений уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Исключительно важную роль при решении осесимметрических задач теории потенциала играет *обобщенное уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу*

$$E(\beta,\ \beta^*)u = u_{\xi\eta} - \frac{\beta^* u_\xi - \beta u_\eta}{\xi - \eta} = 0,\ \ \beta^*,\ \beta \text{ — const.} \tag{41.1}$$

Это уравнение соответствует случаю (40.1) при $a(\xi,\ \eta) = -\beta^*/(\xi - \eta)$, $b(\xi,\ \eta) = \beta/(\xi - \eta)$, $c(\xi,\ \eta) = 0$. После замен (40.6) оно принимает вид

$$E^+u = u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{y} u_x + \frac{2p}{y} u_y = 0, \tag{41.2}$$

$$\beta = p + iq,\ \beta^* = p - iq. \tag{41.3}$$

Отметим, что к уравнению (41.2) со значениями $q=0$, $2p=n-2$ при $y=r$ сводится всякое решение уравнения Лапласа в R^n вида

$$U_{x_1x_1} + U_{x_2x_2} + \ldots + U_{x_nx_n} = 0, \tag{41.3'}$$

которое ищется в форме

$$U(x_1,\ \ldots,\ x_n) = u(x,\ r),\ x = x_n,\ r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2},$$

с осью симметрии $r=0$. Такое решение называется $2p+2$-*мерным осесимметрическим потенциалом* и удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} + u_{rr} + \frac{2p}{r} u_r = 0. \tag{41.3''}$$

Поскольку оператор в (41.3″) четен по r, то всякое решение уравнения (41.3″) необходимо четно по r, а в случае $p=0$ 2-мерный осесимметрический потенциал является гармонической функцией.

В дальнейшем будем различать два случая: при рассмотрении уравнения (41.1) β и β^* будем полагать действительными, а при изучении уравнения (41.2) эти параметры будем считать комплексными и сопряженными, причем $\operatorname{Re}\beta = \operatorname{Re}\beta^* = p$.

Непосредственным вычислением несложно установить следующие леммы.

Лемма 41.1. *Для того чтобы функция u была решением уравнения $E(\beta,\ \beta^*)u = 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$v(\xi,\ \eta) = (\eta - \xi)^{\beta+\beta^*-1} u(\xi,\ \eta) \tag{41.4}$$

удовлетворяла уравнению $E(1-\beta^*,\ 1-\beta)v = 0$.

Лемма 41.2. *Если функция $u_1(\xi,\ \eta)$ удовлетворяет уравнению (41.1), то и функция*

$$u(\xi,\ \eta) = (a\xi + b)^{-\beta} (a\eta + b)^{-\beta^*} u_1\left(\frac{c\xi + d}{a\xi + b},\ \frac{c\eta + d}{a\eta + b}\right), \tag{41.5}$$

где a, b, c, d — произвольные постоянные, для которых $ad - bc \neq 0$, также является решением этого уравнения.

Лемма 41.3. *Пусть $\beta > 0$, $\beta^* > 0$, а $\tau(\theta)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда интеграл*

$$J_1(\beta, \beta^*) = \int_0^1 \tau[\xi + (\eta - \xi)t]\, t^{\beta^*-1}(1-t)^{\beta-1}dt \tag{41.6}$$

удовлетворяет уравнению (41.1), а при условиях (40.6) в случае $p > 0$ — уравнению (41.2).

Отметим, что лемма 41.3 следует из теоремы 40.2, если положить

$$\gamma(\xi, \eta, \theta) = C(\xi - \theta)^{-\beta}(\eta - \theta)^{-\beta^*}, \quad C - \mathrm{const}. \tag{41.7}$$

Тогда интеграл вида (40.17), т. е.

$$J_2(\beta, \beta^*) = \int_{\eta_0}^{\eta} \gamma(\xi, \eta, \theta)\, \nu(\theta)\, d\theta, \quad \eta_0 = \xi, \tag{41.8}$$

где $\nu(\theta)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\beta < 1$, $\beta^* < 1$, будет удовлетворять уравнению (41.1) и с помощью леммы 41.1 перейдет в решение (41.6). Очевидно, при $\beta \neq 1/2$, $\beta^* \neq 1/2$ ($p \neq 1/2$) решения (41.6), (41.8) линейно независимы.

Теорема 41.1. *Если $0 < \beta < 1$, $0 < \beta^* < 1$ и либо $\beta \neq 1/2$, либо $\beta^* \neq 1/2$ (соответственно $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$), то общее решение уравнения (41.1) (соответственно (41.2)) выражается формулой*

$$u(\xi, \eta) = \int_0^1 \tau(\theta)\, t^{\beta^*-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt + (\eta - \xi)^{1-\beta-\beta^*} \int_0^1 \nu(\theta)\, t^{-\beta} \times$$
$$\times (1-t)^{-\beta^*} dt = J_1(\beta, \beta^*) + J_2(\beta, \beta^*) = J(\beta, \beta^*), \quad \theta = \xi + (\eta - \xi)t, \tag{41.9}$$

где $\tau(\theta)$, $\nu(\theta)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые (соответственно непрерывные) функции.

В случае $\beta = \beta^* = p = 1/2$ такое решение имеет вид

$$u(\xi, \eta) = \int_0^1 \tau(\theta)(t - t^2)^{-1/2}\, dt + \int_0^1 \nu(\theta)(t - t^2)^{-1/2} \ln[(t - t^2)(\eta - \xi)]\, dt. \tag{41.10}$$

Замечание 41.1. В частности, если функции $\tau(\theta)$, $\nu(\theta)$ аналитичны в некоторой области $\mathfrak{D}$ (т. е. при $(\xi, \eta) \in \mathfrak{D}$), то формулы (41.9), (41.10) доставляют все аналитические в $\mathfrak{D}$ решения уравнения (41.1).

Остановимся кратко на процессе нахождения общего решения уравнения (41.1) при других значениях параметров β, β^*. Пусть $-k < \beta^* < 1 - k$, $-l < \beta < 1 - l$, $k, l = 1, 2, 3, \ldots$, $\beta + \beta^* \neq -1, -2, -3, \ldots$ Тогда в силу неравенств $0 < 1 - k - \beta^* < 1$, $0 < 1 - l - \beta < 1$ функция $J_1(1 - k - \beta^*, 1 - l - \beta)$ (см. (41.6)) будет решением уравнения $E(1 - k - \beta^*, 1 - l - \beta)u = 0$. Вычислим производную

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial \xi^k \partial \eta^l} J_1(1 - k - \beta^*, 1 - l - \beta) = \int_0^1 \tau^{(k+l)}(\theta)\, t^{-\beta}(1-t)^{-\beta^*}\, dt, \tag{41.11}$$

полагая $\tau(\theta)$ достаточно гладкой. Очевидно, интеграл справа в (41.11) удовлетворяет уравнению $E(1-\beta^*, 1-\beta)u = 0$. Поэтому, умножив обе части (41.11) на $(\eta - \xi)^{1-\beta-\beta^*}$ и применив лемму 41.1, убедимся, что построенная функция будет решением уравнения (41.1). После аналогичных преобразований над вторым решением J_2 придем к общему решению этого уравнения вида

$$u(\xi,\ \eta)=(\eta-\xi)^{1-\beta-\beta^*}\frac{\partial^{k+l}}{\partial\xi^k\partial\eta^l}J(1-k-\beta^*,\ 1-l-\beta), \qquad (41.12)$$

где $J(\beta,\ \beta^*)$ указана в (41.9).

С учетом того, что $\beta^*+k>0$, $\beta+l>0$, можно получить и другой вид общего решения

$$u(\xi,\ \eta)=(\eta-\xi)^{1-\beta-\beta^*}\frac{\partial^{k+l}}{\partial\xi^k\partial\eta^l}\frac{J(\beta+l,\ \beta^*+k)}{(\eta-\xi)^{1-\beta-\beta^*-k-l}}. \qquad (41.13)$$

Если, например, $\beta=\beta^*=1/2-k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, то решения J_1, J_2 станут зависимыми и вместо J в формулы (41.12), (41.13) следует подставить правую часть из равенства (41.10). Если же одно из чисел β, β^* целое, то уравнение (41.1) может быть проинтегрировано в квадратурах каскадным методом Лапласа (см. книгу В. М. Бабича и др. [1, с. 43]).

Следует отметить, что к представлению (41.9) можно прийти и через формулу (40.12), опираясь на метод Римана и функцию Римана для уравнения (41.1), имеющую вид

$$R_E(\xi,\ \eta;\ \xi_0,\ \eta_0)=(\eta-\xi)^{\beta+\beta^*}(\eta-\xi_0)^{-\beta}(\eta_0-\xi)^{-\beta^*}{}_2F_1(\beta,\ \beta^*;\ 1;\ \sigma),$$

$$\sigma=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\eta-\xi_0)}, \qquad (41.14)$$

где ${}_2F_1$ — функция Гаусса (1.73) (см., например, книгу В. М. Бабича и др. [1, с. 48]).

Полученные результаты несложно перенести на случай эллиптического уравнения (41.2). Так, из формул (41.7), (41.3), (40.6) при $\operatorname{Im} t=0$ получается следующее частное решение уравнения (41.2):

$$\begin{aligned}\gamma(\xi,\ \eta,\ t)&=c_1(\xi-t)^{-\beta}(t-\bar\xi)^{-\bar\beta}=c_1\exp[-(p+iq)\ln(\xi-t)-(p-iq)\times\\&\times\ln(t-\bar\xi)]=c_1\exp[-2p\ln|\xi-t|-(p+iq)\,i\arg(\xi-t)-\\&-(p-iq)\,i\arg(t-\bar\xi)]=c_1|\xi-t|^{-2p}\exp[-(p+iq)\,i\psi-\\&-(p-iq)\,i(\pi-\psi)]=c_2r_1^{-2p}e^{2q\psi},\end{aligned} \qquad (41.15)$$

где

$$r_1=|\xi-t|=\sqrt{(x-t)^2+y^2}, \qquad (41.16)$$

$$\psi=\arg(\xi-t)=\arccos[(x-t)/r_1],\ y\geqslant 0. \qquad (41.17)$$

Положив здесь $c_2=l_1\tau(t)$ или $c_2=l_2\nu(t)$, проинтегрировав по оси $-\infty<t<\infty$ и воспользовавшись леммой 41.1 в отношении к уравнению (41.2) (см. также (40.20)), придем к следующим двум решениям уравнения (41.2):

$$u(x,\ y)=l_1y^{1-2p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(t)e^{2q\psi}}{[(x-t)^2+y^2]^{1-p}}dt, \qquad (41.18)$$

$$u(x,\ y)=l_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu(t)e^{2q\psi}}{[(x-t)^2+y^2]^{p}}dt. \qquad (41.19)$$

Эти представления являются аналогами решений (40.26) и (40.27) для уравнения (40.18), которое при $\mu=\lambda=0$ совпадает со случаем $q=0$ уравнения (41.2), а также аналогами функций $J_1(\beta,\ \beta^*)$ и $J_2(\beta,\ \beta^*)$. Аналогом решения (41.10), содержащим логарифмическую функцию, здесь будет решение уравнения (41.2) с $p=1/2$ вида

$$u(x, y)=l_3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau(t)e^{2q\psi}}{\sqrt{(x-t)^2+y^2}}\left[C_1+C_2\ln\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\right]dt, \tag{41.20}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Совершив в формуле (41.6) замены (40.6) и $(1-2t)y=\theta$ и учтя (41.3), придем к следующему аналогу формулы (40.30):

$$u(x, y)=l_3y^{1-2p}\int_{-y}^{y}\tau(x+i\theta)(y^2-\theta^2)^{p-1}\left(\frac{y+\theta}{y-\theta}\right)^{iq}d\theta. \tag{41.21}$$

В частности, если $q=0$ и $\tau(\bar z)=\overline{\tau(z)}$, то отсюда вытекает следующий частный случай (при $\lambda=0$) формулы (40.33):

$$u(x, y)=2l_3y^{1-2p}\int_{0}^{y}\operatorname{Re}\tau(x+i\theta)(y^2-\theta^2)^{p-1}d\theta=$$
$$=l_3\Gamma(p)I^{(y)}_{-1/2,p}\operatorname{Re}\tau(x+iy), \tag{41.22}$$

где $I^{(y)}_{\eta,\alpha}$ — оператор Эрдейи — Кобера (18.8), применяемый по переменной y. Для последних формул имеет место следующий аналог теоремы 40.4.

Теорема 41.2. *Пусть $p>0$, а функция $\tau(z)$ в окрестности точки $z=0$ аналитична (или соответственно аналитична, четна по y и удовлетворяет условию $\tau(\bar z)=\overline{\tau(z)}$). Тогда формулы (41.21) (соответственно (41.22)) доставляют все классические ($u\in C^2$) (соответственно классические и четные по y) в окрестности (0, 0) решения уравнения (41.2) (соответственно (41.2) при $q=0$), для которых значение $u(x, \pm 0)$ ограничено и при $0<p<1/2$ справедливо равенство $u_y(x, 0)=0$, причем $u_y(x, y)=O(y)$, $y\to 0$. Если еще выполняется условие (40.31), то функции (41.21), (41.22) удовлетворяют краевому значению (40.32).*

Обратная к (41.22) формула получается из (40.34) при $\lambda=0$ (когда $\bar I_{m-p-1}(\lambda\sqrt{y^2-t^2})=1$) и условиях из теоремы 40.5.

В заключение пункта отметим, что, основываясь на формулах из § 17, п. 2°, 16.2, можно выписать связь между асимптотиками функций $\tau(z)$ и $u(x, y)$ при $y\to+\infty$. В самом деле, если

$$\operatorname{Re}\tau(x+iy)\sim\sum_{k=0}^{\infty}d_k(x)\,y^{-2k} \quad \text{при } y\to+\infty, \tag{41.23}$$

из равенств (41.22) и (17.17) получается следующее асимптотическое представление решения $u(x, y)$ задачи (40.32), (40.31) для уравнения (41.2) с $q=0$:

$$u(x, y)\sim l_3\Gamma(p)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathfrak{M}^{(y)}\{g(x+iy);\ 2k+1\}}{k!\,\Gamma(p-k)\,y^{2k+1}}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}d_k(x)\frac{\Gamma(1/2-k)}{\Gamma(1/2+p-k)\,y^{2k}}\right] \quad \text{при } y\to+\infty, \tag{41.24}$$

где $\mathfrak{M}^{(y)}\{g(x+iy);\ 2k-1\}$ — преобразование Меллина (1.112) функции $g(x+iy)$ по y в точке $2k+1$.

2°. Классические и обобщенные решения задачи Коши. После замены y на iy эллиптическое уравнение (41.2) принимает вид гиперболического уравнения

$$E^{-}u = u_{xx} - u_{yy} - \frac{2q}{y} u_x - \frac{2p}{y} u_y = 0. \tag{41.25}$$

Для последнего характерна задача Коши с условиями

$$u(x,\ 0) = \tau(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \lim_{y \to -0} (-y)^{2p} u_y(x,\ y) = \nu(x),\ 0 < x < 1, \tag{41.26}$$

рассматриваемая в характеристическом треугольнике $D^{-} = \{0 < -y < x < 1 + y\}$. Решение этой задачи с точностью до коэффициентов можно получить из формулы (41.9) и других формул для общего решения из предыдущего пункта, если в них положить

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y,\ \beta^* = p + q,\ \beta = p - q. \tag{41.27}$$

Таким образом, устанавливается следующая

Теорема 41.3. *Задача Коши (41.26) для уравнения (41.25) в области D^{-} при условиях $\tau \in C^2([0,\ 1])$, $\nu \in C^2((0,\ 1))$, $0 < \beta^* < 1$, $0 < \beta < 1$, $\beta + \beta^* < 1$ корректна, а ее решение $u \in C^2(D^{-})$ и выражается формулой*

$$u(x,\ y) = -A_1(-y)^{1-2p} \int_0^1 \nu(x + y(1 - 2t))(1 - t)^{-\beta^*} t^{-\beta} dt +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{B}(\beta,\ \beta^*)} \int_0^1 \tau(x + y(1 - 2t))(1 - t)^{\beta - 1} t^{\beta^* - 1}\, dt, \tag{41.28}$$

где $A_1 = [(1 - 2p)\,\mathrm{B}(1 - \beta^*,\ 1 - \beta)]^{-1}$.

Следствие. *Если на характеристике $y = -x$ выполняется условие*

$$u(x,\ -x) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \tag{41.29}$$

имеет место следующее представление функции $\nu(x)$ через $\tau(x)$ и $\psi(x)$:

$$\nu(x) = -\frac{2^{1-2p}\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2p)} x^{\beta} \frac{d}{dx} I_{0+}^{\beta^*} \psi\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2^{1-2p}\Gamma(2p)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2p)\Gamma(\beta^*)} \frac{d}{dx} I_{0+}^{2p} \tau(x), \tag{41.30}$$

где I_{0+}^{α} — оператор дробного интегрирования (2.17).

Доказательство. Подставив в (41.28) $y = -x$ и воспользовавшись (41.29), после замен $2xt = \eta$ и $2x$ на x получим следующее равенство:

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = -A_1 2^{2p-1}\, \Gamma(1 - \beta^*)\, I_{0+}^{1-\beta^*} x^{-\beta} \nu(x) +$$

$$+ \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(\beta^*)} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} x^{\beta^* - 1} \tau(x).$$

Применив к нему оператор $I_{0+}^{\beta^*-1}$, придем к соотношению

$$\nu(x) = -\frac{2^{1-2p} x^{\beta}}{A_1 \Gamma(1-\beta^*)} I_{0+}^{\beta^*-1} \psi\left(\frac{x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2^{1-2p}\Gamma(2p)}{A_1 \Gamma(\beta^*)\Gamma(1-\beta^*)} x^{\beta} I_{0+}^{\beta^*-1} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} \tau(x) x^{\beta^*-1}.$$

Воспользовавшись теперь формулой (10.12), вычислим композицию из последнего слагаемого:

$$I_{0+}^{\beta^*-1} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} x^{\beta^*-1}\tau(x) = I_{0+}^{-\beta}(I_{0+}^{2p-1} x^{1-2p} I_{0+}^{\beta} x^{-\beta}) x^{2p-1}\tau(x) =$$

$$= I_{0+}^{-\beta}(I_{0+}^{\beta} x^{-\beta} I_{0+}^{2p-1} x^{1-2p}) x^{2p-1}\tau(x) = x^{-\beta} \frac{d}{dx} I_{0+}^{2p}\tau(x),$$

что в итоге приводит к формуле (41.30).

Замечание 41.2. Соотношение (41.30) сохраняет силу и при менее ограничительных, чем в теореме 41.3, условиях $0<\beta+\beta^*<1$, $\beta^*>0$, $\beta<1$.

Замечание 41.3. Соотношение (41.30) широко используется при исследовании уравнений смешанного типа, см., например, книги Ф. Трикоми [1], А. В. Бицадзе [1—3], М. М. Смирнова [2, 7]. Однако обычно оно доказывается более сложным способом, не использующим формулу (10.12).

Во многих случаях, особенно при решении краевых задач для уравнений смешанного типа, условия τ, ν, $u\in C^2$ из теоремы 41.3 приводят к труднопроверяемым ограничениям на заданные функции. Эта проблема решается путем рассмотрения формальных не достаточно гладких решений вида (41.28), которые могут быть приближены решениями из класса C^2. Рассмотрим теперь класс R_1 таких обобщенных решений задачи Коши, введенный К. И. Бабенко [1, 2].

Определение 41.1. *Функцию (41.28) с $\beta=\beta^*=p$ будем называть обобщенным решением уравнения (41.25) с $q=0$ из класса R_1 в области $D^-=\{0<-y<x<1+y\}$, если $0<p<1$ и*

$$\tau\in H^{\alpha_1}([0,\ 1)),\ \alpha_1>1-p;\quad \nu\in H^{\alpha_2}([0,\ 1)),\ \alpha_2>p, \tag{41.31}$$

где $H^{\lambda}([0,\ 1))$ — класс гельдеровских функций, см. § 1, п. 1°.

Справедлива следующая

Теорема 41.4. *Пусть обобщенное решение (41.28) с $q=0$ задачи Коши (41.25), (41.26) принадлежит классу R_1. Тогда u_x, $u_y\in C(D^-)$, функция u_y удовлетворяет второму условию (41.26) и существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n\in C^2(D^-)$, классических решений уравнения (41.25) такая, что в любом замкнутом треугольнике $D_\varepsilon^-=\{\varepsilon<-y<x<1+y\}$ выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=u$.*

Доказательство. Перейдем в (41.28) к координатам (41.27) и воспользуемся леммой 13.2, из которой следует, что в силу (41.31) имеют место представления

$$\tau(\theta)=\tau(0)+\int_0^\theta(\theta-s)^{-p+\varepsilon}\varphi(s)\,ds,\quad \nu(\theta)=\nu(0)+\int_0^\theta(\theta-s)^{p-1+\varepsilon}\psi(s)\,ds, \tag{41.32}$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мала, а функции φ, $\psi\in C([0,\ 1))$. Подставив эти значения в формулу (41.28) при $\beta^*=\beta=p$ и поменяв порядок интегрирования по области $0<s<\theta$, $\xi<\theta<\eta$, получим

$$u(\xi,\ \eta)=-A_1 2^{2p-1}(\eta-\xi)^{1-2p}\mathrm{B}(1-p,\ 1-p)\,\nu(0)+\tau(0)+$$
$$+\left(\int_0^\xi ds\int_\xi^\eta d\theta+\int_\xi^\eta ds\int_s^\eta d\theta\right)[-A_1 2^{2p-1}\psi(s)(\eta-\theta)^{-p}(\theta-\xi)^{-p}(\theta-s)^{p-1+\varepsilon}+$$
$$+(\mathrm{B}(p,\ p))^{-1}(\eta-\xi)^{1-2p}\varphi(s)(\eta-\theta)^{p-1}(\theta-\xi)^{p-1}(\theta-s)^{-p+\varepsilon}]. \tag{41.33}$$

Воспользовавшись теперь заменами $\theta=(\eta-\xi)t+\xi$ или $\theta=(s-\eta)t+\eta$, вычислим внутренние интегралы по формуле (1.73). Тогда

$$u(\xi,\ \eta)=-A_1 2^{2p-1}\mathrm{B}(1-p,\ 1-p)(\eta-\xi)^{1-2p}\nu(0)+\tau(0)-$$
$$-2^{2p-1}A_1\mathrm{B}(1-p,\ p+\varepsilon)(\eta-\xi)^{-p}\int_\xi^\eta\psi(s)(\eta-s)^{\varepsilon}{}_2F_1\left(p,\ 1-p;\ 1+\varepsilon;\right.$$

$$\left.\frac{\eta-s}{\eta-\xi}\right)ds+\frac{B(p,\ 1-p+\varepsilon)}{B(p,\ p)}(\eta-\xi)^{-p}\int\limits_{\xi}^{\eta}\varphi(s)(\eta-s)^{\varepsilon}{}_2F_1\left(p,\ 1-p;\ 1+\varepsilon;\right.$$

$$\left.\frac{\eta-s}{\eta-\xi}\right)ds+\int\limits_{0}^{\xi}\varphi(s)(\eta-s)^{-p+\varepsilon}{}_2F_1\left(p,\ p-\varepsilon;\ 2p;\ \frac{\eta-\xi}{\eta-s}\right)ds-$$

$$-2^{2p-1}A_1B(1-p,\ 1-p)(\eta-\xi)^{1-2p}\int\limits_{0}^{\xi}\psi(s)(\xi-s)^{p-1+\varepsilon}{}_2F_1\left(1-p,\right.$$

$$\left.1-p-\varepsilon;\ 2-2p;\ \frac{\xi-\eta}{\xi-s}\right)ds. \tag{41.34}$$

Все указанные интегралы являются собственными, имеющими непрерывные в области $\mathfrak{D}$ производные по параметрам ξ и η. Производная по ξ последнего интеграла также существует, так как по формуле (10.13) соответствующая функция $(\xi-s)^{p-1+\varepsilon}{}_2F_1\left(\frac{\xi-\eta}{\xi-s}\right)=O(1)$ при $s\to\xi$. Производные всех слагаемых из (41.34), кроме первого и последнего, при $\eta\to\xi$ имеют порядок $O[(\eta-\xi)^{-p}]$. Применив к равенству (41.34) оператор $(\eta-\xi)^{2p}\times\times\left(\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$, из первого и последнего слагаемых в пределе найдем значение

$$\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2p}(u_\eta-u_\xi)=-A_1 2^{2p}B(1-p,\ 1-p)(1-2p)\times$$

$$\times\left[\nu(0)+\int\limits_{0}^{\xi}\psi(s)(\xi-s)^{p-1+\varepsilon}ds\right]=-2^{2p}\nu(\xi),$$

причем этот переход осуществляется равномерно при $0\leqslant\xi\leqslant\theta<1$. Отсюда после замен (41.27) получается второе из равенств (41.26).

Поскольку $\varphi,\ \psi\in C([0,\ 1))$, то по теореме Вейерштрасса существуют последовательности функций $\{\varphi_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\psi_n(s)\}_{n=1}^{\infty}\in C^2([0,\ 1))$, которые равномерно на любом отрезке $[0,\ \theta_0]$, $\theta_0<1$, стремятся к φ и ψ соответственно. Формулы (41.32) ставят им в соответствие функции τ_n, ν_n, $n=1,\ 2,\ \ldots$, которые также принадлежат $C^2([0,\ 1))$. Но тогда и соответствующие решения (41.28), обозначаемые через u_n, также принадлежат $C^2(D^-)$, причем $u_n\to u$. Теорема доказана.

3°. Полуоднородная задача Коши в многомерном полупространстве. Рассмотрим в полупространстве $R_+^{n+1}=\{(x,\ y):x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in R^n,\ y>0\}$ задачу Коши для гиперболического уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{2p}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{41.35}$$

с полуоднородными условиями

$$u(x,\ 0)=\tau(x),\quad u_y(x,\ 0)=0, \tag{41.36}$$

где $\tau(x)\in C^2(R^n)$ — заданная функция.

Известно, см., например, книгу Р. Куранта, Д. Гильберта [1, с. 466], что при $2p=n-1$ решение задачи (41.35), (41.36) единственно и выражается через *сферическое среднее* $M_n(x,\ y;\ \tau)$ от функции τ в пространстве R^n по формуле

$$u(x,\ y)=M_n(x,\ y;\ \tau)=\frac{1}{|S_{n-1}|}\int\limits_{S_{n-1}}\tau(x+yt)\,d\sigma, \tag{41.37}$$

где $t_* = (t_1, \ldots, t_n)$ принадлежит единичной сфере S_{n-1}, т. е. $|t| = 1$, $d\sigma$ — элемент площади поверхности этой сферы, а $|S_{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь ее поверхности (ее величина находится из равенства (25.9) при $f \equiv 1$). В частности, из равенства (41.37) следуют формулы

$$M_n(x, 0; \tau) = \tau(x), \tag{41.38}$$

$$M_1(x, y; \tau) = 2^{-1}[\tau(x-y) + \tau(x+y)]. \tag{41.39}$$

Применив к решению (41.37) по переменной y оператор Эрдейи — Кобера $I_{\eta,\alpha}$ (18.8), обозначаемый ниже через $I^{(y)}_{\eta,\alpha}$, и подобрав его параметры так, чтобы оператор (41.35) с $2p = n - 1$ преобразовывался бы в оператор (41.35) с произвольным $2p$ по лемме 40.2 в случае $\lambda = 0$, построим функцию

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(p + 1/2)}{\Gamma(n/2)} I^{(y)}_{n/2-1,\, p+(1-n)/2} M_n(x, y; \tau). \tag{41.40}$$

Эта функция в силу леммы 40.2 будет решением уравнения (41.35), а постоянный коэффициент в ней выбран так, чтобы ввиду равенства (41.38) выполнялись условия (41.36).

Отметим, что и в случае $p < (n-1)/2$ функция (41.40) остается решением задачи Коши (41.35), (41.36), если пользоваться доопределением оператора Эрдейи—Кобера $I_{\eta,\alpha}$ на значения $\alpha < 0$, рассмотренным в § 18, п. 1°. Однако, как показано в работе D. W. Bresters [2], решение (41.40) в случае $p < 0$ не является единственным.

Формулу (41.40) с помощью равенства (23.1) можно представить в виде

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(n/2)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma((n-s)/2)}{\Gamma((1-s)/2+p)} \mathfrak{M}^{(y)} \{M_n(x, y; \tau); s\}\, y^{-s} ds,$$

$$0 < \gamma < 1, \tag{41.41}$$

где $\mathfrak{M}^{(y)}$ — оператор преобразования Меллина (1.112), действующий по переменной y. Такая форма решения задачи Коши допускается при $2p \neq -1, -3, \ldots$ и оказывается полезной при изучении асимптотики этого решения.

В качестве примера такого исследования укажем асимптотическое разложение решения $u(x, y)$ при $y \to \infty$ в случае, когда $n = 1$, $p > 0$, а $\tau(t)$ имеет простейшую асимптотику вида

$$\tau(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k}, \quad t \to \infty. \tag{41.42}$$

Тогда, как указано в работе N. Berger, R. Handelsman [1]:

$$M_1(x, y; \tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)\, y^{-2k}, \tag{41.43}$$

где $c_k(x)$ — многочлены вида

$$c_0(x) = a_0, \quad c_k(x) = \sum_{j=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{j} a_{2k-j} (-x)^j, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда с помощью разложения (17.18) находим искомую асимптотику решения уравнения (41.25) при $q = 0$:

$$u(x,\ y) \sim \frac{\Gamma(p+1/2)}{\sqrt{\pi}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k\mathfrak{M}^{(y)}\{M_2(x,\ y;\ \tau);\ 2k+1\}}{k!\,\Gamma(p-k)\,y^{2k+1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2-k)}{\Gamma(p+1/2-k)}\right]c_k(x)\,y^{-2k}. \qquad (41.44)$$

В заключение пункта отметим, что лемма 40.2 в случае произвольного λ дает возможность на основе решения (41.37) построить решения задачи Коши для произвольных однородных линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. В самом деле, указанные уравнения заменами переменных могут быть сведены к уравнению вида

$$\sum_{k=1}^{n} v_{x_k x_k} - v_{yy} - \lambda^2 v = 0. \qquad (41.45)$$

В силу леммы 40.2 решение $v(x,\ y)$ этого уравнения можно преобразовать в решение $u(x,\ y)$ уравнения (41.35) с $2p=n-1$ по формуле

$$u(x,\ y) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}}\,J_{i\lambda}^{(y)}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2}\right)v(x,\ y), \qquad (41.46)$$

где $J_{\lambda}^{(y)}(\eta,\ \alpha)$ — оператор Эрдейи — Кобера $J_{\lambda}(\eta,\ \alpha)$ (37.45), действующий по переменной y. Тогда условия (41.36) сохранят силу и для решения $v(x,\ y)$, а обратное преобразование осуществляется формулой (37.57):

$$v(x,\ y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n/2)}\,J_{\lambda}^{(y)}\left(\frac{n}{2}-1,\ \frac{1-n}{2}\right)M_n(x,\ y;\ \tau). \qquad (41.47)$$

Если еще на основе решения $v(x,\ y)$ построить функцию

$$\tilde{v}(x,\ y) = \int_0^y v(x,\ t)\,dt, \qquad (41.48)$$

то она также будет решением уравнения (41.45), удовлетворяющим симметричным с (41.36) полуоднородным условиям

$$\tilde{v}(x,\ 0) = 0,\quad \tilde{v}_y(x,\ 0) = \tau_1(x). \qquad (41.49)$$

Заменив в этом решении $\tau(x)$ на $\nu(x)$ и сложив его с функцией (41.47), придем к решению задачи Коши общего вида (41.26) с $p=0$ для уравнения (41.45).

4°. **Весовые задачи Дирихле и Неймана в полуплоскости.** В настоящем пункте с помощью формул (41.18) — (41.20) осуществляются решения задач Дирихле и Неймана в полуплоскости $y>0$ для уравнения (41.2) при всех значениях параметров p и q. Имеют место следующие аналоги теорем 40.7 и 40.8.

Теорема 41.5. *Пусть τ является непрерывной ограниченной на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией. Тогда задача Дирихле в полуплоскости $y>0$ о нахождении решения $u(x,\ y)\in C^2(y>0)$ уравнения (41.2) в классе ограниченных на бесконечности функций по условию (40.32) корректна для любого действительного q лишь в случае $p<1/2$. Ее решение выражается формулой (41.18) с коэффициентом*

$$l_1 = \frac{(1-2p)\,\mathrm{B}(1-\beta,\ 1-\bar{\beta})}{2^{2p}\pi e^{q\pi}}. \qquad (41.50)$$

Теорема 41.6. *Пусть ν является непрерывной и абсолютно интегрируемой на оси $(-\infty,\ \infty)$ функцией, причем если $p\leqslant 0$, то еще $|\nu(t)|<$*

$< C|t|^{2p-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $|t| \to \infty$, C — const. *Пусть также выполняется необходимое условие (40.49). Тогда весовая задача Неймана в полуплоскости* $y > 0$ *об отыскании решения* $u \in C^2(y > 0)$ *уравнения (41.2), исчезающего на бесконечности и удовлетворяющего краевому условию (40.45) при* $-\infty < x < \infty$, *является корректной лишь в трех случаях: 1)* $p > q$, q *произвольное, 2)* $-1/2 < p < 0$, $q = 0$, *3)* $p = q = 0$. *В случаях 1) и 2) ее решение имеет вид (41.19), где*

$$l_2 = -2^{2p-2}\pi^{-1}e^{-q\pi}\mathrm{B}(\beta, \bar{\beta}), \tag{41.51}$$

а при $p = q = 0$ *выражается формулой (40.50), непрерывно связанной с (41.19), (41.51) лишь при* $q = 0$, $p \to 0$. *Эти решения содержат абсолютно и равномерно сходящиеся (по множествам* $\{y \geqslant 0,\ |x| < R\}$*) интегралы и исчезают на бесконечности порядка* $u = O(\rho^{-2p-1})$, *причем* u_x, $u_y = O(\rho^{-2p-2})$ *при* $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$.

Теорема 41.7. *Пусть* $p = 1/2$, *а* τ *является непрерывной на оси функцией, причем* $|\tau(t)| < C|t|^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $|t| \to \infty$, C — const. *Тогда весовые задачи Дирихле и Неймана в полуплоскости* $y > 0$ *о нахождении решения* $u(x, y) \in C^2(y > 0)$ *уравнения (41.2), исчезающего на бесконечности и удовлетворяющего соответственно условиям*

$$\lim_{y \to +0} \ln^{-1} y\, u(x, y) = \lim_{y \to +0} y\, u_y(x, y) = \tau(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{41.52}$$

разрешимы формулой (41.20), где ψ *имеет вид (41.17) и*

$$l_3^{-1} = -(1 + e^{2q\pi})(C_1 - AC_2), \quad A = \ln 4 + 2C + \psi(1/2 - iq) + \psi(1/2 + iq) \tag{41.53}$$

или же эквивалентной формулой

$$u(x, y) = \frac{e^{-q\pi}}{2\operatorname{ch} q\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(t)\, e^{2q\Phi}}{\sqrt{(t - x)^2 + y^2}} \ln \frac{e^{AC-1} y^C}{((x - t)^2 + y^2)^C}\, dt, \tag{41.54}$$

где C, C_1, C_2 — *произвольные постоянные, а* $\psi(z)$ — *функция (1.67).*

Замечание 41.4. Если в формуле (41.19), а в (41.18) после дифференцирования по y перейти к пределу при $y \to +0$, $p < 1/2$ с условиями (40.32), (40.45), совершив затем замены

$$c_1 = \operatorname{ch} q\pi, \quad c_2 = -\operatorname{sh} q\pi, \quad \alpha = 1 - 2p, \quad f(x) = \tau(x), \quad \varphi(t) = \Gamma(\alpha)\, l_2 e^{q\pi} \nu(t),$$

то получатся равенства (12.11) и (30.78), отражающие связь между прямым и обратным преобразованиями Феллера.

При остальных значениях параметров p и q являются разрешимыми следующие краевые задачи.

А. Если $p > 1/2$, а q произвольно, то весовая задача Дирихле (40.51), $-\infty < x < \infty$, разрешима формулами (41.19), (41.51).

Б. Если $p = 0$, $q \neq 0$, то весовая задача Неймана

$$\lim_{y \to +0} \ln^{-1} y\, u_y(x, y) = \nu(x) \tag{41.55}$$

разрешима формулой (41.19) при $p = 0$, $l_2 = [4qe^{q\pi}\operatorname{sh} q\pi]^{-1}$.

В. Если $p < 0$, $q \neq 0$, то задача Неймана

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{41.56}$$

в классе ограниченных на бесконечности функций разрешима формулой (41.18), где следует положить $\tau(t) = -pq^{-1} \int_{-\infty}^{t} \nu(\theta)\, d\theta + C$, C — const, причем $C = 0$, если u на бесконечности исчезает.

p	$<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<p<0$	0	<0	$0<p<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$>\frac{1}{2}$
q	0	0	0	0	$\neq 0$	$\forall$	$\forall$	$\forall$
$u=0$	1	1	1	1	1	1	$\ln y$	y^{1-2p}
$u_y=0$	y	$y\ln y$	y^{-2p}	1	1	y^{-2p}	y^{-1}	y^{-2p}

Г. Если $q=0$, $p=-1/2$, то весовая задача Неймана

$$\lim_{y\to+0}(y\ln y)^{-1}u_y(x,\ y)=\nu(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{41.57}$$

разрешима формулой (41.19) при $q=0$, $l_2=-1/2$.

Д. Если $q=0$, $p<-1/2$, то весовая задача Неймана

$$\lim_{y\to+0}y^{-1}u_y(x,\ y)=\nu(x),\quad -\infty<x<\infty, \tag{41.58}$$

при условиях (40.49) и $|\nu(t)|<C|t|^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $|t|\to\infty$, в классе исчезающих на бесконечности вместе с производными первого порядка функций единственным образом разрешима формулой (41.18), где следует положить $q=0$ и $\tau(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}(t-\theta)\nu(\theta)\,d\theta$, а $l_1=\dfrac{2\Gamma(1-p)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-1/2-p)}$.

Для достижения единственности решений всех указанных задач на искомые решения следует накладывать дополнительные ограничения, устраняющие особые решения уравнения (41.2) вида $y^{1-2p}r_1^{2p-2}e^{2q\psi}$, y^{1-2p}, $r_1^{-2p}e^{2q\psi}$, 1 (и $\ln y$, $r_1^{-1}\ln(yr_1^{-2})e^{2q\psi}$ при $p=1/2$).

В приведенной здесь табл. 41.1 отражается зависимость порядков решения u уравнения (41.2) и его производной u_y при $y\to 0$ от величин параметров p и q.

Из таблицы видно, какие веса соответствуют корректным задачам Неймана и Дирихле с данными на особой линии $y=0$.

§ 42. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Уравнения, в которые неизвестная функция $y(x)$ входит под знаком производной дробного порядка, т. е. уравнения типа

$$F(x,\ y(x),\ \mathcal{D}_{a_1}^{\alpha_1}\omega_1(x)y(x),\ \mathcal{D}_{a_2}^{\alpha_2}\omega_2(x)y(x),\ \ldots,\ \mathcal{D}_{a_n}^{\alpha_n}\omega_n(x)\ y(x))=g(x), \tag{42.1}$$

где $\mathcal{D}_{a_j}^{\alpha_j}=\mathcal{D}_{a_j+}^{\alpha_j}$ или $\mathcal{D}_{a_j-}^{\alpha_j}$, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями дробного порядка*. По аналогии с классической теорией дифференциальных уравнений среди дифференциальных уравнений дробного порядка выделяют линейные однородные и неоднородные уравнения с постоянными и переменными коэффициентами. Дифференциальные уравнения дробного порядка изучаются как в пространствах регулярных функций, т. е. функций, суммируемых с некоторой степенью, непрерывных и достаточное число раз дифференцируемых в классическом смысле, так и в различных пространствах обобщенных функций.

В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши и Дирихле для дифференциальных уравнений дробного порядка. Так, если требуется найти решение $y(x)$ уравнения (42.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathcal{D}_{b+}^{\beta_1} y(x)|_{x=x_0} = b_1, \quad \mathcal{D}_{b+}^{\beta_2} y(x)|_{x=x_0} = b_2, \quad \dots,$$

$$\mathcal{D}_{b+}^{\beta_m} y(x)|_{x=x_0} = b_m, \quad x_0, \ b, \ b_1, \ \dots, \ b_m, \ \beta_1, \ \dots, \ \beta_m - \text{const},$$

то будем говорить, что разыскивается *решение задачи типа Коши* для уравнения (42.1). Если же значения искомой функции или значения ее производных целого или дробного порядка заданы на концах некоторого отрезка $[x_0, x_1]$, будем говорить, что для уравнения (42.1) поставлена краевая задача или *задача типа Дирихле*.

В последующих пунктах приведем постановки некоторых конкретных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, изучим вопросы разрешимости этих задач в различных классах функций, а также рассмотрим приложения теории дробного дифференцирования и теории дифференциальных уравнений дробного порядка к интегрированию некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка.

1°. Задачи типа Коши для дифференциальных уравнений и систем дробного порядка общего вида. Пусть требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x, y), \quad n-1 < \alpha \leqslant n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{42.2}$$

$n = -[-\alpha]$ $\left(\text{здесь и ниже} \dfrac{d^\alpha}{dx^\alpha} = \mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\right)$ при начальных условиях

$$\left.\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y(x)\right|_{x=+0} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{42.3}$$

где $f(x, y)$, α, $b_1, \dots, b_n$ — заданные функция и постоянные величины.

Рассмотрим ряд теорем о существовании и единственности решения поставленной задачи.

Обозначим через R_n следующее множество точек (x, y) из области D, лежащей в $R \times R$:

$$R_n = \left\{(x, y) \in D : 0 < x \leqslant h, \quad \left|x^{n-\alpha} y(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)}\right| \leqslant a\right\},$$

$$a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)}, \tag{42.4}$$

где a, h, b_0 — некоторые постоянные.

Теорема 42.1. *Пусть $f(x, y)$ — вещественнозначная, непрерывная в области D функция, удовлетворяющая по y условию Липшица*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant A|y_1 - y_2|$$

и ограничению $\sup\limits_{(x,y)\in D} |f(x, y)| = b_0 < \infty$. Тогда решение задачи Коши (42.2), (42.3) для $n = 1$ в области $R_1 \subset D$ (см. (42.4) при $n = 1$) существует, непрерывно и единственно.

Теорема 42.2. *Пусть $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 42.1. Тогда решение задачи Коши (42.2), (42.3) для $n = 1, 2, \dots$ в области $R_n \subset D$ существует, непрерывно и единственно.*

Теорема 42.3. *Пусть $f_k(x, y_1, \ldots, y_m)$, $k=1, 2, \ldots, m$, вещественнозначные непрерывные в области $D_m \subset R\times R^m$ функции, удовлетворяющие условиям*

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_m) - f_k(x, z_1, \ldots, z_m)| \leqslant A \sum_{i=1}^{m} |y_i - z_i|, \; k=1, 2, \ldots, m,$$

и $\sup\limits_{\substack{(x, y_1, \ldots, y_m)\in D_m \\ k=1, 2, \ldots, m}} f_k(x, y_1, \ldots, y_m) = M < \infty$. *Тогда решение задачи Коши*

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y_k(x) = f_k(x, y_1, \ldots, y_m),$$

$$\left.\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y_k(x)\right|_{x=+0} = b_k, \; k=1, 2, \ldots, m, \; 0<\alpha\leqslant 1,$$

в области

$$\tilde{R}_1 = \left\{(x, y_1, \ldots, y_m)\in D_m : 0<x\leqslant h, \; \left|x^{1-\alpha}y_k(x) - \frac{b_k}{\Gamma(\alpha)}\right| \leqslant a, \right.$$

$$\left. k=1, 2, \ldots, m\right\},$$

где $a > Mh/\Gamma(\alpha+1)$, существует, непрерывно и единственно.

Теорема 42.4. *Пусть функция $f(x, y_1, \ldots, y_m)$ удовлетворяет условиям теоремы 42.3. Тогда решение задачи Коши*

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y_k(x) = f_k(x, y_1, \ldots, y_m),$$

$$\left.\frac{d^{\alpha-j}}{dx^{\alpha-j}} y_k(x)\right|_{x=+0} = b_{k,j}, \; k=1, 2, \ldots, m, \; j=1, 2, \ldots, n,$$

$$n-1<\alpha\leqslant n,$$

в области

$$\tilde{R}_n = \left\{(x, y_1, \ldots, y_m)\in D_m : 0<x\leqslant h, \; \left|x^{n-\alpha}y_k(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{b_{k,n}}{\Gamma(\alpha-n+1)}\right| \leqslant a, \; k=1, 2, \ldots, m\right\},$$

где $a > \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{h^{n-j} b_{k,j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}$, $b_{k,0} = M$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *существует, непрерывно и единственно.*

Теорема 42.5. *Пусть $p_k(x)$, $k=0, 1, \ldots, m$, и $f(x)$ — непрерывные в интервале $(0, h)$ функции. Тогда задача Коши*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x) \frac{d^{(m-k)\alpha}}{dx^{(m-k)\alpha}} y(x) = f(x), \; 0<\alpha\leqslant 1,$$

$$\left.\frac{d^{k\alpha-1}}{dx^{k\alpha-1}} y(x)\right|_{x=+0} = b_k, \; k=1, 2, \ldots, m,$$

имеет единственное непрерывное на $(0, h)$ решение.

Теорема 42.6. *При условиях теоремы 42.5 задача Коши*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x) \frac{d^{(m-k)\alpha}}{dx^{(m-k)\alpha}} y(x) = f(x), \quad n-1<\alpha\leqslant n,$$

$$\left.\frac{d^{k\alpha-j}}{dx^{k\alpha-j}} y(x)\right|_{x=+0} = b_{k,j}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеет единственное непрерывное на $(0, h)$ *решение.*

Доказательства теорем 42.1—42.6 ненамного отличаются от доказательств соответствующих теорем для дифференциальных уравнений целого порядка. Поэтому полностью докажем лишь теорему 42.1.

Интегрируя уравнение (42.2) $\left(\text{здесь } \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} = I_{0+}^{\alpha}\right)$, имеем

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x,\ y),$$

откуда, согласно свойству (2.61) и условию (42.3), получим

$$y(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t,\ y)\, dt. \tag{42.5}$$

Итак, задача (42.2), (42.3) приводится к уравнению (42.5). Покажем теперь, наоборот, что если непрерывная функция $f(x,\ y)$ удовлетворяет (42.5), то она удовлетворяет и (42.2), (42.3). Действительно, применяя к последнему равенству оператор $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$, имеем

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x,\ y),$$

откуда $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = f(x,\ y)$.

Условие (42.3) при $n=k=1$ получается без труда, если к (42.5) применить оператор $\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}$:

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} f(x,\ y) =$$

$$= b_1 + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x f(t,\ y(t))\, dt,$$

а затем положить $x=0$.

Из сказанного следует, что уравнение (42.5) в указанном смысле равносильно уравнению (42.2) с начальным условием (42.3).

Дальнейшее доказательство будем осуществлять методом последовательных приближений (также здесь допустимо использование теоремы о сжатых отображениях, см. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин [1, с. 73]). Пусть

$$y_0(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y_n(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t,\ y_{n-1}(t))dt, \quad n=1,\ 2,\ \ldots \tag{42.6}$$

Прежде всего позаботимся, чтобы точки $(x,\ y_n(x))$ оставались в R_1 при $0<x\leqslant h$. Из условия $\sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,\ y) = b_0$ следует оценка

$$\left|x^{1-\alpha}y_n(x)-\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\right|=\left|\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,\ y_{n-1}(t))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{b_0x}{\Gamma(\alpha+1)}\leqslant\frac{b_0h}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (42.7)$$

Потребовав, чтобы $b_0h/\Gamma(\alpha+1)<a$, получим, что $(x,\ y_n(x))\in R_1$ при $0<x\leqslant h$.

Теперь оценим разность $y_n(x)-y_{n-1}(x)$. Согласно (42.7), имеем

$$|y_1(x)-y_0(x)|\leqslant b_0x^\alpha/\Gamma(\alpha+1)\leqslant b_0h^\alpha/\Gamma(\alpha+1).$$

Из (42.6) при $n=1$ с помощью условия Липшица и предыдущей оценки находим

$$|y_2(x)-y_1(x)|=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,[f(t,\ y_1(t))-f(t,\ y_0(t))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}|y_1(t)-y_0(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\frac{b_0t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,dt\leqslant\frac{Ab_0h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}.$$

Повторив многократно такие же оценки, окончательно приходим к равенству

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant A^{n-1}b_0h^{n\alpha}/\Gamma(n\alpha+1).$$

Отсюда следует, что последовательность $y_n(x)$ равномерно относительно x $(0<x\leqslant h)$ стремится к некоторой предельной функции $y(x)$. Эта функция при $0<x\leqslant h$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|x^{1-\alpha}y(x)-b_1/\Gamma(\alpha)|\leqslant a,$$

которое следует в пределе при $n\to\infty$ из неравенства (42.7). Совершив теперь в (42.6) предельный переход при $n\to\infty$ в силу непрерывности $f(x,\ y)$, легко получим равенство (42.5).

Докажем, что при достаточно малых h решение $y(x)$ единственно. Пусть $Ah^\alpha/\Gamma(\alpha+1)<1$, и предположим, что имеются два решения $y(x)$ и $Y(x)$ рассматриваемой задачи. Подставив их в (42.5), после вычитания получим

$$|y(x)-Y(x)|=\left|\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,[f(t,\ y(t))-f(t,\ Y(t))]\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}|y(t)-Y(t)|\,dt.$$

Допустим, что разность $|y(x)-Y(x)|$ на промежутке $0<x\leqslant h$ допускает наибольшее значение δ при некотором $x=\xi$. Тогда при $x=\xi$ из последнего неравенства будем иметь $\delta\leqslant A\Gamma^{-1}(\alpha)\,\delta h^\alpha\alpha^{-1}$ или $1\leqslant Ah^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$, что противоречит предположению. Этим и завершается доказательство теоремы 42.1.

Теорема 42.2 доказывается аналогично теореме 42.1, только в этом случае полагают

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)}.$$

Теоремы 42.3 и 42.4 являются распространением предыдущих теорем на систему дифференциальных уравнений дробного порядка. А теоремы 42.5 и 42.6 являются частными случаями теорем 42.3 и 42.4.

В заключение пункта рассмотрим два примера на использование теорем 42.1 и 42.2.

Пример 42.1. Решим следующую задачу Коши:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \lambda y(x), \quad n-1 < \alpha \leqslant n,$$

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y(x) \Big|_{x=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При решении будем пользоваться доказательством теоремы 42.1. Имеем

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha - k + 1)},$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_{m-1}(t)\, dt.$$

Отсюда при $m = 1, 2, \ldots$ находим

$$y_1(x) = y_0(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{x^{2\alpha-k}}{\Gamma(2\alpha - k + 1)},$$

$$y_2(x) = y_1(x) + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{x^{3\alpha-k}}{\Gamma(3\alpha - k + 1)}, \ \ldots,$$

что в общем случае приводит к формуле

$$y_m(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{m+1} \lambda^{j-1} \frac{x^{\alpha j-k}}{\Gamma(\alpha j - k + 1)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Отсюда в пределе при $m \to \infty$ имеем следующее представление искомого решения:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{x^{\alpha j-k}}{\Gamma(\alpha j - k + 1)} = \sum_{k=1}^{n} b_k x^{\alpha-k} E_{\alpha, 1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha),$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг-Леффлера (1.91). В частности, если $\alpha = n = 1$, то

$$y(x) = b_1 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{x^{j-1}}{\Gamma(j)} = b_1 e^{\lambda x}$$

и происходит «стыковка» известного решения задачи Коши для уравнения первого порядка и рассматриваемой задачи для уравнения порядка α.

Пример 42.2. Построим теперь решение задачи типа Коши для неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) - \lambda y(x) = h(x), \quad n-1 < \alpha \leqslant n,$$

с условиями

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y(x)\Big|_{x=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично предыдущему примеру имеем

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_{m-1}(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} h(t)\,dt,$$

откуда

$$y_m(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{m+1} \lambda^{j-1} \frac{x^{\alpha j-k}}{\Gamma(\alpha j-k+1)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda^{j-1}}{\Gamma(\alpha j)} \int_0^x (x-t)^{\alpha j-1} h(t)\,dt.$$

Далее в пределе при $m \to \infty$ находим искомое решение задачи Коши

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^{\alpha-k} E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha]\, h(t)\,dt.$$

2°. **Задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения дробного порядка.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение дробного порядка вида

$$\mathfrak{D}^{\sigma_n} y(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\, \mathfrak{D}^{\sigma_{n-k-1}} y(x) + p_n(x)\, y(x) = f(x), \tag{42.8}$$

где

$$\mathfrak{D}^{\sigma_k} = \mathcal{D}_{0+}^{\alpha_k-1} \mathcal{D}_{0+}^{\alpha_{k-1}} \ldots \mathcal{D}_{0+}^{\alpha_0}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \mathfrak{D}^{\sigma_0} = \mathcal{D}_{0+}^{\alpha_0-1},$$
$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j - 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 < \alpha_j \leqslant 1, \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{42.9}$$

(очевидно, $\alpha_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_0 = \sigma_0 + 1$), а $p_k(x)$, $f(x)$ — некоторые заданные функции. Требуется найти решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathfrak{D}^{\sigma_k} y(x)|_{x=0} = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{42.10}$$

Изучение этой задачи типа Коши начнем со случая

$$p_k(x) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

т. е. рассмотрим уравнение

$$\mathfrak{D}^{\sigma_n} y(x) = f(x) \tag{42.11}$$

с начальными условиями (42.10). Справедлива следующая

Теорема 42.7. *Пусть функция $f(x) \in L_1(0, a)$ представима в виде*

$$f(x) = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}} \tilde{f}(x), \quad \alpha_n < 1, \tag{42.12}$$

где $\tilde{f}(x) \in L_1(0, a)$. Тогда решение задачи типа Коши (42.11), (42.10) существует, единственно и представимо в виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)} f(t)\,dt.$$

Доказательство. Из формулы (42.9) очевидным образом вытекает, что

$$\mathfrak{D}^{\sigma_k} = \frac{d^{\alpha_k-1}}{dx^{\alpha_k-1}} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}^{\sigma_{k-1}}. \tag{42.13}$$

Следовательно, уравнение (42.11) можно переписать в форме

$$\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}^{\sigma_{n-1}} y(x) = f(x)$$

или

$$\mathfrak{D}^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d^{-\alpha_n}}{dx^{-\alpha_n}} f(x) + b_{n-1}. \tag{42.14}$$

Таким образом, задача (42.11), (42.10) свелась к задаче (42.14) с условиями (42.10), где $k=0, 1, \ldots, n-2$. Снова, применив к уравнению (42.14) формулу (42.13), аналогично предыдущему найдем

$$\mathfrak{D}^{\sigma_{n-2}} y(x) = \frac{d^{-\alpha_{n-1}}}{dx^{-\alpha_{n-1}}} \frac{d^{-\alpha_n}}{dx^{-\alpha_n}} f(x) + \frac{d^{-\alpha_{n-1}}}{dx^{-\alpha_{n-1}}} b_{n-1} + b_{n-2}. \tag{42.15}$$

Теперь задача (42.11), (42.10) свелась к задаче (42.15) с условиями (42.10), где $k=0, 1, \ldots, n-3$. Продолжив этот процесс дальше, получим, что уравнение (42.11) сводится к эквивалентному уравнению

$$y(x) = \mathfrak{D}^{-\sigma_n} f(x) + \mathfrak{D}^{-\sigma_{n-1}} b_{n-1} + \ldots + \mathfrak{D}^{-\sigma_0} b_0,$$

которое после учета формулы

$$\mathfrak{D}^{-\sigma_k} b_k = b_k \frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)}$$

приобретает вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} + \mathfrak{D}^{-\sigma_n} f(x). \tag{42.16}$$

Покажем, что полученная функция $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (42.10). Для этого к равенству (42.16) применим оператор $\mathfrak{D}^{\sigma_0}$:

$$\mathfrak{D}^{\sigma_0} y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{\sigma_k-\sigma_0}}{\Gamma(1+\sigma_k-\sigma_0)} + \mathfrak{D}^{\sigma_0}\mathfrak{D}^{-\sigma_n} f(x).$$

Положив здесь $x=0$, получим условие (42.10) при $k=0$. Подействовав на (42.16) оператором $\mathfrak{D}^{\sigma_1}$ и положив затем $x=0$, придем к условию (42.10) при $k=1$. Продолжив этот процесс дальше, убедимся в выполнении всех оставшихся условий (42.10). Из равенства (42.16) также следует и единственность решения рассматриваемой задачи типа Коши. Теорема доказана.

Перейдем к основной теореме настоящего пункта.

Теорема 42.8. *Пусть функции $p_k(x)$, $k=0, 1, \ldots, n$, на отрезке $[0, a]$ удовлетворяют условию Липшица (т. е. условию Гельдера с показателем $\lambda=1$), а функция $f(x)$ там непрерывна и допускает представление*

$$f(x) = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}} \tilde{f}(x), \quad 0 < \alpha_n < 1, \tag{42.17}$$

где $\tilde{f}(x) \in L_1(0, a)$. Тогда если $\alpha_0 > 1 - \alpha_n$, то задача типа Коши (42.8), (42.10) имеет единственное непрерывное на $[0, a]$ решение.

Доказательство. Положим $\mathfrak{D}^{\sigma_n}y(x) = \Phi(x)$. Тогда (42.8) примет вид интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\Phi(x) = \omega(x) + \int_0^x W(x, t)\Phi(t)\,dt, \tag{42.18}$$

где

$$W(x, t) = -p_n(x)\frac{(x-t)^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k-1}(x)\frac{(x-t)^{\sigma_n-\sigma_k-1}}{\Gamma(\sigma_n-\sigma_k)}, \tag{42.19}$$

$$\omega(x) = f(x) - p_n(x)\sum_{k=0}^{n-1} b_k\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k-1}(x)\sum_{m=k}^{n-1} b_m\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_m-\sigma_k)}. \tag{42.20}$$

Из представления (42.19) видно, что ядро $W(x, t)$ при $t=x$ имеет слабую особенность. Применив к (42.18) метод последовательных приближений, получим, что это уравнение допускает не более одного непрерывного на $[0, a]$ решения $\Phi(x)\in L_1(0, a)$. Отсюда, согласно теореме 42.7, вытекает единственность решения задачи (42.8), (42.10). Доказательство существования решения этой задачи также в силу теоремы 42.7 сводится к доказательству возможности представления

$$\Phi(x) = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\Phi}(x),\ \tilde{\Phi}(x)\in L_1(0, a). \tag{42.21}$$

Действительно, поскольку уравнение (42.18) допускает не более одного решения $\Phi(x) = \mathfrak{D}^{\sigma_n}y(x)$, то, согласно теореме 42.7, осталось установить, что функция

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^x (x-t)^{\sigma_n-1}\Phi(t)\,dt$$

является решением задачи (42.8), (42.10). Таким образом, необходимо проверить выполнение условия (42.21), фигурирующего в теореме 42.7. Займемся этой проверкой.

Приняв во внимание условия $\alpha_0 > 1-\alpha_n$, $\alpha_n > 0$ и неравенства $\sigma_k+\alpha_n \geqslant \sigma_0+\alpha_n = \alpha_0 - 1 + \alpha_n > 0$, $\sigma_m - \sigma_k + \alpha_n > \alpha_n > 0$, выпишем в соответствии с (2.44) формулы

$$\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\frac{x^{\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\alpha_n)},\ k=0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_m-\sigma_k)} = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n)},\ m=k,\ k+1, \ldots, n-1,$$

которые вместе с (42.17) дают возможность равенство (42.20) записать в виде

$$\omega(x) = \frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{f}(x) - p_n(x)\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} b_k\frac{x^{\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\alpha_n)} -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-k-1}(x)\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\sum_{m=k}^{n-1} b_m\frac{x^{\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n-1}}{\Gamma(\sigma_m-\sigma_k+\alpha_n)}. \tag{42.22}$$

Теперь воспользуемся результатом, доказанным в работе М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [6, с. 17], где утверждается, что *для любых* *функций* $g(x)\in L_1(0, a)$ *и* $p_k(x)\in C([0, a])$ *существует единственная функция* $G(x)\in L_1(0, a)$, *удовлетворяющая равенству*

$$p_k(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)=\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}G(x),\quad 0\leqslant\alpha<1 \tag{42.23}$$

(аналогичные утверждения см. также в леммах 3.2 и 10.1).

На основе этого результата соотношение (42.22) можно переписать в виде

$$\omega(x)=\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\omega}(x), \tag{42.24}$$

где $\tilde{\omega}(x)$ — некоторая функция из $L_1(0, a)$. Далее из (42.18) и (42.19) имеем

$$\Phi(x)=\omega(x)-p_n(x)\frac{d^{-\sigma_n}}{dx^{-\sigma_n}}\Phi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-k-1}(x)\frac{d^{\sigma_k-\sigma_n}}{dx^{\sigma_k-\sigma_n}}\Phi(x),$$

откуда, согласно (42.23), получаем

$$\Phi(x)=\omega(x)+\frac{d^{-\varkappa}}{dx^{-\varkappa}}v(x),\quad v(x)\in L_1(0, a), \tag{42.25}$$

где $\varkappa=\min\{\sigma_n, \sigma_n-\sigma_0, \ldots, \sigma_n-\sigma_{n-1}\}=\min\{\sigma_n, \alpha_n\}$.

Таким образом, из (42.24) и (42.25) вытекает, что

$$\Phi(x)=\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\omega}(x)+\frac{d^{-\varkappa}}{dx^{-\varkappa}}v(x).$$

Если теперь $\varkappa\geqslant 1-\alpha_n$, то представление (42.21) доказано. Если же $\varkappa<1-\alpha_n$, то, согласно (42.23), существует такое $p\in\mathbf{N}$, что $(p-1)\varkappa<1-\alpha_n<p\varkappa$ и

$$\Phi(x)=\frac{d^{\alpha_n-1}}{dx^{\alpha_n-1}}\tilde{\omega}_1(x)+\frac{d^{-p\varkappa}}{dx^{-p\varkappa}}\tilde{v}(x),\quad \tilde{v}(x)\in L_1(0, a),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

3°. Задача Дирихле для дифференциального уравнения дробного порядка. На интервале $[0, 1]$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с дробными производными вида

$$Ly\equiv y''(x)+a_0(x)\,y'(x)+\sum_{k=1}^{m}a_k(x)\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}(\omega_k(x)\,y(x))+a_{m+1}(x)\,y(x)=f(x), \tag{42.26}$$

где $0<\alpha_k<1$, а $a_0(x)$, $a_{m+1}(x)$, $a_k(x)$, $\omega_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$, $f(x)$ — непрерывные на $[0, 1]$ функции.

В теории краевых задач для уравнений типа (42.26) важную роль играют следующие две теоремы, первая из которых является аналогом принципа Хопфа, см. книгу А. В. Бицадзе [3, с. 25, 26].

Теорема 42.9. *Пусть неубывающие положительные на* $[0, 1]$ *функции* $\omega_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$, *удовлетворяют там условию Гельдера с показателями* $\varkappa_k>\alpha_k$, $0<\alpha_k<1$, $k=1, 2, \ldots, m$, *и* $a_k(x)\in C[0, 1]$, $a_k(x)\leqslant 0$, $0<x<1$, $k=1, 2, \ldots, m+1$. *Тогда если* $y\in C^2(0, 1)$ — *решение уравнения* $Ly=0$ *(42.26), отличное от постоянной, то положительный максимум (отрицательный минимум) функции* $y(x)$ *может достигаться только на концах* $x=0$ *или* $x=1$.

Доказательство. Допустим противное, что $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} y(x)=y(x_0)>0$, $0<x_0<1$. Заметим, что если функция $\varphi(t)$ непрерывна на $[0, x]$, удовлетворяет условию Гельдера порядка $\varkappa > \alpha$ в точке $t = x$ и там же достигает максимума, то из равенства (13.1) следует, что $(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) > 0$. Поэтому поскольку функции $\omega_k(x)$ положительны и не убывают на интервале $[0,1]$, то произведение $\omega_k y$ достигает положительного максимума в точке x_0 и, следовательно, существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [x_0 - \delta, x_0]$ выполняются неравенства $0 < y(x) < y(x_0)$, $a_k(x)(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_k}\omega_k y)(x) \leqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Из уравнения $Ly = 0$ имеем

$$y'' + a_0(x) y' = -\sum_{k=1}^{m} a_k(x) \mathcal{D}_{0+}^{\alpha_k}\omega_k(x) y - a_{m+1}(x) y.$$

Следовательно,

$$y'' + a_0(x) y' \geqslant 0, \quad x \in [x_0 - \delta, x_0]. \tag{42.27}$$

На отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$ введем вспомогательную функцию

$$z(x) = y(x) + \varepsilon g(x),$$

где $g(x) = \exp(-\mu x) - \exp(-\mu x_0)$, $\mu > 0$, $0 < \varepsilon < [y(x_0) - y(x_0 - \delta)]/g(x_0 - \delta)$, и подставим значение $y(x) = z(x) - \varepsilon g(x)$ в (42.27):

$$z'' + a_0(x) z' \geqslant \varepsilon\mu \exp(-\mu x)[\mu - a_0(x)].$$

Выбрав μ так, чтобы $\mu > a_0(x)$ при $x \in [x_0 - \delta, x_0]$, получим

$$z'' + a_0(x) z' > 0. \tag{42.28}$$

Если бы функция $z(x)$ достигала максимума в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, то в соответствующей точке выполнялись бы условия $z' = 0$ и $z'' \leqslant 0$, что противоречит (42.28). Поэтому наибольшего значения $z(x)$ может достигать только в точке x_0, так как $z(x_0 - \delta) < y(x_0 - \delta) + \dfrac{y(x_0) - y(x_0 - \delta)}{g(x_0 - \delta)} g(x_0 - \delta) = y(x_0) = z(x_0)$, $z'(x_0) \geqslant 0$. Но $0 \leqslant z'(x_0) = y'(x_0) + \varepsilon g'(x_0) = y'(x_0) - \varepsilon\mu \exp(-\mu x_0)$, откуда $y'(x_0) \geqslant \varepsilon\mu \exp(-\mu x_0) > 0$, что противоречит необходимому условию экстремума $y'(x_0) = 0$. Значит, экстремум во внутренней точке отрезка $[0, 1]$ функцией $y(x)$ не может достигаться. Теорема доказана.

Вторая теорема является аналогом принципа Зарембы—Жиро (см. книгу А. В. Бицадзе [3, с. 26]).

Теорема 42.10. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы. Тогда если* $y \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1] \cap C^2(0, 1)$ *— решение уравнения* $Ly = 0$ *(42.26) и* $y^* = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} y(x) = y(1) > 0$ $(y_* = \min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} y(x) = y(1) < 0)$, *то* $y'(1) > 0$ $(y'(1) < 0)$. *Если же* $y^* = y(0) > 0$ $(y_* = y(0) < 0)$, *то* $y'(0) < 0$ $(y'(0) > 0)$ *при дополнительном условии, что* $y(x) \in C^1[0, 1)$, $\omega_k(x) \in C^1[0, \varepsilon_0]$, $\omega_k(0) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *где* ε_0 *— сколь угодно близко к нулю.*

Доказательство легко следует из теоремы 42.9.

Определение 42.1. *Задачу о нахождении решения уравнения (42.26) по краевым условиям*

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{42.29}$$

будем называть задачей Дирихле для этого уравнения.

Теорема 42.11. *Пусть коэффициенты уравнения (42.26) удовлетворяют условиям теоремы 42.9 и* $a_0(x) \equiv 0$, $a_k(x)$, $\omega_k(x) \in C^1[0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда задача Дирихле (42.26), (42.29) в классе функций* $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ *безусловно и однозначно разрешима.*

Доказательство. Несложно убедиться в законности следующей цепочки равенств:

$$\varphi(x) = x\varphi(x) - (x-1)\varphi(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 (t-1)\,\varphi(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_0^x t\varphi(t)\,dt + x(x-1)\varphi(x) + \int_x^1 (t-1)\varphi(t)\,dt - x(x-1)\varphi(x)\right] =$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left[\int_0^x (x-t)\,t\varphi(t)\,dt + \int_x^1 x(t-1)\,\varphi(t)\,dt\right] = \frac{d^2}{dx^2}\int_0^1 G(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$G(x,\ t) = \begin{cases} t(x-1), & t \leqslant x, \\ x(t-1), & t > x. \end{cases} \tag{42.30}$$

Это позволяет уравнение (42.26) в случае $a_0(x) \equiv 0$ переписать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x) = 0, \tag{42.31}$$

где

$$\Phi(x) = y(x) + \int_0^1 G(x,\ t)\,a_{m+1}(t)\,y(t)\,dt + \sum_{k=1}^{m}\int_0^1 G(x,\ t)\,a_k(t)\times$$

$$\times\left(\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}\omega_k y\right)(t)\,dt - \int_0^1 G(x,\ t)\,f(t)\,dt. \tag{42.32}$$

Непосредственной проверкой с помощью (42.29) можно убедиться, что $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. Следовательно, из (42.31) имеем равенство

$$\Phi(x) = 0. \tag{42.33}$$

Тем самым установлено, что задача Дирихле (42.26), (42.29) эквивалентна интегральному уравнению (42.32), (42.33). Непосредственной проверкой можно убедиться, что это уравнение является уравнением Фредгольма 2-го рода. В силу теорем 42.9 и 42.10 и краевых условий (42.29) однородное интегральное уравнение (42.32), (42.33) (при $f(x) = 0$) эквивалентно однородной задаче Дирихле и поэтому имеет только тривиальное решение $y=0$. Отсюда следует, что неоднородное уравнение Фредгольма безусловно и однозначно разрешимо, и поэтому задача Дирихле также безусловно и однозначно разрешима. Теорема доказана.

4°. Решение линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве обобщенных функций. Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение дробного порядка

$$\sum_{j=1}^{n} a_j I^{\alpha_j} y(x) = f(x) \tag{42.34}$$

(здесь и ниже $I^{\alpha_j} = I_{0+}^{\alpha_j} = \mathscr{D}_{0+}^{-\alpha_j}$) с постоянными комплексными ненулевыми коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и попарно различными вещественными показателями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Это уравнение обобщает интегральные уравнения Абеля 1-го и 2-го рода и обычные линейные дифференциальные уравнения целого порядка с постоянными коэффициентами.

В дальнейшем решение $y(x)$ уравнения (42.34) будем искать в пространстве $\mathscr{S}'_+$ обобщенных функций медленного роста, носитель которых заключен в интервале $[0, \infty)$. Более подробные разъяснения этого и других встречающихся в этом пункте терминов и обозначений можно найти в книге В. С. Владимирова [2].

Пусть $f(x) \in \mathcal{S}'_+$. Уравнение (42.34) запишем в форме свертки

$$\mathrm{k}(x) * y(x) + f(x), \tag{42.35}$$

где

$$\mathrm{k}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j f_{\alpha_j}(x), \tag{42.36}$$

а обобщенная функция $f_\alpha(x) \in \mathcal{S}'_+$ имеет вид

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x_+^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)}(x), & \alpha \leqslant 0, \ \alpha + N > 0, \ N = -[-\alpha] + 1. \end{cases} \tag{42.37}$$

Применим к обеим частям уравнения (42.35) интегральное преобразование Фурье — Лапласа, которое при $f(x) \in \mathcal{S}'_+$ задается формулой

$$F(z) = L[f(x)](z) = L[f](x + iy) = V[f(\xi)e^{-y\xi}](x), \tag{42.38}$$

где $V[g(\xi)](x)$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g(\xi) \in \mathcal{S}'_+$, определяемое обычным образом (см., например, В. С. Владимиров [2, с. 105]). Введем еще обозначения

$$Y(z) = L[y(x)](z), \quad K(z) = L[\mathrm{k}(x)](z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j e^{i\pi\alpha_j/2}}{z^{\alpha_j}}, \tag{42.39}$$

где ветви степенных функций задаются условием $z^{\alpha_j} > 0$ при $z = x > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $f(x)$, $y(x)$, $\mathrm{k}(x) \in \mathcal{S}'_+$, то функции $F(z)$, $Y(z)$, $K(z)$ аналитичны в верхней полуплоскости $\mathbf{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Обозначим через H множество аналитических в $\mathbf{C}^+$ функций $G(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которые удовлетворяют условию $|G(z)| \leqslant M(1 + |z|^2)^{p/2}(1 + y^{-q})$, $z \in \mathbf{C}^+$, при некоторых вещественных неотрицательных и не зависящих от z постоянных M, p и q. Множество H относительно операций сложения и умножения аналитических функций, а также операции умножения функции на комплексное число является мультипликативной алгеброй, которая называется *алгеброй Владимирова*.

Имеет место следующее утверждение (см. книгу В. С. Владимирова [2, с. 173]).

Теорема 42.12. *Алгебры $\mathcal{S}'_+$ и H алгебраически и топологически изоморфны, этот изоморфизм осуществляется преобразованием Фурье— Лапласа, и для любых обобщенных функций $\mathrm{k}(x)$, $y(x) \in \mathcal{S}'_+$ имеет место равенство $L[\mathrm{k}(x) * y(x)](z) = K(z)Y(z)$.*

Таким образом, уравнение (42.34) имеет решение в пространстве $\mathcal{S}'_+$ только в том случае, когда решение $Y(z)$ алгебраического уравнения $K(z)Y(z) = F(z)$ принадлежит алгебре Владимирова H, причем если $Y \in H$, то единственное решение уравнения (42.34) доставляется формулой

$$y(x) = L^{-1}[F(z)/K(z)], \tag{42.40}$$

Здесь L^{-1} — обратное преобразование Фурье — Лапласа, действующее из H в $\mathcal{S}'_+$.

Если функция $K(z)$ вида (42.39) не имеет нулей, расположенных в $\mathbf{C}^+$, то $1/K(z) \in H$ и, следовательно, $Y(z) = F(z)/K(z) \in H$, т. е. в этом случае уравнение (42.34) разрешимо в $\mathcal{S}'_+$ при любой правой части $f(x) \in \mathcal{S}'_+$.

Допустим теперь, что функция $K(z)$ имеет нули в точках $z = z_j \in C^+$, $j = 1, 2, \ldots, l$ (бесконечным это множество быть не может, так как тогда $K(z) \equiv 0$). Тогда для того, чтобы функция $Y(z) = F(z)/K(z)$ принадлежала H, необходимо выполнение условий $F(z_j) = L[f(x)](z_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$.

Обозначим через N и N_0 суммы порядков нулей функции $K(z)$, имеющих положительные и нулевые мнимые части соответственно, причем если $K(z)$ обращается в нуль в начале координат, то этот нуль учитывать не будем. Тогда имеет место формула

$$N = \frac{1}{2\pi}[\arg K(z)]_\gamma - \frac{1}{2}(N_0 - \max_{1\leqslant j\leqslant n} \alpha_j), \tag{42.41}$$

которая следует из обобщенного принципа аргумента (см. монографию Ф. Д. Гахова [1, с. 100]). Здесь $[\omega]_\gamma$ означает приращение величины ω при обходе в положительном направлении замкнутого контура γ, образованного верхней полуокружностью, охватывающей все нули функции $K(z)$, и отрезком вещественной оси, стягивающим эту полуокружность.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 42.13. *Пусть $N \geqslant 0$ — определяемая по формуле (42.41) сумма порядков нулей, имеющих положительные мнимые части, аналитической в C^+ функции $K(z)$ вида (42.39), являющейся преобразованием Фурье—Лапласа обобщенной функции $\mathrm{k}(x)$ (42.36). Если $N=0$, то уравнение (42.34) разрешимо в пространстве $\mathscr{C}'_+$ при любой правой части $f(x) \in \mathscr{S}'_+$. Если же $N>0$ и $z_1, z_2, \ldots, z_l$ — все нули функции $K(z)$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Im} z_j>0$, $j=1, 2, \ldots, l$, а $r_1, r_2, \ldots, r_l$ — их порядки $(r_1+r_2+\ldots+r_l=N)$, то для разрешимости уравнения (42.34) в пространстве $\mathscr{S}'_+$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(z) = L[f(x)](z)$ имела нули в точках $z_1, z_2, \ldots, z_l$ порядков, не меньших, чем $r_1, r_2, \ldots, r_l$ соответственно. Если решение существует, то оно единственно и определяется по формуле (42.40). В случае $N=0$ решение уравнения (42.34) можно также представить в форме $y(x)=f(x)*g_0(x)$, где $g_0(x)=L^{-1}[1/K(z)]$ — фундаментальное решение оператора $\mathrm{k}(x)*$ (т. е. обобщенная функция с носителем из $[0, +\infty)$, удовлетворяющая уравнению $\mathrm{k}(x)*g_0(x)=\delta(x)$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака).*

Пусть теперь в уравнении (42.34) правая часть $f(x)$ принадлежит пространству D'_+ (множеству обобщенных функций с носителями в $[0, \infty)$), которое, очевидно, шире, чем $\mathscr{S}'_+$. Построим решение $y(x)$, которое также принадлежит D'_+.

Пусть c — вещественная неотрицательная постоянная, удовлетворяющая условию $c > \max\limits_{1\leqslant j\leqslant l} |z_j|$. Тогда $1/K(z+ic) \in H$, а обобщенная функция

$$g(x) = e^{cx}L^{-1}[1/K(z+ic)] \tag{42.42}$$

является, вообще говоря, элементом пространства D'_+. Отметим, что $g(x)$ не зависит от c, и в случае $N = 0$ выполняется равенство $g(x) = g_0(x)$.

Рассмотрим следующее выражение:

$$\mathrm{k}(x) * g(x) = L^{-1}[K(z)] * e^{cx}L^{-1}[1/K(z+ic)] = e^{cx}(L^{-1}[K(z+ic)] *$$
$$* L^{-1}[1/K(z+ic)]) = e^{cx}\delta(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Из последнего вытекает, что функция $g(x)$ является фундаментальным решением оператора $\mathrm{k}(x)*$ в пространстве D'_+ и справедливо равенство

$$y(x) = f(x) * g(x). \tag{42.43}$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 42.14. *Если $f(x) \in D'_+$, то единственное в пространстве D'_+ решение уравнения (42.34) доставляется формулой (42.43), где $g(x)$ — фундаментальное решение оператора $k(x)*$, имеющее вид (42.42).*

Замечание 42.1. Обобщенная функция $g(x)$ из пространства D'_+ может принадлежать и более узкому пространству. Так, если $g(x)$ и $f(x)$ — непрерывные на $[0, \infty)$ функции, то и функция $y(x)$ из (42.43) будет непрерывной на $[0, \infty)$, а последняя формула имеет вид

$$y(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt, \quad x > 0.$$

Это представление сохранит силу и в случае, когда $g(x), f(x) \in L_2^{loc} = \{\varphi : \varphi \in L_2(a, b)\ \forall\ a,\ b \in R^1\}$.

5°. Приложения дробного дифференцирования к интегрированию дифференциальных уравнений целого порядка. Рассмотрим два примера применения теории дробного дифференцирования для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го и n-го порядков.

Пример 42.3. Пусть задано следующее уравнение 2-го порядка:

$$(a_2 + b_2 x + c_2 x^2)\, \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x)\, \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0. \qquad (42.44)$$

Его решение будем искать в виде дробной производной $y = \mathscr{D}^p_{x_0} z(x)$ (здесь $\mathscr{D}^p_{x_0} = \mathscr{D}^p_{x_0+}$), порядок p которой подлежит определению. Применив известные формулы Лейбница для производных дробного порядка (см. (15.11)):

$$x \mathscr{D}^{p+1}_{x_0} z(x) = \mathscr{D}^{p+1}_{x_0}(xz(x)) - (p+1)\, \mathscr{D}^p_{x_0} z(x),$$

$$x \mathscr{D}^{p+2}_{x_0} z(x) = \mathscr{D}^{p+2}_{x_0}(x^2 z(x)) - 2(p+2)\, \mathscr{D}^{p+1}_{x_0}(xz(x)) + (p+1)(p+2) \mathscr{D}^p_{x_0} z(x),$$

из (42.44) получим равенство

$$\mathscr{D}^{p+2}_{x_0} [a_2 + b_2 x + c_2 x^2]\, z(x) + \mathscr{D}^{p+1}_{x_0} [a_1 + b_1 x - 2c_2 (p+2)\, x -$$
$$- b_2 (p+2)]\, z(x) + \mathscr{D}^p_{x_0} [a_0 - b_1 (p+1) + (p+1)(p+2)\, c_2]\, z(x) = 0.$$

Решение последнего уравнения будем искать в классе интегрируемых на любом конечном интервале функций $z(x)$, удовлетворяющих условиям $z(x_0) = z'(x_0) = 0$, которые нужны для выполнения операторных соотношений $\mathscr{D}^p_{x_0} \dfrac{d}{dx} = \dfrac{d}{dx} \mathscr{D}^p_{x_0}$ и $\mathscr{D}^p_{x_0} \dfrac{d^2}{dx^2} = \dfrac{d^2}{dx^2} \mathscr{D}^p_{x_0}$ при $p < 0$. Тогда предыдущее уравнение можно будет переписать в виде

$$\mathscr{D}^p_{x_0} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} (a_2 + b_2 x + c_2 x^2) + a_1 + b_1 x - 2c_2 (p+2)\, x - b_2 (p+2) \right] + \right.$$
$$\left. + a_0 - b_1 (p+1) + c_2 (p+1)(p+2) \right\} z(x) = 0. \qquad (42.45)$$

Параметр p определим как одно из решений квадратного уравнения

$$a_0 - b_1 (p+1) + c_2 (p+1)(p+2) = 0. \qquad (42.46)$$

Тогда из (42.45) получим простое дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dx} (a_2 + b_2 x + c_2 x^2) = z\, [a_1 + b_1 x - (1+p)(b_2 + c_2 x)],$$

решение которого легко выписывается методом разделения переменных

$$z(x) = (a_2 + b_2x + c_2x^2)^{p+1} \exp\left\{-\int \frac{a_1 + b_1x}{a_2 + b_2x + c_2x^2}\, dx\right\}. \quad (42.47)$$

При этом параметры a, b, c должны удовлетворять некоторым ограничениям, обеспечивающим выполнение условий $z(x_0) = z'(x_0) = 0$.

Таким образом, искомое решение уравнения (42.44) имеет вид

$$y(x) = \mathcal{D}^{p}_{x_0+} z(x) \quad (42.48)$$

с параметром p, определяемым из соотношения (42.46).

Интеграл, входящий в формулу (42.47), может быть вычислен в различных формах в зависимости от соотношений между его параметрами. Подробный анализ всех его значений и соответствующих представлений функции $z(x)$ изложен в работе Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [2], 1867 г.). Здесь мы приведем лишь формулы, относящиеся к одному из этих случаев.

Пусть $c_2 \neq 0$, $b_2^2 - 4a_2c_2 \neq 0$. Тогда $a_2 + b_2x + c_2x^2 = c_2(x-\alpha)(x-\beta)$ и функция $z(x)$ из формулы (42.47) после несложных вычислений принимает вид $z(x) = c_2^{p+1}(x-\alpha)^{p-q+1}(x-\beta)^{p-r+1}$, где $q = \dfrac{b_1\alpha + a_1}{c_2(\alpha-\beta)}$, $r = -\dfrac{b_1\beta + a_1}{c_2(\alpha-\beta)}$ и должны выполняться условия $\operatorname{Re}(p-q) > 0$ (или $\operatorname{Re}(p-r) > 0$), когда $x_0 = \alpha$ (или $x_0 = \beta$).

Частным случаем уравнения (42.44) является гипергеометрическое уравнение (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, 2.1(1)]), для которого $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = -1$, $a_1 = c$, $b_1 = -(a+b+1)$, $a_0 = -ab$. Соответствующее уравнение (42.46) тогда доставляет значения $p_1 = a-1$, $p_2 = b-1$. Формулы (42.47), (42.48) для первого из этих значений приводят к следующему представлению решения гипергеометрического уравнения:

$$y(x) = \mathcal{D}^{a-1}_{0+} x^{a-c}(1-x)^{c-b-1}, \quad (42.49)$$

которое является видоизмененным интегральным представлением Эйлера (1.73) (см. также табл. 9.1, формулу 3). Вычисляя последний интеграл, окончательно приходим к представлению решения через гипергеометрическую функцию в виде

$$y(x) = \frac{\Gamma(a-c+1)}{\Gamma(2-c)} x^{1-c} {}_2F_1(1+a-c,\ 1+b-c;\ 2-c;\ x).$$

Пример 42.4. Рассмотрим следующее обыкновенное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с двучленными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_kx)\frac{d^ky}{dx^k} = 0. \quad (42.50)$$

Одно из его решений построим в виде $n-1$-кратного интеграла, воспользовавшись операторами интегродифференцирования произвольного порядка. Для этого введем сначала многочлены

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k, \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_kx^k = b_n\prod_{k=1}^{n}(x-\lambda_k), \quad (42.51)$$

где корни $\psi(x)$ обозначены через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, причем $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. После замены

$$y = \exp(\lambda_1x)\, Y(x), \quad \lambda_1 \neq 0, \quad (42.52)$$

воспользовавшись тождеством

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{\lambda_1 x}Y(x)\right) = e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)^m Y(x),$$

уравнение (42.50) перепишем в виде

$$\varphi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)Y(x) + x\psi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)Y(x) = 0. \qquad (42.53)$$

Решение последнего будем искать в форме производной некоторого порядка

$$Y(x) = \frac{d^p}{dx^p}\, y_1(x),$$

где $y_1(x)$ — интегрируемая на произвольном интервале $(0, a)$ функция, удовлетворяющая условиям

$$y_1(0) = y_1'(0) = \ldots = y_1^{(n-1)}(0) = 0. \qquad (42.54)$$

Тогда уравнение (42.53) сведется к следующему:

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left\{\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\left[\varphi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right) - (p+1)\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\psi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + x\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}\psi\left(\lambda_1 + \frac{d}{dx}\right)\right\} y_1(x) = 0. \qquad (42.55)$$

Введем в рассмотрение многочлены

$$\psi_1(x) = x^{-1}\psi(\lambda_1 + x), \quad \varphi_1(x) = x^{-1}\left[\varphi(\lambda_1 + x) - (p+1)\psi_1(x)\right]. \qquad (42.56)$$

Первый из них в силу $\psi(\lambda_1) = 0$ имеет порядок $n-1$. Положив

$$p + 1 = \frac{\varphi(\lambda_1)}{\psi_1(0)} = \frac{\varphi(\lambda_1)}{\psi_1'(\lambda_1)} = \alpha_1, \qquad (42.57)$$

получим, что $x\varphi_1(x)$ при $x=0$ обращается в нуль и, следовательно, $\varphi_1(x)$ будет многочленом порядка $n-1$. Допустим, что $\alpha_1<0$. Тогда из однородного уравнения Абеля порядка $-p-1$ (42.55), записанного в обозначениях (42.56), будет следовать соотношение

$$\varphi_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_1(x) + x\psi_1\left(\frac{d}{dx}\right)y_1(x) = 0. \qquad (42.58)$$

Таким образом, уравнение (42.50) при условиях (42.54) и $\alpha_1<0$ свелось к уравнению (42.58), порядок которого равен $n-1$.

Продолжив аналогичным образом указанный процесс понижения порядка, придем к следующей системе дифференциальных уравнений некоторых порядков α_j-1:

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}\frac{d^{\alpha_1 - 1}}{dx^{\alpha_1 - 1}}\, y_1(x),$$
$$y_1(x) = e^{\lambda_{11} x}\frac{d^{\alpha_2 - 1}}{dx^{\alpha_2 - 1}}\, y_2(x), \ \ldots, \qquad (42.59)$$
$$y_{n-2}(x) = e^{\lambda_{1,n-2} x}\frac{d^{\alpha_{n-1} - 1}}{dx^{\alpha_{n-1} - 1}}\, y_{n-1}(x),$$

где $y_{n-1}(x) = \exp(\lambda_{1,n-1}x)(a_n + b_n x)^{-\alpha_n}$ — решение последнего простого уравнения 1-го порядка вида

$$\varphi_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) y_{n-1}(x) + x\psi_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right) y_{n-1}(x) = 0, \qquad (42.60)$$

а $x=\lambda_{1,m}$ — корень уравнения $\psi_m(x)=0$, причем

$$\psi_m(x) = x^{-1}\psi_{m-1}(\lambda_{1,m-1}+x), \quad m=1,2,\ldots,n-1, \quad \psi_0(x)=\psi(x),\ \lambda_{1,0}=\lambda_1, \qquad (42.61)$$

$$\varphi_m(x) = x^{-1}[\varphi_{m-1}(\lambda_{1,m-1}+x) - \alpha_m\psi_m(x)], \quad m=1,2,\ldots,n-1,$$
$$\varphi_0(x)=\varphi(x), \qquad (42.62)$$

$$\alpha_m = \varphi_{m-1}(\lambda_{1,m-1})/\psi'_{m-1}(\lambda_{1,m-1}), \quad m=1,2,\ldots,n. \qquad (42.63)$$

Докажем, что $\lambda_{1,m}=\lambda_{m+1}-\lambda_m$, $m=1,2,\ldots,n-1$. Из (42.56), (42.51), (42.61) имеем соотношения

$$\psi_2(x) = x^{-1}\psi_1(\lambda_{1,1}+x) = x^{-1}b_n\prod_{k=2}^{n}(x+\lambda_1+\lambda_{1,1}-\lambda_k).$$

Поскольку $x=\lambda_{1,1}$ является корнем уравнения $\psi_1(x)=0$, то $\lambda_{1,1}$ можно положить равным значению $\lambda_{1,1}=\lambda_2-\lambda_1$. Продолжив такие рассуждения для $\lambda_{1,m}$, $m=2,3,\ldots,n-1$, получим

$$\lambda_{1,m}=\lambda_{m+1}-\lambda_m, \quad \psi_m(x)=b_n\prod_{k=m+1}^{n}(x+\lambda_m-\lambda_k), \quad m=1,2,\ldots,n-1. \qquad (42.64)$$

Условия (42.54) и $\alpha_1<0$ относились к функции $y_1(x)$. Аналогичные условия для остальных функций $y_k(x)$ имеют вид

$$y_k(0)=y'_k(0)=\ldots=y_k^{(n-k)}(0)=0, \quad k=1,2,\ldots,n-1,$$
$$\alpha_k<0,\ k=1,2,\ldots,n,\ a_n=0 \qquad (42.65)$$

(последнее, т. е. $a_n=0$, следует из $y_{n-1}(0)=0$). При этих условиях после свертывания системы (42.59) приходим к следующему представлению одного из решений уравнения (42.50):

$$y(x) = b_n^{-\alpha_n} e^{\lambda_1 x}\frac{d^{\alpha_1-1}}{dx^{\alpha_1-1}} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\frac{d^{\alpha_2-1}}{dx^{\alpha_2-1}}\cdots\frac{d^{\alpha_{n-1}-1}}{dx^{\alpha_{n-1}-1}} e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x}x^{-\alpha_n}. \qquad (42.66)$$

Можно установить, что условия (42.65) приводят к следующим ограничениям на α_k:

$$\alpha_1<0,\ \alpha_n<-1,\ \alpha_{n-1}<-1,\ \alpha_{n-2}<-2,\ \ldots,\ \alpha_2<-n+2. \qquad (42.67)$$

Последние можно расширить, если использовать аналитическое продолжение интегралов Абеля, входящих в формулу (42.66).

Частным случаем уравнения (42.50) при $n=2$, $a_2=b_0=0$, $b_2=-b_1=1$ является вырожденное гипергеометрическое уравнение Куммера

$$xy''+(c-x)y'-ay=0. \qquad (42.68)$$

Для него $\varphi(x)=cx-a$, $\psi(x)=x^2-x$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $\alpha_1=c-a$, $\alpha_2=a$, а условия (42.67) принимают вид $\alpha_1<0$, $\alpha_2<-1$. Решение (42.66) для (42.68) приобретает форму

$$y(x)=e^x\frac{d^{c-a-1}}{dx^{c-a-1}}e^{-x}x^{-a} = e^x\int_0^x\frac{(x-t)^{a-c}}{\Gamma(1+a-c)}e^{-t}t^{-a}dt=$$
$$=\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(2-c)}x^{1-c}e^x\,{}_1F_1(1-a;\ 2-c;\ -x), \qquad (42.69)$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера (1.81) (см. также табл. 9.1, формулу 9). Условия $c-a<0$, $a<-1$ здесь могут быть расширены до условий $c-a<1$, $a<1$, которые обеспечивают сходимость интеграла.

§ 43. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 8

1°. Исторические сведения. К § 40, п. 1°. В основу пункта легли материалы монографии И. Н. Векуа [3, § 6 и 10], 1948 г.

К § 40, пп. 2, 3°. Пункты написаны по материалам статей О. И. Маричева [4], 1976 г., и [9], 1978 г., причем сделаны добавления, связанные с формулами (40.21) — (40.23), а в формулы (40.26), (40.27), (40.48) введены уточнения—регуляторы $(\operatorname{sign} xt + 1)^{|\operatorname{sign}\mu|}$. Более подробные исторические комментарии содержатся ниже в п. 1° (к § 41, п. 4°), поскольку вопросы, рассматриваемые в § 40 и 41, тесно переплетаются.

К § 41, п. 1°. Начало пункта написано по материалам книги Ф. Трикоми [2], 1957 г., формулы (41.18), (41.19) получены в работе О. И. Маричева [5], 1976 г., теорема 41.2 (при $q\neq 0$) доказана О. И. Маричевым, а равенства (41.23), (41.24) заимствованы из работы N. Berger, R. Handelsman [1], 1975 г.

К § 41, п. 2°. Теорема 41.3 установлена в работе А. М. Гордеева [1], 1968 г., хотя в иных обозначениях и в случае $\beta^*=\beta$ этот результат был известен и ранее, см. об этом в монографиях А. В. Бицадзе [1—3], М. М. Смирнова [1—3, 7] и R. P. Gilbert [2]. Класс R_1 ввел К. И. Бабенко [1], 1951 г., см. также [2], 1985 г. Теорема 41.4 доказана в первой из этих работ.

К § 41, п. 3°. Пункт написан по работе N. Berger, R. Handelsman [1], 1975 г., формулы (41.46)—(41.49) получены в статье J. S. Lowndes [8]. Отметим, что в работах E. C. Young [1] и B. Asral [1] соответственно содержатся обзоры исследований сингулярной задачи Коши (41.36) и регулярной задачи Коши с условием вида (41.36), но на линии $y=\varepsilon>0$. В работах J. B. Diaz, H. F. Weinberger [1], E. K. Blum [1] задача (41.35), (41.36) рассматривалась при всех значениях p, в том числе и при особых, когда $2p=-1, -3, -5, \ldots$

К § 41, п. 4°. Пункт написан по работе О. И. Маричева [5], 1976 г., с некоторыми уточнениями в случае $p=1/2$. Отметим, что теорема 41.5 при $q=0$ доказана И. Н. Векуа [2], 1947 г. Этот результат на случаи полушара и полупространства из R^n распространен М. Н. Олевским [1], 1949 г., при некоторых условиях на p, а затем на случай полушара из R^n обобщен в работе A. Huber [1], 1954 г., для всех значений параметра p (см. также работу N. S. Hall, D. W. Quinn, R. J. Weinacht [1], 1974 г., где аналогичный результат для уравнения типа (40.18) с $\lambda=0$ получен в четвертьшаре из R^n при любых p и μ). В работах В. Ф. Волкодавова [1], 1971 г., и В. И. Евсина [1, 2], 1973—1975 гг., построены фундаментальные решения уравнения (41.2) и решены соответственно задачи Дирихле для полукруга $\{x^2+y^2<1,\ y>0\}$ и Неймана—Дирихле для области, примыкающей к отрезку $[-1, 1]$ оси Ox.

Отметим, что впервые фундаментальное решение для уравнения (41.2) с $q=0$, т. е. (41.3″), указано Э. Бельтрами (E. Beltrami [1], 1881 г.) для случая $2p=1$. На значения $p>0$ этот результат распространен в работе A. Weinstein [1], 1948 г., где получено два представления для таких решений.

Уравнения вида (40.18), (40.19), (41.1), (41.2), (41.25), (41.35) имеют богатую историю. Впервые уравнение (41.1) как частный случай более общего уравнения получено Л. Эйлером [2, с. 177, 426—432] в 1772 г. в связи с изучением движения воздуха в трубах разного сечения и колебаний струн переменной толщины. Он дал решение этого уравнения при $0<\beta=\beta^*<1/2$. Такое же уравнение, но в форме (41.25) с $q=0$ решил С. Пуассон (S. D. Poisson [1], 1823 г.), найдя для него гиперболический аналог представления решений (41.22), называемый представлением Пуассона. В этой работе он также рассмотрел уравнение (41.35) при $n=3$, $p=1$. Общее решение уравнения (41.1) при $\beta^*=\beta$ нашел Б. Риман [1, с. 40, 381—395] в 1860 г., построивший решение задачи Коши с помощью вспомогательной функции и методом, который впоследствии был назван его именем. Значительно позже уравнение (41.25) при $q=0$, $0<p<1$ встречалось при исследовании вопросов кривизны поверхностей в монографии Г. Дарбу (G. Darboux [1], 1915 г.), где оно названо уравнением Эйлера—Пуассона. Поэтому впоследствии многие авторы стали называть уравнения вида (41.1), (41.25), (41.35) и их эллиптические аналоги уравнениями Эйлера—Пуассона—Дарбу, хотя точнее их было бы называть уравнениями Эйлера—Пуассона.

Интерес к таким уравнениям значительно увеличился после публикации в 1923 г. первого издания книги Ф. Трикоми [1], где уравнения вида (41.1), (41.2), (41.25) при $q=0$, $p=1/6$ сыграли ключевую роль при изучении краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа $yu_{xx}+u_{yy}=0$, названного впоследствии уравнением Трикоми. Подробнее об этом направлении см. в монографиях А. В. Бицадзе [1—3] и М. М. Смирнова [1—3, 7].

Важную роль в создании теории уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу и их аналогов сыграли работы A. Weinstein [2—5], 1952—1955 гг. (см. также обзорную статью [8]). В статьях A. Weinstein [2, 4], 1952—1954 гг., при разных значениях параметра p изучена задача Коши (41.35), (41.36) и получено ее решение в виде (41.40). При этом автор указал и использовал формулы $u_y^p = yu^{p+1}$, $u^p = y^{1-2p}u^{1-p}$, связывающие решения $u=u^p$ уравнений вида (41.35), соответствующие различным значениям параметра p (см. (40.20)). В работе A. Weinstein [3], 1953 г., по-видимому, впервые отмечена сводимость общего уравнения (41.3′) к уравнению (41.3″) и изложена история вопроса. Здесь также указаны формулы соответствий вида (40.20) и представление (41.22) в отношении к уравнению (41.2) при $q=0$, $0<p<1/2$. Отметим, что формула типа (40.20) встречалась еще у Г. Дарбу (G. Darboux [1], 1915 г.), а более общие, чем (41.22), представления решений через аналитические функции типа (41.9) для уравнения (41.2) с $q=0$ и вида (40.33) для уравнения (40.18) с $\lambda=0$ были получены в работах Ю. П. Кривенкова [1], 1957 г., и P. Henrici [1], 1957 г.

В статье A. Weinstein [5], 1955 г., для уравнения (41.25) с $q=0$ установлены формулы, связывающие решения таких уравнений при различных значениях параметра p через дробный интеграл (см. лемму 40.2 при $\lambda=0$). Эта идея существенно развита в работах А. Эрдейи (A. Erdelyi [8, 10, 11, 14], 1963—1970 гг.), который, продолжив исследования из статьи A. Weinstein [7], 1960 г., более глубоко изучил свойства дифференциального оператора $L_\eta^{(x)}$ (40.22) (см. A. Erdelyi [8, 10], 1963—1965 гг.). В этих работах доказана лемма 40.2 в случае $\lambda=0$ и ее аналог для второго оператора Эрдейи—Кобера $K_{\eta,\alpha}$, которые позволили связывать через операторы Эрдейи—Кобера решения уравнений (41.2), (41.25) при $q=0$ для различных значений p. Заметим здесь, что в зародыше эта мысль была еще у С. Пуассона (S. D. Poisson ([1], 1823 г.), а после А. Эрдейи этот важный результат обобщен в работе J. S. Lowndes [5], 1979 г., где доказана лемма 40.2.

В работе A. Erdelyi [11], 1965 г., указанный подход распространен на обобщенную систему Стокса—Бельтрами

$$y^{2p}u_x = v_y, \quad y^{2p}u_y = -v_x, \tag{43.1}$$

решения (u, v) которой называются $(2p+2)$-мерными сопряженными симметрическими потенциалами. Такое наименование обусловлено тем, что после исключения функции v из этой системы получается уравнение (41.3″) с $r=y$, решения u которого называются $(2p+2)$-*мерными осесимметрическими потенциалами*. Развивая исследования Н. А. Пахаревой и Н. А. Вирченко [1], 1962 г. (см. Г. Н. Положий [1—3]), А. Эрдейи A. Erdelyi [11, с. 221]) доказал, что если пара (u, v) является $(2p+2)$-мерным потенциалом, то пара $(I_{p-1/2,\alpha}^{(y)}u,\ y^{2\alpha}I_{0,\alpha}^{(y)}v)$ будет $(2p+2\alpha+2)$-мерным потенциалом при условиях $p>-1/2$, $p+\alpha>-1/2$. Здесь $I_{\eta,\alpha}^{(y)}$ означает оператор $I_{\eta,\alpha}$ Эрдейи—Кобера (18.8), применяемый по переменной y.

В работе A. Erdelyi [14], 1970 г., аппарат дробного интегрирования использован для развития результатов из статьи F. G. Friedlander, A. E. Heins [1], 1969 г., где рассматривалось уравнение (41.25) с $q=0$. Здесь указанная выше идея А. Эрдейи применена для вывода представлений решений типа (41.6) из решений уравнения колебания струны. Ранее в работе E. T. Copson, A. Erdelyi [1], 1958 г., эта идея применялась при изучении решений одной краевой задачи для другого гиперболического уравнения (40.19) с $\lambda=0$.

К § 42, п. 1°. Началом развития теории дифференциальных уравнений дробного порядка, по-видимому, следует считать дискуссию о способах решения уравнения $D^{1/2}y = y/x$, начатую в заметке L. O'Shaughnessy [1], 1918 г. Предложенные там и обсужденные в работе E. L. Post [1], 1919 г., два решения существенно отличались, так как на самом деле они удовлетворяли двум различным уравнениям: $\mathcal{D}_{0+}^{1/2}y = y/x$ и $\mathcal{D}_{-}^{1/2}y = y/x$, что не было учтено авторами. Позже к дифференциальному уравнению дробного порядка пришел С. Мандельбройт (S. Mandelbrojt [1], 1925 г.) (см. также книгу В. Вольтерра [1, с. 99], 1982 г.). Он исследовал вопрос о нахождении экстремума функционала $\int\limits_0^1 F[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y(x);\ x]\,dx$. Приравняв к нулю соответствующие вариации, он получил дифференциальное уравнение дробного порядка $F_\alpha[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y(x);\ x]=0$ с условиями Коши. К предыстории этого направления можно отнести и работу M. Fujiwara [1], 1933 г., в которой, в частности, рассматривалось уравнение $(\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}y)(x) = (\alpha x^{-1})^{\alpha}y(x)$, $\alpha>0$, содержащее оператор дробного дифференцирования по Адамару $\mathfrak{D}_{+}^{\alpha}$ (18.54).

Серьезную основу для теории дифференциальных уравнений дробного порядка заложила работа Е. Пичера, В. Сьюелла (E. Pitcher, W. E. Sewell [1], 1938 г.), в которой при несколько иных условиях были доказаны теоремы 42.1 и 42.2 о существовании и единственности решений задач типа Коши для уравнения $(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}y)(x)=f(x, y)$. Намного позже вышла работа J. H. Barrett [1], 1954 г., в которой в явном виде было решено уравнение (42.11) с условиями (42.10). В дальнейшем эти результаты были значительно обобщены в работах M. A. Al-Bassam [4], 1965 г., [8], 1982 г., A. Z. Al-Abedeen [1], 1976 г., и A. Z. Al-Abedeen, H. L. Arora [1], 1978 г., где сформулирован и доказан ряд теорем, аналогичных соответствующим теоремам из теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Эти результаты в несколько упрощенном виде легли в основу пункта.

К § 42, п. 2°. Пункт написан по работе М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [6], 1968 г.

К § 42, п. 3°. Задача Дирихле для уравнений вида (42.26) изучалась М. М. Джрбашяном [8], 1970 г., А. М. Нахушевым [4], 1976 г., [5], 1977 г., и Т. С. Алероевым [1, 2], 1982 г. Изложение этого пункта ведется по указанным работам А. М. Нахушева.

К § 42, п 4°. Пункт написан по работам А. В. Диденко [1—3], 1984 г., и А. И. Кочуры, А. В. Диденко [1], 1985 г.

К § 42, п. 5°. Первым на возможность построения решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с помощью понятия обобщенного интегродифференцирования указал Ж. Лиувилль (J. Liouville [3], 1832 г.) на примере уравнения (42.40). Используя идею Ж. Лиувилля, это уравнение изучали Hj. Holmgren [2], 1867 г., L. Sohncke [1], 1867 г., и А. В. Летников [4, ч. III], 1874 г. Наиболее полное и подробное исследование провел А. В. Летников.

Уравнение (42.46) также было предметом исследований многих авторов, в частности А. В. Летникова [9], 1888 г., П. А. Некрасова [2], 1888 г., [4], 1891 г., и И. М. Карасева [1], 1957 г., применявших методы дробного интегродифференцирования. В основу пункта легли работы А. В. Летникова [4], 1874 г., [9], 1888 г., и Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [2], 1867 г.).

2°. Обзор других результатов. 40.1. В работах A. Erdelyi [8, 10, 14] наряду с утверждением леммы 40.2 в случае $\lambda=0$ была установлена аналогичная лемма, относящаяся ко второму из операторов Эрдейи—Кобера (18.8).

Лемма 43.1. *Пусть* $\alpha>0$, $f\in C^2(0, \infty)$, *причем функции* $x^{2\eta-1}f(x)$ *и* $x^{2\eta}f'(x)$ *интегрируемы на бесконечности. Тогда справедливо равенство*

$$L_{\eta}^{(x)} K_{-\eta,\alpha} f(x) = K_{-\eta,\alpha} L_{\eta-\alpha}^{(x)} f(x),$$

где $L_{\eta}^{(x)}$ *— оператор (40.22), а* $K_{\eta,\alpha}$ *— оператор (18.8).*

Отмечено, что с помощью равенства $L_{\eta}^{(x)}(x^{-2\eta}f(x)) = x^{-2\eta}L_{-\eta}^{(x)}f(x)$ из лемм 40.2 и 43.1 при соответствующих условиях, указанных в работе A. Erdelyi [8], следуют соотношения

$$I^{\alpha}_{0+;x^2} L_{\eta}^{(x)} f = L_{\eta-\alpha}^{(x)} I^{\alpha}_{0+;x^2} f, \quad I^{\alpha}_{-;x^2} L_{\eta}^{(x)} f = L_{\eta-\alpha}^{(x)} I^{\alpha}_{-;x^2} f.$$

Эти соотношения в работе J. S. Lowndes [5] обобщены на

$$J^{\alpha}_{\lambda} L_{\eta}^{(x)} f = (L_{\eta-\alpha}^{(x)} + \lambda^2) J^{\alpha}_{\lambda} f, \quad R^{\alpha}_{\lambda} L_{\eta}^{(x)} f = (L_{\eta-\alpha}^{(x)} - \lambda^2) R^{\alpha}_{\lambda} f,$$

где операторы J^{α}_{λ}, R^{α}_{λ} выражаются через обобщенные операторы Эрдейи — Кобера $J_{\lambda}(\eta, \alpha)$, $R_{\lambda}(\eta, \alpha)$ (37.45), (37.46) по формулам

$$J^{\alpha}_{\lambda} f = x^{2\alpha+2\eta} J_{\lambda}(\eta, \alpha) x^{-2\eta} f, \quad R^{\alpha}_{\lambda} f = x^{-2\eta} R_{\lambda}(\eta, \alpha) x^{2\alpha+2\eta} f.$$

В частности, справедливы представления (J. S. Lowndes [7])

$$J_{\lambda} f(x) = J^{0}_{\lambda} f(x) = J^{1}_{\lambda} f'(x) = \int_0^x J_0(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\, f'(t)\,dt =$$

$$= f(x) - \lambda \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x^2-t^2}} J_1(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\, f(t)\,dt, \quad f(0)=0;$$

$$R_{\lambda} f(x) = R^{0}_{\lambda} f(x) = -R^{1}_{\lambda} f'(x) = \int_x^{\infty} J_0(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\, f'(t)\,dt =$$

$$= f(x) - \lambda \int_x^{\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2-x^2}} J_1(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\, f(t)\,dt,$$

когда $t^{-1/2} f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а обратные к J_λ, R_λ операторы вычисляются по формулам, см. (37.57), (37.58): $(J_\lambda)^{-1} f(x) = J_{i\lambda} f(x)$, $(R_\lambda)^{-1} f(x) = R_{i\lambda} f(x)$ (первая из них в иной форме указана в монографии И. Н. Векуа [3, с. 69]).

В работе J. S. Lowndes [7] кроме леммы 40.1 доказаны еще два аналогичных утверждения.

Лемма 43.2. *Пусть* $f \in C^2(b, \infty)$, $b > 0$, *и* $x^{-1/2} f(x) \to 0$, $x^{1/2} f'(x) \to 0$, $x^{-1/2} f''(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$. *Тогда*

$$R_\lambda f''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right) R_\lambda f(x), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Лемма 43.3. *Пусть* $f \in C^2(b, \infty)$, $b > 0$, *и* $f^{(k)}(x) = O(e^{-\delta x})$ *при* $x \to \infty$, $\delta > \lambda \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2$. *Тогда*

$$R_{i\lambda} f''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right) R_{i\lambda} f(x).$$

Все эти результаты применены к решению некоторых краевых задач для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями. Отмечено, что лемма 43.2 дает возможность из фундаментальных решений $u = -\ln r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, и $u = r^{-1}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, уравнений Лапласа $\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ и $\Delta_3 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ соответственно получить фундаментальные решения $v = K_0(\lambda r)$ и $v = r^{-1} e^{-\lambda r}$ более общих уравнений типа Гельмгольца $(\Delta_2 - \lambda^2) v = 0$ и $(\Delta_3 - \lambda^2) v = 0$ по формуле $v = R_\lambda u$.

40.2. В работе E. T. Copson [5] рассматривается задача Дирихле в квадранте $x > 0$, $y > 0$ для гиперболического уравнения (40.19) с $\lambda = 0$. Ее решение при $x < y$ и $x > y$ построено методом Римана, а затем показано, что при переходе через линию $y = x$ это решение и его производные при достаточно больших значениях $\mu + p$ непрерывны, если заданные краевые значения $u(x, 0)$ и $u(0, y)$ удовлетворяют уравнениям $u(x, 0) = u(0, x)$ (при $\mu = p$) или $u(0, x) = \dfrac{\Gamma(p + 1/2)}{\Gamma(\mu + 1/2)} x^{-1} I_{\mu-1, p-\mu}\, u(x, 0)$ (при $p > \mu$), где $I_{\eta,\alpha}$ — оператор Эрдейи—Кобера (18.8).

40.3. В работе A. Weinstein [7] изучаются некоторые свойства оператора $L_\eta^{(x)}$ (40.22), которые затем применяются при исследовании решений уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{p_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0, \quad p_k = \text{const}. \tag{43.2}$$

В частности, показано, что каждому решению $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого уравнения соответствует другое его решение вида $r^{2-n-p_1-p_2-\ldots-p_n} u\left(\dfrac{x_1}{r^2}, \dfrac{x_2}{r^2}, \ldots, \dfrac{x_n}{r^2}\right)$, $r^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$. В случае $p_1 = \ldots = p_n = 0$ это свойство иногда называют теоремой Кельвина.

40.4. В работах Н. Раджабова [1—4] и Н. Раджабова, А. С. Саттарова, Д. К. Джабирова [1, 2] (см. также цитированные там другие статьи этих авторов) подробно исследуются свойства решений, в том числе и фундаментальных решений, а также получены различные интегральные представления и решения ряда краевых задач (Дирихле, Неймана, смешанных) для уравнений эллиптического типа с особенностями в коэффициентах, имеющих вид (40.18), (43.2), или их аналогов и итерационных обобщений. При этом получили развитие идеи, связанные с формулами (40.20), леммой 40.2, и подходы, изложенные в монографии R. P. Gilbert [2] и статье A. Weinstein [6], где установлена структура решений итерационных уравнений высокого порядка, разлагающихся на композиции уравнений типа (43.2).

Такого же рода уравнения, но в основном гиперболического типа, и краевые задачи Коши и Коши—Гурса для них глубоко исследовал М. Б. Капилевич в статьях [1—4 и др.], который использовал аппарат гипергеометрических функций нескольких переменных. В частности, в работах М. Б. Капилевича [1—3] для уравнения (40.19) впервые построены функции Римана и Грина—Адамара, с помощью которых найдены решения задач Коши и Коши—Гурса, а в статье М. Б. Капилевича [4] получено решение аналога полуоднородной задачи (41.36) для уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{a}{s}\frac{\partial}{\partial s} + b^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^m u - c^{2m} u = 0$$

через интегральный оператор, содержащий в ядре функцию ${}_0F_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-1}, z)$, см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1].

40.5. В работах Y. W. Chen [1, 2] были исследованы свойства решений уравнения $\xi^m U_{xx}+U_{\xi\xi}=0$ вблизи особой линии $\xi=0$ в зависимости от свойств функций $U(x, 0)=U_0(x)$ и $U_\xi(x, 0)=U_1(x)$, в частности от их гельдеровости (Y. W. Chen [1]). Для этого после замен $2p=m(m+2)^{-1}$, $r=(1-2p)\,\xi^{1/(1-2p)}$, $U(x, \xi)=u(x, r)$ это уравнение сводится к виду (41.3″), $0<p<1/2$, а к последнему применяется метод аналитического продолжения в комплексную область по двум переменным, изложенный в работах H. Lewy [1, 2], который примыкает к известному методу из монографии И. Н. Векуа [3]. Этот метод позволяет автору каждому решению $U(x, \xi)$ поставить в соответствие некоторую аналитическую функцию, действительная и мнимая части которой при $\xi=0$ выражаются через дробные интегралы от функций $U_0(x)$ и $U_1(x)$. В работе Y. W. Chen [2] указываются такие целые решения $U(x, \xi)$, дробные производные которых в пространстве L_q имеют нормы, удовлетворяющие специальным оценкам через нормы $U_1(x)$ или $I_{a+}^{2p-1}(U_0(x)-U_0(a))$.

41.1. В работах M. Saigo [2, 4, 5], см. также [6, 7], для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу (41.1) в области $0<\xi<\eta<1$ изучены три краевые задачи с граничными условиями, содержащими интегральные операторы $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$ и $I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}$ (см. § 23, п. 2°, 18.6). У первой задачи типа Гурса граничные условия имеют вид

$$I_{0+}^{a,b,\beta^*-a-1}u(0, \eta)=\varphi_1(\eta),\quad I_{1-}^{c,d,\beta-c-1}u(\xi, 1)=\varphi_2(\xi).$$

Остальные две задачи относятся к так называемым задачам со смещением, изучение которых началось со статьи А. М. Нахушева [1], см. также пособие X. Г. Бжихатлова, И. М. Карасева, И. П. Лесковского, А. М. Нахушева [1, § 4]. Во второй задаче граничные условия имеют форму

$$u(\xi, \xi)=\varphi_1(\xi),\quad AI_{0+}^{a,b,\beta^*-a-1}u(0, \xi)+BI_{1-}^{a+\beta-\beta^*,c,\beta^*-a-1}u(\xi, 1)=\varphi_2(\xi),$$

а в третьей —

$$u(\xi, \xi)=\varphi_1(\xi),\quad A\xi^{b+\beta+\beta^*-1}\,I_{0+}^{a,b,\beta^*-a-1}u(0, \xi)+$$
$$+B(1-\xi)^{c+\beta+\beta^*-1}\,I_{1-}^{a+\beta-\beta^*,c,\beta^*-a-1}u(\xi, 1)=\varphi_2(\xi).$$

Во всех трех задачах A, B, a, b, c, d — некоторые заданные постоянные, а φ_1 и φ_2 — заданные функции. Вторая из задач в случае, когда A и B являются функциями, а $\beta^*=\beta$ и $a=-b=-c=\beta-1$, совпадает с задачей из работы А. М. Нахушева [1]. Все задачи сводятся к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши, к которым применяются результаты из монографии Ф. Д. Гахова [1].

Отметим здесь, что результаты из работы А. М. Нахушева [1] обобщил И. Оразов [1], а в работе В. Ф. Волкодавова, О. А. Репина [1] решена еще одна задача такого типа с операторами $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$ и $I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}$.

41.2. В статье D. W. Bresters [3] с помощью преобразования Фурье в классе обобщенных функций построено решение задачи Коши (41.36) для уравнения, отличающегося от (41.35) добавлением к левой части слагаемого $-\lambda^2 u$. Формула решения имеет вид

$$u(x, y)=\frac{2}{|S_n|}\int_{-1}^{1}\tau(x+yt)\,\frac{\cos(\lambda y\sqrt{1-t^2})}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

(см. (41.37)) и обобщает классическое решение такой же задачи из работы E. C. Young [1].

41.3. В работах F. J. Bureau [1—3] проведено исследование задачи Коши для уравнений в частных производных гиперболического типа, в частности для волнового уравнения (40.19) и уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу (41.1), (41.35). При этом широко использовались понятия конечной и логарифмической частей расходящихся интегралов, обозначаемые соответственно через pf и pl и примыкающие к определению Адамара (см. § 5, п. 5°). С помощью этих понятий, в частности были расширены некоторые результаты из работ A. Weinstein [1—3]. Приведем определения, используемые автором.

Пусть в окрестности точки x функция $A(t)\in C^m$ и представима в виде $A(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{A_k(x)}{k!}(t-x)^k+B_m(t)$, $A_k(x)=A^{(k)}(x)$. Пусть еще

$$I_s(x)=\int_a^x A(t)(x-t)^s dt,\quad P(y;\ s,\ u+1)=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\frac{A_k(x)}{k!\,(k-u)}\,y^{k-u}.$$

Тогда по определению полагается

$$\operatorname{pf} I_{-m-\mu}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x-\varepsilon} A(t)(x-t)^{-m-\mu}\,dt-P(\varepsilon;\ m-1,\ m+\mu)\right]=$$

$$=P(a-x;\ m-1,\ m+\mu)+\int_a^x B_m(t)(x-t)^{-m-\mu}\,dt,$$

$$\operatorname{pf} I_{-m}(x)=P(a-x;\ m-2,\ m)+$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{A_{m-1}(x)}{(m-1)!}\ln(x-a)+\int_a^x\frac{B_m(t)}{(x-t)^m}\,dt,$$

$$\operatorname{pl} I_{-m}(x)=(-1)^m\frac{A_{m-1}(x)}{(m-1)!};\quad \operatorname{pl} I_s(x)=0,\quad s\neq -m,$$

где $0<\mu<1$, $m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

В указанных работах устанавливаются основные свойства $\operatorname{pf} I_s$ и $\operatorname{pl} I_s$, различные оценки, коммутируемость с оператором дифференцирования и связь с главным значением интеграла в смысле Коши. Все это распространяется на многомерные интегралы, и даются обзоры применения этих понятий к уравнениям в частных производных.

41.4. В работах X. Zheng [1] и H. Cheng [1] изучены некоторые смешанные краевые задачи с данными на особой линии соответственно для уравнения (41.25), $q=0$, и его обобщения.

41.5. В работе D. H. Wood [1] решается задача о нахождении фундаментального решения для уравнения $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\omega^2c^{-2}(z)\,u=0$ по известному фундаментальному решению более простого уравнения такого же вида, но без слагаемого u_{yy}. В случае $c(z)=z$ эта задача решается с помощью дробного интегрирования.

41.6. В работе D. L. Clements, E. R. Love [1] рассмотрены две смешанные задачи Неймана — Дирихле о нахождении гармонических в полупространстве $z>0$ функций $V(r,\ z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, по заданным в различных частях плоскости $z=0$ значениям V_z, V с разрывом при $r=a$ и $r=b$. Согласно Е. Копсону (E. T. Copson [3]), решение этих задач отыскивается в виде

$$V(r,\ z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\sigma(\rho)\,\rho d\rho\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{(z^2+r^2-2r\rho\cos\varphi)^{1/2}},$$

что приводит к необходимости последовательного решения уравнений типа Абеля

$$\int_a^x\frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}=f_1(x),\qquad \int_x^b\frac{\rho\sigma(\rho)\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-x^2}}=f_2(x)$$

и уравнения вида

$$f(x)+\frac{2(-1)^\delta}{\pi}\int_0^c\frac{(xt)^\delta f(t)}{1-x^2t^2}\,dt=y(x),\quad 0<x<c=\sqrt{a/b},$$

где $\delta=0$ или $\delta=1$.

41.7. В работах С. М. Белоносова [1, 2] были изучены некоторые краевые задачи для бигармонического уравнения $\Delta^2u=0$ в случае плоских двусвязных областей. При их решении использовалось дробное дифференцирование $f^{(\alpha)}$ в комплексной плоскости, определяемое формулой (22.4), где $\mathscr{L}=(-i\infty,\ i\infty)$, а также установленные автором формулы связи $f^{(\alpha)}$ с преобразованием Лапласа, см. об этом в § 7, п. 2° и § 9, п. 2°, 7.2 и 7.4.

41.8. В работе M. Shinbrot [1] указаны условия существования слабого решения u уравнения Навье—Стокса, имеющего дробную производную $\mathscr{D}^\alpha_{0+}u$, $0<\alpha<1/2$, по временной переменной. Для этой производной получена оценка нормы в L_2. Впервые этот вопрос был поставлен в работе J. L. Lions [1], где такая оценка была получена при $0<\alpha<1/4$ и с некоторыми ограничениями на размерность пространства.

41.9. В статье K. Senator [1] получены шаудеровские и L_p-оценки для решений *u* эллиптических краевых задач с граничными условиями, содержащими псевдодифференциальные операторы с негладкими символами, а также нормальные производные дробного порядка.

41.10. В работе H. Berens, U. Westphal [2] с помощью преобразования Лапласа и теории полугрупп решена задача Коши относительно оператора ω

$$\frac{d}{dx}\,\omega(x)f+\mathcal{D}^{\gamma}_{0+}\,\omega(x)f,\quad x>0,$$

$$\lim_{x\to+0}\|\omega(x)f-f\|_{L_p}=0,\quad 0<\gamma<1.$$

Здесь $\omega(x)f$ — значение оператора $\omega(x)$ на функциях $f\in L_p(0,\infty)$, а $\mathcal{D}^{\gamma}_{0+}$ — оператор дробного дифференцирования Римана — Лиувилля (5.6).

42.1. В работе A. Z.-A. M. Tazali [1] методами Пикара и неподвижной точки Шаудера доказаны две теоремы об условиях существования решения $y(x)$ задачи типа Коши

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}y)(x)=f(x,\,y(x)),\quad a<x\leqslant a+h,\quad h>0;$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha-1}_{a+}y)(x)|_{x=a}=b,\quad 0<\alpha\leqslant 1,$$

которые обобщают известные результаты Каратеодори для случая $\alpha=1$.

42.2. Ряд работ В. К. Вебера [1, 3, 5—8], М. И. Иманалиева, В. К. Вебера [1] посвящен исследованию систем линейных дифференциальных уравнений дробного порядка главным образом в пространствах обобщенных функций V' (см. § 9, п. 1° (к § 8)).

В работе В. К. Вебера [3] дано решение задачи Коши для системы уравнений $y^{(\alpha)}(x)=Ay(x)$, $0<\alpha<2$, с постоянной матрицей A. Асимптотическое поведение при $x\to\infty$ различных решений этой системы (в том числе фундаментальной матрицы) изучено в работах М. И. Иманалиева, В. К. Вебера [1] и В. К. Вебера [5, 6]. Задача Коши для системы

$$y^{(\alpha)}(x)=A(x)\,y(x)+f(x),\quad n-1<\alpha\leqslant n,\quad n=1,\,2,\,\ldots \tag{43.3}$$

с непрерывной матрицей-функцией $A(x)$ при $x\geqslant 0$ рассмотрена в работе В. К. Вебера [7], а фундаментальное решение такой системы с постоянной матрицей $A(x)=A=\text{const}$ — в работе В. К. Вебера [8], см. случай одного уравнения в статье В. К. Вебера [1].

В работе В. К. Вебера [6] установлены необходимые и достаточные условия пассивности более общих, чем (43.3), систем вида

$$Ay'(x)+By^{(\alpha)}(x)+Cy(x)=g(x),\quad 0<\alpha<1, \tag{43.4}$$

с постоянными матрицами A, B, C и найдена квазиасимптотика их фундаментальных решений при $x\to\infty$ (определение указанных понятий см., например, в книгах В. С. Владимирова [2, с. 86, 278] и В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова, Б. И. Завьялова [1, с. 34, 58, 209]). Заметим, что решение уравнения вида (43.4) при $0<\alpha<1$ методом преобразования Лапласа построено также в работе А. Сейтказиевой [1].

К уравнению вида (43.4):

$$y'(x)=q-\lambda\int_0^x[1+b(x-t)^{-\alpha}]\,y'(t)\,dt,\quad 0<\alpha<1,$$

сводится задача изучения полива по бороздам (Я. В. Быков, А. И. Боташев [1]). Другие примеры прикладных задач, сводящихся к уравнениям и системам дифференциальных уравнений с дробными производными, приведены в работе В. К. Вебера [8].

42.3. В работе H. M. Srivastava, S. Owa, K. Nishimoto [1] в терминах оператора дробного дифференцирования $f_\nu(z)\equiv(\mathcal{D}^{\nu}_{+,\pi}f)(z)$ (см. (22.17), (22.18), (22.21) в случае контуров $C=\mathcal{L}_\pi(z)$ или $C=\mathcal{L}_0(z)$) доказана следующая

Теорема 43.1. *Пусть $\varphi(\nu;\,z)\neq 0$ — аналитическая в области D плоскости z функция. Тогда, если*

$$\varphi(\nu;\,z)=\exp\left\{\int\frac{\varphi(\nu+1;\,z)}{\varphi(\nu;\,z)}\,dz\right\}\Big/\left(\exp\left\{\int\frac{\varphi(\nu+1;\,z)}{\varphi(\nu;\,z)}\,dz\right\}\right)_{-\nu}$$

и существует $f_\nu(z)$, то уравнение $f_\nu(z)=\varphi(\nu;\, z)\, f(z)$, $z\in D$, имеет решение вида

$$f(z)=k\left(\exp\left\{\int\frac{\varphi(\nu+1;\, z)}{\varphi(\nu;\, z)}\,dz\right\}\right)_{-\nu},\quad k\neq 0-\text{const},\quad z\in D.$$

В работе K. Nishimoto, S. Owa, H. M. Srivastava [1] такого же рода результат получен и для более общего уравнения $f_\nu(z)=\varphi(\nu;\, z)\, f(z)+\varphi(\nu;\, z)\, g(z)$.

42.4. В работах K. Wiener [1, 2] (см. также цитируемые там другие работы этого автора) на основе теории дробных интегралов в смысле конечной части по Адамару (см. § 5, п. 5°) проводится исследование различных дифференциальных уравнений дробного порядка, в частности встречающегося в теории полярографии уравнения

$$(\mathcal{D}_{0+}^{1/2}y)(x)-cx^a y(x)=x^{-1/2},\quad x>0,\quad -1/2<a\leqslant 0.$$

42.5. А. М. Нахушев [2] рассмотрел вопрос о корректности решения уравнения

$$K_\alpha\varphi\equiv\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}x^{\beta}\varphi(x)+\sum_{j=1}^{m}a_j(x)\,\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_j}\varphi(x)+b(x)\,\varphi(x)=c(x),\quad 0<x<1,$$

где

$$\begin{array}{l}0<\alpha<1,\ \ \beta>0,\ \ \alpha>\alpha_1>\ldots>\alpha_m>0,\\ b(x),\ \ c(x)\in C([0,\ 1]).\end{array}\qquad a_j(x)\in\begin{cases}C^1([0,\ 1]), & \text{если }\ \alpha_j>0,\\ C([0,\ 1]), & \text{если }\ \alpha_j<0.\end{cases}$$

Пусть $C_\gamma((0,\ 1))$ — банахово пространство функций $\varphi(x)\in C((0,\ 1])$ с нормой $\|\varphi\|_\gamma=\max\limits_{x\in[0,1]}|x^\gamma\varphi(x)|$, γ — некоторая постоянная. А. М. Нахушев показал, что если $\beta<\alpha-(\operatorname{sign}\alpha_j+1)\,\alpha_j/2$, то для любого $c(x)\in C_0((0,\ 1))$ существует и единственно решение данного уравнения из пространства $C_\beta((0,\ 1))$.

В работе А. М. Нахушева [3] рассматривается смешанная краевая задача для уравнения $y^m u_{xx}+u_{yy}+a(x,\ y)\,u_x+b(x,\ y)\,u_y+c(x,\ y)\,u=0$ в ограниченной области $D\in\{y>0\}$, примыкающей к отрезку $0<x<1$ оси Ox. Краевое условие на этом отрезке имеет вид $\lim\limits_{y\to 0}K_1u=\psi(x)$, $0<x<1$, где K_1—значение указанного выше оператора K_α при $\alpha=1$. На основе установленного в работе принципа экстремума была доказана устойчивость и единственность решения задачи и рассмотрен вопрос о его существовании.

42.6. Т. С. Алероев [1, 2] исследовал спектр задачи Дирихле для дифференциального уравнения при $0<\alpha<1$ вида

$$u''(x)+a(x)\,\mathcal{D}_{0+}^{\alpha}u(x)=f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.\tag{43.5}$$

Он показал, что при $\beta\geqslant 0$ в классе функций $C[0,\ 1]\cap C^2(0,\ 1]$ задача с условиями $u(0)+\beta u'(0)=u(1)=0$ и $f(x)=0$, $a(x)=\lambda$ не имеет отрицательных собственных значений, а задача с условиями $\alpha u(0)+\beta u'(0)=\gamma$, $\bar\alpha u(1)+\bar\beta u'(1)=\bar\gamma$, $a(x)=\lambda$ имеет не более чем счетное множество собственных значений. Также для собственных значений $\lambda=\lambda_k$ задачи $a(x)=\lambda$, $u(0)=0$, $u(1)=0$ было установлено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{-2}\leqslant\dfrac{1}{16}\,\Gamma^2(2-\alpha)$. Здесь также отметим, что А. М. Нахушев [5] показал ранее, что $\lambda=\lambda_k$ является собственным значением последней задачи тогда и только тогда, когда λ_k является нулем функции Миттаг-Леффлера $E_{2-\alpha,\,2}(-\lambda)$, см. (1.91). Все такие достаточно большие по модулю нули являются простыми и имеют оценку $\lambda_k=O(k^{2-\alpha})$, $k\to\infty$ (см. М. М. Джрбашян [2, с. 142]).

42.7. Р. М. Малаховская и Е. Д. Шихмантер [1], применив некоторые формулы реализации операторов (см., например, И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2, с. 151]), указали способ построения обобщенного решения задачи Коши для интегродифференциального уравнения

$$Q_n\left(\frac{d}{dx}\right)y(x)-a\int_0^x\frac{y(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt=f(x),\quad x>0,$$

с условиями $u^{(j)}(0)=a_j$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, где $0<\alpha<1$, причем α — рациональное число, а $Q_n(x)$ — многочлен некоторой степени n.

42.8. И. П. Лесковский [1] построил линейно независимые решения однородного уравнения (42.34) с несовпадающими показателями α_j, $-1 \leqslant \alpha_j < 0$, в виде функции Миттаг-Леффлера (1.91). Впервые частное решение неоднородного уравнения (42.34) с $\alpha_j = (j-1)/n$ было найдено в работе H. T. Davis [2] (см. (4.6), а также § 4, п. 2°, 2.5 и § 30 и 34).

Уравнение такого же типа с постоянными коэффициентами

$$\lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\Gamma(\alpha_j)} \int_x^c (y-x)^{\alpha_j - 1} f(y)\,dy = 0, \quad \operatorname{Re}\alpha_j > 0$$

изучил J. Alonso [1]. Он показал, что его решение имеет вид $f(x) = e^{-\eta x}$ тогда и только тогда, когда параметр η удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re}\eta > 0, \quad \lambda_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \eta^{-\alpha_j} = 0, \quad c = \infty,$$

а также изучил ряд свойств решений соответствующего неоднородного уравнения для случая $n=1$.

42.9. Уравнение (42.34) с кусочно-постоянными коэффициентами в пространстве обобщенных функций исследовалось в работе А. И. Кочуры и А. В. Диденко [1].

42.10. Абстрактная задача Коши для уравнения гипергеометрического вида

$$t\frac{d}{dt}\prod_{j=1}^{q}\left(t\frac{d}{dt} + \beta_j - 1\right)u(t) - At\prod_{j=1}^{p}\left(t\frac{d}{dt} + \alpha_j\right)u(t) = 0, \quad t > 0,$$

где α_j, β_j — постоянные, а A — некоторый замкнутый линейный оператор, рассматривалась в работах L. R. Bragg [1, 2]. Там были получены формулы связи между решениями этого уравнения при разных значениях параметров, выражаемые через дробные интегралы. Эти формулы были использованы при исследовании задачи Коши для вырождающегося уравнения гиперболического типа

$$u_{tt} - t^m u_{xx} + \nu t^{m/2-1} u_x = 0, \quad t > 0, \quad m \geqslant 2,$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x).$$

42.11. В работе Ю. Л. Рабиновича, С. В. Нестерова [1] рассматривались дифференциальные операторы $K_n u$:

$$K_n u = \sum_{k=0}^{n} P_k(z)\frac{d^{n-k}u}{dz^{n-k}} = 0, \tag{43.6}$$

коэффициенты которых $P_k(z)$ являются многочленами некоторых степеней. Установлены условия, при которых порядок n оператора (43.6) можно понизить с помощью дробных производных, определяемых по формулам (22.30), (22.33′) и аналогичной (22.33′) формуле для случая $z_0 = \infty$.

В работе С. В. Нестерова [1] такие дробные производные использовались при построении решений дифференциального уравнения класса Фукса с s особыми точками

$$\prod_{k=1}^{s}(z-a_k)^n u^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} Q_{(s-1)j}(z)\prod_{k=1}^{s}(z-a_k)^{n-j}u^{(n-j)} = 0,$$

где $Q_m(z)$ — многочлены степени m.

42.12. Ряд авторов применяли методы дробного интегродифференцирования для решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка вида (43.6) с многочленными коэффициентами.

В работах M. A. Al-Bassam [2, 3, 5—7], см. также [9], рассмотрены классы дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, сводящиеся с помощью правила Лейбница (17.11) и других свойств дробных интегралов и производных к операторным уравнениям композиционного типа

$$I_{a+}^{-\alpha} p(x)\, I_{a+}^{-1} q(x)\, I_{a+}^{\alpha+n-1} y(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{43.7}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ представляют собой произведения вида $\prod_{k=1}^{m}(a_k + b_k x)^{\alpha_k} e^{\mu x}$. Для некоторых классов дифференциальных уравнений 2-го порядка установлены необходимые и достаточные условия эквивалентности уравнению (43.7) и построены решения. В качестве примеров рассмотрены уравнения для функций Гаусса, Куммера, Лагерра, Лежандра и Якоби, решения которых на основании (43.7) представляются через соответствующие дробные интегралы и их композиции (см. § 9, п. 3°, § 10).

В работе T. P. Higgins [6] предложен оригинальный метод для получения общих решений неоднородных гипергеометрических уравнений, основанный на применении прямого и обратного преобразований Лапласа (1.119), (1.120) и преобразований Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) по параметрам уравнений.

В работах K. Nishimoto [7—11] операторы дробного дифференцирования f_ν (см. § 43, п. 2°, 42.3) использовались при изучении частных решений дифференциальных уравнений 2-го порядка класса Фукса, связанных со специальными функциями Гаусса, Куммера и другими.

42.13. В работе В. П. Федосова, Н. Н. Яненко [1] показано, что уравнения в частных производных полуцелой степени

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{D}_{+,x}^{k/2} \mathcal{D}_{+,y}^{(n-k)/2} u(x, y) = f(x, y), \quad a_k - \mathrm{const},$$

(см. § 24, п. 2°) могут быть исследованы путем разложения их операторов на композиции n обратимых операторов вида $\mathcal{D}_{+,x}^{1/2} + \alpha_j \mathcal{D}_{+,y}^{1/2}$, где

$$\mathcal{D}_{+,x}^{1/2} u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{-1/2} u(t, y)\, dt,$$

а α_j — корни некоторого характеристического многочлена. В частности, при $n=1$, $a_0 = \alpha$, $a_1 = 1$ указана формула общего решения этого уравнения:

$$u(x, y) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{s} (s-\xi)^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} [f(\xi, y + \alpha^2 (x-s)) -$$

$$- \alpha f(s, y + \alpha^2 (x-s) + \xi - s)]\, d\xi ds + \begin{cases} q(y+\alpha^2 x), & \alpha \leqslant 0, \\ 0, & \alpha > 0, \end{cases}$$

где $q(t)$ — произвольная функция. Также подробно разобран случай $n=2$.

42.14. В. Я. Ярославцева [1] построила операторы преобразования F_j, $j=1, 2$, оператора P в D^2, т. е. операторы F, обладающие свойством $PFv = FD^2 v$ на элементах v некоторого функционального пространства, где

$$P = -\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 2\nu \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi} - \nu^2 \right), \quad D = -i \frac{d}{d\varphi}.$$

В частности, при действительном $\nu > 0$ оператор F_1 имеет вид

$$F_1 v = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu)} (\sin \varphi)^{1-2\nu} \int_0^\varphi v(t) (\cos t - \cos \varphi)^{\nu - 1} dt,$$

а при остальных значениях ν — вид свертки основной функции v с функционалом $\sin^{2\nu} (\varphi/2)$.

Полученные результаты были применены при сведении задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k P^{n-k} u = 0, \quad a_k - \mathrm{const}, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k w^{2n-2k} = 0.$$

42.15. В работе L. Biacino, D. Miserendino [2] рассматриваются свойства оператора

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leqslant 4} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad x = (x_1, x_2),$$

где $D^\alpha u$ — дробные производные, определенные в работах L. Biacino, D. Miserendino [1, 3] (см. также § 29, п. 2°, 24.10). На основе представления в форме

$$Lu = \sum_{|\alpha| \in \{2, 3, 4\}} a_\alpha(x) D^\alpha u + \sum_{|\alpha| < 2} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

указаны условия, когда индекс Lu равен нулю, и изучено действие оператора L в пространствах Соболева.

42.16. В работе I. G. Sprinkhuizen-Kuyper [1] доказан ряд теорем о решении задачи Коши для уравнений вида

$$\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu}{x}\frac{d}{dx}\right)^k f(x) = g(x), \quad 0 < x \leqslant 1,$$

с условиями типа $f^{(j)}(1) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, l + 2k - 1$. Указанная задача при $g(x) \in C([0, 1])$ в классе $f(x) \in C^{2k+l}([0, 1])$ разрешима формулой $f(x) = I_\nu^{2k, l} g(x)$, где

$$I_\nu^{\mu, \lambda} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + \mu)} \int_x^1 \left(\frac{y^2 - x^2}{2}\right)^{\lambda+\mu-1} y^{1-\mu} {}_2F_1\left(\lambda + \frac{\mu + \nu - 1}{2}, \frac{\mu}{2};\right.$$

$$\left.\lambda + \mu;\ 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\, dy.$$

В работе изучены также некоторые свойства этого оператора с функцией Гаусса в ядре.

Эти результаты получили значительное развитие в работах A. C. McBride [7, 9] и I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova [2], где рассматривались обобщающие (9.5) операторы. Для них найдены интегральные представления в виде композиции операторов дробного интегродифференцирования типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) и в терминах G-функции Мейера вида (10.48). Частные случаи таких представлений, приводящие к операторам с функцией Гаусса типа (10.18), рассматривались ранее в работе I. G. Sprinkhuizen-Kuyper [1].

42.17. В работах R. Tremblay [2] и R. Tremblay, B. J. Fugère [1] исследованы свойства операторов

$$D^{\alpha, r} = D_z^\alpha (z^\alpha D_z^\alpha)^r, \quad D_{n, r_1, \ldots, r_m}^{\beta, \delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m} = \left\{D_z^{(1-\delta), \beta} \prod_{j=1}^m (zD + \alpha_j)^{r_j} z^{\delta\beta}\right\}^n,$$

где $D = \dfrac{d}{dz}$, D_z^α, $\alpha \in C$, — дробная производная (22.4); β, $\alpha_j \in C$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$; $\delta = 0$ или $\delta = 1$; r, n, r_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — целые неотрицательные числа. В частности, получены операторные равенства

$$D^{\alpha, r} D^{\beta, r} = D^{\alpha+\beta, r}, \quad D_{n, r_1, \ldots, r_m}^{\beta, \delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m} = D_z^{(1-\delta)\theta\beta n} z^{\delta(1-\theta)\beta n} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (zD + \alpha_j - \beta\theta n + \beta i)^{r_j} z^{\delta\theta\beta n} D_z^{(1-\delta)(1-\theta)\beta n},$$

где $\theta = 0$ или $\theta = 1$, а также представление $D_{n, r_1, \ldots, r_m}^{\beta, \delta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m}$ в терминах операторов $z^{(1-2\gamma)\omega + (1-\gamma)k} D^k z^{(2\gamma-1)\omega + \gamma k}$, где $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$, $\omega \in C$, $k = 0, 1, \ldots, n(r_1 + \ldots + r_m)$.

В качестве примеров даны новые операторные формулы для обычных дифференциальных операторов D и интегральных операторов D_z^{-1}.

Литература

Адамар Ж. 1) Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.

Акопян С. А. 1) Интегральные преобразования, связанные с дифференциальными операторами бесконечного порядка // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1960. Т. 13, № 1. С. 3—27.

Акопян С. А., Нерсесян А. Б. 1) Некоторые интегро-дифференциальные операторы и разложения в ряды, аналогичные рядам Шлемильха // Докл. АН АрмССР. 1958. Т. 27, № 4. С. 201—207.

Алероев Т. С. 1) Задача Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения 2-го порядка с дробными производными в младших членах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 341.

2) Спектральный анализ одного класса несамосопряженных операторов // Там же. 1984. Т. 20, № 1. С. 171—172.

Алимов Ш. А. 1) Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Там же. 1972. Т. 8, № 9. С. 1609—1626.

Андреев А. А., Волкодавов В. Ф., Шевченко Г. Н. 1) О функции Римана // Дифференц. уравнения: Тр. мат. кафедр пед. ин-тов РСФСР. Рязань, 1974. Вып. 4. С. 25—31.

Арутюнян Н. Х. 1) Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1959. Т. 12, № 2. С. 77—105.

2) Плоская контактная задача теории ползучести // Прикл. мат. и мех. 1959. Т. 23, № 5. С. 901—924.

Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. 1) Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения // Там же. 1963. Т. 27, № 5. С. 813—820.

Аткинсон Ф. В. 1) Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 1. С. 3—14.

Ахиезер Н. И. 1) О некоторых спаренных интегральных уравнениях // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 3. С. 333—336.

2) К теории спаренных интегральных уравнений // Уч. зап. Харьк. ун-та. Сер. 4. 1957. Т. 80 (25). С. 5—31.

Ахиезер Н. И., Щербина В. А. 1) Об обращении некоторых сингулярных интегралов // Там же. С. 191—198.

Бабенко В. Ф. 1) О поперечниках некоторых классов сверток // Укр. мат. журн. 1983. Т. 35, № 5. С. 603—607.

Бабенко К. И. 1) К теории уравнений смешанного типа: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1951. 196 с.

2) О принципе максимума для уравнения Эйлера — Трикоми // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 777—782.

Бабенко Ю. И. 1) Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. М.: Химия, 1986. 144 с.

Бабич В. М. и др. 1) Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.

Баблоян А. А. 1) Решение некоторых парных интегральных уравнений // Прикл. мат. и мех. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 1015—1023.

Бадалян Г. В. 1) К вопросу обобщений формулы Тейлора // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 2. С. 265—268.

Бакаев Н. Ю., Тарасов Р. П. 1) Полугруппы и один метод устойчивого решения уравнения Абеля // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 3—9.

Бакиевич Н. И. 1) Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^\alpha u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \mu^2\eta^\alpha u = 0$ //

Волж. мат. сб. Куйбышев: Пед. ин-т, 1963. Вып. 1. С. 42—52.
Бари Н. К. 1) Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 935 с.
Бари Н. К., Стечкин С. Б. 1) Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483—522.
Бейтмен Г., Эрдейи А. 1) Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
2) То же. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. 1966. 295 с.
3) То же. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. 1967. 299 с.
4) Таблицы интегральных преобразований. В 2 т. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М.: Наука, 1970. 327 с.
Белинский Э. С., Белый В. И. 1) Об интегральных представлениях с союзными ядрами и обобщенных интегро-дифференциальных операторах // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наук. думка, 1971. Вып. 2. С. 21—36.
Белоносов С. М. 1) Об одном методе решения плоских статических задач теории упругости для двусвязных областей // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 3. С. 341—365.
2) Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 231 с.
Белый В. И. 1) О некоторых свойствах дробных производных в комплексной области и их применение в теории приближения функций // Доп. АН УРСР. 1965. № 2. С. 167—170.
2) Вопросы приближения функций некоторых классов в комплексной области, ч. I; II // Укр. мат. журн. 1965. Т. 17, № 1. С. 3—17; № 2. С. 3—18.
3) К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Там же. 1967. Т. 19, № 2. С. 104—109.
4) Приближение функций с непрерывной дробной производной // Докл. АН УССР. Сер. А. 1967. № 11. С. 994—997.
5) О приближении квазигладких функций комплексного переменного // Изв. АН АрмССР. Мат. 1969. Т. 4, № 5. С. 364—393.
6) К вопросу об интегральных представлениях регулярных функций в круговом кольце // Там же. 1977. Т. 12, № 2. С. 147—156.
Белый В. И., Волков Ю. И. 1) Некоторые применения интегро-дифференциальных операторов произвольного порядка в теории приближения функций // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1968. № 10. С. 3—12.
Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И. 1) Мероморфность функции P^λ // Функц. анализ и его прил. 1969. Т. 3, № 1. С. 84—85.
Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. 1) Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
Бессонов Ю. Л. 1) О существовании смешанных производных дробного порядка в L_p // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 4. С. 163—170.
Бетилгириев М. А. 1) Об асимптотике интегрального уравнения Винера — Хопфа в случае дробных нулей символа. Ростов н/Д, 1982. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 15.10.82, № 5166.
2) Асимптотика решений уравнения Винера — Хопфа в случае дробных нулей символа // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1984. № 3. С. 63—65.
Бжихатлов Х. Г. 1) Краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения и сингулярные интегральные уравнения третьего рода // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 3—14.
Бжихатлов Х. Г., Карасев И. М., Лесковский И. П., Нахушев А. М. 1) Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений: Метод. пособие для студентов по спец. курсам. Нальчик: Кабард.-Балкар. ун-т, 1972. 290 с.
Бицадзе А. В. 1) К проблеме уравнений смешанного типа // Итоги науки: Тр. Мат. ин-та АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 41. 60 с.
2) Уравнения смешанного типа // Итоги науки. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Вып. 2.
3) Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
Бородачев Н. М. 1) Об одном классе решений тройных интегральных уравнений // Прикл. мат. и мех. 1976. Т. 40, вып. 4. С. 655—661.
Бохнер С. 1) Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.
Брычков Ю. А. 1) К теории пространств с доминирующей смешанной производной // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 679—694.
Брычков Ю. А., Глеске Х.-Ю., Маричев О. И. 1) Факторизация интегральных преобразований типа свертки // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 3—41.
Брычков Ю. А., Маричев О. И., Якубович С. Б. 1) F_3-transformation / Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, S. B. Yakubovich // Intern. conf. on complex analysis and applications. Varna, 1985. Summaries. P. 54.
Бугров Я. С. 1) Дробные разностные операторы и классы функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 172. С. 60—70.
Бухгейм А. Л. 1) Карлемановские оценки для операторов Вольтерра и единственность обратных задач // Неклассические проблемы математической физики. Новосибирск: СО АН, 1981. С. 56—64.
2) Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, СО, 1983. 207 с.

Быков Я. В., Боташев А. И. 1) О свойствах спецфункций Ю. Н. Работнова и обращении интегральных операторов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1965. Вып. 3. С. 3—22.

Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г. 1) Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 151—180.

Вакулов Б. Г. 1) Операторы типа потенциала на сфере в обобщенных пространствах Гельдера. Ростов н/Д, 1986. 31 с. Деп. в ВИНИТИ 6.03.86, № 1563-В.

Васильев И. Л. 1) О единственности решения системы уравнений Абеля с постоянными коэффициентами // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 2. С. 105—107.

2) Операторы типа потенциала с вырождающимся символом. Мн., 1981. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 1.07.81, № 3217.

3) О методе эрмитовых форм в теории разрешимости систем уравнений Абеля. Мн., 1981. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 1.07.81, № 3218.

4) Системы интегральных уравнений с ядром Абеля на отрезке вещественной оси // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982. № 2. С. 47—53.

5) Операторы типа потенциала с вырожденным символом // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 4. С. 300—302.

6) Системы обобщенных уравнений Абеля с отражением // Науч. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 151—153.

Ващенко-Захарченко М. Е. 1) Of fractional differentiation / M. Wastchenxo-Zachartchenxo // Quart. J. Math. Ser. 1. 1861. Vol. 4. P. 237—243.

Вебер В. К. 1) Об одном дифференциальном уравнении нецелого порядка // Сб. тр. аспирантов и соискателей Кирг. ун-та. Сер. мат. наук. 1973. Вып. 10. С. 7—14.

2) Об одном пространстве основных функций в теории лиувиллевского дифференцирования // Тр. Кирг. ун-та. Сер. мат. наук. 1974. Вып. 9. С. 164—168.

3) Структура общего решения системы $y^{(\alpha)}=Ay$, $0<\alpha\leqslant 1$ // Там же. 1976. Вып. 11. С. 26—32.

4) Обобщенное лиувиллевское дифференцирование; свертка, преобразование Фурье // Там же. 1976. Вып. 12. С. 11—25.

5) Асимптотическое поведение решений линейной системы дифференциальных уравнений дробного порядка // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1983. Вып. 16. С. 119—125.

6) Пассивность линейных систем дифференциальных уравнений с дробными производными и квазиасимптотика решений // Там же. 1983. Вып. 16. С. 349—356.

7) К общей теории линейных систем с дробными производными // Там же. 1985. Вып. 18. С. 301—305.

8) Линейные уравнения с дробными производными и постоянными коэффициентами в пространствах обобщенных функций // Там же. 1985. Вып. 18. С. 306—312.

Вебер В. К., Урдолетова А. Б. 1) Пространство обобщенных функций и операции дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля // Тр. молодых ученых. Мат., физ., хим. Фрунзе: Кирг. ун-т, 1974. Вып. 2. С. 16—21.

Векуа И. Н. 1) Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сообщ. АН ГССР. 1945. Т. 6, № 3. С. 177—183.

2) Об одном обобщении интеграла Пуассона для полуплоскости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 56, № 3. С. 229—231.

3) Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.

Вирченко Н. А. 1) О некоторых гибридных парных интегральных уравнениях // Укр. мат. журн. 1984. Т. 36, № 2. С. 139—142.

2) Парные интегральные уравнения с гипергеометрическими функциями ${}_2F_1(a, b; c; -xt)$, ${}_3F_2(\nu, \alpha_1, \alpha_2; \mu+\nu, b_1; -xt)$ // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ. мат. и техн. науки. 1986. № 2. С. 3—5.

Вирченко Н. А., Макаренко Л. Г. 1) О некоторых интегральных уравнениях с функциями Лежандра // Тр. науч. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». 1974. Канев, 1974. Вып. 1. С. 86—91.

2) О некоторых тройных интегральных уравнениях с бесселевыми функциями // Математическая физика. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 18. С. 72—76.

3) О некоторых парных интегральных уравнениях // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27, № 6. С. 790—794.

Вирченко Н. А., Пономаренко С. П. 1) Свойства обобщенного интегрального преобразования Мелера — Фока и его применение к решению парных интегральных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 2. С. 83—85.

Вирченко Н. А., Ромащенко В. А. 1) О некоторых тройных интегральных уравнениях с присоединенными функциями Лежандра // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1982. Вып. 46. С. 13—18.

Владимиров В. С. 1) Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 411 с.

2) Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И. 1) Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986. 304 с.

Волкодавов В. Ф. 1) Решение задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения // Волж. мат. сб. Куйбышев: Пед. ин-т, 1971. Вып. 8. С. 51—57.

Волкодавов В. Ф., Репин О. А. 1) Об одной краевой задаче для уравнения Эйлера — Дарбу с положительными параметрами // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 7. С. 1275—1277.

Вольтерра В. 1) Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

Воскобойников Ю. Е. 1) Обращение уравнения Абеля с использованием кубических сплайнов // Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. С. 180—189.

2) Регуляризующий алгоритм обращения уравнения Абеля // Инж.-физ. журн. 1980. Т. 39, № 2. С. 270—274.

Ву Ким Туан. 1) Интегральные преобразования типа Фурье в новом классе функций // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 7. С. 584—587.

2) Некоторые вопросы теории и приложений функций гипергеометрического типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1985. 118 с.

3) Об n-арных интегральных уравнениях // Укр. мат. журн. 1985. Т. 37, № 4. С. 430—437.

4) К теории обобщенных интегральных преобразований в некотором пространстве функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 3. С. 521—524.

5) О факторизации интегральных преобразований типа свертки в пространстве L_2^{Φ} // Докл. АН АрмССР. 1986. Т. 83. С. 7—10.

Ву Ким Туан, Якубович С. Б. 1) Интегральное преобразование Конторовича — Лебедева в новом классе функций // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 1. С. 11—14.

Ву Ким Туан, Маричев О. И., Якубович С. Б. 1) Композиционная структура интегральных преобразований // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 4. С. 786—790.

Габидзашвили М. А. 1) Весовые неравенства для анизотропных потенциалов // Математический анализ: Науч. тр. Груз. политехн. ин-та. 1985. № 3 (285). С. 48—57.

2) Весовые неравенства для интегралов типа потенциала в однородных пространствах // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 37—40.

3) Весовые неравенства для потенциалов Рисса и их обобщений // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 121, № 1. С. 37—40.

Гаймназаров Г. 1) О модулях гладкости дробного порядка функций, заданных на всей вещественной оси // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 3. С. 148—150.

Ганеев Р. М. 1) Об обобщенном интегральном уравнении Абеля // Дифференциальные уравнения и математическая физика: Науч. тр. Куйбышев. пед. ин-та. 1979. Т. 232. Вып. 1. С. 12—14.

2) Решение интегрального уравнения Абеля с постоянными коэффициентами // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1982. № 6. С. 14—18.

Гарнетт Дж. 1) Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 470 с.

Гахов Ф. Д. 1) Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. 1) Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.

Гейсберг С. П. 1) Обобщение неравенства Адамара // Сб. науч. тр. Ленингр. мех. ин-та. 1965. № 50. С. 42—54.

2) Аналоги неравенств С. Н. Бернштейна для дробной производной // Вопросы прикладной математики и геометрического моделирования: Краткие содержания докл. 25-й науч. конф., 24 янв.— 4 февр. 1967 г. Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 1967. С. 5—10.

3) Дробные производные ограниченных на оси функций // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1968. № 11. С. 51—69.

Гельман И. В. 1) Об интегралах типа потенциала в пространствах Орлича // Там же. 1960. № 2. С. 44—56.

Гельфанд И. М., Граев М. И. 1) Аналог формулы Планшереля для классических групп // Тр. Моск. мат. о-ва. 1955. Т. 4. С. 375—404.

Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. 1) Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962. 656 с.

Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. 1) Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958. 307 с.

2) Обобщенные функции и действия над ними. Там же, 1959. 470 с.

Гельфонд А. О. 1) Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 375 с.

Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. 1) Об одном обобщении ряда Фурье // Мат. сб. 1951. Т. 29, вып. 3. С. 477—500.

Гиндикин С. Г. 1) Анализ в однородных областях // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, вып. 4. С. 3—92.

2) Задача Коши для сильно однородных дифференциальных операторов // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 181—208.

Годунова Е. К., Левин В. И. 1) О некоторых интегральных неравенствах, содержащих производные // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1969. № 12. С. 20—24.

Гордеев А. М. 1) Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Волж. мат. сб. Куйбышев: Пед. ин-т, 1968. Вып. 6. С. 56—61.

Гохберг И. Ц. 1) О линейных уравнениях в нормированных пространствах // Докл. АН СССР. 1951. Т. 76, № 4. С. 477—480.

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. 1) Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 2. С. 43—118.

Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. 1) О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p // Studia math. 1968. Vol. 31, N 4. P. 347—382.

2) *О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p с весом* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 745—748.

3) Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1971. Т. 35, № 4. С. 940—964.

4.) Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.

5) О сингулярных интегральных уравнениях с неограниченными коэффициентами // Математические исследования. Кишинев: Ин-т мат. с ВЦ АН МССР, 1970. Т. 5, вып. 3. С. 46—57.

Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. 1) Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства // Инж.-физ. журн. 1963. Т. 6, № 10. С. 67—71.

Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. 1) Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 414 с.

Давтян А. А. 1) Гиперсингулярные интегралы и анизотропные потенциалы. Ереван, 1984. 25 с. Деп. в АрмНИИНТИ 8.01.85, № 1.

2) Пространства Соболева — Лиувилля с квазиоднородной нормой // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1986. № 5. С. 82—84.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т. 1) *Линейные операторы. Общая теория.* М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

Джрбашян М. М. 1) О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, № 5. С. 1024—1027.

2) Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.

3) Классы функций и их параметрическое представление // Современные проблемы теории аналитических функций // М.: Наука, 1966. С. 118—137.

4) Обобщенный оператор Римана — Лиувилля и некоторые его применения // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177, № 4. С. 767—770.

5) Обобщенный оператор Римана — Лиувилля и некоторые его применения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 5. С. 1075—1111.

6) Расширение квазианалитических классов Данжуа — Карлемана // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 4. С. 782—785.

7) Расширение квазианалитических классов Данжуа — Карлемана // Изв. АН АрмССР. Мат. 1968. Т. 3, № 3. С. 171—248.

8) Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма — Лиувилля // Там же. 1970. Т. 5, № 2. С. 71—97.

9) Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 5. С. 1054—1058.

10) Базисность биортогональных систем, порожденных краевыми задачами для дифференциальных операторов дробного порядка // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики: Сб. докл. 7-го сов.-чехосл. семинара. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1982. С. 103—111.

11) Интерполяционные и спектральные разложения, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Мат. 1984. Т. 19, № 2. С. 81—181.

Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. 1) Критерии разложимости функций в ряды Дирихле // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1958. Т. 11, № 5. С. 85—106.

2) О применении некоторых интегро-дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, № 2. С. 210—213.

3) Некоторые интегро-дифференциальные операторы и связанные с ними квазианалитические классы функций // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. 1958. Т. 11, № 5. С. 107—120.

4) Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 4. С. 747—750.

5) Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 89—179.

6) Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Мат. 1968. Т. 3, № 1. С. 3—29.

Джрбашян М. М., Саакян Б. А. 1) Классы формул и разложения типа Тейлора — Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 1. С. 69—122.

2) О разложениях в ряды обобщенно-абсолютно-монотонных функций // Anal. Math. 1981. Vol. 7, N 2. P. 85—106.

Дзядык В. К. 1) О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(0<s<1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1953. Т. 17, № 2. С. 135—162.

Диденко А. В. 1) О решении составного уравнения типа Абеля в обобщенных функциях. Одесса, 1984. 11 с. Деп. в УкрНИИНТИ 15.08.84, № 1464.

2) О решении систем некоторых сверточных уравнений в пространстве обобщенных функций. Мн., 1984. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 11.09.84, № 6170.

3) О решении одного класса интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка. Одесса, 1984. 13 с. Деп. в УкрНИИНТИ 1.04.85, № 662.

Диткин В. А., Прудников А. П. 1) Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.

Докторский Р. Я., Осипов А. В. 1) Обращение уравнения Абеля с помощью кубических сплайнов // Вычислительные системы и алгоритмы. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. С. 114—121.

Дудучава Р. В. 1) О сингулярных интегральных операторах в пространстве Гельдера с весом // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 1. С. 16—19.

2) Об ограниченности оператора сингулярного интегрирования в гельдеровых пространствах с весом // Математические исследования. Кишинев: Ин-т мат. с ВЦ АН МССР, 1970. Т. 5, вып. 1. С. 56—76.

Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П. 1) Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техн. Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 42—129.

Евсин В. И. 1) Задача Хольмгрена для одного уравнения с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 1. С. 41—48.

2) О разрешимости задачи Хольмгрена для одного эллиптического вырождающегося уравнения // Там же. 1975. Т. 11, № 1. С. 38—46.

Есмаганбетов М. Г. 1) О связях модулей гладкости производной с наилучшим приближением и коэффициентами Фурье функции в $L_p[0, 2\pi]$ $(1<p<\infty)$. Алма-Ата, 1982. 14 с. Деп. в ВИНИТИ 28.01.82, № 380.

2) Условия существования смешанных производных Вейля в $L_p([0, 2\pi]^2)$ $(1<p<<\infty)$ и их структурные свойства. Алма-Ата, 1982. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 8.04.82, № 1675.

Есмаганбетов М. Г., Наурызбаев К. Ж., Смаилов Е. С. 1) Об оценках модулей гладкости положительного порядка в L_p. Алма-Ата, 1981. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 12.06.81, № 2859.

Ефимов А. В. 1) О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и Фейера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 1. С. 81—116.

2) О приближении непрерывных функций суммами Фурье // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, вып. 2. С. 225—227.

3) О приближении периодических функций суммами Валле — Пуссена, II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24, № 3. С. 431—468.

4) Линейные методы приближения некоторых классов непрерывных периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 62. С. 3—47.

Желудев В. А. 1) О корректности одного класса уравнений в свертках // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1974. Т. 14, № 3. С. 610—630.

2) Производные дробного порядка и численное решение одного класса уравнений в свертках // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 11. С. 1950—1960.

Жук В. В. 1) Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Вопр. мех. и процессов упр. Л., 1986. № 8. С. 88—94.

Забрейко П. П. 1) О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра // Лит. мат. сб. 1967. Т. 7, № 2. С. 281—287.

Зигмунд А. 1) Тригонометрические ряды. В 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.

2) То же. Т. 2. 538 с.

Ибрагимов И. И. 1) О наилучшем приближении функции, s-я производная которой имеет разрыв первого рода // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89, № 6. С. 973—975.

2) О наилучшем приближении в среднем функции, s-я производная которой имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1, 1]$ // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 1. С. 13—16.

Ильин В. П. 1) Об одной теореме Г. Х. Харди и Дж. Е. Литтлвуда // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1959. Т. 53. С. 128—144.

2) Свойства некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных, заданных в n-мерной области // Там же. 1962. Т. 66. С. 227—363.

Иманалиев М. И., Вебер В. К. 1) Об одном обобщении функции типа Миттаг-Леффлера и его применении // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1980. Вып. 13. С. 49—59.

Иосида К. 1) Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Кабанов С. Н. 1) Теорема равносходимости для одного оператора дробного дифференцирования // Исследования по современным проблемам математики: Матер. конф. молодых ученых Саратов. ун-та. Саратов, 1984. С. 38—41. Деп. в ВИНИТИ 23.05.84. № 3318.

Капилевич М. Б. 1) О конфлюэнтных гипергеометрических функциях Горна // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 9. С. 1239—1254.

2) О сингулярных задачах Коши и Трикоми // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177, № 6. С. 1265—1268.

3) Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1465—1483.

4) О решении итерированных задач Коши в базисных рядах // Докл. АН СССР, 1969. Т. 185, № 1. С. 28—31.

Карапетянц Н. К. 1) Интегральное уравнение Винера—Хопфа с символом, имеющим нуль дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1471—1478.

Карапетянц Н. К., Рубин Б. С. 1) Радиальные потенциалы Рисса на круге и операторы дробного интегрирования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 6. С. 1299—1302.

2) Об операторах дробного интегрирования в пространствах с весом // Изв. АН АрмССР. Мат. 1984. Т. 19, № 1. С. 31—43.

3) Локальные свойства дробных интегралов и пространства ВМО на отрезке вещественной оси. Ростов н/Д, 1985. 43 с. Деп. в ВИНИТИ 6.02.86, № 869-В.

4) Об интегральных уравнениях первого рода со слабой особенностью с радиальной правой частью // Дифференциальные и интегральные уравнения: Межвуз. сб. науч. ст. Элиста: Калмыцк. ун-т, 1986. С. 87—106.

Карапетянц Н. К., Самко С. Г. 1) Сингулярные операторы в свертках с разрывным символом // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 1. С. 44—61.

2) Сингулярные интегральные операторы со сдвигом Карлемана в случае кусочно-непрерывных коэффициентов, I // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1975, № 2. С. 43—54.

Карасев И. М. 1) К вопросу интегрирования одного типа вырожденного гипергеометрического уравнения // Уч. зап. Кабард.-Балкар. пед. ин-та. Нальчик: Кабард.-Балкар. кн. изд-во, 1957. Вып. 17. С. 29—38.

Кашин Б. С., Саакян А. А. 1) Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.

Килбас А. А. 1) Степенно-логарифмические интегралы в пространствах гельдеровских функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975, № 1. С. 37—43.

2) Применение одного интегрального представления к исследованию нетеровости интегральных операторов с логарифмическими ядрами // Там же. 1976, № 2. С. 24—33.

3) О нетеровости интегральных операторов с логарифмическими ядрами // Там же, 1976, № 4. С. 35—39.

4) Обобщенные пространства Гельдера и оператор типа свертки со специальной функцией Вольтерра // Там же. 1976, № 5. С. 44—52.

5) Об интегральных уравнениях первого рода с логарифмическими ядрами произвольного порядка // Докл. АН БССР. 1977. Т. 21, № 12. С. 1078—1081.

6) Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах Гельдера с весом // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978, № 2. С. 29—37.

7) Операторы типа потенциала с логарифмическими ядрами произвольных неотрицательных порядков // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1979, № 1. С. 28—37.

8) Асимптотические разложения для степенно-логарифмических интегралов, содержащих логарифмы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1982, № 6. С. 29—36.

9) О гладкости многомерных интегралов типа потенциала по ограниченной области // Изв. высш. учебн. заведений. Мат. 1983, № 6. С. 58—61.

10) Интегральные уравнения с логарифмическими ядрами // Комплексный анализ и приложения: Тр. междунар. конф., 20—27 сент. 1981 г., Варна. София: Изд-во Болг. АН, 1984. С. 537—548.

11) Интегральные уравнения первого рода с логарифмическими ядрами // Научн. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 57—64.

12) О действии потенциала Рисса из $L_p(R^n)$ и гладкости интегральных операторов // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, № 2. С. 108—111.

Килбас А. А., Ву Ким Туан. 1) Об одном многомерном аналоге интегрального уравнения Абеля // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26, № 10. С. 879—881.

Килбас А. А., Самко С. Г. 1) О гладкости функций, представимых логарифмическими интегралами // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. 1978, № 1. С. 73—75.

Киприянов И. А. 1) Дробная производная и теоремы вложения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 6. С. 1187—1190.

2) Оператор дробного дифференцирования и степени эллиптических операторов // Там же. 1960. Т. 131, № 2. С. 238—241.

3) О пространствах дробно-дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1960. Т. 24, № 6. С. 865—882.

4) О некоторых неравенствах для оператора дробного дифференцирования // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961. С. 143—148.

5) О некоторых свойствах дробной производной по направлению // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1961. № 2. С. 32—40.

6) Преобразование Фурье — Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 89. С. 130—213.

7) Об одном операторе, порожденном преобразованием Фурье — Бесселя // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 601—620.

Ключанцев М. И. 1) Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 6. С. 983—990.

Коган Х. М. 1) Об одном интегро-дифференциальном уравнении // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 4. С. 228—230.

2) О порядке приближения функций класса Z_α линейными положительными полиноминальными операторами // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку: Изд-во АН АзССР, 1965. С. 157—162.

Кокилашвили В. М. 1) Анизотропные потенциалы Бесселя. Теорема вложения с предельным показателем // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1978. Т. 58. С. 134—149.

2) Максимальные функции и сингулярные интегралы в весовых функциональных пространствах // Там же. 1985. Т. 80. 114 с.

3) Максимальные функции и интегралы типа потенциала в весовых пространствах Лебега и Лоренца // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 172. С. 192—201.

4) Сингулярные и дробные интегралы в весовых пространствах // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 83—86.

Кокилашвили В. М., Габидзашвили М. А. 1) О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и максимальных функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 6. С. 1304—1306.

Кокилашвили В. М., Крбец М. 1) Weighted norm inequalities for fractional order maximal functions and Riesz potentials in Orlicz spaces / V. M. Kokilashvili, M. Krbec // Českoslov. Academia Věd. Matem. Ústav. 1984. P. 1—17.

2) On the boundedness of Riesz potentials and fractional maximal functions in weighted Orlicz spaces / V. M. Kokilashvili, M. Krbec // Конструктивная теория функций'84: Тр. Междунар. конф., 1984 г., Варна. София: Изд-во Болг. АН, 1984. С. 468—472.

3) Весовые неравенства для риссовых потенциалов и дробных максимальных функций в пространствах Орлича // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 2. С. 280—283.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. 1) Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

Коробейник Ю. Ф. 1) Об уравнениях бесконечного порядка в обобщенных производных // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 6. С. 1259—1281.

2) Об операторах обобщенного дифференцирования, применимых к любой аналитической функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 4. С. 833—854.

3) Об одном интегральном операторе // Лит. мат. сб. 1965. Т. 5, № 1. С. 97—115.

4) Операторы сдвига на числовых семействах. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1983. 155 с.

Косарев Е. Л. 1) О численном решении интегрального уравнения Абеля // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1973. Т. 13, № 6. С. 1591—1596.

Кочура А. И., Диденко А. В. 1) О решении дифференциального уравнения дробного порядка с кусочно-постоянными коэффициентами. Одесса, 1985. 13 с. Деп. в УкрНИИНТИ 29.04.85, № 855.

Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. 1) Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк., 1970. 710 с.

Краснов В. А. 1) О дробных производных функций многих переменных // Краевые задачи электродинамики производящих сред. Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1976. С. 240—243.

2) О дробной производной функции по функции // Науч. тр. Ташкент. ун-та. Вопр. мат. 1977. № 548. С. 56—61.

Краснов В. А., Фохт А. С. 1) Интегральные оценки дробных производных решений линейных уравнений эллиптического типа в метрике L_2, ч. 1 // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 6. С. 1042—1053.

Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. 1) Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.

Красносельский М. А., Соболевский П. Е. 1) Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 3. С. 499—502.

Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. 1) Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.

Крейн М. Г. 1) Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100, № 3. С. 413—416.

Крейн С. Г. 1) Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. 104 с.

Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. 1) Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

Крепкогорский В. Л. 1) Контрпримеры к теории операторов в пространствах со смешанной нормой. Казань, 1980. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 11.07.80, № 2963.

Кривенков Ю. П. 1) Представление решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу через аналитические функции // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116, № 4. С. 545—548.

Кудрявцев Д. Л. 1) О рядах Фурье функций, имеющих дробно-логарифмическую производную // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 2. С. 274—276.

Курант Р., Гильберт Д. 1) Методы математической физики. М.; Л.: Гостехтеоризлат, 1951. Т. 2. 544 с.

Ландкоф Н. С. 1) Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.

Лебедев Н. Н. 1) О применении сингулярных интегральных уравнений к задаче о распределении электричества на тонких незамкнутых поверхностях // Журн. техн. физики. 1948. Т. 18, вып. 6. С. 775—784.

2) Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 3. С. 513—516.

3) Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.

Лебедев Н. Н., Скальская И. П. 1) О решении одного класса парных интегральных уравнений теории упругости и математической физики, связанных с преобразованием Мелера — Фока // Прикл. мат. и мех. 1969. Т. 33, вып. 6. С. 1061—1068.

Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. 1) Осесимметричная контактная задача для упругого слоя // Там же. 1958. Т. 22, вып. 3. С. 320—326.

Левитан Б. М. 1) Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102—143.

Леонтьев А. Ф. 1) Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. 175 с.

Лере Ж. 1) Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 208 с.

Лесковский И. П. 1) О решении линейных однородных дифференциальных уравнений с дробными производными и постоянными коэффициентами // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений в решении прикладных задач. Тула: ТПИ, 1980. С. 85—88.

Летников А. В. 1) Теория дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. С. 1—68.

2) Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1868. Т. 3. С. 85—112.

3) К разъяснению главных положений теории дифференцирования с произвольным указателем // Мат. сб. 1872. Т. 6, вып. 1. С. 413—445.

4) Исследования, относящиеся к теории интегралов вида $\int\limits_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$ // Мат. сб. 1874. Т. 7, вып. 1. С. 5—205.

5) Recherches relatives à la theorie des integrales de la forme $\int\limits_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\,du$ / A. B. Letnikov // Bull. Sci. Math. Astron. J. 1874. Vol. 7. P. 233—238.

6) Новые изыскания о тригонометрических функциях // Мат. сб. 1882. Т. 10, вып. 1—4. С. 227—312.

7) Об определенных интегралах, содержащих функции, удовлетворяющие гипергеометрическому уравнению // Мат. сб. 1884. Т. 11, вып. 3. С. 327—414.

8) О гиперсферических функциях и о разложении произвольной функции в ряды, расположенные по функциям гиперсферическим // Мат. сб. 1885. Т. 12, вып. 2. С. 205—282.

9) Об интегрировании уравнения $(a_n + b_n x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + (a_{n-1} + b_{n-1}x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\,y = 0$ // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 205—215.

10) О гипергеометрических функциях высших порядков // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 216—222.

11) О приведении многократных интегралов // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 303—328.

Лизоркин П. И. 1) Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 325—353.

2) Функция типа Хиршмана и соотношения между пространствами $B_p^r(E_n)$ и $L_p^r(E_n)$ // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 4. С. 505—535.

3) Оценка тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 1. С. 109—126.

4) Обобщенные гельдеровы пространства $B_{p\theta}^{(r)}$ и их соотношения с пространствами Соболева L_p^r / Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 5. С. 1127—1152.

5) Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89—167.

6) Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 1. С. 79—91.

7) Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток в пространствах со смешанной нормой. Приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1970. Т. 34, № 1. С. 218—247.

8) Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 212—243.

9) Обобщенно-гельдеровы классы функций в связи с дробным дифференцированием // Там же. 1972. Т. 128. С. 172—177.

10) Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности // Современные проблемы теории функций: Матер. всесоюз. шк. по теории функций. Баку, 21 мая — 1 июня 1977 г. Баку: Азерб. ун-т, 1980. С. 156—159.

11) Поведение функций из лиувиллевских классов на бесконечности. О риссовых потенциалах произвольного порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1979. Т. 150. С. 174—197.

Лизоркин П. И., Никольский С. М. 1) Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей смешанной производной // Там же. 1965. Т. 77. С. 143—167.

Линкер А. И., Рубин Б. С. 1) Теоремы о сужении, продолжении и склеивании образов операторов свертки со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке. Ростов н/Д, 1981. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 18.06.81, № 2919.

Линчук П. Е. 1) Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда — Леонтьева // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 5. С. 72—74.

Люк Ю. 1) Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980. 608 с.

Магарил-Ильяев Г. Г. 1) Задача о промежуточной производной // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 81—96.

2) Обобщенные соболевские классы и неравенства типа Бернштейна — Никольского // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 5. С. 1066—1069.

Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. 1) On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G. G. Magaril-Il'jaev, V. M. Tihomirov // Analysis Math. 1981. Vol. 7, N 1. P. 37—48.

2) О некоторых вопросах гармонического анализа на $T^{n'} \times R^{n''}$ // Некоторые вопросы современного анализа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 57—82.

Мазья В. Г., Хавин В. П. 1) Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 6. С. 67—138.

Макаренко Л. Г. 1) О некоторых тройных интегральных уравнениях с ядрами типа Ватсона // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27, вып. 5. С. 682—686.

Маламуд М. М. 1) О возмущениях оператора дробного интегрирования // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, № 2. С. 85—86.

Малаховская Р. М., Шихмантер Е. Д. 1) О некоторых формулах реализации операторов и применения их к решению интегро-дифференциальных уравнений // Тр. Том. ун-та. 1975. Т. 220. С. 46—56.

Маловичко В. А. 1) Об одной обобщенной гипергеометрической функции и некоторых интегральных операторах, ее содержащих // Мат. физика. Киев: Наук. думка, 1976. Вып. 19. С. 99—103.

Малоземов В. Н. 1) Обобщенное дифференцирование периодических функций // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. 1965. Вып. 2, № 7. С. 164—167.

2) Обобщенное дифференцирование периодических функций // Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций: Сб. науч. тр. Ленингр. мех. ин-та. 1965. Т. 50. С. 147—166.

3) Совместное приближение периодической функции и всех ее производных, включая дробные, тригонометрическими многочленами // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр. 1969. Вып. 2, № 7. С. 49—54.

4) Совместное приближение функции и ее производных. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. 112 с.

Мамедов Р. Г., Оруджаев Г. Н. 1) Некоторые характеристики классов функций, имеющих дробные производные // Исследования по некоторым вопросам конструктивной теории функций и дифференциальных уравнений. Баку: Азерб. ин-т нефти и химии, 1981. С. 3—11.

2) Некоторые классы функций, их взаимосвязь и характеристики // Там же. С. 12—15.

Маричев О. И. 1) Два уравнения Вольтерра с функциями Горна // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 3. С. 546—549.

2) Уравнение Вольтерра типа свертки Меллина с функцией F_3 в ядре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. № 1. С. 128—129. Деп. в ВИНИТИ 21.09.73, № 7307. 23 с.

3) Один класс интегральных уравнений типа свертки Меллина со специальными функциями в ядрах // Там же. С. 126—127. Деп. в ВИНИТИ 21.09.73, № 7308. 18 с.

4) Сингулярные краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 3. С. 523—526.

5) Весовые задачи Неймана и Дирихле в полуплоскости для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 4. С. 128—131.

6) Некоторые интегральные уравнения типа свертки Меллина, содержащие в ядрах специальные функции // Там же, № 6. С. 119—120. Деп. в ВИНИТИ 2.04.76, № 1640. 85 с.

7) Полные сингулярные интегральные уравнения со степенно-логарифмическими ядрами, разрешимые в квадратурах // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. 1978. № 1. С. 8—14.

8) Интегральные операторы со специальными функциями в ядрах, обобщающие операторы интегрирования комплексного порядка // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. № 2. С. 38—44.

9) Интегральное представление решений обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца и формулы его обращения // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1824—1831.

10) Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Мн.: Наука и техника, 1978. 310 с. Handbook of integral transforms of higher transcendental functions, theory and algorithmic tables / O. I. Marichev // Chichester: Ellis Horwood, 1982. 336 p.

11) Один метод вычисления интегралов от гипергеометрических функций // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 7. С. 590—593.

12) Асимптотика функций гипергеометрического типа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 4. С. 18—25.

Маричев О. И., Ву Ким Туан. 1) Некоторые уравнения Вольтерра с функцией Аппеля F_1 в ядре // Науч. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 169—172.

2) Композиционная структура некоторых интегральных преобразований типа свертки // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 1. С. 139—142.

Мацнев Л. Б. 1) О порождающих функциях одного класса вольтерровых операторов // Вычислительные методы и программирование. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1983. Вып. 3. С. 71—85.

Медведев Н. В. 1) Решение интегральных уравнений Абеля методом сплайнов // Вопросы качественной теории дифференц. уравнений. Чебоксары: Чебокс. ун-т, 1982. С. 62—65.

Михайлов Л. Г. 1) Интегральные уравнения с ядром, однородным степени —1. Душанбе: Дониш, 1966. 49 с.

Михлин С. Г. 1) Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

2) Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

Мурдаев Х. М. 1) Оценка модуля непрерывности интегралов и производных дробного порядка. Грозный, 1985. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 14.06.85, № 4209.

2) Оценки типа Зигмунда для дробных интегралов и производных Вейля. Грозный, 1985. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 18.09.85, № 6720-В.

Мурдаев Х. М., Самко С. Г. 1) Операторы дробного интегродифференцирования в весовых обобщенных пространствах Гельдера // Вопросы вычислений и прикладной математики. Ташкент, 1986. Вып. 80. С. 116—117.

2) Весовые оценки модулей непрерывности дробных интегралов от функций, имеющих с весом заданный модуль непрерывности. Ростов н/Д, 1986. 42 с. Деп. в ВИНИТИ 11.05.86, № 3351-В.

3) Действие дробного интегродифференцирования в весовых обобщенных пространствах Гельдера $H_0^{\omega}(\rho)$ с весом $\rho(x)=(x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$. Ростов н/Д, 1986. 25 с. Деп. в ВИНИТИ 11.05.86, № 3350-В.

Мусхелишвили Н. И. 1) Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Мхитарян С. М. 1) О формулах Н. И. Ахиезера и В. А. Щербины обращения некоторых сингулярных интегралов // Математические исследования. Кишинев: Ин-т мат. с ВЦ АН МССР, 1968. Т. 3, вып. 1. С. 61—70.

Нагнибида Н. И. 1) О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 6. С. 1306—1318.

Насибов Ф. Г. 1) О порядке наилучших приближений функций, имеющих дробную производную в смысле Римана — Лиувилля // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1962, № 3. С. 51—57.

2) О порядке наилучших приближений функций многих переменных, имеющих дробную производную // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции. Баку: Изд-во АН АзССР, 1965. С. 73—79.

Натансон И. П. 1) Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

Нахушев А. М. 1) Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 736—739.

2) Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 1. С. 100—111.

3) Об одной смешанной задаче для вырождающихся эллиптических уравнений // Там же. 1975. Т. 11, № 1. С. 192—195.

4) О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Там же. 1976. Т. 12, № 1. С. 103—108.

5) Задача Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 308—311.

Некрасов П. А. 1) Общее дифференцирование // Мат. сб. 1888. Т. 14, вып. 1. С. 45—168.

2) Приложение общего дифференцирования к интегрированию уравнений вида $\Sigma(a_s+b_sx)x^sD^sy=0$ // Там же. С. 344—393.

3) Приложение общего дифференцирования к задаче о приведении многократных интегралов (в связи с интегрированием уравнения Лапласа) // Там же. С. 410—426.

4) Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden / P. A. Nekrassoff // Math. Ann. 1891. Bd 38. S. 509—560.

Нестеров С. В. 1) Применение оператора обобщенного дифференцирования к уравнениям класса Фукса // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. 1961. № 2. С. 21—27.

Николаев В. П. 1) Оценка интегралов типа потенциала в пространстве L_p с весом. Теоремы вложения // Теория и расчет передаточных механизмов. Хабаровск, 1973. С. 176—181.

2) Оценки интегралов типа потенциала. Теоремы вложения в пространствах L_p^r с весом // Тр. Джамбул. техн. ин-та легк. и пищев. пром-сти. 1973. Вып. 5. С. 149—156.

Никольская Н. С. 1) Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p // Сиб. мат. журн 1974. Т. 15, № 2. С. 395—412.

Никольский С. М. 1) Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 386—389.

2) Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1943. Т. 7, № 3. С. 147—166.

3) Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1945. Т. 15. С. 1—76.

4) Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с.

5) Курс математического анализа. М.: Наука, 1983. Т. 1. 464 с.

6) То же. Т. 2. 448 с.

Никольский С. М., Лионс Ж., Лизоркин П. И. 1) Integral representation and isomorphism properties of some classes of functions / S. M. Nikolsky, J. L. Lions, P. I. Lizorkin // Ann. della Scuola Norm. Super. Pisa. Sci. fis., mat. Ser. 3. 1965. Vol. 19, N 11. P. 127—178.

Ногин В. А. 1) О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов. Ростов н/Д, 1980. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 18.11.80, № 4851.

2) Обращение и описание параболических потенциалов с L_p-плотностями. Ростов н/Д, 1981. 19 с. Деп. в ВИНИТИ 30.03.81, № 1395.

3) Об обращении бесселевых потенциалов // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 8. С. 1407—1411.

4) Об обращении бесселевых потенциалов. Ростов н/Д, 1982. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 29.04.82, № 2088.

5) Гиперсингулярные интегралы и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1982. 150 с.

6) Обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 3. С. 57—65.

7) О сходимости почти всюду гиперсингулярных интегралов. Ростов н/Д, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 27.05.85, № 3651.

8) Об одном способе обращения и описания бесселевых потенциалов с L_p-плотностями // Интегральные уравнения и интегральные операторы. Краснодар: Кубан. ун-т и Ростов. ун-т, 1987.

Ногин В. А., Рубин Б. С. 1) Применение метода гиперсингулярных интегралов к исследованию пространств параболических потенциалов. Ростов н/Д, 1985. 53 с. Деп. в ВИНИТИ 26.02.85, № 1457.

2) Обращение и описание параболических потенциалов с L_p-плотностями // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 535—538.

3) Об ограниченности оператора умножения на характеристическую функцию области Стрихарца в пространствах риссовых потенциалов // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1986. № 2. С. 62—66.

4) Обращение параболических потенциалов с L_p-плотностями // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 6. С. 831—840.

5) Пространства $\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(R^{n+1})$ параболических потенциалов // Analysis Math. 1987. Vol. 13, N 4.

Ногин В. А., Самко С. Г. 1) О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой. Ростов н/Д, 1980. 47 с. Деп. в ВИНИТИ 14.01.81, № 179.

2) Об одновременной аппроксимации функций и их риссовых производных // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 3. С. 548—550.

3) О сходимости в $L_p(R^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: Межвуз. сб. науч. ст. Элиста, 1982. С. 119—131.

4) Обращение и описание риссовых потенциалов с плотностями из весовых L_p-пространств // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 1. С. 70—72.

Огиевецкий И. И. 1) Обобщение некоторых результатов Харди, Литтлвуда и Зигмунда о дробном дифференцировании и интегрировании периодических функций // Укр. мат. журн. 1957. Т. 9, № 2. С. 205—210.

2) К теории дробного дифференцирования и интегрирования периодических функций, принадлежащих классу L_p, $p>1$ // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118, № 3. С. 443.

3) Узагальнення нерівності Сайвіна про похідну дробового порядку тригонометричного многочлена на випадок простору L_p / І. І. Огієвецький // Доп. АН УРСР. 1958. № 5. С. 486—488.

4) Generalization of the inequality of P. Civin for the fractional derivative of a trigonometrical polynomial to L_p space / I. I. Ogiewetzki // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1958. Vol. 9, N 1—2. P. 133—135.

5) Интегрирование и дифференцирование дробного порядка периодических функций и конструктивная теория функций // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций: Тр. 1 конф. по конструктивной теории функций. Л., 1959. М.: Физматгиз, 1961. С. 159—164.

Олвер Ф. 1) Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.

Олевский М. Н. 1) Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \rho$ // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 767—770.

Оразов И. 1) Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного уравнения Трикоми // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 339—344.

Павлов П. М., Самко С. Г. 1) Описание пространств $L_p^\alpha(S_{n-1})$ в терминах сферических гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 3. С. 546—550.

Паламодов В. П. 1) Интегралы Римана — Лиувилля, особые точки гиперповерхностей и гиперболические уравнения // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. конф. по дифференц. уравнениям и выч. мат. Новосибирск, 1978. Новосибирск: Наука, СО, 1980. С. 144—148.

Пахарева Н. А., Вирченко Н. А. 1) Про деякі інтегральні перетворення в класі x^k-аналітичних функцій / Н. О. Пахарева, Н. О. Вирченко // Доп. АН УРСР. 1962. № 8. С. 998—1003.

Пекарский А. А. 1) Рациональные приближения класса H_p, $0<p\leqslant\infty$ // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 1. С. 9—12.

2) Прямые и обратные теоремы рациональной аппроксимации класса Харди // Там же. 1984. Т. 28, № 2. С. 111—114.

3) Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Мат. сб. 1984. Т. 124, № 4. С. 571—588.

Песчанский А. И. 1) Интегральные уравнения с гипергеометрической функцией на замкнутом контуре. Одесса, 1984. 25 с. Деп. в УкрНИИНТИ 29.02.84, № 361 Ук-Д.

Пилиди В. С. 1) О некоторых свойствах кратных операторов Абеля // Матер. 2-й науч. конф. молодых ученых Рост. обл. Секция естеств. наук. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1968. С. 125—126.

Пинкевич В. Т. 1) О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4, № 6. С. 521—528.

Покало А. К. 1) Линейные методы приближения производных и интегралов в смысле Вейля периодических функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1970. № 2. С. 32—39.

Положий Г. Н. 1) О предельных значениях и формулах обращения вдоль разрезов основного интегрального представления p-аналитических функций с характеристикой $p=x^k$, ч. 1. // Укр. мат. журн. 1964. Т. 16, № 5. С. 631—656.

2) Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965. 442 с.

3) Теория и применение p-аналитических и (p, q)-аналитических функций. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.

Пономаренко В. Г. 1) Неравенства А. Ф. Тимана для модулей гладкости дробного порядка. Днепропетровск, 1979. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 20.08.79, № 3093.

2) Модули гладкости дробного порядка и наилучшие приближения в $L_p(1<p<\infty)$ // Конструктивная теория функций: Тр. Междунар. конф., 1—5 июня 1981 г., Варна. София: Изд-во Болг. АН, 1983. С. 129—133.

Пономаренко С. П. 1) О решении одного класса тройных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Ханкеля // Укр. мат. журн. 1978. Т. 30. С. 833—840.

2) Операторный метод решения систем парных интегральных уравнений, связанных с интегральным преобразованием Мелера — Фока // Там же. 1982. Т. 34, № 3. С. 316—321.

Попов Г. Я. 1) Метод парных интегральных уравнений // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 56—87.

Преображенский Н. Г. 1) Абелева инверсия в физических задачах // Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. С. 6—24.

Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. 1) Интегралы и ряды: Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

2) Интегралы и ряды: Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

3) Интегралы и ряды: Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 801 с.

Рабинович В. С. 1) Многомерное уравнение типа свертки, символ которого имеет особенности вида сложной степенной функции линейно-однородного конуса // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1969. № 8. С. 64—74.

Рабинович Ю. Л. 1) Примечания переводчиков // Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. 2-е изд. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. Т. 2. С. 520—529.

Рабинович Ю. Л., Нестеров С. В. 1) Общий вид линейных дифференциальных уравнений, порядок которых понижается с помощью оператора обобщенного дифференцирования D^α // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 6. С. 1309—1311.

Раджабов Н. 1) О некоторых интегральных представлениях для уравнения типа Гельмгольца с сингулярной линией // Докл. АН ТаджССР. 1971. Т. 14, № 8. С. 5—9.

2) Элементарные решения и интегральные представления для одного класса дифференциальных уравнений с n сингулярной гиперплоскостью // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1832—1843.

3) Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференци-

альных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. В 3 ч. Душанбе: Тадж. ун-т. Ч. 1. 1980. 127 с.; Ч. 2. 1981. 170 с.; Ч. 3. 1982. 170 с.

4) Интегральные представления и граничные задачи для одного уравнения типа Гельмгольца со многими сингулярными поверхностями // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, СО, 1982. С. 34—46.

Раджабов Н., Саттаров А. С., Джабиров Д. К. 1) Фундаментальное решение и интегральные представления для одного уравнения эллиптического типа с двумя сингулярными линиями // Докл. АН ТаджССР. 1977. Т. 20, № 9. С. 13—17.

2) Аналог формулы Пуассона для одного уравнения второго порядка эллиптического типа с двумя сингулярными линиями // Там же. № 12. С. 3—7.

Раджабов Э. Л. 1) О некоторых сверхсингулярных интегральных операторах // Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. 1974. № 2. С. 17—25.

Рафальсон С. З. 1) О коэффициентах Фурье — Лагерра // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1971, № 11. С. 93—98.

Риекстыньш Э. Я. 1) Асимптотическое представление некоторых типов интеграла свертки // Латв. мат. ежегодник. 1970. Вып. 8. С. 223—239.

2) Асимптотические разложения интегралов. В 3 т. Рига: Зинатне. Т. 1. 1974. 391 с.; Т. 2. 1977. 463 с.; Т. 3. 1981. 370 с.

Риман Б. 1) Versuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation / B. Riemann // Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig: Teubner, 1876. P. 331—334. Опыт обобщения действий интегрирования и дифференцирования // Б. Риман. Соч. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. С. 262—275, 506—508.

Розанова Г. И. 1) Точные интегральные неравенства с производными порядка $\alpha>0$ // Мат. физика. 1976. Вып. 3. С. 97—103.

Розет Т. А. 1) О формулах обращения одного класса интегральных преобразований // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 3. С. 227—230.

Рубин Б. С. 1) О пространствах дробных интегралов на прямолинейном контуре // Изв. АН АрмССР. Мат. 1972. Т. 7, № 5. С. 373—386.

2) Об операторах типа потенциала в весовых пространствах на произвольном контуре // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207, № 2. С. 300—303.

3) Об операторах типа потенциала на отрезке вещественной оси // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1973. № 6. С. 73—81.

4) О нетеровости операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на отрезке вещественной оси // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1973. № 4. С. 112—114.

5) Операторы типа потенциала на совокупности отрезков вещественной оси // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1974. Вып. 5. С. 144—149.

6) Об операторах типа потенциала на криволинейном контуре // Там же. С. 150—155.

7) Дробные интегралы в пространствах Гельдера с весом и операторы типа потенциала // Изв. АН АрмССР. Мат. 1974. Т. 9, № 4. С. 308—324.

8) О нетеровости операторов типа потенциала в весовых пространствах p-суммируемых функций // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1975. № 8. С. 81—90.

9) Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в случае неотрицательного показателя степени при логарифме // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1976. № 3. С. 17—22.

10) Общий метод исследования на нетеровость операторов типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке // Изв. АН АрмССР. Мат. 1977. Т. 12, № 6. С. 447—461.

11) Теория Нетера для обобщенных уравнений Абеля с вещественным показателем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 917—927.

12) Описание образа операторов свертки со степенно-логарифмическими ядрами на конечном отрезке. Ростов н/Д, 1980. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 18.11.80, № 4848.

13) О нетеровости интегральных уравнений первого рода с конечным числом ядер потенциала // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1980. № 3. С. 29—31.

14) Теорема вложения для образов операторов свертки на конечном отрезке и операторы типа потенциала. I и II // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1982. № 1. С. 53—63; № 2. С. 49—59.

15) Обобщенное уравнение Абеля и плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала с переменным коэффициентом трения // Изв. АН АрмССР. Мех. 1983. № 2. С. 19—25.

16) Многомерные интегралы типа Римана — Лиувилля и риссовы потенциалы в полупространстве. Ростов н/Д, 1983. 34 с. Деп. в ВИНИТИ 23.06.83, № 3414.

17) Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 4. С. 521—523.

18) О риссовых потенциалах и операторах типа Римана — Лиувилля в полупространстве // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 1. С. 30—34.

19) Односторонние шаровые потенциалы и обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности. Ростов н/Д, 1984. 48 с. Деп. в ВИНИТИ 18.07.84, № 5150.

20) Метод односторонних потенциалов в теории некоторых классов дифференцируе-

мых функций дробной гладкости и обращение потенциалов по полупространству. Ростов н/Д, 1985. 63 с. Деп. в ВИНИТИ 26.02.85, № 1456.

21) Обращение потенциалов Рисса по n-мерному шару и его внешности // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 6. С. 81—85.

22) Дробные интегралы и риссовы потенциалы с радиальной плотностью в пространствах со степенным весом // Изв. АН АрмССР. Мат. 1986. Т. 21, № 5. С. 488.

23) Об одном методе характеризации и обращения бесселевых и риссовых потенциалов // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1986. № 5. С. 59—68.

24) Описание и обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов со взвешенными разностями // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 10. С. 1805—1818.

25) Обращение и описание бесселевых потенциалов с L_p-плотностями по R^n и по полупространству // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 124, № 2. С. 245—248.

26) Обращение потенциалов в R^n с помощью интегралов Гаусса — Вейерштрасса // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 1. С. 34—42.

27) Пространства типа Лизоркина на полупрямой и дробное интегрирование обобщенных функций // Интегральные уравнения и интегральные операторы: Межвуз. сб. науч. ст. Краснодар: Кубан. ун-т и Ростов. ун-т, 1987.

Рубин Б. С., Володарская Г. Ф. 1) Теорема вложения для сверток на конечном отрезке и ее применение к интегральным уравнениям первого рода // Докл. АН СССР. 1979. Т. 244, № 6. С. 1322—1326.

Русак В. Н. 1) О приближении рациональными операторами функций, имеющих дробную производную ограниченной вариации // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 6. С. 20—26.

2) О приближении рациональными операторами типа Фурье периодических функций, представимых в виде свертки // Там же. 1984. № 2. С. 25—32.

3) Рациональная аппроксимация периодических функций, имеющих кусочно-выпуклую производную // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 118—121.

Русев П. К. 1) О представлении аналитических функций рядами по полиномам Лагерра // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 57—59.

Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. 1) Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости // Прикл. мат. и мех. 1966. Т. 30, вып. 2. С. 271—277.

Саакян Б. А. 1) Дифференциальные операторы дробного порядка и ассоциированные с ними $<\rho_j>$-абсолютно-монотонные функции // Изв. АН АрмССР. Мат. 1974. Т. 9, № 4. С. 285—307.

2) Дифференциальные операторы дробного порядка и ассоциированные с ними $<\rho_j, \omega_j>$-абсолютно-монотонные функции // Уч. зап. Ереван. ун-та. Естеств. науки. 1975. Т. 1(128). С. 3—9.

Савелова Т. И. 1) Об устойчивом дифференцировании функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1980. Т. 20, № 2. С. 501—505.

Садикова Р. Х. 1) Неравенства для истокообразно представимых функций // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1979. № 11. С. 61—64.

Сакалюк К. Д. 1) Обобщенное интегральное уравнение Абеля // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 4. С. 748—751.

2) Обобщение интегрального уравнения Абеля / Уч. зап. Кишинев. ун-та. 1962. Т. 50. С. 95—102.

3) Интегральные уравнения со степенными, логарифмическими и полярными ядрами, разрешимые в замкнутой форме: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Кишинев, 1963. 94 с.

4) Обобщенное интегральное уравнение Абеля с внутренними коэффициентами // Уч. зап. Кишинев. ун-та. 1965. Т. 82 (мат.). С. 60—68.

Самко С. Г. 1) Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши //Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 5. С. 1019—1022.

2) О сведении некоторых интегральных уравнений первого рода теории упругости и гидродинамики к уравнениям второго рода // Прикл. мат. и мех. 1967. Т. 31, № 2. С. 343—345.

3) К теории обобщенного интегрального уравнения Абеля // Материалы 7-й и 8-й научной конференции аспирантов Рост. ун-та. Сер. точн. и естеств. наук. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1968. С. 56—61.

4) Обобщенное уравнение Абеля в бесконечных пределах // Там же. С. 160—165.

5) Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 2. С. 298—314.

6) О теории Нетера для обобщенного интегрального уравнения Абеля // Там же. С. 315—326.

7) Обобщенное уравнение Абеля, преобразование Фурье и уравнения типа свертки // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С. 743—746.

8) Об интегральном модуле непрерывности потенциалов с плотностями, суммируемыми на оси с весом // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1969. С. 175—184.

9) Обобщенное интегральное уравнение Абеля на прямой // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1970. № 8. С. 83—93.

10) Интегральные уравнения первого рода с ядрами типа потенциала // Матер.

Всесоюз. конф. по краевым задачам. Казань, 1969. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. С. 216—220.

11) Об операторах типа потенциала // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 2. С. 299—301.

12) Об интегральных уравнениях первого рода с ядром типа потенциала // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1971. № 4. С. 78—86.

13) Об одном классе операторов типа потенциала на прямой // Там же. № 5. С. 92—100.

14) О пространстве $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов и об операторах типа потенциала // Изв. АН АрмССР. Мат. 1973. Т. 8, № 5. С. 359—383.

15) Об ограниченности оператора урезания в пространстве дробных интегралов // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1974. Т. 5. С. 16—19.

16) Об интегральных уравнениях типа свертки первого рода со степенным ядром // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1975. № 4. С. 60—67.

17) О пространствах риссовых потенциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1976. Т. 40, № 5. С. 1143—1172.

18) Пространства $L^\alpha_{p,r}(R^n)$ и гиперсингулярные интегралы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. № 2. С. 34—41.

19) Об обобщенных потенциалах Рисса // Семин. Ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та. 1976. Т. 11. С. 35—44.

20) Пространства $L^\alpha_{p,r}(R^n)$ и гиперсингулярные интегралы // Stud. Math. (PRL). 1977. Vol. 61, N 3.P. 193—230.

21) Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы, их символы и обращение // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 3. С. 528—531.

22) Сферические потенциалы, сферическое риссово дифференцирование и их приложения // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1977. № 2. С. 135—139.

23) К описанию образа $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов (потенциалов Рисса) // Изв. АН АрмССР. Мат. 1977. Т. 12, № 5. С. 329—334.

24) Классы $C^\lambda(R^n)$ и мультипликаторы в пространстве $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1977, № 3. С. 13—17.

25) Об основных функциях, исчезающих на заданном множестве, и о делении на функции // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 5. С. 677—689.

26) Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой // Тр. Ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та. 1978. Т. 5—6. С. 235—249.

27) Методы обращения операторов типа потенциала и уравнения с инволютивными операторами и их приложения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1978. 295 с.

28) Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т. 156. С. 157—222.

29) О плотности в $L_p(R^n)$ пространства Φ_V типа Лизоркина // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 6. С. 855—865.

30) Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1983. № 4. С. 28—42.

31) Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1984. 208 с.

32) Одномерные и многомерные интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью в ядре // Науч. тр. юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова. Мн.: Университетское, 1985. С. 103—115.

33) О совпадении дифференцирования Грюнвальда — Летникова с другими формами дробного дифференцирования. Периодический и непериодический случаи // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 1. С. 183—186.

Самко С. Г., Васильев И. Л. 1) Интегральные уравнения с аналитическими ядрами типа потенциала. Мн., 1981. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 1.07.81, № 3227.

Самко С. Г. Умархаджиев С. М. 1) Описание пространства риссовых потенциалов в терминах старших производных // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1980. № 11. С. 79—82.

2) Описание пространства $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов в терминах производных порядка $[\alpha]$. Ростов н/Д, 1980. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 18.07.80, № 3165.

3) Приложения гиперсингулярных интегралов к многомерным интегральным уравнениям первого рода // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1985. Т. 172. С. 299—312.

Самко С. Г., Чувенков А. Ф. 1) О потенциалах Рисса в пространствах Орлича // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1975. Т. 7. С. 150—156.

Самко С. Г., Якубов А. Я. 1) Оценка Зигмунда для сингулярного интеграла с быстро убывающим степенным весом // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1984. № 12. С. 42—51.

2) Оценки типа Зигмунда для гиперсингулярных интегралов. Ростов н/Д, 1985. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 19.03.85, № 1966.

3) Оценка Зигмунда для модулей непрерывности дробного порядка сопряженной функции // Изв. высш. учеб. заведений. Мат. 1985. № 12. С. 49—53.

4) Оценка Зигмунда для гиперсингулярных интегралов в случае модулей непрерывности дробного порядка // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1986. № 3. С. 37—42.

Сейтказиева А. 1) Интегро-дифференциальные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1980. Вып. 13. С. 132—135.

Семянистый В. И. 1) О некоторых интегральных преобразованиях в евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 3. С. 536—539.

Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. 1) Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982. 488 с.

Скориков А. В. 1) О нетеровости операторов типа потенциала в пространствах Соболева — Слободецкого // Математический анализ и его приложения. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1974. Т. 6. С. 136—147.

2) К описанию пространств $L_p^\alpha(\Omega)$ // Мат. заметки. 1975. Т. 17, № 5. С. 691—701.

3) Операторы типа бипотенциала в $L_p(R^2)$ // Тр. молодых ученых кафедры высшей математики. Рост. инж.-строит. ин-т, 1977. С. 32—51. Деп. в ВИНИТИ 5.05.77, № 1780.

4) Интегральные уравнения типа свертки первого рода. Ростов н/Д, 1979. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 31.08.79, № 3193.

Смирнов В. И., Лебедев Н. А. 1) Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1964. 438 с.

Смирнов М. М. 1) Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.

2) Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.

3) Вырождающиеся гиперболические уравнения. Мн.: Вышэйш. шк., 1977. 160 с.

4) Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре /// Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астр. 1981. Вып. 3, № 13. С. 117—119.

5) Решение в замкнутой форме уравнения Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 171—173.

6) Об одном интегральном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астр. 1984. № 7. С. 111—113.

7) Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк., 1985. 304 с.

Соболев С. Л. 1) Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 3. С. 471—497.

2) Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950. 256 с.

3) Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

Соболев С. Л., Никольский С. М. 1) Теоремы вложения // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, 3—12 июля 1961 г. Л.: Изд-во АН СССР, 1963. Т. 1. С. 227—242.

Солонников В. А. 1) Простое доказательство неравенства Харди и Литтлвуда для дробных интегралов // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех. и астр. 1962. № 13. С. 150—153.

Сонин Н. Я. 1) Сообщение о дифференцировании с произвольным указателем // Тр. 2-го съезда русских естествоиспытателей. 1870. Т. 2. С. 18—21.

2) О дифференцировании с произвольным указателем // Мат. сб. 1872. Т. 6, вып. 1. С. 1—38.

3) Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries / N. Sonine // Math. Ann. 1880. Vol. 16. P. 1—80.

4) Обобщение одной формулы Абеля // Зап. мат. отд. Новороссийского о-ва естествоиспытателей. 1884. Т. 5. С. 143—150.

5) Sur la generalization d'une formule d'Abel / N. Sonine // Acta Math. 1884. Vol. 4. P. 171—176.

6) Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: Гостехтеоретиздат, 1954. 241 с.

Старовойтов А. П. 1) О рациональной аппроксимации функций, имеющих производную ограниченной вариации // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 104—106.

2) Рациональная аппроксимация функций, представимых в виде интеграла дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля // Там же. 1985. Т. 29, № 12. С. 1079.

3) Рациональная аппроксимация функций из W^rV $[a, b]$ // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1985. Т. 1, № 2. С. 129—132.

4) О рациональной аппроксимации функций, дифференцируемых в смысле Римана — Лиувилля // Теория функций и приближений. Тр. 2-й Сарат. зимн. шк., 24 янв.— 5 февр. 1984 г. Саратов, 1986. Ч. 3. С. 99—102.

Стейн И. 1) Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.

Стейн И., Вейс Г. 1) Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 334 с.

Стечкин С. Б. 1) О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 219—242.

2) О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Там же. 1956. Т. 20, № 5. С. 643—648.

Сунь Юн-Шен. 1) О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 1. С. 67—92.

Теляковский С. А. 1) Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле — Пуссена // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 2. С. 259—262.

2) О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961. Т. 62. С. 61—97.

Тиман А. Ф. 1) Обобщение некоторых результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81, № 4. С. 509—511.

2) О теоремах Джексона // Укр. мат. журн. 1958. Т. 10, № 3. С. 334—336.

3) Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.

Титчмарш Е. 1) Introduction to the theory of Fourier integrals / E. C. Titchmarsh. Oxford, 1937. 334 p. Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948

Тихонов А. Н., Самарский А. А. 1) Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 1. С. 26—29.

Торин Г. О. 1) Теоремы вложения. Математика // Периодический сборник переводов иностранных статей. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. Т. 1: 3. С. 43—78.

Трибель X. 1) Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

Трикоми Ф. 1) О линейных уравнениях смешанного типа. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.

2) Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. 1) Курс современного анализа. В 2 т. Т. 2. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.

Умарходжиев С. М. 1) О полной непрерывности мультипликаторов в шкале пространств риссовых потенциалов // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1981. № 4. С. 32—35.

Уфлянд Я. С. 1) Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1977. 220 с.

Федорюк М. В. 1) Неоднородные обобщенные функции двух переменных // Мат. сб. 1959. Т. 49, № 4. С. 431—446.

2) Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Федосов В. П. 1) О некоторых обобщенных уравнениях Абеля // Инверсия Абеля и ее обобщения. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. С. 106.

Федосов В. П., Яненко Н. Н. 1) Уравнения в частных производных полуцелой степени // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 4. С. 804—808.

Фихтенгольц Г. М. 1) Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.: Наука, 1966. Т. 3. 656 с.

Фохт А. С., Краснов В. А. 1) Интегральные оценки дробных производных гармонической функции и некоторые их приложения // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 12. С. 2276—2279.

Харди Г. Г. 1) Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. 1) Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.

Хелгасон С. 1) Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 150 с.

Хилле Э., Филлипс Р. 1) Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 829 с.

Хиршман И. И., Уиддер Д. В. 1) Преобразования типа свертки. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 312 с.

Хромов А. П. 1) Об одном применении оператора дробного дифференцирования // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1976. Вып. 6, ч. 1. С. 3—22.

Цейтлин А. И. 1) Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат, 1984. 334 с.

Чувенков А. Ф. 1) О пространствах Соболева — Орлича дробного порядка // Изв. Сев.-Кавказ. науч. центра высш. шк. Сер. естеств. наук. 1979, № 1. С. 6—10.

Чумаков Ф. В. 1) Уравнение Абеля с гипергеометрическим ядром // Матер. Всесоюз. конф. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. С. 267—271.

2) Уравнение типа Абеля на сложном контуре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 1. С. 55—61.

Чумаков Ф. В., Васильев И. Л. 1) Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, физ., мат., мех. 1980, № 2. С. 40—44.

Шелковников Ф. А. 1) Обобщенная формула Коши // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 3. С. 157—159.

Эйлер Л. 1) De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generales algebraice dari neqvevnt / L. Eulero // Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae. 1738. Т. 5. Р. 38—57.

2) Интегральное исчисление. М.: Физматгиз, 1958. Т. 3. 447 с.

Эскин Г. И. 1) Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.

Якубович С. Б. 1) Замечание к формуле обращения интегрального преобразования Уимпа по индексу // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 6. С. 1097—1098.

Ярославцева В. Я. 1) Об одном классе операторов преобразования и их приложении к дифференциальным уравнениям // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 4. С. 816—819.

Ясаков А. И. 1) Об операторах типа потенциала // Применение методов вычислительной математики и вычислительной техники для решения научно-исследовательских и народнохозяйственных задач. Воронеж: Воронеж. ун-т. 1969. Вып. 1. С. 6—9.

Abel N. H. 1) Solution de quelques problèmes à l'aide d'integrales définies // Gesammelte mathematische werke. Leipzig: Teubner, 1881. T. 1. P. 11—27. (First publ. in Mag. Naturvidenkaberne, Aurgang 1. Bd 2. Christiania 1823.)

2) Auflösung einer mechanischen Aufgabe // J. für reine und angew. Math. 1826. Bd 1. S. 153—157.

Adams D. R. 1) A note on Riesz potentials // Duke Math. J. 1975. Vol. 42, N 4. P. 765—778.

Adams D. R., Bagby R. J. 1) Translation-dilation invariant estimates for Riesz potentials // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23, N 11. P. 1051—1067.

Adams R., Aronszajn N., Smith K. T. 1) Theory of Bessel potentials. II // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1967. T. 17, N 2. P. 1—135.

Agarwal R. P. 1) A propos d'une note de M. Pierre Humbert // C. r. seances Acad. Sci. 1953. Vol. 236, N 21. P. 2031—2032.

2) Certain fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. Vol. 66, N 2. P. 365—370.

3) Fractional q-derivatives and q-integrals and certain hypergeometric transformations // Ganita. 1976. Vol. 27, N 1—2. P. 25—32.

Ahmad M. I. 1) Quadruple integral equations and operators of fractional integration // Glasgow Math. J. 1971. Vol. 12, N 1. P. 60—64.

Ahuja G. 1) On fractional integration for generalized functions // J. Maulana Azad College Tech. 1981. Vol. 14. P. 79—85.

Al-Abedeen A. Z. 1) Existence theorem on differential equations of generalized order // Rafidain J. Sci. Mosul. Univ. Iraq. 1976. Vol. 1. P. 95—104.

Al-Abedeen A. Z., Arora H. L. 1) A global existence and uniqueness theorem for ordinary differential equations of generalized order // Canad. Math. Bull. 1978. Vol. 21, N 3. P. 267—271.

Al-Bassam M. A. 1) Some properties of Holmgren—Riesz transform // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 3, sci. fis. e mat. 1961. Vol. 15, fasc. 1—2. P. 1—24.

2) Conserning Holmgren—Riesz transform equations of Gauss—Riemann type // Rend. Circolo Mat. Palermo. Ser. 2. 1962. Vol. 11, N 11. P. 47—66.

3) On certain types of Holmgren—Riesz transform equations and their equivalent differential equations // J. für reine und angew. Math. 1964. Bd 216, N 1—2. S. 91—100.

4) Some existence theorems on differential equations of generalized order // Ibid. 1965. Bd 218. S. 70—78.

5) On an integro-differential equation of Legendre—Volterra type // Portugal. Math. 1966. Vol. 25, N 1—2. P. 53—61.

6) On Laplace's second order linear differential equations and their equivalent Holmgren—Riesz transform equations // J. für reine und angew. Math. 1967. Bd 225. S. 76—84.

7) On some differential and integro-differential equations associated with Jacobi's differential equation // Ibid. 1976. Bd 288. S. 211—217.

8) On fractional calculus and its applications to the theory of ordinary differential equations of generalized order // Nonlinear analysis and applications (St Johns, New Foundland, Canada, 1981). Lect. Notes in Pure and Appl. Math. Dekker. New York, 1982. Vol. 80. P. 305—331.

9) Some applications of fractional calculus to differential equations // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 1—11.

Alonso J. 1) On differential equations of fractional order: Dr Diss. Univ. Cincinnati. 1964. 70 p. Diss. Abstrs. 1965. Vol. 26, N 4. Pos. 2231. Order N 64—11, 947.

Al-Salam W. A. 1) Some fractional q-integrals and q-derivatives // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1966. Vol. 15, N 2. P. 135—140.

2) q-Analogues of Cauchy's formulas // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, N 3. P. 616—621.

Al-Salam W. A., Verma A. 1) Remarks on fractional q-integrals // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1965. Vol. 44, N 9—10. P. 600—607.

2) A fractional Leibniz q-formula // Pacif. J. Math. 1975. Vol. 60, N 2. P. 1—9.

Andersen K. F. 1) On the range and inversion of fractional integrals in weighted spaces // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1982. Vol. A92, N 1—2. P. 51—64.

2) Weighted inequalities for fractional integrals // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advances Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 12—25.

Andersen K. F., Heinig H. P. 1) Weighted norm inequalities for certain integral operators // SIAM J. Math. Anal. 1983. Vol. 14, N 4. P. 834—844.

Aronszajn N. 1) Potentiels besseliens // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1965. T. 15, N 1. P. 43—58.

Aronszajn N., Smith K. T. 1) Theory of Bessel potentials.I // Ibid. 1961. T. 11. P. 385—475.

Aronszajn N., Mulla F., Szeptycki P. 1) On spaces of potentials connected with L_p classes // Ibid. 1963. T. 13, N 2. P. 211—306.

Askey R. 1) Inequalities via fractional integration // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 106—115.

Asral B. 1) On the regular Cauchy problems for the Euler—Poisson—Darboux equations and the method of ascent // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. 1981. Vol. 25, N 2. P. 121—128.

Atiyah M. F. 1) Resolution of singularities and division of distributions // Comm. Pure and Appl. Math. 1970. Vol. 23, N 2. P. 145—150.

Atkinson K. E. 1) An existence theorem for Abel integral equations // SIAM J. Math. Anal. 1974. Vol. 5, N 5. P. 729—736.

Bagby R. J. 1) Lebesgue spaces of parabolic potentials // Illinois J. Math. 1971. Vol. 15, N 4. P. 610—634.

2) Parabolic potentials with support on a half-space // Ibid. 1974. Vol. 18, N 2. P. 219—222.

3) A characterization of Riesz potentials and an inversion formula // Indiana Univ. Math. J. 1980. Vol. 29, N 4. P. 581—595.

Baker B. B., Copson E. T. 1) The mathematical theory of Huygens' principle. Oxford: Clarendon Press, 1950. 192 p.

Balakrishnan A. V. 1) Representation of abstract Riesz potentials of the elliptic type // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 64, N 5. P. 288—289.

2) Operational calculus for infinitesimal generators of semi-groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 91, N 2. P. 330—353.

3) Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them // Pacif. J. Math. 1960. Vol. 10, N 2. P. 419—437.

Balasubramanian R., Norrie D. H., Vries G. de. 1) The application of the least squares finite element method to Abel's integral equation // Intern. J. Numer. Methods in Eng. 1979. Vol. 14. P. 201—209.

Bang T. 1) Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presque-périodiques // Det. Kgl. Danske Vig. Selskab. Math.-fys. Medd. Kobenhavn, 1941. Vol. 19, N 4. 28 p.

Barrett J. H. 1) Differential equations of non-integer order // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6, N 4. P. 529—541.

Beekmann W. 1) Perfekte Integralverfahren: Dr Diss. Eberhard-Karls-Univ. Tübingen, 1967. 65 S.

2) Perfecte Integralverfahren // Math. Z. 1968. Bd 104. S. 99—105.

Beltrami E. 1) Sulla teoria delle funzioni potenziali symmetriche // Rend. Accad. sci. di Bologna. 1881. Vol. 2. P. 461—505.

Belward J. A. 1) Solutions of some Fredholm integral equations using fractional integration, with an application to a forced convection problem // Z. angew. Math. und Phys. 1972. Bd 23, N 6. S. 901—917.

Benedek A., Panzone R. 1) The spaces L_p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. Vol. 28, N 3. P. 302—324.

Berens H., Westphal U. 1) Zur Charakterisierung von Ableitungen nichtganzer Ordnung im Rahmen der Laplace-Transformation // Math. Nachr. 1968. Bd 38, N 1—2. S. 115—129.

2) A Cauchy problem for a generalized wave equation // Acta sci. math. 1968. Vol. 29, N 1—2. P. 93—106.

Berens H., Butzer P. L., Westphal U. 1) Representations of fractional powers of infinitesimal generators of semigroups // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, N 1. P. 191—196.

Berger N., Handelsman R. 1) Asymptotic evaluation of fractional integral operators with applications // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6, N 5. P. 766—773.

Bharatiya P. L. 1) The inversion of a convolution transform whose kernel is a Bessel function // Amer. Math. Month. 1965. Vol. 72, N 4. P. 393—397.

Bhise V. M. 1) Inversion formula for a generalized Laplace integral // J. Vikram Univ. India. 1959. Vol. 11, N 3. P. 57—63.

2) Operators of fractional integration and a generalised Hankel transform // Collect. Math. 1964. Vol. 16, N 2—3. P. 201—209.

Bhise V. M., Madhavi Dighe. 1) On composition of integral operators with Fourier type kernels // Indian J. Pure and Appl. Math. 1980. Vol. 11, N 9. P. 1183—1187.

Bhonsle B. R. 1) Inversion integrals for the Legendre transformation and the birth rate of a population // Ganita. 1966. Vol. 17. P. 89—95.

2) Inversions of some integral equations // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1966. Vol. A36, N 4. P. 1003—1006.

Biacino L. 1) Teoremi di immersione per le derivate parziali di ordine frazionario delle funzioni di $W^r(\Omega)$ // Boll. Unione mat. ital. 1983. Vol. 2-C, N 1. P. 1—40.

2) Soluzioni negli spazi de Lebesgue della equazione integrale di Abel // Ric. mat. 1984. Vol. 33, N 2. P. 267—287.

Biacino L., Miserendino D. 1) Derivate di ordine frazionario per funzioni di $L^2(R^2)$ e caratterizzazione degli spazi $H^s(R^2)$ // Le Matematiche, Catania. 1979. Vol. 34, N 1—2. P. 143—165.

2) Perturbazioni di operatori ellittici mediante operatori contenenti derivate di ordine frazionario // Ibid. 1979. Vol. 34, N 1—2. P. 166—187.

3) Le derivate di ordine frazionario e gli spazi $W_0^s(\Omega)$ // Rend. Accad. sci. fis., mat. Napoli. Ser. 4. 1979 (1980). Vol. 46, N 118. P. 189—220.

Biacino L., Di Giorgio M., Miserendino D. 1) Derivate di ordine frazionario per funzioni di $W^r(\Omega)$ // Boll. Unione mat. ital. Analisi funzionale e Appl. Ser. 6. 1982. Vol. 1-C, N 1. P. 235—278.

Bleistein N. 1) Asymptotic expansions of integral transforms of functions with logarithmic singularities // SIAM J. Math. Anal. 1977. Vol. 8, N 4. P. 655—672.

Blum E. K. 1) The Euler—Poisson—Darboux equation in the exceptional cases // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 5, N 4. P. 511—520.

Blumenthal L. M. 1) Note on fractional operators and the theory of composition // Amer. J. Math. 1931. Vol. 53. P. 483—492.

Bôcher M. 1) An Introduction to the Study of Integral Equations // Tracts in Math. and Math. Physics. N 10. Cambridge Univ. Press, 1909. P. 8—9.

Boman J. 1) Equivalence of generalized moduli of continuity // Stockholms Univ. Math. Inst. (Medd.). 1978. N 1. P. 1—54.

Boman J., Shapiro H. S. 1) Comparison theorems for a generalized modulus of continuity // Arkiv für Mat. 1971. Bd 9, N 1. S. 91—116.

Bora S. L., Saxena R. K. 1) On fractional integration // Pubis. inst. math. Beograd. 1971. T. 11, N 25. P. 19—22.

Bosanquet L. S. 1) On Abel's integral equation and fractional integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1931. Vol. 32. P. 134—143.

2) The absolute summability (A) of Fourier series // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1934. Vol. 4. P. 12—17.

3) A mean value theorem // J. London Math. Soc. 1941. Vol. 16, N 1—4. P. 146—148.

4) Note on convexity theorems // Ibid. 1943. Vol. 18. P. 239—248.

5) Some properties of Cesàro—Lebesgue integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1945. Vol. 49. P. 40—62.

6) On the order of magnitude of fractional differences // Calcutta Math. Soc. Golden Jubilee Memorial Volume. 1958—1959. Pt 1. P. 161—172.

7) Some extensions of M. Riesz's mean value theorem // Indian J. Math. 1967. Vol. 9, N 1. P. 65—90.

8) On Liouville's extension of Abel's integral equation // Mathematika. 1969. Vol. 16, N 1. P. 59—85.

Bosanquet L. S., Linfoot E. H. 1) Generalized means and the summability of Fourier series // Quart. J. Math. Oxford ser. 1931. Vol. 8, N 5—8. P. 207—229.

Bouwkamp C. J. 1) On some Bessel-function integral equations // Ann. mat. pura ed appl. 1976. T. 108. P. 63—67.

Braaksma B. L. J. 1) Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes integrals // Compos. Math. 1964. Vol. 15, N 3. P. 239—341.

Braaksma B. L. J., Schuitman A. 1) Some classes of Watson transforms and related integral equations for generalized functions // SIAM J. Math. Anal. 1976. Vol. 7, N 6. P. 771—798.

Bragg L. R. 1) Hypergeometric operator series and related partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 143, N 1. P. 319—336.

2) The Riemann—Liouville integral and parameter shifting in a class of linear abstract Cauchy problems // SIAM J. Math. Anal. 1976. Vol. 7, N 1. P. 1—12.

Brakhage H., Nickel K., Rieder P. 1) Auflösung der Abelschen Integralgleichung. 2 Art. // Z. angew. Math. und Phys. 1965. Bd 16, N 2. S. 295—298.

Brédimas A. 1) L'operateur de différentiation d'ordre complexe // Bull. sci. math. Ser. 2. 1973. T. 97, N 1. P. 17—28.

2) La differentiation d'ordre complexe, le produit de convolution généralizé et le produit canonique pour les distributions // C. R. Acad. Sci. Paris. 1976. T. 282, N 1. P. A37—A40.

3) Extensions, propriétés complémentaires et applications des opérateurs de différentiation à gauche et à droite d'ordre complexe // Ibid. T. 283, N 1. P. A3—A6.

4) Applications a'certaines équations differentielles des premier et second ordre a'coefficients polynomiaux des opérateurs de différentiation d'ordre complexe a'gauche et a'droite // Ibid. T. 283, N 6. P. A337—A340.

5) La différentiation d'ordre complexe et les produits canonique et de convolution generalise: complements // Ibid. T. 283, N 16. P. A1095—A1098.

6) The complex order differentiation operator and the «spherical» Liouville—Radon transform in R^n, $n \geqslant 2$ // J. math. pures et appl. 1977. T. 56, N 4. P. 479—491.

Brenke W. C. 1) An application of Abel's integral equation // Amer. Math. Month. 1922. Vol. 29. P. 58—60.

Bresters D. W. 1) On distributions connected with quadratic forms // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16, N 3. P. 563—581.

2) On the Euler—Poisson—Darboux equation // SIAM J. Math. Anal. 1973. Vol. 4, N 1. P. 31—41.

3) On a generalized Euler—Poisson—Darboux equation // Ibid. 1978. Vol. 9, N 5. P. 924—934.

Bureau F. J. 1) Divergent integrals and partial differential equations // Comm. Pure and Appl. Math. 1955. Vol. 8, N 1. P. 143—202.
2) Problems and methods in partial differential equations // Ann. mat. pura ed appl. 1960. T. 51. P. 225—299.
3) Problems and methods in partial differential equations // Ibid. 1961. T. 55. P. 323.
Burkill J. C. 1) Fractional orders of integrability // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 220—226.
Burlak J. 1) A pair of dual integral equations occurring in diffraction theory // Proc. Edinburg Math. Soc. Ser. 2. 1962. Vol. 13, N 2. P. 179—187.
Busbridge I. W. 1) Dual integral equations // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. Vol. 44, N 2. P. 115—129.
Buschman R. G. 1) An inversion integral for a Legendre transformation // Amer. Math. Month. 1962. Vol. 69, N 4. P. 288—289.
2) An inversion integral // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13, N 5. P. 675—677.
3) An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Rev. 1963. Vol. 5, N 3. P. 232—233.
4) Convolution equations with generalized Laguerre polynomial kernels // Ibid. 1964. Vol. 6, N 2. P. 166—167.
5) Fractional integration // Math. Japon. 1964. Vol. 9. J. 99—106.
Buschman R. G., Srivastava H. M. 1) Inversion formulas for the integral transformation with the H-function as kernel // Indian J. Pure and Appl. Math. 1975. Vol. 6, N 6. P. 583—589.
Butzer P. L., Berens H. 1) Semi-groups of operators and approximation. Die Grund. Math. Wiss. New York: Springer, 1967. Bd. 145. 321 S.
Butzer P. L., Nessel R. J. 1) Fourier Analysis and Approximation. Vol. I. One-dimensional theory. Basel: Birkhäuser, 1971. 553 p.
Butzer P. L., Stens R. L. 1) The operational properties of the Chebyshev transform. II. Fractional derivatives // Теория приближения функций. М.: Наука, 1977. С. 49—61.
Butzer P. L., Trebels W. 1) Hilbert transforms, fractional integration and differentiation // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 74, N 1. P. 106—110.
2) Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation. Köln-Opladen: Westdeutscher Verl., 1968. 82 S.
Butzer P. L., Westphal U. 1) An access to fractional differentiation via fractional difference quotients // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 116—145.
Butzer P. L., Dyckhoff H., Görlich E., Stens R. L. 1) Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. 1977. Vol. 29, N 4. P. 781—793.
Calderon A. P. 1) Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions // Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence R. I. 1961. Vol. 4. P. 33—49.
Campos L. M. B. C. 1) On a concept of derivative of complex order with applications to special functions // IMA J. Appl. Math. 1984. Vol. 33, N 2. P. 109—133.
Carleman T. 1) Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen // Math. Z. 1922. Bd 15. S. 111—120.
2) L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent. Almqvist and Wiksells Boktyckere, 1944. 119 p.
Cartwright D. I., McMullen J. R. 1) A note on the fractional calculus // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1978. Vol. 21, N 1. P. 79—80.
Cayley A. 1) Note on Riemann's paper «Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation», Werke, p. 331—344 // Math. Ann. 1880. Bd 16. S. 81—82.
Center R. W. 1) On the value of $(d/dx)^\theta x^\theta$ when θ is a positive proper fraction // Cambridge and Dublin Math. J. 1848. Vol. 3. P. 163—169.
2) On differentiation with fractional indices, and on general differentiation // Ibid. 1848. Vol. 3. P. 274—285.
3) On differentiation with fractional indices, and on general differentiation. II. On general differentiation // Ibid. 1849. Vol. 4. P. 21—26.
4) On the symbolical value of the integral $\int x^{-1}dx$ // Ibid. 1849. Vol. 4. P. 261—264.
Chan C. K., Lu P. 1) On the stability of the solution of Abel's integral equation // J. Phys. A: Math. and Gen. 1981. Vol. 14, N 3. P. 575—578.
Chandrasekharan K., Minakshisundaram S. 1) Typical means. Tata institute Monographs. I. Oxford Univ. Press, 1952. 142 p.
Chanillo S. 1) Hypersingular integrals and parabolic potentials // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 267, N 2. P. 531—547.
2) A note on commutators // Indiana Univ. Math. J. 1982. Vol. 31, N 1. P. 7—16.
Chen Y. W. 1) Hoëlder continuity and initial value problems of mixed type differential equations // Comm. Math. Helv. 1959. Vol. 33, N 4. P. 296—321.
2) Entire solutions of a class of differential equations of mixed type // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14, N 3. P. 229—255.
Cheng H. 1) On mixed problem for nonhomogeneous Euler—Poisson—Darboux equation // J. of Hangzhou Univ. 1982. Vol. 9, N 1, P. 67—73.
Choudhary B. 1) An extension of Abel's integral equation // J. Math. Anal. and Appl. 1973. Vol. 44, N 1. P. 113—130.
Chrysovergis A. 1) Some remarks on Talenti's semigroup // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, N 2. P. 147—150.

Civin P. 1) Inequalities for trigonometric integrals. Preliminary report // Bull. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 46, N 5. P. 410.

2) Inequalities for trigonometric integrals // Duke Math. J. 1941. Vol. 8, N 4. P. 656—665.

Clements D. L., Love E. R. 1) Potential problems involving an annulus // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1974. Vol. 76, N 1. P. 313—325.

Colzani L. 1) Hardy spaces on unit spheres // Boll. Unione mat. ital. 1985. Vol. 64, N 1. P. 219—244.

Conlan J., Koh E. L. 1) A fractional differentiation theorem for the Laplace transform // Canad. Math. Bull. 1975. Vol. 18, N 4. P. 605—606.

Cooke J. C. 1) A solution of Tranter's dual integral equations problem // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1956. Vol. 9, N 1. P. 103—110.

2) The solution of triple integral equations in operational form // Ibid. 1965. Vol. 18, N 1. P. 57—72.

3) The solution of triple and quadruple integral equations and Fourier—Bessel series // Ibid. 1972. Vol. 25, N 2. P. 247—263.

Copson E. T. 1) Some applications of Marsel Riesz's integrals of fractional order // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1943. Vol. A61. P. 260—272.

2) On the Riesz—Riemann—Liouville integral // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1947. Vol. 8, N 2. P. 25—36.

3) On the problem of the electrified disc // Ibid. N 3. P. 14—19.

4) Some applications of Riesz's method // Proc. Conf. on Different. equat. 1955. Univ. Maryland: Book Stora, 1956. P. 107—113.

5) On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1958. Vol. 1, N 4. P. 349—356.

6) On certain dual integral equations // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1961. Vol. 5, N 1. P. 21—24.

Copson E. T., Erdelyi A. 1) On a partial differential equation with two singular lines // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1958. Vol. 2, N 1. P. 76—86.

Cossar J. 1) A theorem on Cesàro summability // J. London Math. Soc. 1941. Vol. 16. P. 56—68.

Cotlar M., Panzone R. 1) Generalized potential operators // Rev. Union Mat. Argentina. 1960. Vol. 19, N 1. P. 3—41.

Darboux G. 1) Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applicattions géométriques du calcul infinitésimal. Paris: Gauthier-Villars. 1915. Vol. 2.

Davis H. T. 1) Fractional operations as applied to a class of Volterra integral equations // Amer. J. Math. 1924. Vol. 46. P. 95—109.

2) The applications of fractional operators to functional equations // Ibid. 1927. Vol. 49, N 1. P. 123—142.

3) The Theory of Linear Operators. Bloomington, Indiana: Principia Press, 1936. 617 p.

4) A survey of methods for the inversion of integrals of Volterra type // Indiana Univ. Studies. Study N 76, 77. 1927. 72 P.

Delerue P. 1) Sur le calcul symbolique à n variables et sur les fonctions hyperbesséliennes // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1. 1953. T. 67, N 2. P. 83—104.

Diaz J. B., Osler T. J. 1) Differences of fractional order // Math. Comput. 1974. Vol. 28, N 125. P. 185—202.

Diaz J. B., Weinberger H. F. 1) A solution of the singular initial value problem for the Euler—Poisson—Darboux equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4, N 5. P. 703—715.

Dimovski I. H. 1) Convolution representation of the commutant of Gel'fond—Leont'ev integration operator // Докл. Болг. АН. 1981. Т. 34, № 12. С. 1643—1646.

2) Representation formulas for the commutants of integer powers of Gelfond—Leont'ev integration operators // Математика и математическое образование: Докл. II конф. Союзе матем. България, Слнъчев бряг, 6—9 апр., 1982 г. София: Изд-во Болг. АН, 1982. С. 166—172.

3) Convolutional calculus. Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1982. Vol. 2. 198 p.

Dimovski I. H., Kiryakova V. S. 1) Convolution and commutant of Gelfond—Leontiev operator of integration // Конструктивная теория функций'81: Тр. Междунар. конф., Варна, 1—5 июня 1981 г. София: Изд-во Болг. АН, 1983. С. 288—294.

2) Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer's G-function // Proc. Intern. Conf. on Complex Analysis and Appl. '83, Varna, May 2—10, 1983. Sofia: Publ. House Bulg. Acad. Sci., 1985. P. 45—66.

Dixit L. A. 1) An integral equation involving generalized Rice's polynomials // Proc. Indian Acad. Sci. 1977. Vol. A85, N 5. P. 379—382.

2) An integral equation involving ${}_4F_3$ in the kernel // Indian J. Pure and Appl. Math. 1978. Vol. 9, N 7. P. 739—745.

Doetsch G. 1) Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin: Springer, 1937. 436 S.

Domingues A. G., Trione S. E. 1) On the Laplace transforms of retarded, Lorentz-invariant functions // Adv. Math. 1979. Vol. 31, N 1. P. 51—62.

Drianov D. P. 1) Average modulus of smoothness of fractional index and fractional order derivatives // Докл. Болг. АН. 1982. Т. 35, № 12. С. 1635—1637.

2) Average modulus of smoothness of fractional index and applications // Ibid. 1983. T. 36, N 1. C. 41—43.

Dwivedi A. P., Trivedi T. N. 1) Triple and quadruple integral equations occurring in diffraction theory // Proc. Indian Acad. Sci. 1977. Vol. A85, N 4. P. 179—185.

Edels H., Hearne K., Young A. 1) Numerical solutions of the Abel integral equation // J. Math. and Phys. 1962. Vol. 41, N 1. P. 62—75.

Eggermont P. P. B. 1) A new analysis of the trapezoidal-discretization method for the numerical solution of Abel-type integral equations // J. Integr. Equat. 1981. Vol. 3, N 4. P. 317—332.

Elrod H. G., Jr. 1) Note on a solution of the telegraphist's equation applicable to supersonic shear flow // J. Math. and Phys. 1958. Vol. 37, N 1. P. 66—68.

Erdelyi A. 1) Note on the transformation of Eulerian hypergeometric integrals // Quart. J. Math. Oxford ser. 1939. Vol. 10. P. 129—134.

2) Transformation of hypergeometric integrals by means of fractional integration by parts // Ibid. 1939. Vol. 10. P. 176—189.

3) On some biorthogonal sets of functions // Ibid. 1940. Vol. 11, N 42. P. 111—123.

4) On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms // Ibid. 1940. Vol. 11, N 44. P. 293—303.

5) A class of hypergeometric transforms // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15. P. 209—212.

6) On some functional transformations // Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecn. di Torino. 1950. Vol. 10. P. 217—234.

7) An integral equation involving Legendre's polynomial // Amer. Math. Month. 1963. Vol. 70, N 6. P. 651—652.

8) Some applications of fractional integration // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note N 316, D1-82-0286, 1963. 23 p.

9) An integral equation involving Legendre functions // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1964. Vol. 12, N 1. P. 15—30.

10) An application of fractional integrals // J. Analyse Math. 1965. Vol. 14. P. 113—126.

11) Axially symmetric potentials and fractional integration // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1965. Vol. 13, N 1. P. 216—228.

12) Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J. 1967. Vol. 8, N 1. P. 50—54.

13) Some dual integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1968. Vol. 16, N 6. P. 1338—1340.

14) On the Euler—Poisson—Darboux equation // J. Analyse Math. 1970. Vol. 23. P. 89—102.

15) Fractional integrals of generalized functions // J. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 14, N 1. P. 30—37.

16) Asymptotic evaluation of integrals involving a fractional derivative // SIAM J. Math. Anal. 1974. Vol. 5, N 2. P. 159—171.

17) Fractional integrals of generalized functions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 151—170.

Erdelyi A., Kober H. 1) Some remarks on Hankel transforms // Quart. J. Math. Oxford ser. 1940. Vol. 11, N 43. P. 212—221.

Erdelyi A., McBride A. C. 1) Fractional integrals of distributions // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 4. P. 547—557.

Estrada R., Kanwal R. P. 1) Distributional solutions of singular integral equations // Canad. J. Math. 1962. Vol. 14, N 4. P. 685—693.

Estrada R., Kanwal R. P. 1) Distributional solutions of singular integral equations // J. Integr. Equat. 1985. Vol. 8, N 1. P. 41—85.

Exton H. 1) q-Hypergeometric Functions and Applications. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1983. 347 p.

Fabian W. 1) Fractional calculus // J. Math. and Phys. 1936. Vol. 15. P. 83—89.

2) Expansions by the fractional calculus // Quart. J. Math. Oxford ser. 1936. Vol. 7. P. 252—255.

3) The Riemann surfaces of a function and its fractional integral // Edinburgh Math. Notes. 1954. N 39. P. 14—16.

Fattorini H. O. 1) A note on fractional derivatives of semigroups and cosine functions // Pacif. J. Math. 1983. Vol. 109, N 2. P. 335—347.

Favard J. 1) Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques // Bull. Sci. Math. 1937. T. 61. P. 209—224, 243—256.

Feller W. 1) On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semigroups, generated by them // Comm. Sémin. Math. L'Univ. Lund (Medd. Lunds Univ. Mat. Sémin.). Tome suppl. 1952. Vol. 21. P. 72—81.

Fenyö S., Stolle H. W. 1) Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen. Berlin: Dtsch. Verl. Wiss., 1983. Bd 3. 548 S.

Ferrar W. L. 1) Generalised derivatives and integrals // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1927—1928. Vol. 48, N 1—2. P. 92—105.

Fettis H. E. 1) On the numerical solution of equations of the Abel type // Math. Comput. 1964. Vol. 18, N 84. P. 491—496.

Fisher M. J. 1) Singular integrals and fractional powers of operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 161, N 2. P. 307—326.
2) Imaginary powers of the indefinite integrals // Amer. J. Math. 1971. Vol. 93, N 2. P. 317—328.
3) Purely imaginary powers of certain differential operators. I // Ibid. 1971. Vol. 93, N 2. P. 452—478.
4) Purely imaginary powers of certain differential operators. II // Ibid. 1972. Vol. 94, N 3. P. 835—860.
5) Fractional powers of operators and Bessel potentials on Hilbert space // Stud. Math. 1972. Vol. 41, N 2. P. 191—206.
6) Applications of the theory of imaginary powers of operators // Rocky Mountain. J. Math. 1972. Vol. 2, N 3. P. 465—511.
7) Some generalizations of the hypersingular integral operators // Stud. Math. 1973. Vol. 47, N 2. P. 95—121.
Flett T. M. 1) On the absolute summability of a Fourier series and its conjugate series // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1958. Vol. 8, N 30. P. 258—311.
2) Some more theorems concerning the absolute summability of Fourier series and power series // Ibid. 1958. Vol. 8, N 31. P. 357—387.
3) A note on some inequalities // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1958. Vol. 4, N 1. P. 7—15.
4) Some theorems on fractional integrals // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1959. Vol. 55, N 1. P. 31—50.
5) Mean values of power series // Pacif. J. Math. 1968. Vol. 25, N 3. P. 463—494.
6) Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces // Proc. London Math. Soc. 1971. Vol. 22, N 3. P. 385—451.
7) The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities // J. Math. Anal. and Appl. 1972. Vol. 38, N 3. P. 746—765.
8) Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc // Ibid. 1972. Vol. 39, N 1. P. 125—158.
Fourier J. 1) The Analytical Theory of Heat. N. Y.: Dover publ., 1955. 466 p. (First publ.: Thèorie Analytique de la Chaleur. A Paris: Chez firmin didot père et fils, 1822.)
Fox C. 1) An application of fractional integration to chain transform theory // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 9, N 6. P. 968—973.
2) The G and H functions as symmetrical Fourier kernels. // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 98, N 3. P. 395—429.
3) Integral transforms based upon fractional integration // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1963. Vol. 59, N 1. P. 63—71.
4) A formal solution of certain dual integral equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 119, N 3. P. 389—398.
5) An inversion formula for the kernel $K_\nu(x)$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1965. Vol. 61, N 3. P. 457—467.
6) Solving integral equations by L and L^{-1} operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 29, N 2. P. 299—306.
7) Applications of Laplace transforms and their inverses // Ibid. 1972. Vol. 35, N 1. P. 193—200.
Fremberg N. E. 1) Proof of a theorem of M. Riesz concerning a generalization of the Riemann—Liouville integral // Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förhandl. 1945. Bd 15, N 27. S. 265—276.
2) A study of generalized hyperbolic potentials with some physical applications // Comm. Sémin. Math. L' Univ. Lund. 1946. Vol. 7. P. 1—100.
3) Some applications of the Riesz potential to the theory of the electromagnetic field and the meson field // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1946. Vol. 188. P. 18—31.
Frie W. 1) Zur Auswertung der Abelschen Integralgleichung // Ann. Phys. DDR. 1963. Bd 10, N 5—6. S. 332—339.
Friedlander F. G., Heins A. E. 1) On the representation theorems of Poisson, Riemann and Volterra for the Euler—Poisson—Darboux equation // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1969. Vol. 33, N 3. P. 219—230.
Frostman O. 1) Potentiel d'equilibre et capacité des ensembles avec quelques applications a la théorie des fonctions // Medd. Lunds Univ. Mat. Sémin. 1935. Vol. 3. P. 1—118.
Fujiwara M. 1) On the integration and differentiation of an arbitrary order // Tôhoku Math. J. 1933. Vol. 37. P. 110—121.
Gaer M. C. 1) Fractional derivatives and entire functions: Ph. Dr thes. Univ. of Illinois. Urbana, Illinois, 1968. 91 p.
Gaer M. C., Rubel L. A. 1) The fractional derivative via entire functions // J. Math. Anal. and Appl. 1971. Vol. 34, N 2. P. 289—301.
2) The fractional derivative and entire functions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 171—206.
Garding L. 1) The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals // Ann. Math. Ser. 2. 1947. Vol. 48, N 4. P. 785—826.
Gatto A. E., Gutierrez C. E., Wheeden R. L. 1) On weighted fractional integrals // Proc. Conf. on harmonic analysis in honour of A. Zygmund. Wadswath Intern. Group, march 23—28, 1981. Belmont, Calif., Univ. of Chicago. 1983. Vol. 1. P. 124—137.

2) Fractional integrals on weighted H^p spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 289, N 2. P. 575—589.

Gearhart L. 1) The Weyl semigroup and left translation invariant subspaces // J. Math. Anal. and Appl. 1979. Vol. 67, N 1. P. 75—91.

Gilbert R. P. 1) On the singularities of generalized axially symmetric potentials // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1960. Vol. 6, N 2. P. 171—176.

2) Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. N. Y.; London: Acad. Press, 1969. 311 p.

Gomes M. I., Pestana D. D. 1) The use of fractional calculus in probability // Portugal. Math. 1978. Vol. 37, N 3—4. P. 259—271.

Gopala Rao V. R. 1) A characterization of parabolic function spaces // Amer. J. Math. 1977. Vol. 99, N 5. P. 985—993.

2) Parabolic function spaces with mixed norm // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 246, N 2. P. 451—461.

Gordon A. N. 1) Dual integral equations // J. London Math. Soc. 1954. Vol. 29, N 3. P. 360—363.

Gorenflo R. 1) Lösung einer Abelschen Integralgleichung bei Anwesenheit von störungen mittels quadratischer optimierung // Z. angew. Math. und Mech. 1965. Bd 45. S.-H. S. T33—T35.

Greatheed S. S. 1) On general differentiation. Nos 1 and 2 // Cambridge Math. J. 1839. Vol. 1. P. 11—21, 109—117.

2) On the expansion of a function of a binomial // Ibid. P. 67—74.

Grünwald A. K. 1) Uber «begrenzte» Derivationen und deren Anwendung // Z. angew. Math. und Phys. 1867. Bd 12. S. 441—480.

Gupta H. L., Rusia K. C. 1) Inversion of an integral equation involving generalized Laguerre polynomial // Ganita. 1974. Vol. 25, N 1. P. 45—54.

Gupta K. C., Mittal P. K. 1) The H-function transform // J. Austral. Math. Soc. 1970. Vol. 11, N 2. P. 142—148.

Gupta S. D. 1) On certain integral equations // Math. Balkan. 1973. Vol. 3. P. 115—117.

Gupta Sulaxana K. 1) On the strong Riesz means of Fourier series // Indian J. Math. 1967. Vol. 9, N 1. P. 95—107.

Gwilliam A. E. 1) On Lipschitz conditions // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1936. Vol. 40. P. 353—364.

Habibullah G. M. 1) Some integral operators with hypergeometric functions as kernels // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. 1977. T. 21, N 3/4. P. 293—300.

2) An integral operator involving a Legendre function // J. Natur. Sci. and Math. 1981. Vol. 21, N 2. P. 147—153.

Hadamard J. 1) Essai sur l'etude des fonctions données par leur développement de Taylor // J. math. pures et appl. Ser. 4. 1892. T. 8. P. 101—186.

Hall N. S., Quinn D. W., Weinacht R. J. 1) Poisson integral formulas in generalized bi-axially symmetric potential theory // SIAM J. Math. Anal. 1974. Vol. 5, N 1. P. 111—118.

Handelsman R. A., Lew J. S. 1) Asymptotic expansion of a class of integral transforms via Mellin transforms // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1969. Vol. 35, N 5. P. 382—396.

2) Asymptotic expansion of a class of integral transforms with algebraically dominated kernels // J. Math. Anal. and Appl. 1971. Vol. 35, N 2. P. 405—433.

Handelsman R. A., Olmstead W. E. 1) Asymptotic solution to a class of nonlinear Volterra integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1972. Vol. 22, N 3. P. 373—384.

Harboure E., Macias R. A., Segovia C. 1) Boundedness of fractional operators on L^p spaces with different weights // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 285, N 2. P. 629—647.

2) A two weight inequality for the fractional integral when $p=n/\alpha$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 90, N 4. P. 555—562.

Hardy G. H. 1) Notes on some points in the integral calculus. XLVIII. On some properties of integrals of fractional order // Messenger. Math. 1917. Vol. 47, N 10. P. 145—150.

2) Notes on some points in the integral calculus. LV. On the integration of Fourier series // Ibid. 1922. Vol. 51, N 12. P. 186—192.

Hardy G. H., Landau E., Littlewood J. E. 1) Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions // Math. Z. 1935. Bd 39, N 5. S. 677—695.

Hardy G. H., Littlewood J. E. 1) Some properties of fractional integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1925. Vol. 24. P. 37—41.

2) Notes on the theory of series (V). On Parseval's theorem // Ibid. 1926. Vol. 26. P. 287—294.

3) Some properties of fractional integrals. I // Math. Z. 1928. Bd 27, N 4. S. 565—606.

4) A convergence criterion for Fourier series // Ibid. 1928. Bd 28, N 4. S. 612—634.

5) Some properties of fractional integrals. II // Ibid. 1932. Bd 34. S. 403—439.

6) Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series // Duke Math. J. 1936. Vol. 2, N 2. P. 354—382.

7) Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions // Quart. J. Math. Oxford ser. 1941. Vol. 12, N 48. P. 221—256.

Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G. 1) The maximum of a certain bilinear form // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1926. Vol. 25. P. 265—282.

Hardy G. H., Riesz M. 1) The general theory of Dirichlet's series // Cambridge Univ. Press. 1915. N 18. 78 p.
Hardy G. H., Rogosinski W. W. 1) Notes on Fourier series (I). On sine series with positive coefficients // J. London Math. Soc. 1943. Vol. 18. P. 50—57.
Hardy G. H., Titchmarsh E. C. 1) An integral equation // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1932. Vol. 28, N 2. P. 165—173.
Hedberg L. I. 1) On certain convolution inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36, N 2. P. 505—510.
Heinig H. P. 1) Weighted norm inequalities for classes of operators // Indiana Univ. Math. J. 1984. Vol. 33, N 4. P. 573—582.
2) Estimates for operators in mixed weighted L^p-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287, N 2. P. 483—493.
Helgason S. 1) The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds // Acta Math. 1965. Vol. 113, N 3—4. P. 153—180.
Henrici P. 1) Zur Funktionentheorie der Wellengleichung mit Anwendungen auf spezielle Reihen und Integrale mit Besselschen, Whittakerschen und Mathieuschen Funktionen // Comm. Math. Helv. 1957. Vol. 27, N 3—4. P. 235—293.
Herson D. L., Heywood P. 1) On the range of some fractional integrals // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1974. Vol. 8, N 4. P. 607—614.
Herz C. S. 1) Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms // J. Math. and Mech. 1968. Vol. 18, N 4. P. 283—323.
Heywood P. 1) On a modification of the Hilbert transform // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1967. Vol. 42, N 4. P. 641—645.
2) On the inversion of fractional integrals // Ibid. 1971. Vol. 3, N 3. P. 531—538.
3) Improved boundedness conditions for Lowndes' operators // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1975. Vol. A73, N 19. P. 291—299.
Heywood P., Rooney P. G. 1) On the boundedness of Lowndes' operators // J. London Math. Soc. 1975. Vol. 10, N 2. P. 241—248.
Higgins T. P. 1) An inversion integral for a Gegenbauer transformation // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1963. Vol. 11, N 4. P. 886—893.
2) An inversion for a Jacobi integral transformation // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. D1-82-0250. 1963.
3) A hypergeometric function transform // J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1964. Vol. 12, N 3. P. 601—612.
4) The Rodrigues operator transform, Preliminary report // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note N 437, D1-82-0492. Seattle, Washington, 1965. 125 p.
5) The Rodrigues operator transform. Tables of generalized Rodrigues formulas // Ibid. N 438, D1-42-0493. Seattle, Washington, 1965. 55 p.
6) The use of fractional integral operators for solving nonhomogeneous differential equations // Ibid. N 541, D1-82-0677. Seattle, Washington, 1967. 19 p.
Hille E. 1) Notes on linear transformations. II. Analyticity of semi-groups // Ann. Math. 1939. Vol. 40, N 1. P. 1—47.
2) Remarks on ergodic theorems // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 57, N 2. P. 246—269.
Hille E., Tamarkin J. D. 1) On the theory of linear integral equations // Ann. Math. 1930. Vol. 31. P. 479—528.
Hirsch F. 1) Extension des proprietés des puissances fractionnaires // Lect. Notes Math. 1976. Vol. 563. P. 100—120.
Hirshman I. I. 1) Fractional integration // Amer. J. Math. 1953. Vol. 75, N 3—4. P. 531—546.
Holmgren Hj. 1) Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst // Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Handl. Stockholm. 1865—1866. Bd 5, N 11. S. 1—83.
2) Sur l'intégration de l'équation différentielle $(a_2+b_2x+c_2x^2)d^2y/dx^2+(a_1+$ $+b_1x)dy/dx+a_0y=0$ // Ibid. 1867. Bd 7, N 9. S. 1—58.
Hövel H. W., Westphal U. 1) Fractional powers of closed operators // Stud. Math. 1972. Vol. 42, N 2. P. 177—194.
Huber A. 1) On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials // Ann. Math. 1954. Vol. 60, N 2. P. 351—358.
Hughes R. J. 1) On fractional integrals and derivatives in L^p // Indiana Univ. Math. J. 1977. Vol. 26, N 2. P. 325—328.
Humbert P., Agarwal R. P. 1) Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations // Bull. Sci. Math. 1953. T. 77, N 10. P. 180—185.
Isaacs G. L. 1) M. Riesz's mean value theorem for infinite integrals // J. London Math. Soc. 1953. Vol. 28, N 110. P. 171—176.
2) The iteration formula for inverted fractional integrals // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1961. Vol. 11, N 42. P. 213—238.
Izumi S. 1) Some trigonometrical series. III // J. Math. Tokyo. 1953. Vol. 1, N 2—3. P. 128—136.
Izumi S., Sato M. 1) Some trigonometrical series. XVII // Proc. Japan Acad. 1955. Vol. 31, N 10. P. 659—664.
Jackson F. H. 1) On q-definite integrals // Quart. J. Pure Appl. Math. 1910. Vol. 41, P. 193—203.
2) Basic integration // Quart. J. Math. Oxford ser. 1951. Vol. 2, N 5. P. 1—16.

Jain N. C. 1) A relation between Mellin transform and Weyl (fractional) integral of two variables // Ann. polon. math. 1970. Vol. 23, N 3. P. 255—257.
Joachimsthal F. 1) Ueber ein Attractionsproblem // J. für reine und angew. Math. 1861. Bd 58. S. 135—137.
Johnson R. 1) Temperatures, Riesz potentials and the Lipschitz spaces of Herz // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 27, N 2. P. 290—316.
Jones B. F., Jr. 1) Lipschitz spaces and the heat equation // J. Math. and Mech. 1968. Vol. 18, N 5. P. 379—409.
Jones D. S. 1) A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disk // Comm. Pure and Appl. Math. 1956. Vol. 9, N 4. P. 713—746.
2) A modified Hilbert transform // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1970. Vol. A69, N 1. P. 45—76.
Joshi B. K. 1) An integral equation involving Whittaker's function // Math. Student. 1973. Vol. 41, N 4. P. 407—408.
Joshi C. M. 1) Fractional integration and integral representations of certain generalized hypergeometric functions // Ganita. 1966. Vol. 17, N 2. P. 79—88.
Joshi J. M. Ch. 1) Fractional integration and generalized Hankel transform // Agra Univ. J. Res. (sci.). 1961. Vol. 10, N 2. P. 293—300.
Juberg R. K. 1) Finite Hilbert transforms in L^p // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78, N 3. P. 435—438.
2) On the boundedness of certain singular integral operators // Hilbert space operators and operator algebras: Proc. Intern. Conf. Tihany, 1970. Colloq. Math. Soc. Jànos Bolyai. Amsterdam: North-Holland Publ., 1972. Vol. 5. P. 305—318.
3) The spectra for operators of a Basic collection // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 79, N 4. P. 821—824.
Kalia R. N. 1) Theorems on a new class of integral transforms. III // Acta Mexic. cienc. y tecnol. 1970. Vol. 4, N 1. P. 1—5.
Kalisch G. K. 1) On fractional integrals of pure imaginary order in L_p // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18, N 1. P. 136—139.
2) On the similarity of certain operators. Hilbert space operators and operator algebras // Proc. Intern. Conf. Tihany, 1970. Colloq. Math. Soc. Jànos Bolyai. Amsterdam: North-Holland Publ., 1972. Vol. 5. P. 333—346.
Kalla S. L. 1) Some theorems on fractional integration // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1966. Vol. A36, N 4. P. 1007—1012.
2) On the solution of certain integral equations of convolution type // Acta Mexic. cienc. y tecnol. 1968. Vol. 2, N 2. P. 85—87.
3) Fractional integration operators involving generalized hypergeometric functions. II // Ibid. 1969. Vol. 3, N 1. P. 1—5.
4) Integral operators involving Fox's H-function // Ibid. 1969. Vol. 3, N 3. P. 117—122.
5) Some theorems on fractional integration. II // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1969. Vol. A39, N 1. P. 49—56.
6) Fractional integration operators involving generalized hypergeometric functions // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1970. Vol. A20, N 1—2. P. 93—100.
7) On operators of fractional integration // Math. Notae. 1970—1971. Vol. 22, N 1—2. P. 89—93.
8) Some generalized theorems of fractional integration // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1971. Vol. A21, N 1—2. P. 235—239.
9) On the solution of an integral equation involving a kernel of Mellin—Barnes type integral // Kyungpook Math. J. 1972. Vol. 12, N 1. P. 93—101.
10) On an integral equation of electrostatic problems // Metn. J. Pure and Appl. Sci. 1975. Vol. 8, N 3. P. 291—294.
11) On operators of fractional integration. II // Math. Notae. 1976. Vol. 25. P. 29—35.
12) Operators of fractional integration // Lect. Notes Math. 1980. N 798. P. 258—280.
Kalla S. L., Saxena R. K. 1) Integral operators involving hypergeometric functions // Math. Z. 1969. Bd 108, N 3. S. 231—234.
2) Integral operators involving hypergeometric functions. II // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1974. Vol. A24. P. 31—36.
Kato T. 1) Perturbation theory for nullity, deficiencies and other quantities of linear operators // J. Analyse Math. 1958. Vol. 6, N 2. P. 261—322.
Katsaras A., Liu D. 1) Sur les dérivées fractionnaires des fonctions périodiques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1975. T. 281, N 9. P. A265—A268.
Kaul C. L. 1) On fractional integration operators of functions of two variables // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1971. Vol. A41, N 3—4. P. 233—240.
Kelland P. 1) On general differentiation. I and II // Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1840. Vol. 14. P. 567—603, 604—618.
2) On general differentiation. III // Ibid. 1849. Vol. 16, N 2—3. P. 241—303.
3) On a process in the differential calculus, and its application to the solution of certain differential equations // Ibid. 1850—1951. Vol. 20, N 1. P. 39—55.
Kesarwani R. N. (Narain Roop). 1) A Fourier kernel // Math. Z. 1959. Bd 70, N 4. S. 297—299.
2) The G-functions as unsymmetrical Fourier kernel. I // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 13, N 6. P. 950—959.
3) The G-function as unsymmetrical Fourier kernels. II // Ibid. 1963. Vol. 14, N 1. P. 18—28.

4) The G-function as unsymmetrical Fourier kernels. III // Ibid. 1963. Vol. 14, N 1. P. 271—277.

5) A pair of unsymmetrical Fourier kernels // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 115, N 3. P. 356—369.

6) On an integral transform involving G-functions // SIAM J. Appl. Math. 1971. Vol. 20, N 1. P. 93—98.

Khan M. A. 1) An algebraic study of certain q-fractional integrals and q-derivatives // Math. Student. 1972 (1974). Vol. 40. P. 442—446.

Khandekar P. R. 1) On a convolution transform involving generalized Laguerre polynomial as its kernel // J. math. pures et appl. 1965. T. 44, N 2. P. 195—197.

Kim Hong Oh. 1) Derivatives of Blaschke products // Pacif. J. Math. 1984. Vol. 114, N 1. P. 175—190.

2) On a theorem of Hardy and Littlewood on the polydisc // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 97, N 3. P. 403—409.

King L. V. 1) On the acoustic radiation pressure on circular discs: Inertia and diffraction corrections // Proc. Roy Soc. London. Ser. A. 1935. Vol. 153, N A878. P. 1—16.

Kober H. 1) On fractional integrals and derivatives // Quart. J. Math. Oxford ser. 1940. Vol. 11, N 43. P. 193—211.

2) On a theorem of Schur and on fractional integrals of purely imaginary order // Trans. Amer. Math. Soc. 1941. Vol. 50, N 1. P. 160—174.

3) On Dirichlet's singular integral and Fourier transforms // Quart. J. Math. Oxford ser. 1941. Vol. 12, N 46. P. 78—85.

4) On certain linear operations and relations between them // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1961. Vol. 11, N 43. P. 434—456.

5) A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations // J. London Math. Soc. 1967. Vol. 42, N 1. P. 42—50.

6) The extended Weyl integral and related operations // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 19, N 2. P. 285—291.

7) New properties of the Weyl extended integral // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1970. Vol. 21, N 3. P. 557—575.

Koeller R. C. 1) Polynomial operators, Stiltjes convolution and fractional calculus in hereditary mechanics // Acta Mechanica. 1986. Vol. 58. P. 251—264.

Koh E. L., Conlan J. 1) Fractional derivatives, Laplace transforms and association of variables // Int. J. Syst. Sci. 1976. Vol. 7, N 5. P. 591—596.

Koizumi S. 1) On fractional integration // Tôhoku Math. J. 1957. Vol. 9, N 3. P. 298—306.

Komatsu H. 1) Fractional powers of operators. I // Pacif. J. Math. 1966. Vol. 19, N 2. P. 285—346.

2) Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces // Ibid. 1967. Vol. 21, N 1. P. 89—111.

3) Fractional powers of operators. III. Negative powers // J. Math. Soc. Japon. 1969. Vol. 21, N 2. P. 205—220.

4) Fractional powers of operators. IV. Potential operators // Ibid. P. 221—228.

5) Generalized Poisson integrals and regularity of functions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 232—248.

Komatu Y. 1) On fractional angular derivative // Kōdai Math. Sem. Rep. 1961. Vol. 13, N 4. P. 249—254.

2) On mean distortion for analytic functions with positive real part in a circle // Nagoya Math. J. 1967. Vol. 29. P. 221—228.

3) On a one-parameter additive family of operator defined on analytic functions regular in the unit disc // Bull. Fac. Sci. Engng. Chuo Univ. 1979. Vol. 22. P. 1—22.

4) On the range of analytic functions related to Caratheodory class // Ann. polon. Math. 1985. Vol. 46. P. 141—145.

Koschmieder L. 1) Funktionales Rechnen mit allgemeinen Ableitungen // Anz. Öster. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 1949. Bd 86, N 13. S. 241—244.

2) Verallgemeinerte Ableitungen und hypergeometrische Funktionen // Monatsh. Math. 1949. Vol. 53. P. 169—183.

Kostitzin V. 1) Sur une généralisation de l'équation intégrale d'Abel // C. R. Acad. Sci. Paris. 1947. T. 224, N 12. P. 885—887.

Kralik D. 1) Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktiontheorie // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1956. Vol. 7, N 1. P. 49—64.

Krantz S. G. 1) Fractional integration on Hardy spaces // Stud. Math. 1982. Vol. 73, N 2. P. 87—94.

Krug A. 1) Theorie der Derivationen // Akad. Wiss., Wien, Denkenschriften. Math.-Natur. Kl. 1890. Bd 57. S. 151—228.

Kumbhat R. K. 1) An inversion formula for an integral transform // Indian J. Pure and Appl. Math. 1976. Vol. 7, N 4. P. 368—375.

Kuttner B. 1) Some theorems on fractional derivatives // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1953. Vol. 3, N 12. P. 480—497.

Kuttner B., Tripathy N. 1) An inclusion theorem for Hausdorff summability method associated with fractional integrals // Quart. J. Math. Oxford ser. 1971. Vol. 22, N 86. P. 299—308.

Lacroix S. F. 1) Traité du calcul différentibl et de calcul intégral. 3 ed. Paris: Courcier, 1820.
Lamb W. 1) Fractional powers of operators defined on a Fréchet space // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1984. Vol. 27, N 2. P. 165—180.
2) A distributional theory of fractional calculus // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1985. Vol. A99, N 3—4. P. 347—357.
3) Fractional calculus via fractional powers of operators // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 49—62.
Laplace P. S. 1) Théorie analytique des probabilites. Paris: Courcier, 1812.
Laurent H. 1) Sur le calcul des dérivées a indices quelconques // Nouv. Ann. Math. 1884. Vol. 3, N 3. P. 240—252.
Lavoie J. L., Osler T. J., Tremblay R. 1) Fractional derivatives and special functions // SIAM Rev. 1976. Vol. 18, N 2. P. 240—268.
Lavoie J. L., Tremblay R., Osler T. J. 1) Fundamental properties of fractional derivatives via Pochhammer integrals // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 323—356.
Leibniz G. W. 1) Leibniz an de l'Hospital (Letter from Hannover, Germany, September 30, 1695) // Oeuvres Mathématiques de Leibniz. Correspondance de Leibniz avec Hugens, van Zulichem et le Marquis de L'Hospital. Paris: Libr. de A. Franck, ed. 1853. P. 1. Vol. 2. P. 297—302.
2) Leibniz an Wallis (Letter, may 28, 1697) // Leibnizens Mathematische Schriften. Hildesheim: Olms Verl., 1962. Bd 4. P. 23—29.
Leray J. 1) Hyperbolic differential equations. Princeton: Inst. Advanced Study, 1953. 238 p.
Lewy H. 1) A theory of terminals and reflection laws of partial differential equations // ONR Tech. Rep. N 4. Stanford Univ., 1952.
2) On the reflection laws of second order partial differential equations in two independent variables // Bull. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 65, N 2. P. 37—58.
Lions J. L. 1) Sur l'existence de solutions des équations de Navier—Stokes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1959. T. 248, N 20. P. 2847—2849.
Lions J. L., Peetre J. 1) Sur une classe d'espaces d'interpolation // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1964. Vol. 19. P. 5—68.
Liouville J. 1) Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions // J. l'Ecole Roy. Polytéchn. 1832. T. 13, sect. 21. P. 1—69.
2) Mémoire sur le calcul des différentielles a indices quelconques // Ibid. P. 71—162.
3) Mémoire sur l'intégration de l'équation: $(mx^2+nx+p)d^2y/dx^2+(qx+r)dy/dx+$ $+sy=0$ à l'aide des différentielles à indices quelconques // Ibid. P. 163—186.
4) Mémoire sur le théoréme des fonctions complémentaires // J. für reine und angew. Math. 1834. Bd 11. S. 1—19.
5) Mémoire sur une formule d'analyse // Ibid. 1834. Bd 12, N 4. S. 273—287.
6) Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des differentielles à indices quelconques // Ibid. 1835. Bd 13, N 1—3. S. 219—232.
7) Mémoire sur le changement de la variable indépendante dans le calcul des differentielles a indices quelconques // J. l'Ecole Roy. Polytéchn. 1835. T. 15, sect. 24. P. 17—54.
8) Mémoire sur l'intégration des équations différentielles a indices fractionnaires // Ibid. 1837. T. 15, N 55. P. 58—84.
Liverman T. P. G. 1) Generalized Functions and Direct Operational Methods. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964. Vol. 1. 338 p.
Loo C.-T. 1) Two tauberian theorems in the theory of Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 56, N 3. P. 508—518.
Love E. R. 1) Fractional integration and almost periodic functions // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. Vol. 44, N 5. P. 363—397.
2) Some integral equations involving hypergeometric functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1967. Vol. 15, N 3. P. 169—198.
3) Two more hypergeometric integral equations // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. Vol. 63, N 4. P. 1055—1076.
4) Fractional derivatives of imaginary order // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1971. Vol. 3, N 2. P. 241—259.
5) Two index laws for fractional integrals and derivatives // J. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 14, N 4. P. 385—410.
6) A hypergeometric integral equation // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 272.
7) A third index law for fractional integrals and derivatives // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 63—74.
8) Inversion of the Struve transform // Ibid. P. 75—86.
9) Inequalities like Opial's inequality // Rocznik naukowo-dydaktyczny WSP w Krakowie. Pr. mat. 1985. Vol. 97, N 11. P. 109—118.
Love E. R., Young L. C. 1) In fractional integration by parts // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. Vol. 44. P. 1—35.
Love E. R., Prabhakar T. R., Kashyap N. K. 1) A confluent hypergeometric integral equation // Glasgow Math. J. 1982. Vol. 23, N 1. P. 31—40.
Lowengrub M. 1) Systems of Abel type integral equations // Function theoretic me-

thods in differential equations / R. P. Gilbert, R. J. Weinacht, eds. Pitman Publ., 1976. P. 277—296.

Lowengrub M., Sneddon I. N. 1) An axisymmetric boundary value problem of mixed type for a half-space // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1962. Vol. 13, N 1. P. 39—46.

2) The solution of a pair of dual integral equations // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1963. Vol. 6, N 1. P. 14—18.

Lowengrub M., Walton J. 1) Systems of generalized Abel equations // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10, N 4. P. 794—807.

Lowndes J. S. 1) A generalisation of the Erdélyi—Kober operators // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1970. Vol. 17, N 2. P. 139—148.

2) Some triple integral equations // Pacif. J. Math. 1971. Vol. 38, N 2. P. 515—521.

3) On dual and triple integral equations involving modified Bessel functions // Appl. Anal. 1977. Vol. 6, № 4. P. 253—260.

4) Solution of an integral equation // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19, N 1. P. 69—73.

5) An application of some fractional integrals // Ibid. 1979. Vol. 20, N 1. P. 35—41.

6) The solution of some integral equations // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. Vol. 2, N 1. P. 26—33.

7) On some generalisations of the Riemann—Liouville and Weyl fractional integrals and their applications // Glasgow Math. J. 1981. Vol. 22, N 2. P. 173—180.

8) Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. Vol. 26, N 3. P. 307—311.

9) On some fractional integrals and their applications // Ibid. Ser. 2. 1985. Vol. 28, N 1. P. 97—105.

Luke Y. L. 1) The Special Functions and Their Approximations. In 2 vls. N. Y.: Acad. Press, 1969. Vol. 1. 349 p.

Lundgren T., Chiang D. 1) Solutions of a class of singular integral equations // Quart. Appl. Math. 1967. Vol. 24, N 4. P. 303—313.

Mackie A. G. 1) A class of integral equations // Amer. Math. Month. 1965. Vol. 72, N 9. P. 956—960.

Madhavi Dighe. 1) Composition of fractional integral operator and an operator with Fourier type kernel // Bul. Univ. Brasov. 1978 (1979). Vol. C20. P. 3—8.

Mainra V. P. 1) On self-reciprocal functions // Bull. Calcutta Math. Soc. 1963. Vol. 55, N 1. P. 41—49.

Manandhar R. P. 1) Fractional integrals and Meijer Bessel transform // Ranchi Univ. Math. J. 1972. Vol. 3. P. 36—43.

Mandelbrojt S. 1) Sulla generalizzazione del calcolo delle variazione // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. Ser. 6. 1925. Vol. 1. P. 151—156.

Manocha H. L. 1) Transformation of integral expression for F_4 by means of fractional integration by parts // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR. 1965. T. 9, N 4. P. 337—341.

2) Integral expressions for Appell's functions F_1 and F_2 // Riv. mat. Univ. Parma. Ser. 2. 1967. Vol. 8. P. 235—242.

3) Some expansions by fractional derivatives // Mathematica (RSR). 1967. Vol. 9, N 2. P. 303—309.

Manocha H. L., Sharma B. L. 1) Fractional derivatives and summation // J. Indian Math. Soc. 1974. Vol. 38, N 1—4. P. 371—382.

Marchaud A. 1) Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles // J. math. pures et appl. 1927. T. 6, N 4. P. 337—425.

Marke P. W. 1) Bidrag til teorien for integration og differentiation af vilkaarlig orden. I. Kobenhavn: Kommission hos J. H. Schultz Forl. Fr. Bagges Kgl., 1942. 127 p.

Martić B. 1) A note on fractional integration // Publs. l'Inst. math. 1973. T. 16, N 30. P. 111—113.

2) On the connections between Riemann—Liouville fractional integral, Meijer and Hankel transforms // Rad. Akad. nauka i Umjetn. Bosne i Hercegovine. Od. prirod. i mat. nauka. Sarajevo, 1973. Vol. 45, kn. 12. P. 145—148.

Mathai A. M., Saxena R. K. 1) The H-function with Applications in Statistics and Other Disciplines. N. Y. ets.: A Halsted Press book John Wiley, 1978. 192 p.

Mathur B. L., Krishna S. 1) On multivariate fractional integration operators // Indian J. Pure and Appl. Math. 1978. Vol. 8, N 9. P. 1078—1082.

Mathur S. L. 1) Meijer—Laplace transform and fractional integration // Math. Education. 1971. Vol. A5, N 2. P. 58—64.

2) Some theorems on fractional integration // Ibid. 1972. Vol. A6, N 1. P. 29—36.

Matsuyama N. 1) Some trigonometrical series. II // J. Math. Tokyo. 1953. Vol. 1, N 2—3. P. 117—127.

McBride A. C. 1) Solution of hypergeometric integral equations involving generalized functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1975. Vol. 19, N 3. P. 265—285.

2) A theory of fractional integration for generalized functions // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6, N 3. P. 583—599.

3) A note on the spaces $F'_{p,\mu}$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1976. Vol. A77, N 1—2. P. 39—47.

4) A theory of fractional integration for generalised functions. II // Ibid. 1977. Vol. A77, N 3—4. P. 335—349.

5) The Hankel transform of some classes of generalised functions and connections with fractional integration // Ibid. 1978. Vol. A81, N 1—2. P. 95—117.

6) Fractional calculus and integral transforms of generalised functions // Res. Notes Math. 31. San Francisco ets.: Pitman Press, 1979. 179 p.

7) Fractional powers of a class of ordinary differential operators // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1982. Vol. 45, N 3. P. 519—546.

8) Index laws for some ordinary differential operators // Lect. Notes Math. 1982. Vol. 964. P. 485—493.

9) A note on the index laws of fractional calculus // J. Austral. Math. Soc. 1983. Vol. A34, N 3. P. 356—363.

10) On an index law and a result of Buschman // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1984. Vol. A96, N 3—4. P. 231—247.

11) A Mellin transform approach to fractional calculus on $(0, \infty)$ // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 99—139.

McClure J. P., Wong R. 1) Exact remainders for asymptotic expansions of fractional integrals // J. Inst. Math. and Appl. 1979. Vol. 24, N 2. P. 139—147.

McKellar B. H. J., Box M. A., Love E. R. 1) Inversion of the Struve transform of half integer order // J. Austral. Math. Soc. 1983. Vol. B25, N 2. P. 161—174.

Mikolás M. 1) Differentiation and integration of complex order of functions represented by trigonometrical series and generalized zeta-functions // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1959. Vol. 10, N 1—2. P. 77—124.

2) Sur la sommation des séries de Fourier au moyen de l'intégration d'ordre fractionnaire // C. R. Acad. Sci. Paris, 1960. T. 251, N 6. P. 837—839.

3) Application d'une nouvelle méthode de sommation aux séries trigonométriques et de Dirichlet // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1960. Vol. 11, N 3—4. P. 317—334.

4) Generalized Euler sums and the semigroup property of integro-differential operators // Ann. Univ. sci. Budapest. Sect. math. 1963. Vol. 6. P. 89—101.

5) Sur la propriété principale des opérateurs différentiels généralisés // C. R. Acad. Sci. Paris, 1964. T. 258, N 2. P. 5315—5317.

6) On the recent trends in the development, theory and applications of fractional calculus // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 357—375.

7) Integro-differential operators and theory of summation // Functional Analysis, Holomorphy and Approximational Theory. Amsterdam: North-Holland Publ., 1984. Vol. 2. P. 245—258.

Miller J. B. 1) A continuum of Hilbert spaces in L^2 // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1959. Vol. 9, N 34. P. 208—226.

Minakshisundaram S. 1) A note on the theory of Fourier series // Proc. Nat. Inst. Sci. India. 1944. Vol. 10. P. 205—215.

Minerbo G. N., Levy M. E. 1) Inversion of Abel's integral equation by means of orthogonal polynomials // SIAM J. Numer. Anal. 1969. Vol. 6, N 4. P. 598—616.

Miserendino D. 1) Tracce delle derivate di ordine frazionario delle funzioni di classe W^r in un rettangolo // Boll. Unione mat. ital. Analisi funzionale e Appl. Ser. 6. 1982. Vol. 1-C, N 1. P. 357—376.

2) Derivate di ordine frazionario per funzioni di classe W^r in un rettangolo limitato di R^k e loro tracce // Ibid. 1983. Vol. 2-C, N 1. P. 105—158.

Misra A. P. 1) Application of fractional-derivative operators to Rodrigues' type of formulae for polynomial sets // Math. Balkan. 1973. Vol. 3. P. 358—362.

Mohapatra R. N. 1) Note on summability (L) of Fourier integrals // Colloq. Math. 1973. Vol. 28, N 2. P. 291—297.

Montel P. 1) Sur les polynomes d'approximation // Bull. Soc. math. France. 1918. T. 46. P. 151—196.

Moppert K. F. 1) Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator // Comm. Math. Helv. 1953. Vol. 27, N 2. P. 140—150.

Most R. 1) Ueber die Anwendung der Differentialquotienten mit allgemeinem Index zum Integrieren von Differentialgleichungen // Z. angew. Math. und Phys. 1871. Bd 16. S. 190—210.

Mourya D. P. 1) Fractional integrals of the functions of two variables // Proc. Indian Acad. Sci. 1970. Vol. A72, N 4. P. 173—184.

Muckenhoupt B. 1) On certain singular integrals // Pacif. J. Math. 1960. Vol. 10, N 1. P. 239—261.

Muckenhoupt B., Stein E. M. 1) Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 118, N 6. P. 17—92.

Muckenhoupt B., Wheeden R. L. 1) Weighted norm inequalities for fractional integrals // Ibid. 1974. Vol. 192, N 465. P. 261—274.

Müller C., Richberg R. 1) Über die Radon-Transformation kreissymmetrischer Funktionen und ihre Beziehung zur Sommerfeldschen Theorie der Hankelfunktionen // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. Bd 2, N 1. S. 108—129.

Nagy B. S. 1) Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Ber. Verhandl. Sächsisch Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl. 1938. Bd 90. S. 103—134.

2) Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall // Ibid. 1939. Bd 91, N 1. S. 3—24.

Nair V. C. 1) Integral equations of convolution form // Riv. mat. Univ. Parma. Ser. 4. 1975. Vol. 1. P. 9—15.

Narain Roop (see Kesarwani Roop Narain)

Nasim C. 1) An integral equation involving Fox's H-function // Indian J. Pure and Appl. Math. 1982. Vol. 13, N 10. P. 1149—1162.

Nasim C., Sneddon I. N. 1) A general procedure for deriving solutions of dual integral equations // J. Eng. Math. 1978. Vol. 12, N 2. P. 115—128.

Neunzert H., Wick J. 1) Über eine Verallgemeinerung der Abelschen Integralgleichung // Ber. Kernforschungsanlage. Jülich, 1966. N 442. 23 S.

Nieva del Pino M. E. 1) Theoremas de integracion fraccional // Rev. Univ. Nac. Tucumàn. 1973. Vol. A23. P. 205—214.

Nishimoto K. 1) Fractional derivative and integral. Pt I // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1976. Vol. B-17. P. 11—19.

2) Nishimoto's fractional differintegration and the solution of Legendre's differential equation // Ibid. 1976. Vol. B-17. P. 21—25.

3) Osler's cut and Nishimoto's cut // Ibid. 1977. Vol. B-18. P. 9—13.

4) On the fractional calculus // Dissertations in Celebration of the 30th anniversary of Coll. of Engng. Nihon Univ. 1977. P. 91—131.

5) Fractional calculus (generalized integral and derivative) // On fractional calculus and its applications: Proc. Symp., Kyoto Univ., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 1981. P. 1—32.

6) Tables of fractional differintegrations of elementary functions // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1984. Vol. B-25. P. 41—46.

7) Fractional calculus (Integrals and differentiations of arbitrary order). Koriyama: Descartes Press, 1984. 197 p.

8) Applications to the solutions of linear second order differential equations of Fuchs type // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 140—153.

9) An application of fractional calculus to the differential equation of Fuchs type $\varphi_2 \cdot z + \varphi_1 \cdot (\nu - az) - \varphi \cdot a_\nu = f$ // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1985. Vol. B-26. P. 1—11.

10) An application of fractional calculus to a differential equation of Fuchs type $\varphi_2 \cdot (z^2 - z) + \varphi_1 \cdot (2\nu z - \nu - 1) + \varphi \cdot \nu(\nu - 1) = f$ // Ibid. 1986. Vol. B-27. P. 5—16.

11) Application of fractional calculus to a differential equation of Fuchs type $\varphi_2 \cdot (z^2 - z) + \varphi_1 \cdot (2\nu z - \nu + 1) + \varphi \cdot \nu(\nu - 1) = f$ // Ibid. 1986. Vol. B-27. P. 17—30.

Nishimoto K., Owa S., Srivastava H. M. 1) Solutions to a new class of fractional differintegral equations // Ibid. 1984. Vol. B-25. P. 75—78.

Noble B. 1) On some dual integral equations // Quart. J. Math. Oxford ser. 1955. Vol. 6, N 2. P. 81—87.

2) Certain dual integral equations // J. Math. and Phys. 1958. Vol. 37, N 2. P. 128—136.

Okikiolu G. O. 1) A generalisation of the Hilbert transform // J. London Math. Soc. 1965. Vol. 40, N 1. P. 27—30.

2) Fourier transforms and the operator H_α // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1966. Vol. 62, N 1. P. 73—78.

3) On integral operators with kernels involving Bessel functions // Ibid. N 3. P. 477—484.

4) Fractional integrals of the H_α-type // Quart. J. Math. Oxford ser. 1967. Vol. 18, N 69. P. 33—42.

5) On the operator $F_\sigma^{(\nu)}$ and fractional integrals // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1969. Vol. 1, N 4. P. 619—629.

6) On integral operators with kernels involving Bessel functions (correction and addendum) // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1970. Vol. 67, N 3. P. 583—586.

7) Aspects of the theory of bounded integral operators in L_p-spaces. London: Acad. Press, 1971. 522 p.

Oldham K. B., Spanier J. 1) The fractional calculus. N. Y.; London: Acad. Press, 1974. 234 p.

2) Fractional calculus and its applications // Bul. Inst. Politehn. Iasi. Sec. 1. 1978. Vol. 24, N 3—4. P. 29—34.

Olmstead W. E., Handelsman R. A. 1) Asymptotic solution to a class of nonlinear Volterra integral equations // SIAM J. Appl. Math. 1976. Vol. 30, N 1. P. 180—189.

O'Neil R. 1) Convolution operators and $L(p, q)$ spaces // Duke Math. J. 1963. Vol. 30, N 1. P. 135—140.

2) Fractional integration in Orlicz spaces. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 115, N 3. P. 300—328.

3) Les fonctions conjugées et les intégrales fractionnaires de la classes $L(\log^+ L)^s$ // C. R. Acad. Sci. Paris, 1966. T. 263, N 14. P. A463—A466.

Orton M. 1) The generalized Abel equations for Schwartz distributions // SIAM J. Math. Anal. 1980. Vol. 11, N 3. P. 596—611.

O'Shaughnessy L. 1) Problem # 433 // Amer. Math. Month. 1918. Vol. 25. P. 172—173.

Osler T. J. 1) Leibniz rule for fractional derivatives, generalized and an application to infinite series // SIAM J. Appl. Math. 1970. Vol. 18, N 3. P. 658—674.

2) The fractional derivative of a composite function // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 2. P. 288—293.

3) Taylor's series generalized for fractional derivatives and applications // Ibid. 1971. Vol. 2, N 1. P. 37—48.

4) Fractional derivatives and Leibniz rule // Amer. Math. Month. 1971. Vol. 78, N 6. P. 645—649.

5) A further extension of the Leibniz rule to fractional derivatives and its relation to Parseval's formula // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3, N 1. P. 1—16.

6) An integral analogue of Taylor's series and its use in computing Fourier transforms // Math. Comput. 1972. Vol. 26, N 118. P. 449—460.

7) The integral analog of the Leibniz rule // Ibid. N 120. P. 903—915.

8) A correction to Leibniz rule for fractional derivatives // SIAM J. Math. Anal. 1973. Vol. 4, N 3. P. 456—459.

9) Open questions for research // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 376—381.

10) Leibniz rule for fractional derivatives used to generalize formulas of Walker and Cauchy // Bul. Inst. Politehn. Iasi. Sec. 1. 1975. Vol. 21, N 1—2. P. 21—24.

Owa S. 1) On the distortion theorems. I // Kyungpook Math. J. 1978. Vol. 18, N 1. P. 53—59.

2) On applications of the fractional calculus // Math. Japon. 1980. Vol. 25, N 2. P. 195—206.

3) A remark on new criteria for univalent functions // Kyungpook Math. J. 1981. Vol. 21, N 1. P. 15—23.

4) An application of the fractional derivative. I // Ibid. N 2. P. 205—212.

5) On the fractional calculus // On fractional calculus and its applications: Proc. Symp., Kyoto Univ., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 1981. P. 57—80.

6) On the Ruscheweyh's new criteria for univalent functions // Math. Japon. 1982. Vol. 27, N 1. P. 77—96.

7) On the classes of univalent functions with negative coefficients // Ibid. N 4. P. 409—416.

8) An application of the fractional calculus // Kyungpook Math. J. 1982. Vol. 22, N 1. P. 15—19.

9) On new criteria for analytic functions // Tamkang J. Math. 1982. Vol. 13, N 2. P. 201—213.

10) An application of the fractional derivative. II // Ibid. 1983. Vol. 14, N 2. P. 123—130.

11) An application of the fractional derivative. III // Math. Japon. 1983. Vol. 28, N 2. P. 239—244.

12) On certain subclass of analytic and univalent functions in the unit disc // Bull. Iran Math. Soc. 1983. Vol. 10, N 1-2. P. 55—66.

13) Some applications of the fractional calculus // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 164—175.

14) An application of the Ruscheweyh derivatives // Math. Japon. 1985. Vol. 30, N 6. P. 927—946.

15) An application of the Ruscheweyh derivatives. II // Publ. Inst. math. 1985. Vol. 38. P. 99—110.

✓ **Owa S., Ahuja O. P.** 1) An application of the fractional calculus // Math. Japon. 1985. Vol. 30, N 6. P. 947—955.

Owa S., Nishimoto K. 1) A remark on Nishimoto's fractional differintegrations // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1982. Vol. B-23. P. 25—32.

2) A note on a class of convex functions // Ibid. 1984. Vol. B-25. P. 53—56.

Owa S., Obradovic M. 1) A remark on the Ruscheweyh derivatives // Bull. Soc. Roy. Sci., Liege, 1986. T. 55, N 2. P. 279—284.

Owa S., Shen C. Y. 1) On the coefficients of generalized starlike of convex functions of order α // Bull. Soc. Roy. Sci. Liege. 1985. Vol. 54, N 4—5. P. 195—202.

Paley R. E. A. C. 1) On the Cesàro summability of Fourier series and allied series // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1930. Vol. 26, N 2. P. 173—203.

Parashar B. P. 1) Domain and range of fractional integration operators // Math. Japon. 1967. Vol. 12, N 2. P. 141—145.

Pathak R. S. 1) Some theorems on Whittaker transforms // Indian J. Pure and Appl. Math. 1973. Vol. 4, N 3. P. 308—317.

2) On a class of dual integral equations // Proc. Kongl. Nederl. Akad. Weten. 1978. Vol. A81, N 4. P. 491—501.

Peacock G. 1) Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis (general differentiation) // 3rd annual report of the British Association. 1833. P. 206—225, 240—247.

Peetre J. 1) On the theory of $\mathscr{L}_{p,\lambda}$ spaces // J. Funct. Analysis. 1969. Vol. 4, N 1. P. 71—87.

Pennell W. O. 1) The use of fractional integration and differentiation for obtaining certain expansions in terms of Bessel functions or of sines and cosines // Bull. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 38. P. 115—122.

Penzel F. 1) Zer Theorie Verallgemeinerter Abelscher Integralgleichungen: Dr Diss. Darmstadt, 1986. 63 S.

Peters A. S. 1) Certain dual integral equations and Sonine's integrals // Technical Report N 285, IMM-NYU. Courant Inst. Math. Sci. New York Univ., 1961. 41 p.

2) Some integral equations related to Abel's equation and the Hilbert transform // Comm. Pure and Appl. Math. 1969. Vol. 22, N 4. P. 539—560.

Pichorides S. K. 1) On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov // Stud. Math. 1972. Vol. 44, N 2. P. 165—179.

Pinney E. 1) A class of integral equations which generalize Abel's equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51, N 4. P. 259—265.
Pitcher E., Sewell W. E. 1) Existence theorems for solutions of differential equations of non-integral order // Ibid. 1938. Vol. 44, N 2. P. 100—107. (A correction in N 12, P. 888.)
Plessis N. du. 1) A theorem about fractional integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 3. P. 892—898.
2) Some theorems about the Riesz fractional integral // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. Vol. 80, N 1. P. 124—134.
Poisson S. D. 1) Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles // J. l'Ecole Roy. Polytéchn. 1823. T. 12. P. 215—248.
Polking J. C. 1) A Leibniz formula for some differentiation operators of fractional order // Indiana Univ. Math. J. 1972. Vol. 21, N 11. P. 1019—1029.
Pollard H., Widder D. V. 1) Inversion of a convolution transform related to heat conduction // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 4. P. 527—532.
Popoviciu T. 1) Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles // Mathematica (Cluj). 1934. Vol. 8. P. 1—85.
Post E. L. 1) Discussion of the solution of $(d/dx)^{1/2}y=y/x$ (problem # 433) // Amer. Math. Month. 1919. Vol. 26. P. 37—39.
2) Generalized differentiation // Trans. Amer. Math. Soc. 1930. Vol. 32. P. 723—781.
Prabhakar T. R. 1) Two singular integral equations involving confluent hypergeometric functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. Vol. 66, N 1. P. 71—89.
2) Some integral equations with Kummer's functions in the kernels // Canad. Math. Bull. 1971. Vol. 14, N 3. P. 391—404.
3) A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7—15.
4) A class of integral equations with Gauss functions in the kernels // Math. Nachr. 1972. Bd 52, N 1—6. S. 71—83.
5) Hypergeometric integral equations of a general kind and fractional integration // SIAM J. Math. Anal. 1972. Vol. 3, N 3. P. 422—425.
6) A general class of operators involving $\Phi_1(a, b; c; z, w)$ and related integral equations // J. Indian Math. Soc. 1977. Vol. 41, N 1—2. P. 163—179.
Prabhakar T. R., Chakrabarty M. 1) A class of basic integral equations with basic hypergeometric function ${}_1\Phi_1$ in the kernels // Indian J. Pure and Appl. Math. 1976. Vol. 7, N 11. P. 1253—1260.
Prabhakar T. R., Kashyap N. K. 1) A new class of hypergeometric integral equations // Ibid. 1980. Vol. 11, N 1. P. 92—97.
Pryde A. J. 1) Spaces with homogeneous norms // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 21, N 2. P. 189—205.
Raina R. K. 1) On the Weyl fractional differentiation // Indian J. Pure and Appl. Math. 1979. Vol. 10, N 1—2. P. 37—41.
2) On composition of certain fractional integral operators // Ibid. 1984. Vol. 15, N 5. P. 509—516.
3) On the multiple Weyl fractional integral of a general system of polynomials // Boll. Unione mat. ital. Ser. 6. 1984. Vol. 3-A, N 2. P. 283—287.
Raina R. K., Kiryakova V. S. 1) On the Weyl fractional operator of two dimensions // Докл. Болг. АН. 1983. Т. 36, N 10. С. 1273—1276.
Raina R. K., Koul C. L. 1) Fractional derivatives of the H-functions // Jnanabha. 1977. Vol. 7. P. 97—105.
2) On Weyl fractional calculus and H-function transform // Kyungpook Math. J. 1981. Vol. 21, N 2. P. 275—279.
Rakesh S. L. 1) Theorems on fractional integration operators // Fasc. Math. 1973. N 7. P. 37—40.
Reddy G. L., Padmanabhan K. S. 1) Some properties of fractional integrals and derivatives of univalent functions // Indian J. Pure and Appl. Math. 1985. Vol. 16, N 3. P. 291—302.
Reimann H. M., Rychener T. 1) Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 487. S. 1—141.
Rieder P. 1) Die Auflösung einer Klasse verallgemeinerter Abelscher Integralgleichungen // Math. Z. 1969. Bd 109, N 1. S. 29—52.
Riemann B. 1) Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation // Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig: Teubner, 1876. P. 331—344.
Riesz M. 1) Sur un théoréme de la moyenne et ses applications // Acta Litt. ac Sci. reg. Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae. Sec. Sci., Math. 1922—1923. T. 1. P. 114—126.
2) Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green // C. R. Congrès Intern. Math. Oslo, 1936. T. 2. P. 62—63.
3) L'intégrales de Riemann—Liouville et solution invariantive du probléme de Cauchy pour l'equation des ondes // Ibid. P. 44—45.
4) Integrales de Riemann—Liouville et potentiels // Acta Litt. Acad. Sci. Szeged, 1938. T. 9. P. 1—42.
5) Rectification an travail «Intégrales de Riemann—Liouville et potentiels» // Ibid. 1939. T. 9, N 2. P. 116—118.
6) L'integrales de Riemann—Liouville et le probléme de Cauchy // Acta Math. 1949. Vol. 81, N 1—2. P. 1—223.

7) The analytic continuation of the Riemann—Liouville integral in the hyperbolic case // Canad. J. Math. 1961. Vol. 13, N 1. P. 37—47.

8) L'integrale de Riemann—Liouville et le probléme de Cauchy pour l'équation des ondes // Bull. Soc. math. France. 1967. Déc. suppl. P. 153—170.

Rooney P. G. 1) On some properties of certain fractional integrals // Trans. Roy. Soc. Canada. Ser. 3. 1956. Vol. 50. P. 61—70.

2) On the ranges of certain fractional integrals // Canad. J. Math. 1972. Vol. 24, N 6. P. 1198—1216.

3) A technique for studying the boundedness and extendability of certain types of operators // Ibid. 1973. Vol. 25, N 5. P. 1090—1102.

4) On the ranges of certain fractional integrals. II // Appl. Anal. 1978. Vol. 8, N 2. P. 175—184.

5) On integral transformations with G-function kernels // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1983. Vol. A93, N 3—4. P. 265—297.

Ross B. 1) A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 1—36.

2) The development of fractional calculus 1695—1900 // Historia Math. 1977. Vol. 4. P. 75—89.

3) Fractional calculus. An historical apologia 56 # 5811 for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non-integral orders // Math. Magaz. 1977. Vol. 50, N 3. P. 115—122.

Rothe R. 1) Zur Abelschen Integralgleichung // Math. Z. 1931. Bd 33, N 3. S. 375—387.

Rusia K. C. 1) An integral equation involving generalized Laguerre polynomial // Math. Japon. 1966. Vol. 11. P. 15—18.

2) An integral equation involving Jacobi polynomial // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1966. Vol. A36, N 4. P. 933—936.

3) Some integral equations and integrals // Ibid. 1967. Vol. A37, N 1. P. 67—70.

4) An integral equation involving confluent hypergeometric function // Math. Student. 1969. Vol. 37, N 1—4. P. 55—58.

5) A class of integral equations // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1969. Vol. A39. P. 334—336.

6) A class of integral equations involving confluent hypergeometric function // Ibid. P. 349—354.

7) On some integral equations involving Jacobi polynomials // Ibid. P. 381—388.

Sadowska D. 1) Équation intégro-differentielle d'Abel // Bull. Soc. sci. et lettres Lodz. 1959. Cl. 3. Vol. 10, N 6. P. 1—17.

Saigo M. 1) A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11, N 2. P. 135—143.

2) A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation // Math. Japon. 1979. Vol. 24, N 4. P. 377—385.

3) On the Hölder continuity of the generalized fractional integrals and derivatives // Math. Rep. Kyushu Univ. 1980. Vol. 12, N 2. P. 55—62.

4) A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation. II // Math. Japon. 1980. Vol. 25, N 2. P. 211—220.

5) A certain boundary value problem for the Euler—Darboux equation. III // Ibid. 1981. Vol. 26, N 1. P. 103—119.

6) A generalization of fractional calculus and its applications to Euler—Darboux equation // On fractional calculus and its applications: Proc. Symp., Kyoto Univ., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 1981. P. 33—56.

7) A generalization of fractional calculus // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 188—198.

Saksena K. M. 1) Inversion and representation theorems for a generalised Laplace integral // Pacif. J. Math. 1958. Vol. 8, N 3. P. 597—607.

Sampson C. H. 1) A characterization of parabolic Lebesgue spaces: Dr Diss. Rice Univ., 1968. 91 p. Diss. Abstrs. 1968. Vol. 29, N 6. Pos. 2125-B.

Sargent W. L. G. 1) A mean value theorem involving Cesàro means // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1946. Vol. 49. P. 227—240.

2) On fractional integrals of a function integrable in the Cesàro—Perron sense // Ibid. 1950. Vol. 51, N 1. P. 46—80.

3) On the continuity (C) and integrability (CP) of fractional integrals // Ibid. 1951. Vol. 52, N 4. P. 253—270.

Satô T. 1) On Abel's integral equation // Mem. Coll. Sci. Kyoto. 1935. Vol. 18. P. 63—78.

Sawyer E. 1) A two weight weak type inequality for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 281, N 1. P. 339—345.

Saxena R. K. 1) An inversion formula for the Varma transform // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1966. Vol. 62, N 3. P. 467—471.

2) An inversion formula for a kernel involving a Mellin—Barnes type integral // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, N 4. P. 771—779.

3) A formal solution of certain dual integral equations involving H-functions // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. Vol. 63, N 1. P. 171—178.

4) On the formal solution of dual integral equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 18, N 1. P. 1—8.

5) On fractional integration operators // Math. Z. 1967. Bd 96, N 4. S. 288—291.

Saxena R. K., Kumbhat R. K. 1) A generalization of Kober operators // Vijnana Parishad Anusandhan Patrika. 1973. Vol. 16, N 1. P. 31—36.

2) Integral operators involving H-function // Indian J. Pure and Appl. Math. 1974. Vol. 5, N 1. P. 1—6.

3) Some properties of generalized Kober operators // Vijnana Parishad Anusandhan Patrika. 1975. Vol. 18, N 2. P. 139—150.

Saxena R. K., Modi G. C. 1) Multidimensional fractional integration operators associated with hypergeometric functions // Nat. Acad. Sci. Lett. 1980. Vol. 3, N 5. P. 153—157.

Saxena R. K., Sethi P. L. 1) Relations between generalized Hankel and modified hypergeometric function operators // Proc. Indian Acad. Sci. 1973. Vol. A78, N 6. P. 267—273.

Saxena V. P. 1) Inversion formulae to certain integral equations involving H-function // Portugal. Math. 1970. Vol. 29, N 1. P. 31—42.

Schneider W. R. 1) The general solution of a non-linear integral equation of convolution type // J. Appl. Math. and Phys. 1982. Vol. 33, N 1. P. 140—142.

Schwartz J. T. 1) A remark on inequalities of Calderon—Zygmund type for vector-valued functions // Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14, N 4. P. 785—799.

Schwartz L. 1) Théorie des distributions. In 2 vlms. Paris: Hermann, 1950. Vol. 1. 162 p.; 1951. Vol. 2. 169 p.

Sekine T., Owa S., Nishimoto K. 1) An application of the fractional calculus // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1986. Vol. B-27. P. 31—37. V

Senator K. 1) Schauder and L_p estimates for a certain class of integro-differential boundary value problems // Bull. L'Acad. pol. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys. 1971. T. 19, N 5. P. 359—363.

Sethi P. L., Banerji P. K. 1) Fractional integration and dual integral equations // J. Indian Math. Soc. 1974 (1975). Vol. 38, N 1—4. P. 359—363.

Sewell W. E. 1) Generalized derivatives and approximation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Ser. 2. 1935. Vol. 21. P. 255—258.

2) Generalized derivatives and approximation by polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. Vol. 14, N 1. P. 84—123.

Shah M. 1) Two integral transform pairs involving H-function // Glasnik Matem. 1972. T. 7, N 1. P. 57—65.

Shapiro H. S. 1) Topics in approximation theory // Lect. Notes Math. 1971. Vol. 187. P. 1—275.

Sharma S. 1) Certain fractional q-integral operators // Indian J. Pure and Appl. Math. 1979. Vol. 10, N 5. P. 581—589.

Sharpley R. 1) Fractional integration in Orlicz spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 59, N 1. P. 99—106.

Shinbrot M. 1) Fractional derivatives of solutions of the Navier—Stokes equations // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1971. Vol. 40, N 2. P. 139—154.

Singh B. 1) The generalized Erdelyi—Kober operators and self-reciprocal functions // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1. 1965. T. 79, N 2. P. 117—132.

2) A note on fractional integration // Bol. Acad. cienc., fis., mat. y natur. Venezuela, 1975. Vol. 33, N 190. P. 95—97.

Singh C. 1) On a convolution transform involving Whittaker's function as its kernel // Math. Japon. 1968. Vol. 13, N 1. P. 71—74.

2) An inversion integral for a Whittaker transform // Riv. mat. Univ. Parma. Ser. 2. 1970. Vol. 11. P. 277—280.

3) An integral equation with Jacobi polynomial in the kernel // Ibid. Ser. 2. 1970. Vol. 11. P. 313—316.

4) On a class of integral equations // Ibid. Ser. 4. 1975. Vol. 1. P. 1—7.

Singh Rattan. 1) An inversion formula for Fox H-transform // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1970. Vol. A40, N 1. P. 57—64.

Singh R. P. 1) An integral equation involving generalized Legendre polynomials // Math. Student. 1967. Vol. 35, N 1—4. P. 81—84.

Sirola R. O., Anderson T. P. 1) Abel integral inverter // Rev. Sci. Instrum. 1967. Vol. 38, N 6. P. 749—759.

Skórnik K. 1) О дробных интегралах и производных одного класса обобщенных функций / К. Скурник. Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 5. С. 1085—1087.

2) On tempered integrals and derivatives of nonnegative orders // Ann. polon. math. 1981. Vol. 40, N 1. P. 47—57.

Slater L. J. 1) Generalized Hypergeometric Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966. 273 p.

Smith C. V. L. 1) The fractional derivative of a Laplace integral // Duke Math. J. 1941. Vol. 8, N 1—2. P. 47—77.

Sneddon I. N. 1) The elementary solution of dual integral equations // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1960. Vol. 4, N 3. P. 108—110.

2) Fractional integration and dual integral equations // North Carolina State College, Appl. Math. Res. Group Raleigh, PSR-6. 1962. 40 p.

3) Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam: North-Holland Publ., 1966. 283 p.

4) A procedure for deriving inversion formulae for integral transform pairs of a general kind // Glasgow Math. J. 1968. Vol. 9, N 1. P. 67—77.
5) The use in mathematical physics of Erdelyi—Kober operators and of some of their generalizations // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 37—79.
6) The use of operators of fractional integration in applied mathematics // Appl. mech. ser. Warszawa; Poznan: PWN, 1979. 42 p.
Sohncke L. 1) Ueber den Zusammenhang hypergeometrischer Reihen mit höheren Differentialquotienten und Vielfachen Integralen // Programm Königlichen Friedrichs Collegium zu Königsbergin Pr. 1867. N 26—27. S. 3—30.
Soni K. 1) Fractional integrals and Hankel transforms // Duke Math. J. 1968. Vol. 35, N 2. P. 313—319.
2) A note on Fourier kernels // Amer. Math. Month. 1969. Vol. 76, N 2. P. 174—176.
3) A unitary transform related to some integral equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, N 4. P. 426—436.
4) A Sonine transform // Duke Math. J. 1970. Vol. 37, N 3. P. 431—438.
5) An integral equation with Bessel function kernel // Ibid. 1971. Vol. 38, N 1. P. 175—180.
Spain B. 1) Interpolated derivatives // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1940. Vol. 60, N 2. P. 134—140.
Sprinkhuizen-Kuyper I. G. 1) A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator // J. Math. Anal. and Appl. 1979. Vol. 72, N 2. P. 674—702.
2) A fractional integral operator corresponding to negative powers of a second order partial differential operator // Report TW 191/79. Amsterdam: Math. Centrum, 1979. 44 p.
Srivastav R. P. 1) On certain integral equations of convolution type with Bessel-function kernels // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1966. Vol. 15, N 2. P. 111—116.
Srivastava H. M. 1) Fractional integration and inversion formulae associated with the generalized Whittaker transform // Pacif. J. Math. 1968. Vol. 26, N 2. P. 375—377.
2) A class of integral equations involving the H-function as kernel // Proc. Kongl. Nederl. Akad. Weten. 1972. Vol. A75, N 3. P. 212—220.
3) An integral equation involving the confluent hypergeometric function of several complex variables // Appl. Anal. 1976. Vol. 5, N 4. P. 251—256.
4) The Weyl fractional integral of a general class of polynomials // Boll. Unione mat. ital. 1983. Vol. 132, N 1. P. 219—228.
Srivastava H. M., Buschman R. G. 1) Composition of fractional integral operators involving Fox's H-function // Acta Mexic. cienc. y tecnol. 1973. Vol. 7, N 1—3. P. 21—28.
2) Some convolution integral equations // Proc. Kongl. Nederl. Akad. Weten. 1974. Vol. A77, N 3. P. 211—216.
3) Convolution Integral Equations with Special Function Kernels. New Delhi, Bangalore: Wiley Eastern, 1977. 164 p.
Srivastava H. M., Owa S. 1) An application of the fractional derivative // Math. Japon. 1984. Vol. 29, N 3. P. 383—389.
2) An application of the fractional calculus // Fractional calculus: Res. Notes Math. 138 / A. C. McBride, G. F. Roach, eds. Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985. P. 199—212.
Srivastava H. M., Owa S., Nishimoto K. 1) A note on a certain class of fractional differintegral equations // J. Coll. Engng. Nihon Univ. 1984. Vol. B-25. P. 69—73.
Srivastava H. M., Sekine T., Owa S., Nishimoto K. 1) Fractional derivatives and fractional integrals of certain subclasses of starlike and convex functions // Ibid. 1986. Vol. B-27. P. 39—46.
Srivastava K. J. 1) Fractional integration and Meijer transform // Math. Z. 1957. Bd. 67. N 5. S. 404—412.
2) Fractional integration and the $\tilde{\omega}_{\mu,\nu}$-transform // Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecn. di Torino. 1957—1958. Vol. 17. P. 201—208.
3) Self-reciprocal function and $\omega_{\mu,\nu}$-transform // Bull. Calcutta Math. Soc. 1959. Vol. 51, N 2. P. 57—65.
Srivastava K. N. 1) On some integral transforms // Math. Japon. 1961—1962. Vol. 6, N 3—4. P. 65—72.
2) A class of integral equations involving ultraspherical polynomials as kernels // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14, N 6. P. 932—940.
3) Inversion integrals involving Jacobi's polynomials // Ibid. 1964. Vol. 15, N 4. P. 635—638.
4) On some integral equations involving Jacobi polynomials // Math. Japon. 1964. Vol. 9. P. 85—88.
5) Integral equations involving a confluent hypergeometric function as kernel // J. Analyse Math. 1964. Vol. 13. P. 391—397.
6) A class of integral equations involving Jacobi polynomials as kernel // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1965. Vol. A35, N 2. P. 221—226.
7) On some integral transforms involving Jacobi functions // Ann. polon. math. 1965. Vol. 16, N 2. P. 195—199.
8) Fractional integration and integral equations with polynomial kernels // J. London Math. Soc. 1965. Vol. 40, N 3. P. 435—440.

9) A class of integral equations involving Laguerre polynomials as kernel // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1966. Vol. 15, N 1. P. 33—36.

10) On integral equations involving Whittaker's function // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1966. Vol. 7, N 3. P. 125—127.

11) On some triple integral equations involving Legendre functions of imaginary argument // J. of M. A. C. T. 1968. Vol. 1. P. 54—67.

Srivastava T. N., Singh Y. P. 1) On Maitland's generalized Bessel function // Canad. Math. Bull. 1968. Vol. 11, N 5. P. 739—741.

Stein E. M. 1) The characterization of functions arising as potentials. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 67, N 1. P. 102—104.

Stein E. M., Weiss G. 1) Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space // J. Math. and Mech. 1958. Vol. 7, N 4. P. 503—514.

2) On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H^p spaces // Acta Math. 1960. Vol. 103, N 1—2. P. 25—62.

Stein E. M., Zygmund A. 1) Smoothness and differentiability of functions // Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös. Sect. Math. 1960—1961. Vol. 3—4. P. 295—307.

2) On the fractional differentiability of functions // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1965. Vol. 14a. P. 249—264.

3) Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p-spaces // Ann. Math. 1967. Vol. 85, N 2. P. 337—349.

Steinig J. 1) The changes of sign of fractional integrals // Math. Z. 1970. Bd 116, N 3. S. 183—190.

Strichartz R. S. 1) Multipliers for spherical harmonic expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 167, N 1. P. 115—124.

2) Bounded mean oscillation and Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. 1980. Vol. 29, N 4. P. 539—558.

Strömberg J.-O., Wheeden R. L. 1) Fractional integrals on weighted H^p- and L^p-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 287, N 1. P. 293—321.

Stuloff N. 1) Die differentiation beliebiger reeller ordnung // Math. Ann. 1951. Bd. 122. S. 400—410.

Sunouchi G. 1) Some theorems on fractional integration // Tôhoku Math. J. 1957. Vol. 9, N 3. P. 307—317.

Swaroop R. 1) On a generalization of the Laplace and the Stieltjes transformations // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Ser. 1. 1964. T. 78, N 2. P. 105—112.

Ta Li. 1) A new class of integral transforms // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 11, N 2. P. 290—298.

2) A note on integral transforms // Ibid. 1961. Vol. 12, N 6. P. 556.

Taberski R. 1) Two indirect approximation theorems // Demonstr. Math. 1976. Vol. 9, N 2. P. 243—255.

2) Approximation of functions possessing derivatives of positive orders // Ann. polon. math. 1977. Vol. 34, N 1. P. 13—23.

3) Differences, moduli and derivatives of fractional orders // Ann. soc. math. polon. / Comm. math. Prace mat. 1977. Vol. 19, N 2. P. 389—400.

4) Indirect approximation theorems in L^p-metrics $(1<p<\infty)$. Approximation theory // Banach Center Publ. Polish. Sci. Publ. 1979. Vol. 4. P. 247—259.

5) Estimates for entire functions of exponential type // Funct. et approxim. (PRL). 1982. Vol. 13. P. 129—147.

6) Trigonometric approximation in the norms and seminorms // Stud. Math. 1984. Vol. 80, N 3. P. 197—217.

Takahashi S. 1) Some new properties of Bohr almost periodic Fourier series // Japon. J. Math. 1940. Vol. 16. P. 99—133.

Takano K. 1) One-parameter semigroups with infinitesimal generators of fractional powers of the Laplacian on weighted L^p-spaces // Bull. Fac. Sci. Ibaraki Univ. Ser. A. 1981. N 13. P. 45—55.

2) An application of weighted norm inequalities for maximal functions to semigroups of convolution transforms on $L^p_\omega(R^n)$ // Tsukuba J. Math. 1982. Vol. 6, N 2. P. 151—156.

Talenti G. 1) Sul problema di Cauchy per le equazioni a derivate parziali // Ann. mat. pura ed appl. 1965. T. 67. P. 365—394.

Tamarkin J. D. 1) On integrable solutions of Abel's integral equation // Ann. Math. Ser. 2. 1930. Vol. 31. P. 219—229.

Tanno Y. 1) On a class of convolution transform. II // Tôhoku Math. J. 1967. Vol. 19, N 2. P. 168—186.

Tardy P. 1) Sui differenziali a indice qualungue // Ann. mat. pura ed appl. 1858. T. 1. P. 135—148.

Tazali A. Z.-A. M. 1) Local existence theorems for ordinary differential equations of fractional order // Lect. Notes Math. 1982. Vol. 964. P. 652—665.

Tedone O. 1) Su l'inversione di alcuni integrali e la integrazione delle equazioni a derivate parziali col metodo delle caratteristiche // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. Sem. 1°. 1914. Vol. 23, N 7. P. 473—480.

2) Sulla risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra // Ibid. 1915. Vol. 24. P. 544—554.

Thielman H. P. 1) Note on the use of fractional integration of Bessel functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 695—698.

Thorin G. O. 1) Convexity theorems // Comm. Sémin. Math. L'Univ. Lund. Uppsala. 1948. Vol. 9. P. 1—57.

Tonelli L. 1) Su un problema di Abel // Math. Ann. 1928. Bd 99. S. 183—199.

Tranter C. J. 1) On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1950. Vol. 3, N 4. P. 411—419.

2) On some dual integral equations // Quart. J. Math. Oxford ser. 1951. Vol. 2, N 5. P. 60—66.

3) A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1954. Vol. 7, N 3. P. 317—325.

Trebels W., Westphal U. 1) A note on the Landau—Kallman—Rota—Hille inequality // Linear operators and approximations: Proc. Conf. Oberwolfach (1971). Birkhauser Verl., 1972. P. 115—119.

Tremblay R. 1) Une contribution à la théorie de la dérivée fractionnaire: These de docteur. Univ. Laval, Québec, Canada, 1974. 544 p.

2) Some operational formulas involving the operators xD, $x\Delta$ and fractional derivatives // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10, N 5. P. 933—943.

Tremblay R., Fugère B. J. 1) Expansions of operators related to xD and the fractional derivative // Ibid. 1984. Vol. 15, N 6. P. 1214—1219.

Tricomi F. G. 1) Sull' equazioni integrale di Abel con limiti d'integrazione constanti // Rend. Inst. Lombardo. Ser. 2. 1927. Vol. 60. P. 598—604.

2) Sulla transformazione e il teorema di reciprocità di Hankel // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend. IV. 1935. Vol. 22. P. 564—571.

Triméche K. 1) Transformation intégrale de Weyl et théoréme de Paley—Wiener associés a un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$ // J. math. pures et appl. 1981. T. 60, N 1. P. 51—98.

Trione S. E. 1) On the Fourier transforms of retarded Lorentz-invariant functions // Trab. mat. Inst. argent. mat. 1980. Vol. 26. 109 p.

Türke H., Zeller K. 1) Riesz mean-value theorem extended // Generalized Inequalities'3: 3rd Intern. Conf. Oberwolfach, Apr. 26-may 2, 1981. Basel ets., 1983. P. 491—496.

Ugniewski S. 1) Solving the Abel integral equation by means of orthogonal polynomials // Warszawa, 1976. 17 p.

2) Solving the Abel integral equation by interpolation methods // Zastos. Mat. Appl. Math. 1977. Vol. 16, N 1. P. 91—109.

Upadhyay M. 1) q-Fractional differentiation and basic hypergeometric transformations // Ann. polon. math. 1971. Vol. 25, N 2. P. 109—124.

Varma R. S. 1) On a generalization of Laplace integral // Proc. Nat. Acad. Sci. India. 1951. Vol. A20. P. 209—216.

Varma V. K. 1) Inversion of a class of transforms with a difference kernel // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1969. Vol. 65, N 3. P. 673—677.

Vasilache S. 1) Asupra unei ecuatii integrale de tip Abel cu douá variable // Comm. Acad. R. P. Române. 1953. Vol. 3, N 3—4. P. 109—113.

Verblunsky S. 1) On the limit of a function at a point // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1931. Vol. 32. P. 163—199.

Verma R. U. 1) On fractional integrals of two variables and a generalization of the Laplace transformation // Math. Student. 1969. Vol. 37, N 1—4. P. 143—146.

2) Theorem on fractional integration and generalized Hankel transform // Bull. Math. Soc. Sci. Math. RSR, 1970. T. 14, N 1. P. 117—122.

3) Some theorems on fractional integration and a generalized Hankel transform of two variables // Math. Student. 1972. Vol. A40. P. 169—178.

4) On symmetrical Fourier kernel. II // Bol. Acad. cienc., fis., mat. y natur. Venezuela, 1972. Vol. 32, N 97. P. 107—116.

5) Solution of an integral equation by L and L^{-1} operators // An. sti. Univ. «Al. I. Cuza» Iasi. Sec. 1a. 1974. T. 20, N 2. P. 381—387.

6) A formal solution of an integral equation by L and L^{-1} operators // Ghana J. Sci. 1975. Vol. 15, N 2. P. 225—237.

7) A formal solution of an integral equation involving the H-function of two variables by L_2 and L_2^{-1} operators // Math. Notae. 1977—1978. Vol. 26. P. 39—46.

8) Integral equations involving the G-function as kernel // An. Univ. Bucuresti. Ser. mat. 1978. Vol. 27. P. 107—110.

Volterra V. 1) Sulla inversione degli integrali definiti. I—IV // Atti Reale Accad. delle Sci. Torino. 1896. T. 31. P. 311—323, 400—408, 557—567, 693—708.

2) Theoria delle potenze, dei logarithmi e delle funzioni di composizione // Atti Accad. dei Lincei. Ser. 5. 1916. Vol. 11. P. 167—249.

Volterra V., Peres J. 1) Lecons sur la composition et les fonctions permutables. Paris: Gauthier-Villars, 1924. 183 p.

2) Théorie générale des fonctionnelles. Paris: Gauthier-Villars, 1936. T. 1.

Walton J. R. 1) A distributional approach to dual integral equations of Titchmarsh type // SIAM J. Math. Anal. 1975. Vol. 6, N 4. P. 628—643.

2) The question of uniqueness for dual integral equations of Titchmarsh type // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1977. Vol. A76, N 4. P. 267—282.

3) Systems of generalized Abel integral equations with applications to simultaneous dual relations // SIAM J. Math. Anal. 1979. Vol. 10, N 4. P. 808—822.

Wang F. T. 1) A convergence criterion for a Fourier series // Duke Math. J. 1944. Vol. 11, N 3. P. 435—439.

2) On Riesz summability of Fourier series by exponential means // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50. P. 420—424.

Watanabe J. 1) On some properties of fractional powers of linear operators // Proc. Japon. Acad. 1961. Vol. 37, N 6. P. 273—275.

Watanabe T. 1) On distributions measured by the Riemann—Liouville operators associated with homogeneous convex cones // Hiroshima Math. J. 1977. Vol. 7, N 2. P. 643—653.

Watanabe Y. 1) Notes on the generalized derivative of Riemann—Liouville and its application to Leibnitz's formula. I and II // Tôhoku Math. J. 1931. Vol. 34. P. 8—27, 28—41.

Weber H. 1) Ueber die Besselschen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme // J. für reine und angew. Math. 1872. Bd 75, N 1. S. 75—105.

Weinstein A. 1) Discontinuous integrals and generalized potential theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63, N 2. P. 342—354.

2) Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson et l'équation des ondes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1952. T. 234. P. 2584—2585.

3) Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 59, N 1. P. 20—38.

4) On the wave equation and the equation of Euler—Poisson // Wave motion and vibration theory. Proc. Sympos. Appl. Math. N. Y.: McGraw-Hill, 1954. Vol. 5. P. 137—147.

5) The generalized radiation problem and the Euler—Poisson—Darboux equation // Summa Brasil Math. 1955. Vol. 3. P. 125—147.

6) On a class of partial differential equations of even order // Ann. mat. pura ed appl. Ser. 4. 1955. T. 39. P. 245—254.

7) On a singular differential operator // Ibid. 1960. T. 49. P. 359—365.

8) Some applications of generalized axially symmetric potential theory to continuum mechanics // Приложения теории функций в механике сплошной среды: Тр. междунар. симпоз. в Тбилиси, 17—23 сент. 1963 г. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 440—453.

Weiss R. 1) Product integration for the generalized Abel equation // Math. Comput. 1972. Vol. 26, N 117. P. 177—190.

Welland G. V. 1) Fractional differentiation of functions with lacunary Fourier series // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 19, N 11. P. 135—141.

2) On the fractional differentiation of a function of several variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132, N 2. P. 487—500.

3) Weighted norm inequalities for fractional integrals // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 51, N 1. P. 143—148.

Westphal U. 1) Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren. Teil I. Halbgruppenerzeuger // Compos. Math. 1970. Vol. 22, N 1. P. 67—103.

2) Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren. Teil II. Gruppenerzeuger // Ibid. P. 104—136.

3) An approach to fractional powers of operators via fractional differences // Proc. London Math. Soc. 1974. Vol. 29, N 3. P. 557—576.

4) Gebrochene Potenzen abgeschlossener Operatoren, definiert mit Hilfe gebrochener Differenzen // Int. ser. Numer. Math. Basel—Stuttgart. 1974. Vol. 25. P. 23—27.

Weyl H. 1) Bemerkungen zum begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung // Vierteljahrcsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 1917. Bd 62, N 1—2. S. 296—302.

Wheeden R. L. 1) Hypersingular integrals and summability of Fourier integrals and series // A. P. Calderon, ed. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Vol. 10. Singular Integrals. Univ. Chicago. Ill. 1966. Providence, R. I. 1967. P. 336—369.

2) On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 134, N 3. P. 421—435.

3) On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions. II // Ibid. 1969. Vol. 139, N 1. P. 37—53.

4) On hypersingular integrals and certain spaces of locally differentiable functions // Ibid. 1969. Vol. 146, N 2. P. 211—230.

5) A note on a generalized hypersingular integral // Stud. Math. 1972. Vol. 44, N 1. P. 17—26.

Whittaker E. T. 1) On the numerical solution of integral equations // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1917—1918. Vol. 94. P. 367—383.

Wick J. 1) Über eine Integralgleichung vom Abelschen Typ // Z. angew. Math. und Mech. 1968. Bd 48, N 8. S. 39—41.

Widder D. V. 1) The Stieltjes transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. Vol. 43, N 1. P. 7—60.

2) The Laplace Transform. Princeton: Princeton Univ. Press, 1946. 406 p.

3) The inversion of a convolution transform whose kernel is a Laguerre polynomial // Amer. Math. Month. 1963. Vol. 70, N 3. P. 291—293.

4) Two convolution transforms which are inverted by convolutions // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 14, N 5. P. 812—817.

Widom H. 1) Singular integral equations in L_p // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 97, N 1. P. 131—160.

Wiener K. 1) Über Lösungen einer in der Theorie der Polarographie auftretenden

Differentialgleichung von nichtganzzahliger Ordnung // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturwiss. Reihe. 1983. Bd 32, N 1. S. 41—46.

2) Über des asymptotische Verhalten der Lösungen einer Differentialgleichung nichtganzzahliger Ordnung aus der Polarographie // Ibid. N 5. S. 75—86.

Williams W. E. 1) A class of integral equations // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1963. Vol. 59, N 3. P. 589—597.

Wimp J. 1) A class of integral transforms // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1964. Vol. 14, N 1. P. 33—40.

2) Two integral transform pairs involving hypergeometric functions // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1965. Vol. 7, N 1. P. 42—44.

Wolfersdorf L. von. 1) Über eine Beziehung zwischen Integralen nichtganzer Ordnung // Math. Z. 1965. Bd 90, N 1. S. 24—28.

2) Abelsche Integralgleichung und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung // Math. Nachr. 1965. Bd 27, N 3—4. S. 161—178.

3) Zur Lösung der verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung mit konstanten Koeffizienten // Z. angew. Math. und Mech. 1969. Bd 49, N 12. S. 759—761.

4) Zur Theorie der Spiele über dem Einheitsquadrat mit Auszahlungsfunktionen von der Form eines Schmetterlings // Wiss. Z. Univ. Rostock. Math.-Naturwiss. Reihe. 1970. Bd 19, N 6/7. S. 425—433.

Wong R. 1) Asymptotic expansions of fractional integrals involving logarithms // SIAM J. Math. Anal. 1978. Vol. 9, N 5. P. 835—842.

2) Explicit error terms for asymptotic expansions of Mellin convolutions // J. Math. Anal. and Appl. 1979. Vol. 72, N 2. P. 740—756.

Wood D. H. 1) Fractional integration of fundamental solutions // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. P. 317—322.

Xie Ting-fan. 1) The best approximation of periodic differentiable functions by trigonometric polynomials // Chinese Math. 1963. Vol. 4, N 2. P. 179—187.

Yoshinaga K. 1) On Liouville's differentiation // Bull. Kyushu Inst. Technol. Math. Natur. sci. 1964. N 11. P. 1—17.

2) Fractional powers of an infinitesimal generator in the theory of semigroup distribution // Ibid. 1971. N 18. P. 1—15.

Young E. C. 1) On a generalized Euler—Poisson—Darboux equation // J. Math. and Mech. 1969. Vol. 18, N 12. P. 1167—1175.

Zâgânescu M. 1) Some applications of fractional integration and differentiation in quantum mechanics and field theory // România, Preprint. Univ. din Timisoara. U. T. F. T. 1982. T. 5/82. 30 p.

2) Continuously iterated Schrödinger equation and the Riemann—Liouville and Riesz perators // Ibid. 1982. T. 7/82. 7 p.

Zanelli V. 1) I polinomi di Stieltjes approssimanti in variazione di ordine frazionario // Atti Semin. Mat., Fis. Univ. Modena. 1981. T. 30, N 1. P. 151—175.

2) Funzioni momento convergenti «dal basso» in variazione di ordine non intero // Ibid. N 2. P. 355—369.

Zeilon N. 1) Sur quelques points de la théorie de l'equation intégrale d'Abel // Arkiv. för Mat., Astr. och Fysik. 1924. Bd 18, N 5. S. 1—19.

Zheng X. 1) The singular, mixed problem for a class of Euler—Poisson—Darboux equation // J. of Hangzhou Univ. 1982. Vol. 9, N 1. P. 1—16.

Zygmund A. 1) Some points in the theory of trigonometric and power series // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 36, N 2. P. 586—617.

2) Smooth functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, N 1. P. 47—76.

3) A theorem on fractional derivatives // Ibid. N 3. P. 455—464.

4) On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations // J. math. pures et appl. 1956. T. 35, N 3. P. 223—248.

Именной указатель

Предметный указатель

Указатель обозначений

Латинский и готический алфавиты

Греческий алфавит

Содержание

СТЕФАН ГРИГОРЬЕВИЧ САМКО
АНАТОЛИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КИЛБАС
ОЛЕГ ИГОРЕВИЧ МАРИЧЕВ

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Заведующая редакцией Л. Ю. Бельзацкая
Редакторы Е. Г. Волкинд, С. М. Михасева
Художник Д. М. Суриновнч
Художественный редактор В. А. Жаховец
Технический редактор А. В. Скакун
Корректор З. Я. Авербах

ИБ № 2773

Сдано в набор 27.10.86. Подписано в печать 10.06.87. АТ 14846. Формат 70×108¹/₁₆. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 60,2. Усл. кр.-отт. 60,2. Уч.-изд. л. 60,60. Тираж 3140 экз. Зак. № 1384. Цена 7 р. 60 к.

Издательство «Наука и техника» Академии наук БССР и Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
220600. Минск, Ленинский проспект, 68.
Типография им. Франциска Скорины издательства «Наука и техника».
220600. Минск, Ленинский проспект, 68.