С.Г.Самко/А.А.Килбас/О.И.Маричев

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1987

УДК 517.3

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.** Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Книга посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложениям теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты указанной теории. В конце каждой главы приводятся исторические сведения и обзоры работ по тематике главы. Книга носит энциклопедический характер, охватывает самые разнообразные известные формы дробного интегрирования и дифференцирования и огромное число публикаций в этой области вплоть до 1986 г.

Включение в книгу необходимых предварительных сведений и подробное изложение доказательств делают ее доступной студентам физико-математических факультетов, а также технических вузов.

Предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим анализом и его приложениями.

Табл. 11. Ил. 6. Библиогр.: 1421 назв.

Редактор

академик АН СССР С. М. Никольский

Рецензенты:

П. И. Лизоркин, д-р физ.-мат. наук,
М. М. Смирнов, д-р физ.-мат. наук,
А. П. Прудников, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. Брычков, канд. физ.-мат. наук

С $\dfrac{1702050000-088}{М316(03)-87}$ 55—87

ГЛАВА 7

Интегральные уравнения первого рода со специальными функциями в ядрах

Настоящая глава посвящена приложению методов дробного интегродифференцирования к исследованию одномерных интегральных уравнений первого рода

$$\int_a^b K(x, t) f(t)\, dt = g(x),$$

$$-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty, \qquad (1)$$

ядра $K(x, t)$ которых содержат специальные функции. Такие уравнения тесно связаны с интегральными преобразованиями (см. § 1, п. 4°). К ним приводятся решения многих задач как из других разделов математики, в частности дифференциальных уравнений (см. главу 8), теории функций и др., так и из физики, механики и иных естественных наук. В форме (1) могут быть также записаны и так называемые парные и тройные интегральные уравнения, характерные примеры которых рассматриваются в последнем параграфе главы.

Уравнения вида (1) являются уравнениями первого рода, и поэтому проблема их обращения относится к некорректным задачам. Для таких уравнений характерно наличие большого числа различных методов решения, применяемых к специальным подклассам этого множества уравнений. Наиболее изученным подклассом являются уравнения с разностными ядрами, когда $K(x, t) = k(x-t)$, см., например, монографии Ф. Д. Гахова, Ю. И. Черского [1], Е. Титчмарша [1], И. И. Хиршмана, Д. В. Уиддера [1], Р. Бушмана, X. Сриваставы (R. G. Büschman, H. M. Srivastava [1]). Заметим, что в последней книге содержится большое число уравнений со специальными функциями в ядрах и их решений, а также приведена обширная библиография работ, посвященных решению в замкнутой форме уравнений с разностными ядрами и переменным верхним или нижним пределами интегрирования.

В данной главе строятся решения уравнений вида (1), являющихся обобщениями или модификациями интегрального уравнения Абеля (2.1), а также уравнений композиционного типа, связанных с уравнением Абеля. При этом наиболее эффективным оказывается метод факторизации (композиционных разложений), который заключается в представлении некоторых классов операторов (1) в виде композиций операторов дробного интегродифференцирования с другими операторами, имеющими известные формулы обращения. Значительный вклад в разработку этого метода, начавшуюся для рассматриваемых здесь уравнений в начале 60-х годов, внесли зарубежные математики (см. § 39, п. 1°). Отметим, однако, что задолго до этого идея метода факторизации в неявном виде использовалась в конце XIX века русским математиком Н. Я. Сониным в работах [4, 5], а сам этот метод по существу был применен впервые в 1948 г. советским математиком Н. Н. Лебедевым в работе [1] (см. § 39, п. 1° и п. 2°, 37.3 и 35.7).

§ 35. НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ФУНКЦИИ ГАУССА И ЛЕЖАНДРА

Рассмотрим здесь ряд важных для приложений интегральных уравнений типа свертки Меллина с гипергеометрической функцией Гаусса или с функцией Лежандра в ядрах. Покажем, что эти уравнения могут быть обращены через композиции двух операторов дробного интегродифференцирования со степенными весами или же почти симметричным образом через операторы, включающие функцию Гаусса или Лежандра и обычное дифференцирование. При исследованиях будем опираться на результаты § 10, п. 1°.

1°. Уравнения с функцией Гаусса. Пусть заданы следующие четыре интегральных уравнения с гипергеометрической функцией в ядре:

$$\int_e^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b;\ c;\ 1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.1}$$

$$\int_e^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b;\ c;\ 1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.2}$$

$$\int_x^d \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b;\ c;\ 1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.3}$$

$$\int_x^d \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b;\ c;\ 1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = g(x), \tag{35.4}$$

рассматриваемых на промежутке $0 \leqslant e < x < d \leqslant \infty$. В соответствии с замечанием 10.3 операторы в левых частях (35.1)—(35.4) будем обозначать символами ${}_1I^c_{e+}(a, b)\varphi$, ${}_2I^c_{e+}(a, b)\varphi$ и ${}_3I^c_{d-}(a, b)\varphi$, ${}_4I^c_{d-}(a, b)\varphi$ при $d < \infty$ или ${}_3I^c_{-}(a, b)\varphi$, ${}_4I^c_{-}(a, b)\varphi$ при $d = \infty$.

Как показывают формулы (10.22)—(10.29), операторы ${}_jI^c(a, b)$ представляют собой композиции двух односторонних дробных интегралов или производных со степенными весами. Условия такой представимости отражают теорема 10.4 и замечание 10.3, из которых следует, что если $\varphi(x)$ принадлежит пространству L_p (или некоторому его подпространству), то при соответствующих условиях операторы ${}_jI^c(a, b)\varphi$ действуют на определенное подпространство из L_p и справедливы те или иные из формул (10.22)—(10.29). Это означает, что если правая часть — функция $g(x)$ — берется из указанной области, на которую действует оператор ${}_jI^c(a, b)$, то соответствующее уравнение ${}_jI^c(a, b)\varphi = g$ однозначно разрешимо путем последовательного обращения двух интегродифференциальных операторов, композиция которых составляет ${}_jI^c(a, b)$. Осуществив такие обращения, из формул (10.22)—(10.29) получим следующие представления решений уравнений (35.1)—(35.4):

$$\varphi(x) = x^{-a} I_{e+}^{-b} x^a I_{e+}^{b-c} g(x), \tag{35.5}$$

$$\varphi(x) = x^{-b} I_{e+}^{b-c} x^{c-a} I_{e+}^{-b} x^{a+b-c} g(x), \tag{35.6}$$

$$\varphi(x) = I_{e+}^{b-c} x^a I_{e+}^{-b} x^{-a} g(x), \tag{35.7}$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c} I_{e+}^{-b} x^{c-a} I_{e+}^{b-c} x^{-b} g(x), \tag{35.8}$$

$$\varphi(x) = x^{-b} I_{d-}^{b-c} x^{c-a} I_{d-}^{-b} x^{a+b-c} g(x), \tag{35.9}$$

$$\varphi(x) = x^{-a} I_{d-}^{-b} x^a I_{d-}^{b-c} g(x), \tag{35.10}$$

$$\varphi(x) = I_{d-}^{b-c} x^a I_{d-}^{-b} x^{-a} g(x), \tag{35.11}$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c} I_{d-}^{-b} x^{c-a} I_{d-}^{b-c} x^{-b} g(x) \tag{35.12}$$

и соответствующую теорему. Для ее формулировки обозначим через E_j' столбец номеров, получаемый из столбца E_j табл. 10.2 заменой соответственно (10.22)—(10.29) на (35.5)—(35.12). Тогда будет справедлива

Теорема 35.1. *Пусть на интервале $(0, d)$ заданы уравнения (35.1), (35.2) с $e=0$, а на интервале (e, ∞) — уравнения (35.3), (35.4) с $d=\infty$, где $\mathrm{Re}\,c>0$, для соответствующих операторов B_j выполняются условия A_j (см. табл. 10.2), а заданная функция $g(x) \in D_j$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда соответствующее уравнение $B_j\varphi = g$ вида (35.1)—(35.4) имеет единственное решение, выражаемое формулой E_j', где $e=0$, $d=\infty$. Последнее утверждение сохраняет силу и в случае $e>0$ и соответственно $d<\infty$. Тогда в условиях A_j ограничения, включающие p, опускаются.*

Доказательство. Все утверждения теоремы фактически установлены при доказательстве теорем 10.2 и 10.4 и замечания 10.3. Отметим дополнительно, что, например, при $e>0$ особая точка $\tau=0$ ядра уравнения (35.1) лежит вне промежутка интегрирования, и это обстоятельство позволяет устранить из ограничений A_1 и A_2 условия, содержащие p, так как особенности функции $\varphi(\tau)$ и ядра в точке $\tau=0$ не налагаются. Аналогичное справедливо и для остальных операторов из уравнений (35.2)—(35.4).

Из соотношений (10.30)—(10.32) следует, что уравнения (35.1)—(35.4) можно рассматривать как четыре различные формы записи одного, например первого, уравнения. Остальные отличаются от него лишь заменой переменных, функций и параметров.

Следует отметить, что кроме (35.5)—(35.12) можно использовать и другие формы представлений решений уравнений (35.1)—(35.4), в частности через интегральные операторы, содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию. Такие представления можно получать из формул (35.5)—(35.12), используя соотношения (10.4), (10.5) или им подобные. На примере формулы (35.5) построим два таких решения уравнения (35.1). Очевидно, что решение (35.5) можно записать в виде

$$\varphi(x) = x^{-a}\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^a x^{-a} I_{e+}^{m-b} x^a I_{e+}^{(m-c)-(m-b)} g(x)$$

или

$$\varphi(x) = x^{-a} I_{e+}^{-b} x^a I_{e+}^{b-c+m}\left(\frac{d}{dx}\right)^m g(x), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

причем последняя формула, и это надо подчеркнуть, неэквивалентна (35.5), так как в ней функция $g(x)$ предполагается уже принадлежащей подклассу из $L_p(e, d)$ функций, представимых в виде $g = I_{e+}^m \chi$, $\chi \in L_p(e, d)$, т. е. имеющих производную $g^{(m)}(x)$, причем $g(e) = g'(e) = \ldots = g^{(m-1)}(e) = 0$.

Сопоставив эти записи с равенством (10.24) и учтя (10.19), придем к следующим представлениям решения уравнения (35.1):

$$\varphi(x) = x^{-a}\frac{d^m}{dx^m}\left\{x^a\int_e^x \frac{(x-\tau)^{m-c-1}}{\Gamma(m-c)}\,{}_2F_1\left(-a,\ m-b;\ m-c;\ 1-\frac{\tau}{x}\right)g(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{35.13}$$

$$0<\operatorname{Re}c<m,\quad g\in I^c_{e+}(L_{p,*}(e,\ d));$$

$$\varphi(x) = \int_e^x \frac{(x-\tau)^{m-c-1}}{\Gamma(m-c)}\,{}_2F_1\left(-a,\ -b;\ m-c;\ 1-\frac{\tau}{x}\right)g^{(m)}(\tau)\,d\tau, \tag{35.14}$$

$$0<\operatorname{Re}c<m,\ g\in C^m([e,\ d]),\ g(e)=g'(e)=\ldots=g^{(m-1)}(e)$$

(очевидно, что $L_{p,*}(e,\ d)=L_p(e,\ d)$ при $e>0$, см. (10.2)). Аналогичным способом можно преобразовать и остальные формулы (35.6)—(35.12).

2°. Уравнения с функцией Лежандра. В приложениях к дифференциальным уравнениям (см., например, § 40, п. 2°) встречаются различные частные случаи уравнений (35.1)—(35.4) с ядрами, содержащими функцию Лежандра, многочлены Чебышева, Лежандра, Гегенбауэра, Якоби и др. Рассмотрим здесь наиболее полезные в дальнейшем уравнения с функцией Лежандра (1.79), (1.80) в ядре:

$$\int_e^x (x^2-t^2)^{-\mu/2}P^\mu_\nu\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt = g(x), \tag{35.15}$$

$$\int_e^x (x^2-t^2)^{-\mu/2}P^\mu_\nu\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt = g(x), \tag{35.16}$$

$$\int_x^d (t^2-x^2)^{-\mu/2}P^\mu_\nu\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt = g(x), \tag{35.17}$$

$$\int_x^d (t^2-x^2)^{-\mu/2}P^\mu_\nu\left(\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt = g(x), \tag{35.18}$$

полагая во всех случаях $0\leqslant e<x<d\leqslant\infty$ и $\operatorname{Re}\mu<1$, чтобы указанные интегралы сходились на переменном конце. Решения этих уравнений получим с помощью преобразования Меллина. Наиболее подробно рассмотрим первое из них.

Совершим в (35.15) замены переменных и функций по формулам

$$\begin{gathered} t^{1-\mu}f(t)\,H(t-e) = 2\varphi(t^2),\ t^2=\tau,\ x^2=y,\ y/\tau=\eta, \\ (\eta-1)^{-\mu/2}H(\eta-1)\,P^\mu_\nu(\sqrt{\eta}) = h(\eta),\ g(\sqrt{y}) = g_1(y), \end{gathered} \tag{35.19}$$

где $H(\xi)$ — единичная функция: $H(\xi)=1$, $\xi>0$; $H(\xi)=0$, $\xi<0$. Тогда это уравнение примет вид $\int\limits_0^\infty h(y/\tau)\,\varphi(\tau)\,\tau^{-1}d\tau = g_1(y)$. Применив к последнему преобразование Меллина (1.112) и формулу 11.14 (1) из книги

О. И. Маричева [10], в силу теоремы о свертке (1.115) получим соотношение

$$\varphi^*(s) = 2^{-\mu} \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(1/2-s)}{\Gamma((1+\mu+\nu)/2-s)\Gamma((\mu-\nu)/2-s)} g_1^*(s),$$

$$\operatorname{Re}\mu < 1, \quad \operatorname{Re}(2s-\mu-\nu) < 1, \quad \operatorname{Re}(2s+\nu-\mu) < 0. \tag{35.20}$$

Обратный переход от (35.20) к оригиналам можно осуществлять разными приемами. Укажем три из них, которые приводят к различным формам решений.

А. Воспользовавшись представлением (10.35) и сгруппировав различными способами гамма-функции (вертикально и крест-накрест), получим следующие два представления функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = 2^{-\mu}(y^{(1-\mu-\nu)/2} I_{0+}^{(\mu+\nu-1)/2})(y^{1+(\nu-\mu)/2} I_{0+}^{(\mu-\nu-1)/2} y^{-1/2}) g_1(y), \tag{35.21}$$

$$\varphi(y) = 2^{-\mu}(y^{(1-\mu-\nu)/2} I_{0+}^{(\mu+\nu)/2} y^{-1/2})(y^{1+(\nu-\mu)/2} I_{0+}^{(\mu-\nu)/2-1}) g_1(y). \tag{35.22}$$

На достаточно хороших функциях $g_1(y)$ (на которых операторы в скобках коммутативны) эти представления совпадают, так как они отличаются друг от друга заменой ν на $-\nu-1$, что несущественно ввиду свойства $P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$. Совершив в (35.21) обратную замену по формулам (35.19), придем к следующему представлению решения уравнения (35.15):

$$f(x) = 2^{1-\mu} x^{-\nu} I_{e+;\,x^2}^{(\mu+\nu-1)/2} x^{2+\nu-\mu} I_{e+;\,x^2}^{(\mu-\nu-1)/2} x^{-1} g(x), \tag{35.23}$$

где $I_{e+;\,x^2}^\alpha$ — оператор, определяемый в § 18, п. 2°, см. (18.41).

Б. Несколько иное представление решения можно получить, если числитель и знаменатель (35.20) умножить на $\Gamma(1+(\mu+\nu)/2-s)$, а затем применить формулу удвоения для гамма-функции (1.61) и наряду с (10.35) ее аналог вида

$$x^{\beta/2} I_{0+;\,\sqrt{x}}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha/2} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1-\alpha-2s)}{\Gamma(1-\beta-2s)} f^*(s) x^{-s} ds, \quad 2\gamma < 1 - \operatorname{Re}\alpha. \tag{35.24}$$

Тогда

$$\varphi^*(s) = 2^\nu \frac{\Gamma(1-2s)\Gamma(1+(\mu+\nu)/2-s)}{\Gamma(1+\mu+\nu-2s)\Gamma((\mu-\nu)/2-s)} g_1^*(s),$$

$$\varphi(y) = 2^\nu (y^{-(\mu+\nu)/2} I_{0+;\,\sqrt{y}}^{\mu+\nu})(y^{1+(\nu-\mu)/2} I_{0+}^{-\nu-1} y^{(\mu+\nu)/2}) g_1(y),$$

и, наконец, искомое решение уравнения (35.15) записывается в форме

$$f(x) = (2x)^{\nu+1} I_{e+;\,x^2}^{-\nu-1} I_{e+}^{\mu+\nu} g(x). \tag{35.25}$$

В. Во многих случаях используется и третья форма представления решения уравнения (35.15) через почти симметричное с (35.16) выражение. Для ее получения вначале отметим, что разность параметров гамма-функций в числителе и знаменателе (10.35) равна $\beta-\alpha$, и если $\operatorname{Re}(\beta-\alpha) < 0$, то интеграл из правой части (10.35) соответствует дробному интегралу $x^\beta I_{0+}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha}$, а в случае $\operatorname{Re}(\beta-\alpha) > 0$ — такой же дробной производной. Аналогичная разность параметров из формулы (35.20) равна $1-\mu$, причем $\operatorname{Re}(1-\mu) > 0$, т. е. правая часть (35.20) соответствует дробной производной от функции $g_1(y)$. Поэтому на языке оригиналов эту дробную производную удобно записывать через композицию операторов, включающую операторы обычного дифференцирования.

Для перехода к оригиналам воспользуемся тем, что, как следует из (10.35) при $\alpha-\beta=-n$, оператору $x^{\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{n-\beta}$ соответствует (по Меллину) умножение на $(1-\beta-s)_n$, а из (35.24) вытекает соответствие $x^{\beta/2}\left(\frac{d}{d\sqrt{x}}\right)^n x^{(n-\beta)/2}\longleftrightarrow(1-\beta-2s)_n$. Умножив и поделив правую часть (35.20) на $(1-\beta-s)_n$ или $(1-\beta-2s)_n$ с соответствующе подобранными $\beta=1+(\nu-\mu)/2$ или $\beta=n$, запишем правую часть (35.20) в виде

$$\frac{2^{-\mu}\Gamma(1-s)\,\Gamma(1/2-s)}{\Gamma((1+\mu+\nu)/2-s)\,\Gamma((\mu-\nu)/2+n-s)}\left(\frac{\mu-\nu}{2}-s\right)_n g_1^*(s),$$

$$\frac{2^{-\mu-n}\Gamma((1-n)/2-s)\,\Gamma(1-n/2-s)}{\Gamma((1+\mu+\nu)/2-s)\,\Gamma((\mu-\nu)/2-s)}(1-n-2s)_n g_1^*(s).$$

Первые гамма-множители в случае $1-\operatorname{Re}\mu-n<0$ соответствуют ядру «дробного интеграла», имеющему вид $(\eta-1)^{-\mu_1/2}H(\eta-1)P_{\nu_1}^{\mu_1}(\eta^{-1/2})$ со специально подобранными параметрами μ_1 и ν_1 (см. книгу О. И. Маричева [10, 11.13(4)]). Вторые множители соответствуют указанным выше операторам обычного дифференцирования со степенными множителями, которые могут находиться как вне интеграла, так и внутри (в последнем случае от функции $g_1(y)$ требуются дополнительные ограничения). Совершив переход к оригиналам, из приведенных формул окончательно получим после замен (35.19) следующие четыре представления решения уравнения (35.15):

$$f(x)=x^{-\nu}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n x^{n+\nu}\int_e^x (x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{n+\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)g(\tau)\,d\tau, \tag{35.26}$$

$$f(x)=x^{-n}\int_e^x (x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{n+\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)\tau^{1-\mu-\nu}\times$$
$$\times\left(\frac{d}{\tau d\tau}\right)^n(\tau^{2n+\mu+\nu-1}g(\tau))\,d\tau, \tag{35.27}$$

$$f(x)=x^{\mu+n-1}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{1-\mu}\int_e^x (x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}\tau^{-n}P_{\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)g(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{35.28}$$

$$f(x)=\int_e^x (x^2-\tau^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{\tau}{x}\right)g^{(n)}(\tau)\,d\tau. \tag{35.29}$$

Последняя из этих формул содержит оператор вида (35.16). Поэтому, поменяв в ней $g^{(n)}(\tau)$ на $f(\tau)$, $f(x)$ на $g(x)$ и μ на $2-n-\mu$ и учтя взаимную обратимость соотношений (35.15) и (35.29), без труда получим представления решения уравнения (35.16) вида

$$f(x)=I_{e+}^{\mu-\nu-2}\,I_{e+;x^2}^{\nu+1}(2x)^{-\nu-1}g(x), \tag{35.30}$$

$$f(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_e^x (x^2-t^2)^{(n+\mu)/2-1}P_{\nu}^{2-n-\mu}\left(\frac{x}{t}\right)g(t)\,dt, \tag{35.31}$$

$$f(x) = x^{-n} \int\limits_e^x (x^2-t^2)^{(n+\mu)/2-1} P_\nu^{2-n-\mu}\left(\frac{x}{t}\right) t^{\mu+n-1} \times$$

$$\times \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{1-\mu} g(t))\, dt \tag{35.32}$$

(ср. (35.25) с (35.30) и (35.28) с (35.32)).

Совершив в (35.15), (35.16) замены $t^{2-\mu}f(t)$ на $f(t^{-1})$, $x^\mu g(x)$ на $g(x^{-1})$, x на x^{-1} и e на d^{-1}, придем к формулам (35.18), (35.17). Это свойство дает возможность из найденных решений получить соответствующие решения для уравнений (35.17), (35.18), в частности из (35.30), (35.25) решения

$$f(x) = (x/2)^{\nu+1} I_{d-}^{\mu-\nu-2} x^{1-\mu-\nu} I_{d-;\, x^2}^{\nu+1} x^{\mu-\nu-3} g(x), \tag{35.33}$$

$$f(x) = 2^{\nu+1} x^{\mu+\nu+1} I_{d-;\, x^2}^{-\nu-1} x^{1+\nu-\mu} I_{d-}^{\mu+\nu} x^{-\nu-1} g(x). \tag{35.34}$$

Аналоги формул (35.26)—(35.29) при указанном переходе выписывать не будем, но следует отметить, что решения уравнений (35.17) и (35.18) представимы по формулам, отличающимся от (35.28), (35.29) и соответственно (35.31), (35.32) лишь заменами промежутка интегрирования (e, x) на (x, d) и $(x^2-t^2)^{(n+\mu)/2-1}$ на $(-1)^n (t^2-x^2)^{(n+\mu)/2-1}$.

Непосредственным вычислением способом, приведшим к решению (35.25), можно убедиться, что кроме представлений (35.33), (35.34) для решений уравнений (35.17), (35.18) допустимы и другие формы записи соответственно

$$f(x) = (2x)^{\nu+1} I_{d-;\, x^2}^{-\nu-1} I_{d-}^{\mu+\nu} g(x), \tag{35.35}$$

$$f(x) = I_{d-}^{\mu-\nu-2} I_{d-;\, x^2}^{\nu+1} (2x)^{-\nu-1} g(x). \tag{35.36}$$

Основываясь на результатах § 10, п. 1°, приняв во внимание теорему 18.1, лемму 31.4 и замечание 10.3, а также свойство симметрии функции Лежандра $P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$, из которого, не теряя общности, можно полагать $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2$, полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 35.2. *Пусть* $\operatorname{Re}\mu < 1$, $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2$, $0<e<d<\infty$. *Тогда для того, чтобы уравнения* (35.15), (35.16) *и* (35.17), (35.18) *имели решения* $f \in L_p(e, d)$, $1 \leqslant p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы* $g \in I_{e+}^{1-\mu}(L_p(e, d))$ *и соответственно* $g \in I_{d-}^{1-\mu}(L_p(e, d))$. *При указанных условиях эти решения единственны и представимы по формулам* (35.25), (35.30) *и* (35.35), (35.36).

Случаи $e=0$ для (35.15), (35.16) и $d=0$ для (35.17), (35.18) являются более сложными и требуют специального исследования.

§ 36. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ КАК ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В процессе введения операторов дробного интегродифференцирования I_{a+}^α и I_{b-}^α в § 2 отдельно рассматривались три случая — интегрирование (при $\operatorname{Re}\alpha > 0$), дифференцирование (при $\operatorname{Re}\alpha < 0$) и интегродифференцирование мнимого порядка (при $\operatorname{Re}\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$). Естественно изучить вопрос о возможности такого определения этих операторов, которое не зависело бы от величины α. Указанное определение для I_{0+}^α и I_-^α проще всего осуществить на основе равенств

$$I_{0+}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}f^*(s+\alpha)x^{-s}ds,\quad \operatorname{Re}(s+\alpha)<1,\tag{36.1}$$

$$I_{-}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}f^*(s+\alpha)x^{-s}ds,\quad \gamma=\operatorname{Re} s>0,\tag{36.2}$$

см. (10.35), (10.36), которые следуют из формул (7.17), (7.18) после применения к ним обратного преобразования Меллина (1.113). Здесь $f^*(s)$ означает преобразование Меллина (1.112) функции $f(x)$.

Правые части (36.1), (36.2) под интегралами содержат отношения двух гамма-функций. Поэтому естественно рассмотреть аналогичные более сложные конструкции, включающие отношения произвольных произведений гамма-функций, например конструкции типа стоящих под интегралом (1.95), который определяет G-функцию Мейера. Такой подход на языке оригиналов приведет к интегральному преобразованию с G-функцией Мейера в ядре вида (1.44), где $\mathrm{k}(x, t)=G_{pq}^{mn}\left(\frac{x}{t}\middle|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$. Его частные случаи указывались в § 1, п. 4°. Однако язык оригиналов при построении теории интегральных преобразований типа свертки оказывается недостаточно удобным по двум причинам: как в случае I_{0+}^{α}, I_{-}^{α}, определение преобразования может оказаться существенно зависящим от величин параметров G-функции, хотя сама G-функция от своих параметров зависит аналитически; не при всех значениях m, n, p, q G-функция существует (например, при $p=q=0$ или $m=n=0$, p, $q\geqslant 0$ она не существует). Поэтому для определения интегральных преобразований более удобно использовать язык образов (преобразований Меллина) и интегральные преобразования типа свертки вводить лишь через правую часть равенства Парсеваля (1.116).

1°. Определение G-преобразования. Классы $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ и их описание. Положив в правой части формулы (1.116) в качестве $\mathrm{h}^*(s)$ отношение произведений гамма-функций из интеграла (1.95), определяющего G-функцию Мейера, придем к следующему понятию.

Определение 36.1. *G-преобразованием функции $f(x)$ назовем значение интеграла*

$$(Gf)(x)\equiv\left(G_{pq}^{mn}\left|\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right| f(t)\right)(x)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\Gamma\begin{bmatrix}(b_m)+s, & 1-(a_n)-s\\ (a_p^{n+1})+s, & 1-(b_q^{m+1})-s\end{bmatrix}f^*(s)x^{-s}ds,\tag{36.3}$$

где

$$\Gamma\begin{bmatrix}(b_m)+s, & 1-(a_n)-s\\ (a_p^{n+1})+s, & 1-(b_q^{m+1})-s\end{bmatrix}=$$

$$=\Gamma\begin{bmatrix}b_1+s, & \ldots, & b_m+s, & 1-a_1-s, & \ldots, & 1-a_n-s\\ a_{n+1}+s, & \ldots, & a_p+s, & 1-b_{m+1}-s, & \ldots, & 1-b_q-s\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)},\tag{36.4}$$

$f^*(s)$ — преобразование Меллина функции $f(x)$ (1.112) по прямой $\sigma = \{s, \operatorname{Re} s = 1/2\} = \{1/2 - i\infty, 1/2 + i\infty\}$; $(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n$; $(a_p^{n+1}) = a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_p$; $(b_m) = b_1, \ldots, b_m$; $(b_q^{m+1}) = b_{m+1}, \ldots, b_q$, причем компоненты p- и q-мерных векторов (a_p) и (b_q)—комплексные числа, для которых выполняются условия

$$\operatorname{Re} a_j \neq 1/2 + l, \quad j = 1, \ldots, n; \ \operatorname{Re} b_j \neq -1/2 - l, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{36.5}$$

Очевидно, что при $m = n = p = q = 0$ имеем

$$(G_{00}^{00} \mid : \mid f(t))(x) = f(x). \tag{36.6}$$

Естественным для G-преобразования будет класс функций $f(x)$, для которых интеграл (36.3) сходится. Поскольку гамма-функции при $|\operatorname{Im} s| \to \infty$ в соответствии с (1.65) имеют степенно-показательную асимптотику, то и класс функций должен описываться через $f^*(s)$ со степенно-показательным весом на бесконечности. Сказанное обосновывает необходимость введения следующих трех определений.

Определение 36.2. *Упорядоченную пару (c^*, γ^*), где*

$$c^* = m + n - \frac{p+q}{2}, \ \gamma^* = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{p} a_j - \sum_{j=1}^{q} b_j\right), \tag{36.7}$$

назовем характеристикой G-преобразования (36.3), величину

$$\eta = 2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign} \gamma^* \tag{36.8}$$

—его индексом, функцию

$$H(s) = \Gamma\begin{bmatrix} (b_m) + s, & 1 - (a_n) - s \\ (a_p^{n+1}) + s, & 1 - (b_q^{m+1}) - s \end{bmatrix} \tag{36.9}$$

— образом ядра, а число $p + q$—индексом сложности G-преобразования.

Определение 36.3. *Пусть c, $\gamma \in R^1$, причем $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign} \gamma \geqslant 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ пространство функций $f(x)$, $0 < x < \infty$, представимых в виде*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} f^*(s)\, x^{-s} ds, \tag{36.10}$$

$$f^*(s) = s^{-\gamma} e^{-\pi c |\operatorname{Im} s|} F(s), \tag{36.11}$$

где $F(s) \in L(\sigma)$. Для краткости обозначим $\mathfrak{M}_{0,0}^{-1}(L)$ через $\mathfrak{M}^{-1}(L)$.

Определение 36.4. *Пространством $L_2^{(c,\gamma)}$ назовем множество функций $f(x)$, $0 < x < \infty$, удовлетворяющих условиям (36.10), (36.11), где $F(s) \in L_2(\sigma)$, $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign} \gamma \geqslant 0$, а интеграл по σ понимается сходящимся в смысле среднего квадратичного.*

Пару (c, γ) назовем характеристикой пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$.

Как следует из формулы (1.65), справедливо асимптотическое соотношение

$$H(s) \sim |s|^{-\gamma^*} e^{-c^* \pi |\operatorname{Im} s|}, \quad |\operatorname{Im} s| \to \infty, \tag{36.12}$$

откуда следует, что интеграл

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} H(s)\, x^{-s} ds \tag{36.13}$$

при $\eta > 0$ сходится всюду, за исключением точки $x = 1$ в случае $c^* = 0$, $0 < \gamma^* \leqslant 1$, $p = q$, а при $\eta = 0$ он всюду расходится. Однако при $\eta = 0$, $p \neq q$ функция $h(x)$ может быть определена через сходящийся интеграл вида (36.13), в котором контур σ совпадает с прямой $\operatorname{Re} s = 1/2 + \varepsilon \operatorname{sign}(q-p)$, $\varepsilon > 0$. Поэтому случай $\eta > 0$ связан с обычным прямым G-преобразованием, осуществляемым через G-функцию Мейера, случаи $\eta < 0$ являются особыми, соответствуя, в частности, обратным преобразованиям типа обратных преобразований Лапласа, Стилтьеса и Мейера (при $c^* < 0$) или типа дробных производных (при $c^* = 0$, $\gamma^* < 0$), а случаи $\eta = 0$ соответствуют преобразованиям типа Ватсона, т. е., в частности, преобразованию Нараина (см. с. 116 из книги О. И. Маричева [10]), Ханкеля, а также Y- и $\mathbf{H}$-преобразованиям, рассматриваемым ниже в п. 7° (при $p \neq q$), или преобразованиям типа интегралов мнимого порядка (при $p=q$). Приведенные определения пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ учитывают поведение функции $H(s)$ на бесконечности. А именно если $c + c^* > 0$ или $c + c^* = 0$ и $\gamma + \gamma^* \geqslant 0$, что можно кратко записать в виде неравенства $2\operatorname{sign}(c+c^*) + \operatorname{sign}(\gamma+\gamma^*) \geqslant 0$, то интеграл (36.3) сходится соответственно абсолютно (для $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$) или в среднем квадратичном (для $L_2^{(c,\gamma)}$).

Приведем некоторые *свойства этих пространств.*

1) Справедливо соотношение $L_2^{(0,0)} = L_2(0, \infty)$.

2) Функция $x^{-1}f(x^{-1}) \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c,\gamma)}$) тогда и только тогда, когда $f(x) \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c,\gamma)}$).

3) Множества пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ вполне упорядочены:

$$\mathfrak{M}_{c',\gamma'}^{-1}(L) \subset \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L), \quad L_2^{(c',\gamma')} \subset L_2^{(c,\gamma)}, \tag{36.14}$$

если $2\operatorname{sign}(c'-c) + \operatorname{sign}(\gamma'-\gamma) > 0$.

4) Пространства $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ с нормами

$$\|f\|_{\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}} = \int_\sigma |F(s)\,ds|, \quad \|f\|_{L_2^{(c,\gamma)}} = \|F\|_{L_2(\sigma)} \tag{36.15}$$

и обычными операциями сложения и умножения на скаляр являются банаховыми, изометричными $L(-\infty, \infty)$ и $L_2(-\infty, \infty)$ соответственно.

5) Следующая теорема дает описание пространств $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$ на основе пространств $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ и $L_2(0, \infty)$ соответственно.

Теорема 36.1. *а) Пространство* $\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(0,\gamma)}$*) состоит из функций* $f(x)$*, представимых в виде* $f(x) = x^{-\gamma} I_{0+}^{\gamma}\varphi(x)$*, где* $\varphi(x) \in \mathfrak{M}^{-1}(L)$ *(соответственно* $\varphi(x) \in L_2(0, \infty)$*).*

б) Пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *(соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$*) при* $c > 0$ *состоит из функций* $f(x)$*, для которых существуют такие зависящие лишь от* $f(x)$ *постоянные* M_f*, что*

$$\left\| \left[\left(x\frac{d}{dx} \right)^m \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2c}{k+m-c-\gamma-1/2}\, x\frac{d}{dx} \right) \right] f(n^{2c}x) \right\| < M_f,$$

$$m > c + \gamma, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{36.16}$$

причем норму в (36.16) следует вычислять в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ *(соответственно в* $L_2(0, \infty)$*).*

Доказательство осуществим лишь в пространстве $L_2^{(c,\gamma)}$ (для $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ оно проводится аналогично).

а) Пусть $c = 0$. Тогда по определению $f(x) \in L_2^{(0,\gamma)}$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma s^{-\gamma} F(s)\, x^{-s}\, ds, \quad F(s) \in L_2(\sigma), \tag{36.17}$$

где интеграл сходится в среднем квадратичном. Преобразуем (36.17) к виду

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(1+\gamma-s)}F_1(s)x^{-s}ds,\ F_1(s)=s^{-\gamma}\frac{\Gamma(1+\gamma-s)}{\Gamma(1-s)}F(s). \quad (36.18)$$

В силу формулы (1.66) $F_1(s)$ принадлежит $L_2(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $F(s)\in L_2(\sigma)$. Поскольку $\gamma\geqslant 0$, то $\Gamma(1-s)/\Gamma(2+\gamma-s)\in L_2(\sigma)$, и в силу равенства Парсеваля (1.116) в классе L_2 (см., например, книгу Е. Титчмарша [1, с. 127, теорема 73 и с. 71, формула 2.1.17]) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(2+\gamma-s)}F_1(s)x^{-s}ds=\int_0^1\frac{(1-t)^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}\varphi(xt)\,dt,$$

где $\varphi(x)$ — обратное преобразование Меллина от функции $F_1(s)$. Тогда из (36.18) получаем равенство

$$x^{\gamma}f(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\int_{\sigma}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(2+\gamma-s)}F_1(s)x^{1+\gamma-s}ds=\frac{d}{dx}I_{0+}^{\gamma+1}\varphi(x).$$

Поскольку $F_1(s)\in L_2(\sigma)$, то $\varphi(x)\in L_2(0,\infty)$ (см., например, книги Е. Титчмарша [1, с. 126, теорема 71] и М. М. Джрбашяна [2, с. 53, теорема 1.16]), и поэтому $\varphi(x)\in L(0, E)$ при любых $E>0$. Отсюда следует $\frac{d}{dx}I_{0+}^{\gamma+1}\varphi(x)=I_{0+}^{\gamma}\varphi(x)$ и, значит, $f(x)=x^{-\gamma}I_{0+}^{\gamma}\varphi(x)$.

б) Пусть $c>0$. Функция $f(x)$ принадлежит $L_2^{(c,\gamma)}$ тогда и только тогда, когда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}s^{-\gamma}e^{-\pi c|\mathrm{Im}\,s|}F(s)x^{-s}ds,\quad F(s)\in L_2(\sigma).$$

Из формулы (1.65) следует, что функции $F(s)$ и $F_1(s)=s^{m-\gamma}e^{-\pi c|\mathrm{Im}\,s|}\times$ $\times F(s)\Gamma^{-1}(1/2-c-\gamma+m+2cs)$, $m>\gamma+c$, одновременно принадлежат или не принадлежат классу $L_2(\sigma)$. Функция $s^m\Gamma^{-1}(1/2-c-\gamma+m+2cs)$ удовлетворяет условиям теоремы из книги М. М. Джрбашяна [2, п.2.3.2]. Поэтому $L_2^{(c,\gamma)}$ совпадает с пространством L_2^{Φ} М. М. Джрбашяна [2, с. 90], где $\Phi(s)=s^m/\Gamma(1/2-c-\gamma+m+2cs)$, $m>\gamma+c$. Поэтому произведение

$$s^m e^{-2cs\ln n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2cs}{k+m-c-\gamma-1/2}\right),\quad s\in\sigma,$$

ограниченно сходится к указанной функции $\Phi(s)$ при $n\to\infty$, т. е. $s^m e^{-2cs\ln n}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2cs}{k+m-c-\gamma-1/2}\right)/\Phi(s)$ равномерно ограничено по s и n, и в силу утверждения (М. М. Джрбашян [2, с. 90]) $f(x)$ принадлежит $L_2^{\Phi}=L_2^{(c,\gamma)}$ тогда и только тогда, когда имеет место оценка (36.16). Теорема доказана. Отметим лишь, что в случае $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ вместо последнего цитируемого утверждения следует использовать соответствующий результат из работы Ву Ким Туана [4] для пространства $\mathfrak{M}_{\Phi}^{-1}(L)$.

2°. Существование, действие и представления G-преобразования. Рассмотрим вопросы существования и действия оператора G-преобразования в пространствах $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$, а также получим его представления в обычных формах через интегралы по лучу $(0,\infty)$, содержащие в ядрах G-функции Мейера. Первые вопросы решает следующая

Теорема 36.2. *G-преобразование (36.3) с характеристикой (c^*, γ^*) существует в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) тогда и только тогда, когда*

$$2\operatorname{sign}(c+c^*)+\operatorname{sign}(\gamma+\gamma^*)\geqslant 0. \tag{36.19}$$

При этом G-преобразование изоморфно отображает пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) на пространство $\mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)}$).

Доказательство. Пусть $f(x)\in\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ ($L_2^{(c,\gamma)}$). Тогда из (36.10), (36.11) следует $f^*(s)=s^{-\gamma}e^{-\pi c|\mathrm{Im}\,s|}F(s)$, $F(s)\in L(\sigma)$ (соответственно $F(s)\in L_2(\sigma)$). Поскольку (c^*, γ^*) является характеристикой G-преобразования, то справедливо асимптотическое соотношение (36.12) со значениями (36.7). Отсюда, приняв во внимание $s\in\sigma$, получим представление

$$H(s)f^*(s)=s^{-\gamma-\gamma^*}e^{-\pi(c+c^*)|\mathrm{Im}\,s|}F_1(s), \tag{36.20}$$

где $F_1(s)\in L(\sigma)$ (или $F_1(s)\in L_2(\sigma)$). Значит, интеграл (36.3) в G-преобразовании при условии его существования является функцией из класса $\mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)}$). Найдем условия существования этого интеграла. Поскольку $|x^{-s}|=x^{-1/2}$ при $s\in\sigma$ и $F_1(s)\in L(\sigma)$ (или $L_2(\sigma)$), на существование интеграла оказывает влияние лишь степенно-экспоненциальный вес $s^{-\gamma-\gamma^*}e^{-\pi(c+c^*)|\mathrm{Im}\,s|}$. Если $c+c^*>0$, то при любом значении $\gamma+\gamma^*$ этот вес экспоненциально убывает при $|\mathrm{Im}\,s|\to\infty$, если $c+c^*=0$, то вес убывает лишь при $\gamma+\gamma^*>0$ или ограничен при $\gamma+\gamma^*=0$. Эти условия можно объединить в одно ограничение вида (36.19). Когда эти условия не выполняются, вес на бесконечности растет и интеграл (36.3) расходится. Изоморфность отображения очевидна. Теорема доказана.

Теорема 36.3. *Пусть выполняются неравенство*

$$4\operatorname{sign}c^*+2\operatorname{sign}\gamma^*+\operatorname{sign}|p-q|>0 \tag{36.21}$$

и условия

$$\mathrm{Re}\,b_j>-1/2,\ j=1,2,\ldots,m;\quad \mathrm{Re}\,a_j<1/2,\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{36.22}$$

Тогда G-преобразование (36.3) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ существует и может быть представлено через следующий интеграл типа свертки Меллина, содержащий G-функцию Мейера:

$$(Gf)(x)=\int_0^\infty G_{pq}^{mn}\left(\frac{x}{y}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)f(y)\,\frac{dy}{y}\,. \tag{36.23}$$

Доказательство. При выполнении условия (36.21) G-функция $G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$ существует и интегрируема по любому отрезку $[\varepsilon, E]$, $0<\varepsilon<E<\infty$, всюду, в том числе и при $c^*=0$, $p=q$ в особой точке $x=1$, где, согласно формуле 8.2.1.48 справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3], эта функция при $0<\gamma^*<1$ имеет особенность порядка $O((1-x)^{\gamma^*-1})$. Пусть вначале $p\leqslant q$. Тогда вблизи особых точек $x=0$ и $x=\infty$ эта G-функция имеет асимптотику, которую можно кратко записать в виде (см. с. 117 книги О. И. Маричева [10] или работу [12]):

$$G_{pq}^{mn}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)=\begin{cases}O(|x|^b),\ x\to 0,\ b\leqslant\min\limits_{1\leqslant h\leqslant m}\mathrm{Re}\,b_h,\\ O(|x|^{a-1})+\varepsilon|x|^\rho\cos[(q-p)x^{1/(q-p)}+\delta],\ \ x\to\infty,\end{cases} \tag{36.24}$$

$$a \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{Re} a_k \text{ и } \varepsilon = 0, \quad \delta = \text{const} \text{ (или } \varepsilon \neq 0, \ q \geqslant p+2, \ c^* = 0),$$

$$(q-p)\rho = (1+p-q)/2 - \gamma^*.$$

Отсюда при $c^* > 0$ или $c^* = 0$ и $\gamma^* > 0$, $q = p$ следует

$$\int_0^\infty G_{pq}^{mn}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right) x^{s-1}\,dx = \int_0^1 O(x^b)\,x^{s-1}\,dx + \int_1^\infty O(x^{a-1})\,x^{s-1}dx. \quad (36.25)$$

Поэтому в силу (36.22) интеграл слева сходится ограниченно, когда $s \in \sigma$ (Ву Ким Туан [4]). Учтем далее, что при $c^*=0$ из $q>p$ следует неравенство $q \geqslant p+2$. Тогда из (36.21) вытекает, что в оставшемся случае $c^* = \gamma^* = 0$, $q \geqslant p+2$, согласно (36.24), в правой части (36.25) дополнительно возникает слагаемое вида

$$\varepsilon \int_1^\infty x^{s-1}\, x^{[2(q-p)]^{-1}-1/2} \cos\left[(q-p)\,x^{1/(q-p)} + \delta\right] dx =$$

$$= \varepsilon\,(q-p)\int_1^\infty t^{(q-p)\theta i - 1/2} \cos\left[(q-p)\,t + \delta\right] dt, \quad \theta = \operatorname{Im} s, \quad s \in \sigma. \quad (36.26)$$

Последний интеграл также сходится ограниченно. Таким образом, условия (36.21), (36.22) обеспечивают ограниченную сходимость интеграла (36.25) при $s \in \sigma$. Значит, в силу равенства Парсеваля (1.116) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ (см. работу Ву Ким Туана [1]) интеграл (36.23) сходится и равен значению (36.3).

Пусть теперь $p \geqslant q$. Применим к правой части (36.23) формулы отражения и сдвига (1.96) и (1.97) для G-функции и сделаем замену переменных $x = 1/x'$, $y = 1/y'$:

$$\frac{1}{x'}\,(Gf)\left(\frac{1}{x'}\right) = \int_0^\infty G_{qp}^{nm}\left(\frac{x'}{y'} \,\middle|\, \begin{matrix}-(b_q)\\-(a_p)\end{matrix}\right) \frac{1}{y'}\, f\left(\frac{1}{y'}\right) \frac{dy'}{y'}. \quad (36.27)$$

Пользуясь теперь свойством 2) пространства $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ из п. 1°, легко придем к случаю $p \leqslant q$. Теорема доказана.

Замечание 36.1. Если $c^* = \gamma^* = 0$ и $p = q$, то G-функция $G_{pp}^{mn}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_p)\end{matrix}\right)$ в точке $x = 1$ имеет неинтегрируемую особенность порядка $O((1-x)^{i\psi-1})$, $\operatorname{Im}\psi = 0$, поэтому интеграл (36.23) в таком случае сходится лишь при $f(x) = 0$. Условие (36.21) этот случай исключает.

Теорема 36.4. *Пусть* $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* \geqslant 0$ *и выполняются условия (36.22). Тогда G-преобразование (36.3) в классе* $L_2(0, \infty)$ *существует и представимо в виде*

$$(Gf)(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left(\frac{x}{y} \,\middle|\, \begin{matrix}1,\ (a_p)+1\\(b_q)+1,\ 0\end{matrix}\right) f(y)\,dy, \quad (36.28)$$

где $(a_p)+1 = a_1+1, a_2+1, \ldots, a_p+1$. *Если еще* $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}(\gamma^* - 1/2) > 0$, *то G-преобразование (36.3) в пространстве* $L_2(0, \infty)$ *существует и представимо в виде (36.23).*

Доказательство. Если $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* \geqslant 0$, то функция (36.9) в силу асимптотики (36.12) на прямой σ ограничена. Поэтому $H(s)/(1-s) \in L_2(\sigma)$ и формула (36.3) может быть записана в виде

$$(Gf)(x) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{dx}\int_\sigma \frac{H(s)}{1-s}\, f^*(s)\, x^{1-s}\,ds. \quad (36.29)$$

Применив теперь к правой части (36.29) равенство Парсеваля (1.116) в классе $L_2(0, \infty)$ и формулу сдвига G-функции (1.97), приводящую, в частности, к соотношению

$$xG^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} 0, & (a_p) \\ (b_q), & -1 \end{matrix}\right) = G^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} 1, & (a_p)+1 \\ (b_q)+1, & 0 \end{matrix}\right), \tag{36.30}$$

без труда придем к доказываемому представлению (36.28).

Если же $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}(\gamma^* - 1/2) > 0$, то не только $H(s)/(1-s) \in L_2(\sigma)$, но и $H(s) \in L_2(\sigma)$, поскольку $H(s) = O(|s|^{-\gamma^*})$. Поэтому к (36.3) можно сразу применить равенство Парсеваля (1.116), которое и приведет к представлению (36.23). Теорема доказана.

Замечание 36.2. Поскольку, например, $\left(G^{10}_{01}\,\middle|\, \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \,\middle|\, f(t)\right)(x) = L\left\{\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right);\ x\right\}$ и $\left(G^{00}_{01}\,\middle|\, \begin{matrix} - \\ 0 \end{matrix} \,\middle|\, f(t)\right)(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right);\ x\right\}$ (см. (1.119)—(1.121)), а для случая $m = n = 0$ G-преобразования не существует G-функции Мейера вида (36.23) или (36.30), то не каждое G-преобразование представимо по формуле (36.23) или (36.28). Случаям $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* > 0$ (и < 0) G-преобразования соответствуют прямые (и обратные) классические интегральные преобразования типа свертки, а случаям, когда $2\operatorname{sign} c^* + \operatorname{sign}\gamma^* = 0$, т. е. $c^* = \gamma^* = 0$, — преобразования Ватсона (при $q \neq p$) (см. книги Е. Титчмарша [1, гл. 8] или М. М. Джрбашяна [2, § 1, гл. 2]) или типа дробных интегралов мнимого порядка $I^{i\theta}_{0+}$, $I^{i\theta}_{-}$ (при $q = p$), подробнее об этом см. в п. 1° этого параграфа. Таким образом, через представление в виде (36.3) реализуется общий подход к теории интегральных преобразований типа свертки (с однородными ядрами).

3°. Факторизация G-преобразования. Введем следующее

Определение 36.5. *Факторизацией G-преобразования (36.3) будем называть всякое разложение оператора (36.3) через композицию других G-преобразований с меньшими индексами сложности (см. определение 36.2).*

Очевидно, что кроме тривиального (36.6) самыми простыми G-преобразованиями являются преобразования с индексами сложности, равными единице. Они связаны с преобразованиями Лапласа (1.119)—(1.121) и определяются следующим образом.

Определение 36.6. *Прямым и обратным видоизмененными преобразованиями Лапласа со степенными мультипликаторами назовем следующие преобразования над функцией $f(x)$:*

$$x^{\alpha}\Lambda_{\pm} x^{-\alpha} f(x) = x^{\alpha} L\{t^{\pm\alpha-1} f(t^{\mp 1});\ x^{\pm 1}\} = \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha} e^{-(x/t)^{\pm 1}} f(t)\,\frac{dt}{t}, \tag{36.31}$$

$$x^{\alpha}\Lambda^{-1}_{\pm} x^{-\alpha} f(x) = x^{\alpha\mp 1} L^{-1}\{t^{\mp\alpha} f(t^{\pm 1});\ x^{\mp 1}\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{f^*(s)\,x^{-s}}{\Gamma(\pm\alpha\pm s)}\,ds, \quad \operatorname{Re}(s+\alpha) \gtrless 0, \tag{36.32}$$

где $L\{\varphi(t);\ p\}$ и $L^{-1}\{g(p);\ x\}$ имеют вид (1.119) и (1.120) или (1.121).

К простым целесообразно отнести также и G-преобразования с индексами сложности, равными двум,— это дробные интегралы и производные I^{α}_{0+}, I^{α}_{-}, преобразования Стилтьеса, Ханкеля, Мейера, косинус- и синус-преобразования Фурье и им обратные преобразования. Так как композиции нескольких G-преобразований в соответствии с теоремой о свертке (1.115) или равенством Парсеваля (1.116) соответствует умножение образов их ядер вида (36.9), т. е. увеличение числа гамма-функций в образе ядра, что приводит опять-таки к G-преобразованию с бо́льшим индексом сложности, то естественно предположить, что любое G-преобразование при некоторых условиях может факторизоваться через композицию других, в частности, перечисленных выше простых G-преобразований. Действительно, справедлива

Теорема 36.5. *Пусть $G_1, \ldots, G_l$ — такие G-преобразования, что образы их ядер $H_1(s), \ldots, H_l(s)$ удовлетворяют условию*

$$H_1(s)H_2(s)\ldots H_l(s) = H(s), \tag{36.33}$$

где $H(s)$ имеет вид (36.9). Пусть еще преобразования $G_1, \ldots, G_l$ имеют более низкие индексы сложности, чем G, и соответственно характеристики $(c_1^*, \gamma_1^*), \ldots, (c_l^*, \gamma_l^*)$. Тогда, если выполняется условие (36.19), G-преобразование (36.3) в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно в $L_2^{(c,\gamma)}$) можно факторизовать через преобразования $G_1, \ldots, G_l$, расположенные в некотором порядке

$$(Gf)(x) = (G_{i_l}\ldots G_{i_2}G_{i_1}f)(x), \tag{36.34}$$

тогда и только тогда, когда $(i_1, \ldots, i_l)$ — такая подстановка чисел $(1, 2, \ldots, l)$, что выполняются неравенства

$$2\operatorname{sign}\left(c + \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}^*\right) + \operatorname{sign}\left(\gamma + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j}^*\right) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, l. \tag{36.35}$$

Для всякой группы преобразований $G_1, \ldots, G_l$ указанного вида всегда существует, по крайней мере, одна подстановка, удовлетворяющая условиям (36.35).

Доказательство. Существование G-преобразований, удовлетворяющих условию (36.33), очевидно. Например, это условие выполнится, если положить $l = p + q$ и взять соответственно образы ядер $H_1(s), \ldots, H_{p+q}(s)$ равными $\Gamma(b_i + s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\Gamma(1 - a_i - s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Gamma^{-1}(a_i + s)$, $i = n + 1, \ldots, p$, $\Gamma^{-1}(1 - b_i - s)$, $i = m + 1, \ldots, q$, что приведет к факторизации через прямые и обратные видоизмененные преобразования Лапласа (36.31), (36.32) (см. замечание 36.2). Из (36.33) очевидно, что справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^{l} c_i^* = c^*, \quad \sum_{i=1}^{l} \gamma_i^* = \gamma^*. \tag{36.36}$$

Применив последовательно l раз теорему 36.2, несложно прийти к необходимому и достаточному условию (36.35), обеспечивающему существование всех композиций $(G_{i_k}\ldots G_{i_2}G_{i_1}f)(x)$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Эти композиции будут принадлежать пространствам $\mathfrak{M}_{c',\gamma'}^{-1}$ (и $L_2^{(c',\gamma')}$), где $c' = c + \sum_{j=1}^{k} c_{i_j}^*$, $\gamma' = \gamma + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{i_j}^*$. Отсюда при $k = l$ в силу (36.36) имеем $(Gf)(x) \in \mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}(L)$ (или соответственно $L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)}$).

Покажем, что подстановка $(i_1, \ldots, i_l)$, для которой выполняются условия (36.35), существует. Для этого индексы $i_1, \ldots, i_l$ выберем следующим образом. Пусть i_1 — индекс наибольшего из чисел c_i^*. Если таких c_i^* несколько, то возьмем i_1 равным индексу наибольшего из чисел γ_i^* в парах (c_i^*, γ_i^*), где c_i^* — наибольшие, а если таких чисел γ_i^* несколько, то i_1 возьмем равным произвольному i из такой группы. Изъяв пару $(c_{i_1}^*, \gamma_{i_1}^*)$ с таким индексом, рассмотрим оставшиеся и среди них аналогичной процедурой определим следующий индекс i_2 и соответствующую пару. При таком выборе в итоге будут иметь место неравенства

$$2\operatorname{sign}(c_{i_j}^*-c_{i_{j+1}}^*)+\operatorname{sign}(\gamma_{i_j}^*-\gamma_{i_{j+1}}^*)\geqslant 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1. \tag{36.37}$$

Покажем, что из (36.37) следует (36.35). Допустим противное, что (36.35) нарушается, например, при $k=l-1$:

$$2\operatorname{sign}\left(c+\sum_{j=1}^{l-1} c_{i_j}^*\right)+\operatorname{sign}\left(\gamma+\sum_{j=1}^{l-1}\gamma_{i_j}^*\right)<0, \tag{36.38}$$

т. е. справедливо либо

$$c+c_{i_1}^*+\ldots+c_{i_{l-1}}^*<0, \tag{36.39}$$

либо

$$c+c_{i_1}^*+\ldots+c_{i_{l-1}}^*=0,\ \gamma+\gamma_{i_1}^*+\ldots+\gamma_{i_{l-1}}^*<0. \tag{36.40}$$

Из условия (36.19) ввиду (36.36) имеем $2\operatorname{sign}(c+c_{i_1}^*+\ldots+c_{i_l}^*)+\operatorname{sign}(\gamma+$ $+\gamma_{i_1}^*+\ldots+\gamma_{i_l}^*)\geqslant 0$, т. е. либо

$$c+c_{i_1}^*+\ldots+c_{i_{l-1}}^*+c_{i_l}^*>0, \tag{36.41}$$

либо

$$c+c_{i_1}^*+\ldots+c_{i_{l-1}}^*+c_{i_l}^*=0, \quad \gamma+\gamma_{i_1}^*+\ldots+\gamma_{i_{l-1}}^*+\gamma_{i_l}^*\geqslant 0. \tag{36.42}$$

Если (36.39), (36.41) или (36.39), (36.42) или же (36.40), (36.41) одновременно имеют место, то $c_{i_l}^*>0$, а поскольку по построению $c_{i_1}^*\geqslant c_{i_2}^*\geqslant$ $\geqslant\ldots\geqslant c_{i_l}^*$, то $c+c_{i_1}^*+\ldots+c_{i_{l-1}}^*>0$, что противоречит (36.39). Допустим теперь, что имеет место система (36.40), (36.42), откуда $c_{i_l}^*=0$ и $\gamma_{i_l}^*>$ >0. Тогда из (36.19), (36.40) и неравенств $c_{i_1}^*\geqslant c_{i_2}^*\geqslant\ldots\geqslant c_{i_l}^*=0$ следует, что $c_{i_1}^*=c_{i_2}^*=\ldots=c_{i_l}^*=0$, $c=0$; из (36.37) вытекает, что $\gamma_{i_1}^*\geqslant\ldots$ $\ldots\geqslant\gamma_{i_l}^*>0$, а из условия $2\operatorname{sign} c+\operatorname{sign}\gamma\geqslant 0$ следует $\gamma\geqslant 0$. Последнее противоречит неравенству (36.40), поэтому (36.38) не может иметь места. Аналогичным образом доказывается, что неравенства (36.35) имеют место для значений $k=l-2,\ \ldots,\ 1$. Теорема доказана.

4°. Обращение G-преобразования. Справедлива следующая

Теорема 36.6. *Пусть функция $g(x)\in\mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)}$). Тогда G-преобразование*

$$(G^{-1}g)(x)=\left(G_{q,p}^{p-n,q-m}\left|\begin{matrix}(b_q^{m+1}),\ (b_m)\\(a_p^{n+1}),\ (a_n)\end{matrix}\right|g(y)\right)(x)=f(x) \tag{36.43}$$

является обратным к G-преобразованию (36.3) при обозначении $(Gf)(x)=g(x)$. Если еще выполняются условия теоремы 36.5, то обратный оператор (36.43) факторизуется по формуле

$$f(x)=(G^{-1}g)(x)=(G_{i_1}^{-1}G_{i_2}^{-1}\ldots G_{i_l}^{-1}g)(x). \tag{36.44}$$

Доказательство. Поскольку $g\in\mathfrak{M}_{c+c^*,\gamma+\gamma^*}^{-1}$ $(L_2^{(c+c^*,\gamma+\gamma^*)})$, то по теореме 36.2 G-преобразование (36.43) существует и переводит функцию g в функцию f из класса $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}$ $(L_2^{(c,\gamma)})$. Применив теперь к равенству (36.43) G-преобразование (36.3), после прямого вычисления композиции слева, сокращения всех гамма-функций и применения формулы (36.6) получим слева функцию $g(x)$.

Обратные G-преобразования $G_{i_j}^{-1}$, входящие в (36.44), имеют характеристики $(-c_{i_j}^*,\ -\gamma_{i_j}^*)$, $j=1, 2,\ \ldots,\ l$. Поэтому условия (36.35) по отношению к (36.44) принимают вид

$$2\operatorname{sign}\left(c+c^*-\sum_{j=k}^{l} c^*_{i_j}\right)+\operatorname{sign}\left(\gamma+\gamma^*-\sum_{j=k}^{l}\gamma^*_{i_j}\right)\geqslant 0,\quad k=1,2,\ \ldots,\ l. \tag{36.45}$$

Очевидно, что (36.45) и (36.35) совпадают, и поэтому из теоремы 36.5 следует возможность факторизации обратного оператора (36.43) по формуле (36.44) для указанной подстановки $(i_1, \ldots, i_l)$. Теорема доказана.

Замечание 36.3. Если характеристика (c,γ) пространства $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ удовлетворяет условию

$$2\operatorname{sign}\left(c-\sum_{i=1}^{l}|c^*_i|\right)+\operatorname{sign}\left(\gamma-\sum_{i=1}^{l}|\gamma^*_i|\right)\geqslant 0, \tag{36.46}$$

то ограничение (36.35) имеет место для всех подстановок, и поэтому порядок действия составляющих операторов G_{i_j} в (36.34) и $G^{-1}_{i_j}$ в (36.44) может быть произвольным, т. е. эти G-преобразования в таком случае коммутативны.

Рассмотрим важный случай, когда все G_i, $i=1, 2, \ldots, l$, являются видоизмененными преобразованиями Лапласа (36.31), (36.32). Применив к этим формулам преобразование Меллина (1.112), видим, что таким операторам соответствуют образы ядер (36.9), содержащие только одну гамма-функцию в числителе или знаменателе:

$$\Gamma(\pm\alpha\pm s)\longleftrightarrow x^{\alpha}\Lambda_{\pm}x^{-\alpha},\quad \operatorname{Re}(\alpha+s)\gtrless 0, \tag{36.47}$$

$$\Gamma^{-1}(\pm\alpha\pm s)\longleftrightarrow x^{\alpha}\Lambda^{-1}_{\pm}x^{-\alpha},\quad \operatorname{Re}(\alpha+s)\gtrless 0. \tag{36.48}$$

Значит, каждой из гамма-функций G-преобразования (36.3) соответствует одно из преобразований Лапласа указанного вида, т. е. это общее G-преобразование при некоторых условиях может быть факторизовано через композицию операторов

$$\begin{gathered} x^{b_j}\Lambda_+x^{-b_j},\ j=1,2,\ \ldots,\ m;\ x^{a_j-1}\Lambda_-x^{1-a_j},\ \ j=1,2,\ \ldots,\ n;\\ x^{a_j}\Lambda^{-1}_{+}x^{-a_j},\ j=n+1,\ \ldots,\ p;\ x^{b_j-1}\Lambda^{-1}_{-}x^{1-b_j},\ \ j=m+1,\ \ \ldots,q. \end{gathered} \tag{36.49}$$

В указанном порядке эти операторы обозначим соответственно символами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m, \Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_{m+n}, \Lambda_{m+n+1}, \ldots, \Lambda_{m+p}, \Lambda_{m+p+1}, \ldots, \Lambda_{p+q}$. Их характеристики, вычисляемые по формулам (36.7), соответственно равны $(1/2, -\operatorname{Re}b_j)$, $j=1, 2, \ldots, m$, $(1/2, \operatorname{Re}a_j)$, $j=1, 2, \ldots, n$, $(-1/2, \operatorname{Re}a_j)$, $j=n+1, \ldots, p$, $(-1/2, -\operatorname{Re}b_j)$, $j=m+1, \ldots, q$. Обозначим их в указанном порядке через $(\theta_1, \xi_1), \ldots, (\theta_{p+q}, \xi_{p+q})$. По отношению к такой факторизации теоремы 36.5 и 36.6 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 36.7. *Пусть выполняются условия (36.19), (36.22) и неравенства*

$$\operatorname{Re}a_j>-1/2,\ j=n+1,\ \ldots,\ p;\ \operatorname{Re}b_j<1/2,\ j=m+1,\ \ldots,\ q. \tag{36.50}$$

Тогда G-преобразование (36.3) в классе $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) можно факторизовать через композицию видоизмененных преобразований Лапласа со степенными мультипликаторами (36.49), примененных в некотором порядке:

$$(Gf)(x)=(\Lambda_{i_{p+q}}\ldots\Lambda_{i_2}\Lambda_{i_1}f)(x), \tag{36.51}$$

тогда и только тогда, когда $(i_1, \ldots, i_{p+q})$ *такая подстановка чисел* $(1, 2, \ldots, p+q)$, *что выполняются неравенства*

$$2\operatorname{sign}\left(c + \sum_{j=1}^{k} \theta_{i_j}\right) + \operatorname{sign}\left(\gamma + \sum_{j=1}^{k} \xi_{i_j}\right) \geqslant 0, \; k = 1, 2, \ldots, p+q. \quad (36.52)$$

Теорема 36.8. *Пусть* $g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{c+c^*, \gamma+\gamma^*}(L)$(*соответственно* $L_2^{(c+c^*, \gamma+\gamma^*)}$) *и выполняются условия* (36.19), (36.22), (36.50) *и* (36.52) *для некоторой подстановки* $(i_1, \ldots, i_{p+q})$ *чисел* $(1, 2, \ldots, p+q)$. *Тогда* G*-преобразование* (36.43), *являющееся обратным к* (36.3), *может быть факторизовано через операторы* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{p+q}$ *с характеристиками* $(\theta_1, \xi_1), \ldots, (\theta_{p+q}, \xi_{p+q})$ *по формуле*

$$f(x) = (G^{-1}g)(x) = (\Lambda_{i_1}^{-1}\Lambda_{i_2}^{-1} \ldots \Lambda_{i_{p+q}}^{-1} g)(x). \quad (36.53)$$

Замечание 36.4. Для операторов (36.49) образами ядер $H_1(s), \ldots, H_{p+q}(s)$ является только одна гамма-функция соответственно вида $\Gamma(b_j+s)$, $\Gamma(1-a_j-s)$, $\Gamma^{-1}(a_j+s)$, $\Gamma^{-1}(1-b_j-s)$. Объединяя эти гамма-функции различными способами в те или иные группы, например попарно, можно получить большое число вариантов композиционных разложений G-преобразования по формуле (36.34) других видов, например через дробные интегралы и производные, преобразования Ханкеля, Стилтьеса, Мейера и им обратные.

Замечание 36.5. Если условия (36.22) или (36.50) для некоторых индексов j нарушаются при выполнении (36.5), то вместо соответствующих операторов (36.49) появляются операторы, у которых в ядрах прямых преобразований Лапласа функция e^{-z} будет заменяться на $e^{-z} - \sum_{k=0}^{r} \frac{(-z)^k}{k!}$, которая отличается на некоторый отрезок ряда Тейлора. Для таких индексов j соответствующую образу ядра гамма-функцию можно заменить на три по формуле

$$\Gamma(a+s) = (-1)^k \frac{\Gamma(a+k+s)\Gamma(1-a-k-s)}{\Gamma(1-a-s)}, \quad -k < \operatorname{Re}(a+s) < 1-k. \quad (36.54)$$

При надлежащем выборе k для последних нарушенное условие уже будет выполняться. Но такая операция ведет к увеличению индекса сложности G-преобразования.

Сказанное выше приводит к следующему важному для теории интегральных преобразований результату.

Теорема 36.9. *G-преобразование и, в частности, все классические прямые и обратные интегральные преобразования типа свертки представляют собой композиции некоторого числа прямых и обратных преобразований Лапласа типа* (36.31), (36.32), *допустимый порядок применения которых зависит от класса функций* f *и величин параметров преобразований. На достаточно хороших классах функций типа* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ *или* $L_2^{(c,\gamma)}$ *с условием, например,* $2c-p-q>0$ *операторы* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{p+q}$ *коммутативны и их композиция образует* G*-преобразование* (36.3).

5°. Действие, факторизация и обращение дробных интегралов в пространствах $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ и $L_2^{(c,\gamma)}$.

Теорема 36.10. *Оба оператора дробного интегродифференцирования* $x^{-\alpha}(I^{\alpha}_{0+}f)(x)$, $x^{-\alpha}(I^{\alpha}_{-}f)(x)$ *произвольного комплексного порядка* α *определены в пространствах* $\mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma'}(L)$ *и* $L_2^{(0,\gamma')}$, *где* $\gamma' = \max(0, -\operatorname{Re}\alpha)$, *пространства* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ *и* $L_2^{(c,\gamma)}$, *у которых* $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}(\gamma - \gamma') \geqslant 0$, *изоморфно отображают соответственно в пространства* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma'+\operatorname{Re}\alpha}(L)$ *и* $L_2^{(c,\gamma'+\operatorname{Re}\alpha)}$ *и факторизуются через композицию операторов* (36.31), (36.32) *при* *соответствующих указанных ниже условиях по формулам*

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = x^{-1}\Lambda_{-}^{-1}x^{\alpha}\Lambda_{-}xf(x), \tag{36.55}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\nu)}$, *а* $\mathrm{Re}\,\alpha>-1/2$;

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = x^{\alpha-1}\Lambda_{-}x^{-\alpha}\Lambda_{-}^{-1}x^{\alpha+1}f(x), \tag{36.56}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{1/2,-\mathrm{Re}\,\alpha}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(1/2,-\mathrm{Re}\,\alpha)}$, *а* $\mathrm{Re}\,\alpha>-1/2$;

$$(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k}x^{-1}\Lambda_{-}^{-1}x^{\alpha+k}\Lambda_{-}xf(x) \tag{36.57}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\nu)}$, *а* $k>-\mathrm{Re}\,\alpha-1/2$;

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) = x^{\alpha}\Lambda_{+}^{-1}x^{-\alpha}\Lambda_{+}x^{\alpha}f(x), \tag{36.58}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\nu)}$, *а* $\mathrm{Re}\,\alpha<1/2$;

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) = \Lambda_{+}x^{\alpha}\Lambda_{+}^{-1}f(x), \tag{36.59}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{1/2,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(1/2,\nu)}$, *а* $\mathrm{Re}\,\alpha<1/2$;

$$(I_{-}^{\alpha}f)(x) = x^{\alpha}\Lambda_{+}^{-1}x^{-\alpha}I_{0+}^{k}\Lambda_{+}x^{\alpha-k}f(x), \tag{36.60}$$

если $f(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ *или* $L_2^{(0,\nu)}$, *а* $k-1/2<\mathrm{Re}\,\alpha<k+1/2$.

Доказательство. Пусть n—такое целое число, что $\mathrm{Re}\,\alpha+n>0$. Тогда имеем

$$x^{-\alpha}(I_{0+}^{\alpha}f)(x) = x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left(I_{0+}^{\alpha+n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}f^*(s)x^{-s}ds\right) =$$

$$= x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}f^*(s)I_{0+}^{\alpha+n}x^{-s}ds = x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{\sigma}\Gamma\begin{bmatrix}1-s\\1+\alpha+n-s\end{bmatrix}f^*(s)x^{\alpha+n-s}ds = x^{-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{\sigma}\Gamma\begin{bmatrix}1-s\\1+\alpha+n-s\end{bmatrix}f^*(s)\frac{d^n}{dx^n}x^{\alpha+n-s}ds=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\Gamma\begin{bmatrix}1-s\\1+\alpha-s\end{bmatrix}f^*(s)x^{-s}ds. \tag{36.61}$$

Все произведенные в (36.61) перестановки порядка интегрирования и дифференцирования законны в силу абсолютной сходимости приведенных интегралов, имеющей место ввиду $|s|^{-\gamma}F(s)\in L(\sigma)$, см. (36.11) (или равенства Парсеваля в пространстве $L_2(\sigma)$ и $|s|^{-\gamma}F(s)\in L_2(\sigma)$). Если теперь образ ядра записать через произведение $\Gamma^{-1}(1+\alpha-s)\Gamma(1-s)$, то факторизации (36.55), (36.56) с соответствующими условиями на пространства и $\mathrm{Re}\,\alpha$ легко получаются как частные случаи теоремы 36.7.

Пусть теперь α — произвольное комплексное число, а k — такое положительное целое, что $\mathrm{Re}\,\alpha+k+1/2>0$. Тогда последнее произведение с помощью формулы (1.47) можно записать также в виде

$$\Gamma\begin{bmatrix}1-s\\1+\alpha-s\end{bmatrix} = (1+\alpha-s)_k\,\Gamma^{-1}(1+\alpha+k-s)\,\Gamma(1-s).$$

В силу сказанного после замечания 36.3 и формул 8, 14, 12 работы Ю. А. Брычкова, Х.-Ю. Глеске, О. И. Маричева [1, с. 24] по выбору k последние образы отвечают операторам $x^{-\alpha}\left(\frac{d}{dx}\right)^k x^{\alpha+k}$, $x^{-1-\alpha-k}\times$ $\times\Lambda_-^{-1}x^{1+\alpha+k}$, $x^{-1}\Lambda_- x^1$, имеющим характеристики $(0, -k)$, $(-1/2, \operatorname{Re}\alpha+$ $+k)$ и $(1/2, 0)$ соответственно. Отсюда следует факторизация вида (36.57). Остальные формулы доказываются аналогично. Первые утверждения теоремы являются прямыми следствиями теоремы 36.2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любая функция $f(x)$ из пространства $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(c,\gamma)}$) представима в виде $f(x)=x^{-\gamma}I_{0+}^{\gamma}\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in\mathfrak{M}_{c,0}^{-1}(L)$ (соответственно $\varphi(x)\in L_2^{(c,0)}$).*

Доказательство следует из того, что $x^{-\gamma}I_{0+}^{\gamma}$ является G-преобразованием с характеристикой $(0, \gamma)$, и поэтому пространство $\mathfrak{M}_{c,0}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,0)}$) изоморфно отображается в пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$, когда $2\operatorname{sign}c+\operatorname{sign}\gamma\geqslant 0$.

Следствие 2. *Если $\alpha=i\theta$ — чисто мнимое, то оператор $I_{0+}^{i\theta}$ является автоморфизмом в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$).*

Доказательство прямо следует из того, что оператор $x^{-i\theta}I_{0+}^{i\theta}$ является G-преобразованием с характеристикой $(0, 0)$.

Замечание 36.6. Как следует из замечаний после леммы 2.3, оператор $I_{0+}^{i\theta}$ в том подклассе из $L_1(0, \infty)$, где он определен, не является автоморфизмом.

6°. Другие примеры факторизаций. В этом пункте рассмотрим примеры факторизаций с помощью дробных интегралов преобразований Ханкеля, Бесселя, обобщенного преобразования Лапласа и интеграла типа потенциала. При этом для удобства через $\{h(x)\}\,\varphi$ будем обозначать свертку Меллина (1.114), полагая при этом $\{h(1/x)\}\,\varphi=\int\limits_0^\infty h(t/x)\,\varphi(t)\,t^{-1}dt$, а записью в виде $\{h(x)\}\,(P)(Q)\,\varphi$ — перестановочность операторов $\{h(x)\}$, P и Q в произвольном порядке в соответствующем классе функций.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 36.11. *Преобразование Ханкеля видоизмененной формы*

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}\,f=\int\limits_0^\infty J_\nu\left(2\sqrt{\frac{x}{t}}\right)f(t)\,\frac{dt}{t},\quad \operatorname{Re}\nu>-1,\tag{36.62}$$

изоморфно отображает пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) в себя и факторизуется через композицию

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}\,f=x^{-1-\nu/2}\Lambda_-^{-1}x^{1+\nu}\Lambda_+x^{-\nu/2}f(x).\tag{36.63}$$

Если еще, кроме того, $f(x)\in\mathfrak{M}_{1/2,\operatorname{Re}\nu/2}^{-1}(L)$ (или $L_2^{(1/2,\operatorname{Re}\nu/2)}$), то допустима композиция в другом порядке

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}\,f=x^{\nu/2}\Lambda_+x^{-1-\nu}\Lambda_-^{-1}x^{1+\nu/2}f(x).\tag{36.64}$$

Доказательство следует из того, что при $\operatorname{Re}\nu>-1$ оператор (36.62) в силу шестой из формул (1.118) и равенства Парсеваля (1.116) допускает представление

$$\{J_\nu(2\sqrt{x})\}\,f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\sigma \Gamma(s+\nu/2)\,\Gamma^{-1}(1+\nu/2-s)\,f^*(s)\,x^{-s}ds.\tag{36.65}$$

Поэтому он факторизуется через два оператора $x^{\nu/2}\Lambda_+x^{-\nu/2}$ и $x^{-1-\nu/2}\Lambda_-^{-1}x^{1+\nu/2}$ (см. сказанное после замечания 36.3). Их характеристики равны соответственно (1/2, $\operatorname{Re}\nu/2$) и ($-1/2$, $-\operatorname{Re}\nu/2$). Отсюда, применив теорему 36.5, получаем условия, обеспечивающие существование того или иного порядка композиций этих операторов, и сами формулы (36.63), (36.64). Теорема доказана.

Теорема 36.12. *Y-преобразование Бесселя видоизмененной формы*

$$\{Y_\nu(2\sqrt{x})\} f = \int_0^\infty Y_\nu\left(2\sqrt{\frac{x}{y}}\right) f(y)\frac{dy}{y}, \quad |\operatorname{Re}\nu| < 1, \qquad (36.66)$$

где $Y_\nu(z)$ — функция Бесселя второго рода (см. книгу Г. Бейтмена, А. Эрдейи [2]), изоморфно отображает пространство $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) в себя и может быть факторизовано через композицию операторов Ханкеля $J_\nu = \{J_\nu(2\sqrt{x})\}$ и дробных интегралов или производных вида $K = x^{-\nu/2} I_-^{-1/2} x^{(\nu+1)/2}$ и $I = x^{-(\nu+1)/2} I_{0+}^{1/2} x^{\nu/2}$. Если $c = 0$ и $\gamma < 1/2$, то оператор J_ν может стоять в любом месте, а K должен действовать после I:

$$Y_\nu = KIJ_\nu = KJ_\nu I = J_\nu KI. \qquad (36.67)$$

Если же $2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}(\gamma - 1/2) \geqslant 0$, то порядок действий операторов произволен.

Доказательство. В соответствии с (1.116) и формулой 9.4(1) книги О. И. Маричева [10] составим G-преобразование вида

$$(G_Y f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} s+\nu/2,\ s-\nu/2 \\ s-(\nu+1)/2,\ (3+\nu)/2-s \end{bmatrix} f^*(s)\, x^{-s} ds. \qquad (36.68)$$

Его характеристика равна (0, 0), и поэтому в силу теоремы 36.2 оно существует в любом пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ ($L_2^{(c,\gamma)}$), изоморфно отображая его в себя. Если еще выполняются условия (36.22), принимающие вид $-1 < \operatorname{Re}\nu < 1$, то по теореме 36.3 интеграл (36.68) преобразуется в интеграл из (36.66). Запишем теперь образ ядра в форме $\Gamma\begin{bmatrix} s+\nu/2 \\ \nu/2+1-s \end{bmatrix} \times \Gamma\begin{bmatrix} s-\nu/2 \\ s-(\nu+1)/2 \end{bmatrix}\Gamma\begin{bmatrix} \nu/2+1-s \\ (3+\nu)/2-s \end{bmatrix}$. Из соотношений (36.1), (36.2), (36.65), пользуясь второй формулой из (1.117), несложно установить следующие меллиновские соответствия:

$$\Gamma\begin{bmatrix} a+s \\ c+s \end{bmatrix} \longleftrightarrow x^a I_-^{c-a} x^{-c}, \quad \operatorname{Re}(a+s) > 0, \qquad (36.69)$$

$$\Gamma\begin{bmatrix} b-s \\ d-s \end{bmatrix} \longleftrightarrow x^{1-d} I_{0+}^{d-b} x^{b-1}, \quad \operatorname{Re}(b-s) > 0, \qquad (36.70)$$

$$\Gamma\begin{bmatrix} a+s \\ d-s \end{bmatrix} \longleftrightarrow x^{(a-d+1)/2}\{J_{a+d-1}(2\sqrt{x})\}\, x^{(d-a-1)/2},$$
$$\operatorname{Re}(a+d), \quad \operatorname{Re}(a+s) > 0. \qquad (36.71)$$

Применив их к указанному образу ядра, легко получить все факторизации, указанные в теореме 36.12. Условия на характеристики пространств выводятся из теоремы 36.5.

Теорема 36.13. **H**-*преобразование Бесселя видоизмененной формы*

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\} f = \int_0^\infty \mathbf{H}_\nu\left(2\sqrt{\frac{x}{y}}\right) f(y)\frac{dy}{y}, \quad -2 < \operatorname{Re}\nu < 0, \qquad (36.72)$$

где $\mathbf{H}_\nu(z)$ — *функция Струве (см. книгу Г. Бейтмена, А. Эрдейи* [2]), *изоморфно отображает пространство* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ (*соответственно* $L_2^{(c,\gamma)}$) *в себя и факторизуется в следующие комбинации:*

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = (J_\nu)(x^{(\nu+1)/2} I_-^{-1/2} I_{0+}^{1/2} x^{-(\nu+1)/2}) f(x), \tag{36.73}$$

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = x^{(\nu+1)/2} I_-^{-1/2} x^{-\nu/2}(J_\nu) x^{\nu/2} I_+^{1/2} x^{-(\nu+1)/2} f(x), \tag{36.74}$$

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = (x^{(\nu+1)/2} I_-^{-1/2} x^{-\nu/2})(x^{\nu/2} I_{0+}^{1/2} x^{-(\nu+1)/2})(J_\nu) f(x), \tag{36.75}$$

где в первых двух случаях $f(x) \in \mathfrak{M}^{-1}(L)$ ($f(x) \in L_2(0, \infty)$), *а в третьем* $f(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,1/2}(L)$ ($f(x) \in L_2^{(0,1/2)}$).

Доказательство аналогично и основано на том, что при $-2 < \mathrm{Re}\,\nu < 0$, как следует из соотношения 9.5(1) книги О. И. Маричева [10], преобразование $\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f$ можно записать в виде

$$\{\mathbf{H}_\nu(2\sqrt{x})\}f = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\left[\begin{matrix} s+\nu/2 \\ 1+\nu/2-s \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+(\nu+1)/2 \\ s+\nu/2 \end{matrix}\right] \times$$

$$\times \Gamma\left[\begin{matrix} (1-\nu)/2-s \\ 1-\nu/2-s \end{matrix}\right] f^*(s)\, x^{-s} ds. \tag{36.76}$$

Теорема 36.14. *Обобщенное преобразование Лапласа*

$$D_\nu\{f(y);\ x\} = 2^{-\nu/2}\int_0^\infty e^{-x(2y)^{-1}} D_\nu\left(\sqrt{\frac{2x}{y}}\right) f(y)\,\frac{dy}{y}, \quad \mathrm{Re}\,\nu < 1, \tag{36.77}$$

где $D_\nu(z)$ — *функция параболического цилиндра (см. книгу Г. Бейтмена, А. Эрдейи* [2]), *изоморфно отображает пространство* $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ ($L_2^{(c,\gamma)}$) *в* $\mathfrak{M}^{-1}_{c+1/2,\gamma-\mathrm{Re}\,\nu/2}(L)$ ($L_2^{(c+1/2,\gamma-\mathrm{Re}\,\nu/2)}$) *и допускает следующие разложения на композиции:*

$$D_\nu\{f(y);\ x\} = x^{1/2} I_-^{-\nu/2} x^{(\nu-1)/2} \Lambda_+ f(x), \tag{36.78}$$

$$D_\nu\{f(y);\ x\} = \Lambda_+ x^{1/2} I_-^{-\nu/2} x^{(\nu-1)/2} f(x), \tag{36.79}$$

где в последнем случае $\mathrm{Re}\,\nu < 0$ *и* $2\,\mathrm{sign}\,c + \mathrm{sign}(\gamma + (1-\mathrm{Re}\,\nu)/2) \geqslant 0$.

Доказательство. В соответствии с формулой 8.30(1) из книги О. И. Маричева [10] рассмотрим G-преобразование

$$(G_D f)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\left[\begin{matrix} s,\ s+1/2 \\ s+(1-\nu)/2 \end{matrix}\right] f^*(s)\, x^{-s} ds. \tag{36.80}$$

Оно имеет характеристику ($1/2$, $-\mathrm{Re}\,\nu/2$) и поэтому существует в любом пространстве $\mathfrak{M}^{-1}_{c,\gamma}(L)$ ($L_2^{(c,\gamma)}$) и переводит его в $\mathfrak{M}^{-1}_{c+1/2,\gamma-\mathrm{Re}\,\nu/2}(L)$ ($L_2^{(c+1/2,\ \gamma-\mathrm{Re}\,\nu/2)}$) по теореме 36.2. Из теорем 36.3, 36.4 следует сводимость (36.80) к (36.77), а из теоремы 36.4 вытекают при соответствующих условиях формулы факторизации (36.78), (36.79), которые легко формально записать на основе соответствия

$$D_\nu \longleftrightarrow \Gamma\left[\begin{matrix} s,\ s+1/2 \\ s+(1-\nu)/2 \end{matrix}\right] = \Gamma[s]\,\Gamma\left[\begin{matrix} s+1/2 \\ s+(1-\nu)/2 \end{matrix}\right] \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow (\Lambda_+)(x^{1/2} I_-^{-\nu/2} x^{(\nu-1)/2}). \tag{36.81}$$

В заключение пункта рассмотрим следующий интеграл типа потенциала:

$$(K^\alpha f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\,dt. \tag{36.82}$$

Для любой функции $f\in\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ имеем представление

$$x^{-\alpha}(K^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)}\,\frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int_\sigma \Gamma\left[\begin{matrix}s-\alpha, & 1-s\\ s-\alpha/2, & 1+\alpha/2-s\end{matrix}\right] f^*(s)\,x^{-s}ds \qquad (36.83)$$

(см. формулу 2.5(1) из книги О. И. Маричева [10]). Воспользовавшись теперь формулами (36.69), (36.70), легко получить следующую факторизацию:

$$x^{-\alpha}(K^\alpha f)(x)=(x^{-\alpha}I_-^{\alpha/2}x^{\alpha/2}\cdot x^{-\alpha/2}I_{0+}^{\alpha/2})f(x), \qquad (36.84)$$

где допустим произвольный порядок. Образ ядра можно разложить на две дроби и иным способом, который приведет к факторизации через преобразования Ханкеля.

7°. Действие G-преобразования на дробные интегралы и производные.

Теорема 36.15. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered}2\operatorname{sign}(c+c^*)+\operatorname{sign}(\gamma+\gamma^*+\operatorname{Re}\alpha)\geqslant 0,\\ 2\operatorname{sign}c+\operatorname{sign}(\gamma+\operatorname{Re}\alpha)\geqslant 0.\end{gathered} \qquad (36.85)$$

Тогда в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $L_2^{(c,\gamma)}$) существует G-преобразование (36.3) оператора $x^{-\alpha}(I_{0+}^\alpha f)(x)$, и оно вычисляется по формуле

$$(Gx^{-\alpha}(I_{0+}^\alpha f))(x)=\left(G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left|\begin{matrix}0, & (a_p)\\ (b_q), & -\alpha\end{matrix}\right| f(t)\right)(x). \qquad (36.86)$$

Доказательство следует из теоремы 36.5, где нужно положить $l=2$, $G_{i_1}f=x^{-\alpha}I_{0+}^\alpha f$, $G_{i_2}f=Gf$ из (36.3), а вместо преобразования (36.3) взять G-преобразование $\left(G_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left|\begin{matrix}0, & (a_p)\\ (b_q), & -\alpha\end{matrix}\right| f(t)\right)(x)$.

Теорема 36.16. *Пусть выполняются условия теоремы 36.15. Тогда в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ $(L_2^{(c,\gamma)})$ существует G-преобразование (36.3) оператора $x^{-\alpha}(I_-^\alpha f)(x)$, и оно вычисляется по формуле*

$$(Gx^{-\alpha}(I_-^\alpha f))(x)=\left(G_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left|\begin{matrix}(a_p), & 0\\ -\alpha, & (b_q)\end{matrix}\right| f(t)\right)(x). \qquad (36.87)$$

Доказательство аналогично предыдущему.

8°. Индексные законы для дробных интегралов и производных. Для дробных интегралов и производных известны так называемые индексные законы, отражаемые формулами (10.4), (10.5), (10.42), (10.43), см. также теорему 10.7. В настоящем пункте установим теорему об условиях выполнения индексных законов и аналога теоремы 10.7 для операторов I_{0+}^α и I_-^α в классах $\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$, $L_2^{(0,\gamma)}$.

Теорема 36.17. *Пусть $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — два набора произвольных комплексных чисел. Тогда в пространстве $\{f(x)\colon f(x)=x^\delta g(x),\ g(x)\in\mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ (соответственно $g(x)\in L_2^{(0,\gamma)}$)$\}$, где*

$$\gamma=\max\left\{0,\ \max\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{k}(\beta_{i_j}-\alpha_{i_j}),\quad \{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,2,\ldots,n\}\right\}, \qquad (36.88)$$

$$\delta>\max_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{Re}\alpha_i-1/2, \qquad (36.89)$$

операторы $x^{\beta_i} I_{0+}^{\alpha_i - \beta_i} x^{-\alpha_i}$ коммутативны. Если, кроме того, $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ является некоторой перестановкой набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, то композиция всех этих операторов представляет собой единичный оператор

$$(x^{\beta_{i_n}} I_{0+}^{\alpha_{i_n} - \beta_{i_n}} x^{-\alpha_{i_n}}) \ldots (x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1} - \beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}}) f(x) = f(x). \tag{36.90}$$

Если условия (36.88) или (36.89) не выполняются, то указанные операторы не всегда коммутативны.

Доказательство. Пусть справедливо представление $f(x) = x^{\delta} g(x)$, где $g(x) \in \mathfrak{M}_{0,\gamma}^{-1}(L)$ $(g(x) \in L_2^{(0,\gamma)})$. Тогда в силу (36.10) имеем

$$x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1} - \beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}} f(x) =$$
$$= x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1} - \beta_{i_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} g^*(s) x^{\delta - \alpha_{i_1} - s} ds.$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\delta - \alpha_{i_1} - s) > -1$ (в силу (36.89)), то для $m > \operatorname{Re}(\beta_{i_1} - \alpha_{i_1})$ находим далее

$$x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1} - \beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}} f(x) = x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{-m} I_{0+}^{\alpha_{i_1} - \beta_{i_1} + m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} g^*(s) x^{\delta - \alpha_{i_1} - s} ds =$$
$$= x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{-m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \alpha_{i_1} - s + \delta \\ 1 - \beta_{i_1} - s + \delta + m \end{matrix}\right] g^*(s) x^{\delta - \beta_{i_1} + m - s} ds =$$
$$= x^{\beta_{i_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \alpha_{i_1} - s + \delta \\ 1 - \beta_{i_1} - s + \delta + m \end{matrix}\right] g^*(s) \frac{d^m}{dx^m} x^{\delta - \beta_{i_1} + m - s} ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \alpha_{i_1} - s + \delta \\ 1 - \beta_{i_1} - s + \delta \end{matrix}\right] g^*(s) x^{\delta - s} ds = \varphi(x).$$

Все проведенные перестановки операций законны, так как все используемые интегралы сходятся абсолютно (или в силу равенства Парсеваля в L_2) ввиду условия $g^*(s) s^{\gamma} \in L(\sigma)$ $(g^*(s) s^{\gamma} \in L_2(\sigma))$. Построенная функция $\varphi(x)$ принадлежит уже пространству $\{f(x)\colon f(x) = x^{\delta} g(x),\ g(x) \in \mathfrak{M}_{0,\gamma'}^{-1}(L)$ (соответственно $g(x) \in L_2^{(0,\gamma')}$), где $\gamma' = \gamma + \operatorname{Re}(\alpha_{i_1} - \beta_{i_1})\}$. По отношению к параметру γ' условия (36.88), (36.89), переписанные в виде

$$\gamma^* = \max\Big\{0,\ \max \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{k} (\beta_{i_j} - \alpha_{i_j}),$$
$$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\} \setminus i_1\Big\},$$
$$\delta > \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i_1}} \operatorname{Re} \alpha_i - 1/2,$$

также будут выполняться. Поэтому к $\varphi(x)$ можно опять применить некоторый оператор $x^{\beta_{i_2}} I_{0+}^{\alpha_{i_2} - \beta_{i_2}} x^{-\alpha_{i_2}}$, где $i_2 \in \{1, \ldots, n\} \setminus i_1$. Продолжив этот процесс, получим, что в силу теоремы 36.5 композиция $(x^{\beta_{i_n}} I_{0+}^{\alpha_{i_n} - \beta_{i_n}} x^{-\alpha_{i_n}}) \ldots$ $\ldots (x^{\beta_{i_1}} I_{0+}^{\alpha_{i_1} - \beta_{i_1}} x^{-\alpha_{i_1}}) f(x)$ существует для любой подстановки $(i_1, \ldots, i_n)$ и, более того, она представима в виде G-преобразования

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \alpha_{i_n} + \delta - s, & \ldots, & 1 - \alpha_{i_1} + \delta - s \\ 1 - \beta_{i_n} + \delta - s, & \ldots, & 1 - \beta_{i_1} + \delta - s \end{matrix}\right] g^*(s) x^{\delta - s} ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \alpha_1 + \delta - s, & \ldots, & 1 - \alpha_n + \delta - s \\ 1 - \beta_1 + \delta - s, & \ldots, & 1 - \beta_n + \delta - s \end{matrix}\right] g^*(s) x^{\delta - s} ds, \tag{36.91}$$

см. (10.48), и поэтому не зависит от порядка действия составляющих операторов (изменение этого порядка приводит к изменению порядка гамма-множителей в (36.91)). Если еще $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, то все гамма-функции в (36.91) сокращаются, и правая часть принимает значение $x^\delta g(x)$, что приводит к формуле (36.90).

Допустим теперь, что условия (36.89) нарушаются, т. е. существует номер j, для которого $\delta \leqslant \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2$. Пусть вначале $\delta < \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2$. Тогда для функции $f(x) = x^{-1/2+\varepsilon} e^{-x} \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\nu}(L)$ $(L_2^{(0,\nu)})$ оператор $x^{\beta_j} I_{0+}^{\alpha_j-\beta_j} x^{-\alpha_j} f(x)$ не существует при $\varepsilon < \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2 - \delta$. Аналогично и в случае $\delta = \operatorname{Re}\alpha_j - 1/2$ можно найти такую функцию $f(x)$ из указанных в условии теоремы классов, для которой приведенный оператор не существует.

Допустим, наконец, что условия (36.88) не выполняются для некоторого набора $(i_1, \ldots, i_k)$. Тогда в силу теоремы 36.5 композиция $\prod\limits_{j=1}^{k} (x^{\beta_{i_j}} I_{0+}^{\alpha_{i_j}-\beta_{i_j}} x^{-\alpha_{i_j}}) f(x)$ в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}_{0,\nu}(L)$ $(L_2^{(0,\nu)})$ не существует. Теорема доказана.

Теорема 36.18. *Пусть выполняются условия теоремы 36.17, но с заменой (36.89) на противоположное неравенство*

$$\delta < \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{Re}\alpha_i - 1/2. \tag{36.92}$$

Тогда имеют место утверждения теоремы 36.17, но с заменой I_{0+} на I_-.

Доказательство аналогично.

Следствие 1. *Пусть* $\gamma = \max(0, -\operatorname{Re}\alpha, -\operatorname{Re}\beta, -\operatorname{Re}(\alpha+\beta))$ *и* $\delta > \max(-\operatorname{Re}\alpha, -\operatorname{Re}\beta) - 1/2$ (*или* $\gamma = \max(0, -\operatorname{Re}\alpha, -\operatorname{Re}(\alpha+\beta))$ *и* $\delta > -\operatorname{Re}\alpha - 1/2$). *Тогда в пространствах* $\{f(x)\colon f(x) = x^\delta g(x),\ g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)\}$ *и* $\{f(x)\colon f(x) = x^\delta g(x),\ g(x) \in L_2^{(0,\gamma)}\}$ *имеет место первая* (*соответственно вторая*) *из формул* (*10.4*).

Доказательство получается на основе представления

$$x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} \beta+1-s \\ \alpha+\beta+1-s \end{bmatrix} \times$$
$$\times \Gamma\begin{bmatrix} 1-s \\ \beta+1-s \end{bmatrix} f^*(s) x^{-s} ds.$$

Следствие 2. *Пусть* $\gamma = \max(0, \operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}(\alpha+\beta))$ *и* $\delta > \max(\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta) - 1/2$. *Тогда в пространствах* $\{f(x) : f(x) = x^\delta g(x),\ g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)\}$ *и* $\{f(x) : f(x) = x^\delta g(x),\ g(x) \in L_2^{(0,\gamma)}\}$ *имеет место равенство*

$$I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} I_{0+}^{\beta} x^{-\beta} f(x) = I_{0+}^{\beta} x^{-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} f(x). \tag{36.93}$$

Доказательство вытекает из теоремы 36.17 и следствия 1.

Следствие 3. *Пусть* $\gamma = \max\{0, -\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}(\alpha+\beta)\}$ *и* $\delta > \max(0, -\operatorname{Re}\beta, -\operatorname{Re}(\alpha+\beta)) - 1/2$. *Тогда в пространствах* $\{f(x) : f(x) = x^\delta g(x),\ g(x) \in \mathfrak{M}^{-1}_{0,\gamma}(L)\}$ *и* $\{f(x) : f(x) = x^\delta g(x),\ g(x) \in L_2^{(0,\gamma)}\}$ *имеет место равенство* (*10.42*).

Доказательство. Исключив γ, левую часть (10.42) запишем в виде $I_{0+}^{-\alpha-\beta} x^{\alpha+\beta} x^{-\beta} I_{0+}^{\beta} x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{\beta} f(x)$. При выполнении условий следствия эта композиция существует и принимает значение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \Gamma\begin{bmatrix} 1+\alpha+\beta-s \\ 1-s \end{bmatrix} \Gamma\begin{bmatrix} 1-s \\ 1+\beta-s \end{bmatrix} \times$$
$$\times \Gamma\begin{bmatrix} 1+\beta-s \\ 1+\alpha+\beta-s \end{bmatrix} f^*(s) x^{-s} ds = f(x).$$

Что и требовалось установить (ср. с доказательством теоремы 10.6).

§ 37. УРАВНЕНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые классы интегральных уравнений первого рода, разрешимых в замкнутом виде и имеющих ядра, прямо не представимые в форме $K(x/t)$. К таким классам относятся уравнения с разностными ядрами $K(x-t)$ (для которых лишь после замен $x=\ln y$, $t=\ln\tau$ ядро принимает вид $K(\ln\theta)$, $\theta=y/\tau$), некоторые несверточные уравнения с функциями Бесселя, уравнения композиционного типа, распадающиеся на более простые, обращаемые уравнения, а также уравнения, связанные с интегрированием по параметрам специальных функций (типа преобразований Конторовича—Лебедева и Мелера—Фока).

1°. **Уравнения с разностными ядрами.** Проведем исследование следующих семи левосторонних *интегральных операторов типа Абеля:*

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,{}_1F_1(\beta;\ \alpha;\ \lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.1}$$

$$(A_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bar{J}_{(\alpha-1)/2}(\lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.2}$$

$$(B_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bar{J}_{\alpha/2-1}(\lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.3}$$

$$(C_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x-t})\,f(t)\,dt, \tag{37.4}$$

$$(D_{a+}^{\alpha,\lambda}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bar{J}_{\alpha}(\lambda(x-t))\,f(t)\,dt, \tag{37.5}$$

$$(E_{a+}^{\alpha,\lambda,\gamma}f)(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{(x-t)(x-t+\gamma)})\,f(t)\,dt,\quad |\arg\gamma|<\pi, \tag{37.6}$$

$$(S_{a+}^{\alpha}f)(x)=\int_a^x \left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x-t}{2}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{\Gamma(\alpha)}\,dt \tag{37.7}$$

и соответствующих им правосторонних операторов $I_{b-}^{\alpha,\beta,-\lambda}$, $A_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $B_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $C_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $D_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $E_{b-}^{\alpha,\lambda,\gamma}$, S_{b-}^{α}, получающихся из (37.1) — (37.7) заменой $x-t$ на $t-x$ и $[a, x]$ на $[x, b]$, $b\leqslant\infty$. В случае $b=+\infty$ вместо символа $\infty-$ в указанных операторах будем использовать индекс $-$, см., например, (10.56). В приведенных формулах α ($\mathrm{Re}\,\alpha>0$), β, λ, γ — некоторые комплексные параметры, ${}_1F_1(a;\ c;\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (1.81), а $\bar{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда:

$$\bar{J}_\nu(z)=\bar{I}_\nu(iz)=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k\,k!} \tag{37.8}$$

(ниже встречается и функция $\bar{I}_\nu(z)$).

В силу очевидного равенства $\overline{J}_\nu(0) = \overline{I}_\nu(0) = 1$ получаем

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,0} = A_{a+}^{\alpha,0} = B_{a+}^{\alpha,0} = C_{a+}^{\alpha,0} = D_{a+}^{\alpha,0} = E_{a+}^{\alpha,0,\gamma} = I_{a+}^{\alpha}. \tag{37.9}$$

Это позволяет нам операторы (37.1) — (37.6), а также (37.7) (с учетом, что $2\,\mathrm{sh}(\tau/2) \sim \tau$ при $\tau \to 0$) считать некоторыми обобщениями интегралов дробного порядка I_{a+}^{α}.

Исходя из представлений ядер указанных операторов через ряды и воспользовавшись формулой удвоения (1.61), несложно выписать следующие формулы, отражающие структуру операторов (37.1) — (37.4):

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{k!} \lambda^k I_{a+}^{\alpha+k} = I_{a+}^{\alpha}(E - \lambda I_{a+}^{1})^{-\beta}, \tag{37.10}$$

$$A_{a+}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/2)_k}{k!} (-\lambda^2)^k I_{a+}^{\alpha+2k} = I_{a+}^{\alpha}(E + \lambda^2 I_{a+}^{2})^{-\alpha/2}, \tag{37.11}$$

$$B_{a+}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_k \frac{(-\lambda^2)^k}{k!} I_{a+}^{\alpha+2k} = I_{a+}^{\alpha}(E + \lambda^2 I_{a+}^{2})^{-(\alpha+1)/2}, \tag{37.12}$$

$$C_{a+}^{\alpha,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)^k I_{a+}^{\alpha+k} = I_{a+}^{\alpha} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4} I_{a+}^{1}\right), \tag{37.13}$$

где E — единичный оператор. Суммы, стоящие в средней части этих формул, называются обобщенными рядами Неймана. Так как операторы I_{a+}^{k} ограничены в $L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$, $b < \infty$ (см. доказательство теоремы 2.6), то эти ряды можно просуммировать при $|\lambda| < \|I_{a+}^{1}\|_{L_p(a,b)}^{-1}$. После вычисления сумм указанное ограничение на λ и суммы в средней части можно опустить, так как операторы (37.1) — (37.4) по λ аналитичны. Аналогичный подход допустим и к операторам (37.5) — (37.7), а также к соответствующим правосторонним операторам, но в случае $b = +\infty$ при использовании обобщенных рядов Неймана нужно проявлять осторожность и учитывать асимптотику специальных функций из ядер на бесконечности.

Отметим также, что из формул (37.10), (10.58) вытекает интересное операторное соотношение

$$I_{a+}^{\alpha-\beta} e^{\lambda x} I_{a+}^{\beta} e^{-\lambda x} = I_{a+}^{\alpha}(E - \lambda I_{a+}^{1})^{-\beta}, \tag{37.14}$$

где $e^{\pm\lambda x}$ означает оператор умножения на функцию $e^{\pm\lambda x}$ (см. формулу после (18.77)).

На основе равенств (37.10) — (37.13) и полугруппового свойства (2.65) легко выписываются соотношения

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda} I_{a+}^{\gamma,\delta,\lambda} = I_{a+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\lambda}, \tag{37.15}$$

$$A_{a+}^{\alpha,\lambda} = I_{a+}^{\alpha/2,\alpha/2,i\lambda} I_{a+}^{\alpha/2,\alpha/2,-i\lambda}, \quad A_{a+}^{\alpha,\lambda} A_{a+}^{\gamma,\lambda} = A_{a+}^{\alpha+\gamma,\lambda}, \tag{37.16}$$

$$B_{a+}^{\alpha,\lambda} = I_{a+}^{\alpha/2,(\alpha+1)/2,i\lambda} I_{a+}^{\alpha/2,(\alpha+1)/2,-i\lambda}, \quad A_{a+}^{\alpha,\lambda} B_{a+}^{\gamma,\lambda} = B_{a+}^{\alpha+\gamma,\lambda}, \tag{37.17}$$

$$I_{a+}^{1} B_{a+}^{\alpha,\lambda} = A_{a+}^{(\alpha+1)/2,\lambda}, \quad C_{a+}^{\alpha,\lambda} C_{a+}^{\gamma,\delta} = C_{a+}^{\alpha+\gamma,\sqrt{\lambda^2+\delta^2}}, \tag{37.18}$$

$$C_{a+}^{\alpha,\lambda} C_{a+}^{\gamma,i\lambda} = I_{a+}^{\alpha+\gamma}, \quad C_{a+}^{\alpha,\lambda} I_{a+}^{\beta} = C_{a+}^{\alpha+\beta,\lambda}$$

и аналогичные формулы для правосторонних операторов.

Отмеченная в (37.9) связь с дробными интегралами дает возможность заключить, что операторы (37.1) — (37.7) обладают в $L_p(a, b)$ таким же действием, как и I_{a+}^{α}, т. е. справедлива

Теорема 37.1. *Операторы* (37.1) — (37.7) *ограниченно действуют из* $L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$, *на* $I^{\alpha}_{a+}[L_p(a, b)] \subset L_p(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

Доказательство непосредственно следует из свойств ${}_1F_1(\beta; \alpha; 0) = \bar{J}_{\nu}(0) = 1$, $2\,\mathrm{sh}(\tau/2) \sim \tau$ при $\tau \to 0$ и леммы 31.4.

Сопоставив формулы (37.1)—(37.7) с (1.122), легко заметить, что если $a=0$ или $a>0$, но функция $f(t)$ доопределена нулем на интервал $0<t<a$, то операторы (37.1)—(37.7) можно записать как свертки Лапласа (1.122). Тогда по теореме о свертке (1.123), вычислив преобразования Лапласа ядер по соответствующим формулам из справочников Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, формула 6.10(5)] и А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.12.8, случаи $I^{\nu+1}_{\nu}$, $I^{\nu+2}_{\nu}$, I^{0}_{ν}, 2.12.9.3 при $n=0$, 2.12.11.5], а также [1, 2.4.10.4], легко получить следующие значения преобразования Лапласа равенств (37.1)—(37.7):

$$(LI^{\alpha;\beta,\lambda}_{0+}f)(p) = p^{-\alpha}(1-\lambda p^{-1})^{-\beta}(Lf)(p), \ \operatorname{Re}\lambda > 0, \ \operatorname{Re}p > 0; \tag{37.19}$$

$$(LA^{\alpha;\lambda}_{0+}f)(p) = (p^2+\lambda^2)^{-\alpha/2}(Lf)(p), \ \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.20}$$

$$(LB^{\alpha;\lambda}_{0+}f)(p) = p(p^2+\lambda^2)^{-(\alpha+1)/2}(Lf)(p), \ \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.21}$$

$$(LC^{\alpha;\lambda}_{0+}f)(p) = p^{-\alpha}\exp[-\lambda^2/(4p)](Lf)(p), \ \operatorname{Re}p > 0; \tag{37.22}$$

$$(LD^{\alpha;\lambda}_{0+}f)(p) = \left(\frac{2}{p+\sqrt{p^2+\lambda^2}}\right)^{\alpha}(Lf)(p), \ \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.23}$$

$$(LE^{\alpha;\lambda,\gamma}_{0+}f)(p) = \left(\frac{2}{p+\sqrt{p^2+\lambda^2}}\right)^{\alpha-1}\frac{\exp[(p-\sqrt{p^2+\lambda^2})\gamma/2]}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} \times$$
$$\times (Lf)(p), \quad \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\lambda|; \tag{37.24}$$

$$(LS^{\alpha}_{0+}f)(p) = \frac{\Gamma(p+(1-\alpha)/2)}{\Gamma(p+(1+\alpha)/2)}(Lf)(p), \quad 2\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha - 1. \tag{37.25}$$

Сравнивая их правые части с правыми частями формул (37.10) — (37.13), можно заметить, что первые четыре формулы получаются из (37.10) — (37.13) заменой I^{1}_{a+} на p^{-1} (см. (7.14)).

Из равенств (37.19)—(37.25), как и ранее, несложно в дополнение к (37.15)—(37.18) получить операторные соотношения вида

$$E^{\alpha,\lambda,0}_{a+} = D^{\alpha-1,\lambda}_{a+}A^{1,\lambda}_{a+}, \quad D^{\alpha,\lambda}_{a+}D^{\beta,\lambda}_{a+} = D^{\alpha+\beta,\lambda}_{a+}, \tag{37.26}$$

$$E^{\alpha,\lambda,\gamma}_{a+}E^{\beta,\lambda,\delta}_{a+} = A^{1,\lambda}_{a+}E^{\alpha+\beta-1,\lambda,\gamma+\delta}_{a+}, \tag{37.27}$$

$$I^{\alpha+\beta}_{a+}S^{\gamma+1}_{a+} = I^{\alpha+1,1,-\gamma/2}_{a+}S^{\gamma-1}_{a+}I^{\beta+1,1,\gamma/2}_{a+}, \tag{37.28}$$

$$E^{\alpha,\lambda,\gamma}_{a+}D^{\beta,\lambda}_{a+} = E^{\alpha+\beta,\lambda,\gamma}_{a+}. \tag{37.29}$$

Рассмотрим теперь вопрос об обращении операторов (37.1) — (37.7). Как показывают формулы (37.19) —(37.25), преобразования Лапласа $(Lh)(p)$ ядер $h(x)$ (см. (1.119)) всех этих операторов и соответствующие им обратные величины $[(Lh)(p)]^{-1}$ имеют одинаковую форму, отличаясь лишь значениями параметров. В простейшем случае оператора дробного интегрирования I^{α}_{0+}, которому соответствует $(Lh)(p) = p^{-\alpha}$ с условием $\operatorname{Re}\alpha > 0$, для преобразования Лапласа p^{α} ядра обратного оператора D^{α}_{0+} условие $\operatorname{Re}\alpha > 0$ вынуждает нас представлять p^{α} в виде $p^{\alpha} = p^{n}p^{-(n-\alpha)}$, где $\operatorname{Re}(n-\alpha) > 0$, причем значению p^{n} соответствует оператор $\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} = D^{n}_{0+}$ (см. (1.124)). Подобные операции необходимо осуществлять и при обращении операторов (37.1) — (37.7).

Учтя сказанное, построим решение уравнения

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda}f)(x)=g(x),\quad a<x<b\leqslant\infty. \tag{37.30}$$

Пользуясь формулами (37.10), (10.58), (10.59), а также равенством из справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 6.3(7)], без затруднений формально приходим к следующим представлениям решения уравнения (37.30):

$$f(x)=\{(I_{a+}^{\alpha,\beta,\lambda})^{-1}g\}(x)=I_{a+}^{-\alpha}(E-\lambda I_{a+}^{1})^{\beta}g(x)=$$

$$=I_{a+}^{-l}I_{a+}^{l+m-\alpha}(E-\lambda I_{a+}^{1})^{\beta}I_{a+}^{-m}g(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}I_{a+}^{l+m-\alpha,-\beta,\lambda}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}g(x)=$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\int_a^x\frac{(x-t)^{l+m-\alpha-1}}{\Gamma(l+m-\alpha)}\,{}_1F_1(-\beta;\ l+m-\alpha;\ \lambda(x-t))\times$$

$$\times g^{(m)}(t)\,dt=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}R(x), \tag{37.31}$$

$$f(x)=e^{\lambda x}I_{a+}^{-\beta}e^{-\lambda x}I_{a+}^{\beta-\alpha}g(x), \tag{37.32}$$

$$f(x)=I_{a+}^{\beta-\alpha}e^{\lambda x}I_{a+}^{-\beta}e^{-\lambda x}g(x), \tag{37.33}$$

$$f(x)=e^{\lambda x}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}I_{a+}^{l+m-\alpha,\beta-\alpha,-\lambda}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}(e^{-\lambda x}g(x)). \tag{37.34}$$

Аналогичным образом, исходя из (37.20)—(37.25), формально выписываются следующие представления для обратных к (37.2)—(37.7) операторов:

$$f(x)=\{(A_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=(A_{a+}^{-\alpha,\lambda}g)(x)=$$

$$=(I_{a+}^{-2}+\lambda^2)^{l}A_{a+}^{2l+2m-\alpha,\lambda}(I_{a+}^{-2}+\lambda^2)^{m}g(x)=$$

$$=\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)^{l}\int_a^x\frac{(x-t)^{2l+2m-\alpha-1}}{\Gamma(2l+2m-\alpha)}\times$$

$$\times\bar{J}_{l+m-(\alpha+1)/2}(\lambda(x-t))\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda^2\right)^{m}g(t)\,dt, \tag{37.35}$$

$$\{(B_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=I_{a+}^{1}(A_{a+}^{-\alpha-1,\lambda}g)(x), \tag{37.36}$$

$$\{(C_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\int_a^x\frac{(x-t)^{l+m-\alpha-1}}{\Gamma(l+m-\alpha)}\times$$

$$\times\bar{I}_{l+m-\alpha-1}(\lambda\sqrt{x-t})\,g^{(m)}(t)\,dt, \tag{37.37}$$

$$\{(D_{a+}^{\alpha,\lambda})^{-1}g\}(x)=(D_{a+}^{-\alpha,\lambda}g)(x)=$$

$$=2^{k}\left[D_{a+}^{k-\alpha,\lambda}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}A_{a+}^{-j,\lambda}I_{a+}^{j-k}g\right](x),$$

$$k-1\leqslant\operatorname{Re}\alpha<k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{37.38}$$

$$\{(E_{a+}^{\alpha,\lambda,\gamma})^{-1}g\}(x)=(E_{a+}^{2-\alpha,\lambda,-\gamma}A_{a+}^{-2,\lambda}g)(x)=(E_{a+}^{k-\alpha+1,\lambda,-\gamma}D_{a+}^{-k,\lambda}\times$$

$$\times A_{a+}^{-2,\lambda} g)(x), \quad k-1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < k+1, \; k=1, 2, \ldots, \tag{37.39}$$

$$\{(S_{a+}^{\alpha})^{-1} g\}(x) = (S_{a+}^{-\alpha} g)(x) = \left[S_{a+}^{2k-\alpha} \left(I_{a+}^{-1} + \frac{\alpha+1}{2} - k \right)_k \times \right.$$

$$\left. \times \left(I_{a+}^{-1} + \frac{1-\alpha}{2} \right)_k g \right](x), \quad 2k-2 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < 2k, \; k=1, 2, \ldots \tag{37.40}$$

Для обоснования этих формул обращения обозначим через $R(x)$ интегральные операторы, стоящие под знаками $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^l$ в формулах (37.31), (37.34), (37.37) и под знаками $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right)^l$ в формулах (37.35), (37.36). Тогда условия обратимости операторов (37.1) — (37.7) можно свести в одну общую теорему.

Теорема 37.2. *Пусть задано уравнение* $[h*f](x) = g(x)$, $0 \leqslant a < x < b < \infty$, *см.* (*1.122*), *где* h — *один из операторов* (*37.1*) — (*37.7*), $\operatorname{Re}\alpha > 0$, g — *заданная на* $[a, b]$, *а* f — *искомая функции* (*в случае* $a > 0$ *полагается, что* $f(x) = g(x) = 0$ *при* $0 < x < a$). *Тогда его решение* $f = h^{-1}g$ *в классе* $f \in L_p(a, b)$, $b < \infty$, *существует и единственно, если* $g(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b))$, $p \geqslant 1$. *В случае* $p = 1$ *оно может быть представлено соответствующими формулами* (*37.31*) — (*37.40*), *если еще выполняются дополнительные условия:*

1) *для формулы* (*37.31*) *при* $0 < \operatorname{Re}\alpha < l + m$, $l, m = 1, 2, \ldots$, $g \in AC^m([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(m-1)}(a) = 0$, $R \in AC^l([a, b])$, $R(a) = R'(a) = \ldots = R^{(l-1)}(a) = 0$; *если лишь* $g \in AC^m$ (*или* $R \in AC^l$), *то* $l = 0$ ($m = 0$);

2) *для* (*37.32*): $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\operatorname{Re}\beta > 0$ *или* $\operatorname{Re}\beta < 0$, *но* $g(x)$ *представима в виде* $g(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta}\psi)(x)$, $\psi(x) \in L_p(a, b)$;

3) *для* (*37.33*): $1 \leqslant p < \infty$ и $\operatorname{Re}(\alpha - \beta) > 0$ *или* $\operatorname{Re}(\alpha - \beta) < 0$, *но* $g(x) = (I_{a+}^{\beta}\psi)(x)$, $\psi(x) \in L_p(a, b)$;

4) *для формул* (*37.34*) — (*37.37*) *условия аналогичны указанным в 1*);

5) *для* (*37.38*): $0 < \operatorname{Re}\alpha < k$, $g \in AC^{k+2}([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(k+1)}(a) = 0$;

6) *для* (*37.39*): $0 < \operatorname{Re}\alpha < k+1$, $g \in AC^{k+5}([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(k+4)}(a) = 0$;

7) *для* (*37.40*): $0 < \operatorname{Re}\alpha < 2k$, $g \in AC^{2k}([a, b])$, $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(2k-1)}(a) = 0$.

Доказательство следует из существования, единственности и совпадения соответствующих преобразований Лапласа уравнений и их обращений, а также из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций g и f. Условие $g \in I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b))$ получается на основе теоремы 31.13, а условия 2) и 3) — из теоремы 10.9 с учетом того, что для существования соответствующих дробных производных условие $g \in I_{a+}^{\alpha}(L_p(a, b))$ в последних подслучаях из 2) и 3) должно быть заменено на более жесткое требование $g \in I_{a+}^{\alpha-\beta}[L_p(a, b)]$ или $g \in I_{a+}^{\beta}[L_p(a, b)]$. Ограничения типа $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(m-1)}(a) = 0$ обеспечивают исчезновение внеинтегральных слагаемых при использовании формулы (1.124). Теорема доказана.

Замечание 37.1. Замена λ на $i\lambda$ во всех формулах этого пункта, относящихся к операторам (37.2) — (37.6), в силу равенства (37.8) эквивалентна перемене функций $\bar{I}_\nu$ и $\bar{J}_\nu$ местами.

Замечание 37.2. Совершив во всех формулах этого пункта операцию отражения, т. е. замены типа x на $a+b-x$ и соответствующие замены в функциях f и g, несложно выписать соответствующие формулы и результаты, относящиеся к правосторонним операторам $I_{b-}^{\alpha,\beta,-\lambda}$, $A_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $B_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $C_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $D_{b-}^{\alpha,\lambda}$, $E_{b-}^{\alpha,\lambda,\gamma}$, S_{b-}^{α} в случае $b<\infty$. Если же $b=\infty$, то такие результаты будут, вообще говоря, сохранять силу при более жестких ограничениях.

2°. **Обобщенные операторы преобразований Ханкеля и Эрдейи—Кобера.** При исследовании некоторых типов парных интегральных уравнений в § 38 используются рассматриваемые здесь обобщенные операторы преобразований Ханкеля и Эрдейи—Кобера. Обобщенные операторы Эрдейи—Кобера лишь весовыми множителями отличаются от операторов

$$\int_0^x (x^2-t^2)^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\,\varphi(t)\,dt=\psi(x),\quad \operatorname{Re}\nu>-1, \tag{37.41}$$

$$\int_x^\infty (t^2-x^2)^{\nu/2} J_\nu(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\,\varphi(t)\,dt=\psi(x),\quad \operatorname{Re}\nu>-1, \tag{37.42}$$

которые в свою очередь получаются из операторов $C_{0+}^{\alpha,\lambda}$, $C_{-}^{\alpha,\lambda}$ (см. (37.4) и текст далее) заменами $\alpha=\nu+1$, $2^{\nu+1}tf(t^2)=\lambda^\nu\varphi(t)$ и x на x^2. С помощью этих замен из теоремы 37.2, формулы (37.37) и замечания 37.2 при условиях $\lambda>0$, $-1<\operatorname{Re}\nu<0$, $\psi\in AC([0,b])$ (и $\psi(x)=O(e^{-\lambda x}x^{\nu-1/2-\varepsilon})$ при $x\to\infty$, $\varepsilon>0$ для (37.42)) следует, что уравнения (37.41) и (37.42) обращаются по формулам

$$\varphi(x)=\lambda\frac{d}{dx}\int_0^x t(x^2-t^2)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})\,\psi(t)\,dt, \tag{37.43}$$

$$\varphi(x)=-\lambda\frac{d}{dx}\int_x^\infty t(t^2-x^2)^{-(\nu+1)/2} I_{-\nu-1}(\lambda\sqrt{t^2-x^2})\,\psi(t)\,dt \tag{37.44}$$

соответственно. Если в соотношениях (37.41)—(37.44) поменять местами символы I_ν и J_ν (что эквивалентно изменению λ на $i\lambda$), то (37.41), (37.43) останутся в силе при прежних условиях, а условия на (37.42), (37.44) изменятся, поскольку интеграл (37.42) должен быть сходящимся, а функция $I_\nu(z)$ в ядре на бесконечности имеет экспоненциальный рост.

На основе формул (37.41), (37.42) введем следующие *обобщенные операторы Эрдейи—Кобера:*

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{-2\alpha-2\eta}\int_0^x t^{2\eta+1}(x^2-t^2)^{(\alpha-1)/2}\times$$
$$\times J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x^2-t^2})f(t)\,dt, \tag{37.45}$$

$$R_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{2\eta}\int_x^\infty t^{1-2\alpha-2\eta}(t^2-x^2)^{(\alpha-1)/2}\times$$
$$\times J_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t^2-x^2})f(t)\,dt, \tag{37.46}$$

где $\alpha>0$, $\eta>-1/2$. Операторы $J_{i\lambda}(\eta,\alpha)$ и $R_{i\lambda}(\eta,\alpha)$ определим через правые части (37.45), (37.46), в которых заменим $J_{\alpha-1}$ на $I_{\alpha-1}$.

Обобщенный оператор преобразования Ханкеля зададим формулой

$$S\begin{pmatrix} a, & b, & y\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix}f(x)=2^\alpha x^{2\sigma-\alpha}(x^2-a^2)^{-\sigma}\times$$
$$\times\int_y^\infty \tau^{1-\alpha-2\sigma}(\tau^2-y^2)^\sigma J_{2\eta+\alpha}(\sqrt{(x^2-a^2)(\tau^2-b^2)})f(\tau)\,d\tau. \tag{37.47}$$

Очевидно, что он связан с оператором $S_{\eta,\alpha,2}$ (18.19) соотношением

$$S\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ \eta, & \alpha, & 0\end{pmatrix}=S_{\eta,\alpha,2}. \tag{37.48}$$

Приведем формально (без указаний классов функций) некоторые *свойства введенных операторов*. Эти свойства, как обычно, можно проверить на достаточно хороших функциях прямыми вычислениями, а затем они распространяются на функции из L_p.

1. Очевидно, что в пределе при $\lambda\to 0$ операторы (37.45), (37.46) совпадают с операторами Эрдейи—Кобера (18.8):

$$J_0(\eta,\ \alpha)=I_{\eta,\alpha},\quad R_0(\eta,\ \alpha)=K_{\eta,\alpha}. \tag{37.49}$$

2. На основе (18.11) имеем

$$J_0(\eta,\ 0)=E,\quad R_0(\eta,\ 0)=E. \tag{37.50}$$

3. Из определений (37.45), (37.46) следуют формулы сдвига

$$J_\lambda(\eta,\ \alpha)x^{2\beta}f(x)=x^{2\beta}J_\lambda(\eta+\beta,\ \alpha)f(x), \tag{37.51}$$

$$R_\lambda(\eta,\ \alpha)x^{2\beta}f(x)=x^{2\beta}R_\lambda(\eta-\beta,\ \alpha)f(x). \tag{37.52}$$

4. Путем вычисления соответствующих повторных интегралов с помощью формулы 2.15.35.2 (при $b^2+c^2=1$) из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2] несложно при $\alpha>0$, $\beta>0$ установить справедливость равенств

$$J_{i\lambda}(\eta+\alpha,\ \beta)J_\lambda(\eta,\ \alpha)=J_\lambda(\eta+\alpha,\ \beta)J_{i\lambda}(\eta,\ \alpha)=I_{\eta,\alpha+\beta}. \tag{37.53}$$

$$R_{i\lambda}(\eta,\ \alpha)R_\lambda(\eta+\alpha,\ \beta)=R_\lambda(\eta,\ \alpha)R_{i\lambda}(\eta+\alpha,\ \beta)=K_{\eta,\alpha+\beta}, \tag{37.54}$$

см. (37.18).

5. Из последних равенств, воспользовавшись свойством (37.50), можно определить операторы $J_\lambda(\eta,\ \alpha)$ и $R_\lambda(\eta,\ \alpha)$ при $\alpha<0$ как решения соответствующих интегральных уравнений, см. § 18, п. 1°, а именно

$$J_\lambda(\eta,\ \alpha)f(x)=x^{-2\alpha-2\eta}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n x^{2n+2\alpha-2\eta}J_\lambda(\eta,\ \alpha+n)f(x), \tag{37.55}$$

$$R_\lambda(\eta,\ \alpha)f(x)=x^{2\eta}\left(-\frac{d}{2xdx}\right)^n x^{2n-2\eta}R_\lambda(\eta-n,\ \alpha+n)f(x), \tag{37.56}$$

где $-n<\alpha<0$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ Отсюда следуют соотношения

$$J_{i\lambda}^{-1}(\eta,\ \alpha)=J_\lambda(\eta+\alpha,\ -\alpha),\quad J_\lambda^{-1}(\eta,\ \alpha)=J_{i\lambda}(\eta+\alpha,\ -\alpha), \tag{37.57}$$

$$R_{i\lambda}^{-1}(\eta,\ \alpha)=R_\lambda(\eta+\alpha,\ -\alpha),\quad R_\lambda^{-1}(\eta,\ \alpha)=R_{i\lambda}(\eta+\alpha,\ -\alpha). \tag{37.58}$$

6. Для операторов (37.45), (37.46) имеет место следующий аналог формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^\infty xf(x)J_\lambda(\eta,\ \alpha)g(x)\,dx=\int_0^\infty xg(x)R_\lambda(\eta,\ \alpha)f(x)\,dx. \tag{37.59}$$

7. Путем вычисления композиций операторов с помощью равенств 2.12.35.2,6 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2] устанавливаются следующие операторные соотношения, связывающие операторы (37.45)—(37.47):

$$J_{i\lambda}(\eta+\alpha,\ \beta)S\begin{pmatrix}0, & 0, & \lambda\\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}0, & \lambda, & \lambda\\ \eta, & \alpha+\beta, & \sigma-\eta-(\alpha+\beta)/2\end{pmatrix}, \tag{37.60}$$

$$R_\lambda(\eta, \alpha)S\begin{pmatrix}0, & 0, & \lambda \\ \eta+\alpha, & \beta, & \sigma\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}0, & \lambda, & \lambda \\ \eta, & \alpha+\beta, & \sigma+\eta+(\alpha+\beta)/2\end{pmatrix}, \tag{37.61}$$

$$S\begin{pmatrix}0, & \lambda, & \lambda \\ \eta+\alpha, & \beta, & \sigma\end{pmatrix} S\begin{pmatrix}\lambda, & 0, & 0 \\ \eta, & \alpha, & \sigma-\eta-\alpha/2\end{pmatrix} = J_\lambda(\eta, \alpha+\beta), \tag{37.62}$$

$$S\begin{pmatrix}0, & 0, & 0 \\ \eta, & \alpha, & 0\end{pmatrix} S\begin{pmatrix}\lambda, & 0, & 0 \\ \eta+\alpha, & \beta, & \eta+\alpha+\beta/2\end{pmatrix} = R_{i\lambda}(\eta, \alpha+\beta). \tag{37.63}$$

8. Используя формулу (37.62) при $\alpha+\beta=0$, можно получить, что уравнение

$$S\begin{pmatrix}0, & y, & y \\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix} f(x) = g(x) \tag{37.64}$$

имеет решение

$$f(x) = S\begin{pmatrix}y, & 0, & 0 \\ \eta+\alpha, & -\alpha, & \sigma\end{pmatrix} g(x), \tag{37.65}$$

откуда следует операторное соотношение

$$S^{-1}\begin{pmatrix}0, & y, & y \\ \eta, & \alpha, & \sigma\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}y, & 0, & 0 \\ \eta+\alpha, & -\alpha, & \sigma\end{pmatrix}. \tag{37.66}$$

3°. **Несверточные операторы с функциями Бесселя в ядрах.** В этом пункте рассмотрим следующие два несверточных оператора с функциями Бесселя в ядрах:

$$(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t(x-t)})\, f(t)\, dt, \tag{37.67}$$

$$(\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda}f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{I}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x(x-t)})\, f(t)\, dt, \tag{37.68}$$

где $\bar{J}_\nu(z)$, $\bar{I}_\nu(z)$ — функции Бесселя — Клиффорда (37.8). Кроме этих, в дальнейшем будут встречаться операторы, отличающиеся от (37.67), (37.68) заменой соответственно символов $\bar{J}$ на $\bar{I}$ и $\bar{I}$ на $\bar{J}$. Эти операторы будем обозначать через $\bar{I}^{+}_{\alpha,\lambda}$ и $\bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda}$. Очевидно,

$$\bar{I}^{+}_{\alpha,\lambda} = \bar{J}^{+}_{\alpha,i\lambda}, \quad \bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda} = \bar{I}^{-}_{\alpha,i\lambda}. \tag{37.69}$$

Все указанные операторы при $\lambda=0$ совпадают с дробным интегралом:

$$\bar{J}^{+}_{\alpha,0} = \bar{I}^{+}_{\alpha,0} = \bar{J}^{-}_{\alpha,0} = \bar{I}^{-}_{\alpha,0} = I^{\alpha}_{0+}, \tag{37.70}$$

а при остальных значениях λ также тесно с ним связаны, представляя собой композиции операторов $\bar{J}^{\pm}_{1,\lambda}$ (или $\bar{I}^{\pm}_{1,\lambda}$) с $I^{\alpha-1}_{0+}$, вычисленные в том или ином порядке. Эти свойства вытекают из следующей теоремы.

Теорема 37.3. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$ *и* $f\in L_p(0, b)$, $b<\infty$, $p\geqslant 1$. *Тогда операторы* (*37.67*), (*37.68*) *определены и действуют ограниченно на пространство* $I^{\alpha}_{0+}[L_p(0, b)]$. *Если еще* $\operatorname{Re}\beta>0$, *то имеют место следующие композиционные соотношения:*

$$I^{\beta}_{0+}(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f)(x) = (\bar{J}^{+}_{\alpha+\beta,\lambda}f)(x), \tag{37.71}$$

$$(\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda} I^{\beta}_{0+}f)(x) = (\bar{I}^{-}_{\alpha+\beta,\lambda}f)(x). \tag{37.72}$$

Доказательство. Первое утверждение является прямым следствием леммы 31.4. Доказательство формул (37.71), (37.72) осуществляется непосредственным вычислением. Проверим, например, справедливость равенства (37.72):

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \bar{I}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x(x-t)})\,dt \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^x \frac{f(\tau)\,d\tau}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_\tau^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\bar{I}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x(x-t)})\,dt.$$

Совершив теперь замену $t=x+(\tau-x)\theta^2$, приняв во внимание (37.8) и формулу 2.15.2.6 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2], легко получим значение внутреннего интеграла и далее правую часть формулы (37.72).

Важно отметить, что формулы (37.71), (37.72) дают возможность доопределить операторы $\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}$, $\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda}$ на случай отрицательных значений α способом, который использовался в § 18, п. 1° и при определении (37.55), (37.56). А именно положим

$$(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (\bar{J}^{+}_{\alpha+n,\lambda}f)(x), \tag{37.73}$$

$$(\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda}f)(x) = (\bar{I}^{-}_{\alpha+n,\lambda}f^{(n)})(x), \quad -n<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 1-n,\ n=1,\,2,\,\ldots \tag{37.74}$$

Заметим также, что из (37.71), (37.72) следуют представления

$$(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f)(x) = I^{\alpha-1}_{0+}(\bar{J}^{+}_{1,\lambda}f)(x), \tag{37.75}$$

$$(\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda}f)(x) = (\bar{I}^{-}_{1,\lambda}I^{\alpha-1}_{0+}f)(x), \tag{37.76}$$

которые отражают важную роль операторов $\bar{J}^{+}_{1,\lambda}$ и $\bar{I}^{-}_{1,\lambda}$ при изучении операторов (37.67), (37.68) с произвольным α. Условия справедливости формул (37.73) — (37.76) содержат следующие теоремы.

Теорема 37.4. *Пусть* $f\in AC^{(n-1)}([0,\,b])$, $n=1+[-\operatorname{Re}\alpha]$, $\operatorname{Re}\alpha<0$. *Тогда операторы (37.73), (37.74) определены.*

Теорема 37.5. *Пусть* $f\in L_p(0,\,b)$, $b<\infty$, $p\geqslant 1$. *Тогда формула (37.75) справедлива при* $\operatorname{Re}\alpha>0$, *а формула (37.76) при* $\operatorname{Re}\alpha>1$ *или при* $0<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 1$, *если еще* $f\in I^{1-\alpha}_{0+}[L_p(0,\,b)]$.

Доказательства обеих теорем очевидны и следуют из отмеченной связи поведения операторов (37.67), (37.68) с дробным интегралом.

Рассмотрим теперь вопрос об обращении операторов (37.67), (37.68). Как следует из (37.75), (37.76), дело сводится к проблеме обращения операторов $\bar{J}^{+}_{1,\lambda}$ и $\bar{I}^{-}_{1,\lambda}$. Для решения этой задачи докажем вспомогательную лемму.

Лемма 37.1. *Имеет место следующее тождество:*

$$\int_t^x \tau\frac{\partial}{\partial\tau}J_0(\lambda\sqrt{t(\tau-t)})\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau =$$

$$= x\frac{\partial}{\partial x}J_0(\lambda\sqrt{t(x-t)}) - t\frac{\partial}{\partial t}I_0(\lambda\sqrt{x(x-t)}). \tag{37.77}$$

Доказательство. Обозначим левую часть (37.77) через A и разложим подынтегральные функции Бесселя в ряды с суммированием по k и l соответственно. Продифференцировав эти ряды по τ, а затем заменив l на $k-m$, $0\leqslant m\leqslant k$, получим

$$A = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{k-1}\frac{(-1)^m m(\lambda^2 t/4)^m (k-m)(\lambda^2 x/4)^{k-m}}{(m!)^2((k-m)!)^2}\times$$
$$\times\int_t^x \tau(\tau-t)^{m-1}(x-\tau)^{k-m-1}d\tau.$$

Внутренний интеграл вычислим по формуле 2.2.6.11 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1], что приведет к значению

$$A = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k!)^2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2k}\sum_{m=1}^{k-1}\binom{k}{m}(-1)^m t^m x^{k-m}(tk+(x-t)m).$$

Конечная сумма, как следует из равенств 4.2.3.1 и 4.2.3.18 указанного справочника, равна $-tkx^k-kx(-t)^k$, что легко приводит к правой части формулы (37.77). Лемма доказана.

Теорема 37.6. *Пусть $F(x)\in AC([0, b])$. Тогда уравнение*

$$\frac{d}{dx}(\bar{J}^{+}_{1,\lambda}f)(x) = f(x) +$$
$$+\int_0^x f(t)\frac{\partial}{\partial x}J_0(\lambda\sqrt{t(x-t)})\,dt = F(x) \qquad (37.78)$$

имеет единственное решение вида

$$f(x) = x^{-1}\bar{I}^{-}_{1,\lambda}(xF(x))' =$$
$$= F(x) - x^{-1}\int_0^x F(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau. \qquad (37.79)$$

Доказательство. Заменив в (37.78) x на τ, умножим обе части этого уравнения на $\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})$, а затем проинтегрируем по τ в пределах от 0 до x:

$$\int_0^x f(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau + \int_0^x \tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau\times$$
$$\times\int_0^\tau f(t)\frac{\partial}{\partial\tau}J_0(\lambda\sqrt{t(\tau-t)})\,dt = \int_0^x F(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau.$$

Во втором слагаемом поменяем порядок интегрирования и применим лемму 37.1 для вычисления внутреннего интеграла, что после сокращения приведет к равенству

$$x\int_0^x f(t)\frac{\partial}{\partial x}J_0(\lambda\sqrt{t(x-t)})\,dt = \int_0^x F(\tau)\tau\frac{\partial}{\partial\tau}I_0(\lambda\sqrt{x(x-\tau)})\,d\tau. \qquad (37.80)$$

Вычтем теперь из уравнения (37.78) равенство (37.80) и легко получим формулу (37.79). При указанных условиях на функцию $F(x)$ проведенные операции законны. Теорема доказана.

Теорема 37.7. *Пусть* $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$, $g\in I^{\alpha}_{0+}[L_1(0, b)]$ *и* $g(0)=0$. *Тогда оператор, обратный к (37.67), существует и представим в любой из следующих форм:*

$$(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda})^{-1} g(x) = x^{-1} \int_0^x I_0(\lambda \sqrt{x(x-t)})\, d\,[t\,(I^{-\alpha}_{0+}g)(t)], \tag{37.81}$$

$$(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda})^{-1} g(x) = x^{-1}(\bar{I}^{-}_{1-\alpha,\lambda}\varphi)(x), \quad \varphi(x) = xg'(x) + (1-\alpha)\, g(x). \tag{37.82}$$

Доказательство. Формула (37.81) прямо следует из равенств (37.75), (37.78), (37.79), примененных к уравнению $(\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f)(x) = g(x)$. Для вывода представления (37.82) введем обозначение

$$\frac{d}{dt}[t\,(I^{-\alpha}_{0+}g)(t)] = (I^{-\alpha}_{0+}\varphi)(x) \tag{37.83}$$

и применим к равенству (37.81) формулу (37.76). Тогда правая часть его примет вид $x^{-1}(\bar{I}^{-}_{1-\alpha,\lambda}\varphi)(x)$. Докажем, что $\varphi(x) = xg'(x) + (1-\alpha)\, g(x)$, откуда будет следовать представление (37.82). Для этого перепишем (37.83) в форме $\varphi(x) = I^{\alpha-1}_{0+}\, x^{1-\alpha} x^{\alpha} I^{-\alpha}_{0+} g(x)$ и применим равенство (10.12), предполагая $g(x)$ достаточно гладкой:

$$\varphi(x) = x^{\alpha} I^{-\alpha}_{0+} I^{\alpha-1}_{0+}\, x^{1-\alpha} g(x) =$$
$$= x^{\alpha}\frac{d}{dx}(x^{1-\alpha} g(x)) = (1-\alpha)\, g(x) + xg'(x). \tag{37.84}$$

Последнее равенство, очевидно, можно распространить и на функцию $g(x) \in AC([0,\ b])$. Все проведенные операции законны, если еще $g(0) = 0$ и $g(x) \in I^{\alpha}_{0+}(L_1(0,\ b))$. Теорема доказана.

Теорема 37.8. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, $x^{-1}h(x) \in L_1(0,\ b)$ *и* $h(x) \in I^{\alpha}_{0+}(L_1(0,\ b))$. *Тогда оператор, обратный к (37.68), существует и представим в виде*

$$f(x) = x^{1-\alpha}\frac{d}{dx}[x^{\alpha}\, \bar{J}^{+}_{1-\alpha,\lambda} x^{-1} h(x)]. \tag{37.85}$$

Доказательство немедленно следует из формул (37.67), (37.68), (37.81) и теоремы 37.7 после замен $x^{\alpha}(x^{1-\alpha} g(x))'$ на $f(x)$, $xf(x)$ на $h(x)$ и α на $1-\alpha$. Условия на $h(x)$ обеспечивают существование оператора (37.85) и его представимость в виде (37.68).

4°. Уравнения композиционного типа. При решении задач математической физики иногда встречаются интегральные операторы 1-го рода с вольтерровскими ядрами, представляющие собой композиции более простых, обратимых в явном виде операторов. Характерные примеры таких уравнений композиционного типа рассматриваются в настоящем пункте.

А. Если в решении (40.28) гиперболического уравнения (40.19) положить $x=y$, обозначить $u(y,\ y)=\varphi(2y)$ и совершить замены

$$(1+\theta)\, y = t, \quad 2y = x, \quad \tau(t)\, t^{\mu+p-1} = f(t),$$
$$\frac{1}{l_3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1-\mu-2p}\varphi(x) = g(x)\, \Gamma(p), \tag{37.86}$$

придем к интегральному соотношению

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)}\, \Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{x-t}{2x},\ \frac{\lambda^2 t(x-t)}{4}\right) f(t)\, dt = g(x), \tag{37.87}$$

содержащему в ядре функцию Гумберта (40.25).

К формуле обращения этого соотношения можно прийти двумя способами: рассмотрев решение другой краевой задачи для соответствующего гиперболического уравнения (40.19) или же изучив структуру оператора (37.87). Продемонстрируем оба способа. При использовании первого рассмотрим 2-ю краевую задачу Коши—Гурса с условиями

$$u(x,\ x) = \varphi(2x), \quad u_y'(x,\ 0) = 0 \tag{37.88}$$

для уравнения (40.19). (Напомним, что при значении постоянной (40.31) функция (40.28) удовлетворяет условию задачи Коши $u_y'(x,\ 0)=0$ для этого уравнения.) В соответствии с работами М. Б. Капилевича [1, (5.1), (5.3)] и А. М. Гордеева [1] решение 2-й задачи Коши—Гурса принимает вид

$$u(x,\ y) = \int_0^{x-y} [\varphi'(t) + (\mu+p)t^{-1}\varphi(t)]\,\overline{H}(x,\ y;\ t/2,\ t/2)\,dt +$$

$$+ \int_{x-y}^{x+y} [\varphi'(t) + 2^{-1}(\mu+p)\,\varphi(t)]\,R(x,\ y;\ t/2,\ t/2)\,dt, \tag{37.89}$$

где $\overline{H}$ и R — соответственно функции Грина—Адамара и Римана для уравнения (40.19). Их явные выражения через тройные ряды указаны в статье М. Б. Капилевича [3, с. 1481]. Положим в (37.89) $y=0$ и учтем условие $u(x,\ 0)=\tau(x)$, что приведет к равенству

$$\tau(x) = \int_0^x [\varphi'(t) + (\mu+p)t^{-1}\varphi(t)]\,\overline{H}(x,\ 0;\ t/2,\ t/2)\,dt. \tag{37.90}$$

Значение ядра этого равенства легко получить из формулы (5.31a) статьи М. Б. Капилевича [1]:

$$\overline{H}(x,\ 0,\ \eta,\ \eta) = \bar{\varkappa}2^{2p}x^{-\mu}\eta^{\mu+2p}R_1^{-2p}\Xi_2\Big(\mu,\ 1-\mu;\ 1-p;$$

$$-\frac{R_1^2}{2x\eta},\ -\frac{\lambda^2R_1^2}{4}\Big), \quad \bar{\varkappa} = \frac{2^{1-2p}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-p)\,\Gamma(p+1/2)}, \quad R_1^2 = x(x-2\eta), \quad p<1. \tag{37.91}$$

Подставив (37.91) в (37.90) и совершив замены (37.86), придем к равенству

$$f(x) = 2^{2p-1}l_3\bar{\varkappa}\Gamma(p)\,x^{-1}\int_0^x [(g(t)\,t^{1-2p-\mu})_t' + (\mu+p)\,t^{-1}g(t)\,t^{1-\mu-2p}]\times$$

$$\times(x-t)^{-p}t^{\mu+2p}\Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ 1-p;\ \frac{t-x}{2t},\ \frac{\lambda^2x}{4}(t-x)\right)dt.$$

Отсюда, учтя величины $\bar{\varkappa}$, l_3 (из (40.31)) и продифференцировав по t, окончательно найдем формулу обращения уравнения (37.87) вида

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^p\frac{(x-t)^{-p}}{\Gamma(1-p)}\,\Xi_2\Big(\mu,\ 1-\mu;\ 1-p;\ \frac{t-x}{2t},$$

$$\frac{\lambda^2x}{4}(t-x)\Big)\,d\,(t^{1-p}g(t)), \quad 0<p<1. \tag{37.92}$$

Функции g и f в этих формулах естественно полагать такими, чтобы интегралы в них существовали, для чего достаточно условий $t^{\mu+1}g(t)\to 0$, $t^{2-\mu}g(t)\to 0$, $tf(t)\to 0$ при $t\to 0$ и условия $g\in AC^1([0,\ b])$.

Тот факт, что (37.92) действительно обращает уравнение (37.87), следует из теорем единственности решений исходных задач Коши и 2-й задачи Коши—Гурса для уравнения (40.19) при $\lambda=ib$, $b>0$.

Полученный результат в частных случаях совпадает с известными формулами обращения.

1. Если $\lambda=0$, то выражения (37.87), (37.92) в соответствии с (40.25), (1.80) перепишутся в виде

$$\int_0^x (x^2-t^2)^{(p-1)/2} P_{-\mu}^{1-p}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt = g(x), \tag{37.93}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^p (x^2-t^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{x}{t}\right) d\left(t^{1-p} g(t)\right). \tag{37.94}$$

Последнее можно также записать, вынеся производную за знак интеграла:

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 \eta^p (1-\eta^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{1}{\eta}\right) \frac{x}{\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(g(x\eta)\,x^{1-p}\right)\eta^{1-p}d\eta =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^1 g(x\eta)\,x^{1-p}(1-\eta^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x (x^2-t^2)^{-p/2} P_{-\mu}^{p}\left(\frac{x}{t}\right) g(t)\,dt. \tag{37.95}$$

Соотношения (37.93), (37.95) являются частными случаями (при $e=0$ и $n=1$) равенств (35.16), (35.31).

2. Если $\lambda=\mu=0$, то (37.87), (37.92) переходят во взаимно обратные формулы $(I_{0+}^p f)(x) = g(x)$ и $f(x) = \dfrac{d}{dx} I_{0+}^{1-p} g(x)$.

3. Если $\mu=0$, то (37.87), (37.92), согласно (40.25), (37.8), переписываются в форме соотношений $(\bar{I}_{p,\lambda}^{+} f)(x) = g(x)$ и $f(x) = x^{-1}(\bar{J}_{1-p,\lambda}^{-}\varphi_1)(x)$, где $\varphi_1(x) = xg'(x) + (1-p)\,g(x)$, ср. с (37.67), (37.82), (37.69).

Рассмотрим структуру оператора (37.87). Для этого вычислим композицию, предполагая $\operatorname{Re} p>0$ и учитывая обозначение (18.41):

$$I_{0+;x^2}^p x^{-1}(\bar{I}_{\alpha,\lambda}^{+} f)(x) = \int_0^x \frac{(x^2-y^2)^{p-1}}{\Gamma(p)}\frac{2y}{y}\,dy\int_0^y \frac{(y-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times \bar{I}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t(y-t)}\right) f(t)\,dt = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^k \frac{2}{(\alpha)_k\,k!}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^x \frac{f(t)\,t^k dt}{\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha)}\right]\int_t^x (x^2-y^2)^{p-1}(y-t)^{k+\alpha-1}\,dy =$$

$$= [\Sigma\ldots](x-t)^{p+k+\alpha-1}(x+t)^{p-1}\int_0^1 (1-\tau)^{p-1}\tau^{k+\alpha-1}\left(1-\frac{t-x}{t+x}\tau\right)^{p-1}d\tau =$$

$$= [\Sigma\ldots](x-t)^{p+k+\alpha-1}(x+t)^{p-1}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(p+\alpha+k)}\times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(1-p,\ \alpha+k;\ p+\alpha+k;\ \frac{t-x}{t+x}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2}{4} \right)^k \frac{2(2x)^{p-1}}{k!\,\Gamma(p+\alpha+k)} \int_0^x f(t)\, t^k (x-t)^{p+k+\alpha-1} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(1-p,\ p;\ p+\alpha+k;\ \frac{x-t}{2x}\right) dt = 2(2x)^{p-1} \int_0^x \frac{(x-t)^{p+\alpha-1}}{\Gamma(p+\alpha)} \times$$

$$\times\, \Xi_2\left(p,\ 1-p;\ p+\alpha;\ \frac{x-t}{2x},\ \frac{\lambda^2}{4}\, t(x-t)\right) f(t)\, dt. \qquad (37.96)$$

Таким образом, мы пришли к оператору, отличающемуся от (37.87) лишь заменой параметров. Отсюда следует представление (37.87) в виде

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}}{\Gamma(p)}\, \Xi_2\left(\mu,\ 1-\mu;\ p;\ \frac{x-t}{2x},\ \frac{\lambda^2 t}{4}(x-t)\right) f(t)\, dt =$$

$$= (2x)^{1-\mu} I^{\mu}_{0+;x^2} (2x)^{-1} (\bar{I}^{+}_{p-\mu,\lambda} f)(x), \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \mu > 0. \qquad (37.97)$$

В частности, из (37.97) при $\lambda=0$ получаем следующее разложение оператора (37.93) через композицию:

$$\int_0^x (x^2-t^2)^{(p-1)/2} P^{1-p}_{-\mu}\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = (2x)^{1-\mu} I^{\mu}_{0+;x^2} (2x)^{-1} I^{p-\mu}_{0+} f(x). \qquad (37.98)$$

Эта формула согласуется с (35.16), (35.30), если учесть операторное равенство $I^{-1}_{0+;x^2} I^{1}_{0+} = (2x)^{-1}$.

Проведенные рассуждения позволяют сформулировать теорему.

Теорема 37.9. *Пусть* $\operatorname{Re} p > 0$, $g(x) \in AC^1([0,\ b))$, $b < \infty$, *и* $t^{\mu+1} g(t) \to 0$, $t^{2-\mu} g(t) \to 0$ *при* $t \to 0$. *Тогда уравнение* (*37.87*) *в классе функций* $f(x) \in AC((0,\ b))$, $b < \infty$, *для которых* $tf(t) \to 0$ *при* $t \to 0$, *обратимо по формуле* (*37.92*).

Отметим еще, что с помощью формулы (37.82) решение уравнения (37.87) при соответствующих условиях представимо в виде композиции

$$f(x) = x^{-1} (\bar{J}^{-}_{1+\mu-p,\lambda} \varphi)(x), \quad \varphi(x) = 2^{\mu} x^{p-\mu} \frac{d}{dx} [x^{2+\mu-p} I^{-\mu}_{0+;x^2} x^{\mu-1} g(x)].$$
$$(37.99)$$

Б. Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\, \Xi_1\left(\alpha,\ \alpha',\ \beta;\ \gamma;\ 1-\frac{t}{x},\ \lambda(x-t)\right) f(t)\, dt = g(x), \quad \operatorname{Re}\gamma > 0,$$
$$(37.100)$$

где

$$\Xi_1(\alpha,\ \alpha',\ \beta;\ \gamma;\ x,\ y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (\alpha')_k (\beta)_j}{(\gamma)_{j+k}\, j!\, k!} x^j y^k, \quad |x| < 1, \quad (37.101)$$

— еще одна из функций Гумберта (см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 5.7(25)]). Это уравнение изучим в классе функций $Q_q = \{f : f(x) x^q \in L_1(0,\ b),\ b < \infty\}$. Справедлива следующая

Теорема 37.10. *Интегральное уравнение* (*37.100*) *имеет решение* $f \in Q_q$, $q < \min(0,\ \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta))$ (*причем* $q \leq 0$ *при* $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$) *тогда и только тогда, когда* $g(x) \in I^{\gamma}_{0+}(Q_q)$. *При этом решение единствен-*

но. Если еще $\min(\mathrm{Re}\,\alpha', \mathrm{Re}(\gamma-\alpha), \mathrm{Re}(\gamma-\beta))>0$, *то решение уравнения* (*37.100*) *может быть представлено в виде*

$$f(x)=e^{\lambda x}I_{0+}^{-\alpha'}e^{-\lambda x}I_{0+}^{\alpha+\alpha'-\gamma}x^{\beta}I_{0+}^{-\alpha}x^{-\beta}g(x). \tag{37.102}$$

Доказательство. Как следует из определения (37.101) и формул 2.10(1), 2.10(12) справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1], при $x\to 1$ функция (37.101) имеет следующие асимптотические представления:

$$\Xi_1(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; x, y)= \\ =\begin{cases} O((1-x)^{(\gamma-\alpha-\beta)}), & \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)<0, \\ O(\ln(1-x)), & \gamma-\alpha-\beta=0, \\ O(1), & \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0. \end{cases} \tag{37.103}$$

Отсюда следует, что подынтегральная функция из интеграла (37.100) при $t\to 0$ может быть записана в виде $t^q f(t)[O(t^{-q})+O(t^{\gamma-\alpha-\beta-q})]$, что обеспечивает существование этого интеграла. Применив теперь лемму 31.4 в случае $p=1$ и по отношению к классу Q_q, получим, что $g\in I_{0+}^{\gamma}(Q_q)$, если $f\in Q_q$. Обратное утверждение также следует из леммы 31.4.

Пусть теперь $g(x)\in I_{0+}^{\gamma}(Q_q)$ и выполняются условия второй части теоремы. Тогда по теореме 10.9 оператор $I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}$, см. (10.55), преобразует функцию $f\in Q_q$ в функцию $(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in I_{0+}^{\gamma-\alpha}(Q_q)$. Это означает, что $x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in L_1(0, b)$ и к последней функции можно применить оператор $I_{0+}^{\alpha+n}$, $\mathrm{Re}\,\alpha+n>0$. Рассмотрев $I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)$ как повторный интеграл, поменяв в нем порядок интегрирования и воспользовавшись интегральным представлением функции Ξ_1:

$$\Xi_1(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; x, y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}\times \\ \times {}_1F_1(\alpha'; \gamma-\alpha; y(1-u))\,du, \quad \mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0,\ x\bar{\in}[1, \infty),$$

получим соотношение

$$I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)=x^{-\beta}\int_0^x\frac{(x-t)^{\gamma+n-1}}{\Gamma(\gamma+n)}\Xi_1(\alpha+n, \alpha', \beta; \gamma+n; \\ 1-t/x,\ \lambda(x-t))f(t)\,dt. \tag{37.104}$$

На основе (37.103), (37.104) можно заключить, что $x^{\beta}I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in I_{0+}^{\gamma+n}(Q_q)$, откуда $I_{0+}^{\alpha+n}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)\in I_{0+}^{\gamma+n-\beta}(L_1)$. Поэтому обе части (37.104) можно продифференцировать n раз, что приведет к равенству

$$I_{0+}^{\alpha}x^{-\beta}(I_{0+}^{\gamma-\alpha,\alpha',\lambda}f)(x)=x^{-\beta}\int_0^x\frac{(x-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\times \\ \times\Xi_1\left(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; 1-\frac{t}{x}, \lambda(x-t)\right)f(t)\,dt. \tag{37.105}$$

Приняв во внимание разложение (10.58), окончательно приходим к следующему композиционному представлению уравнения (37.100):

$$\int_0^x\frac{(x-t)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}\Xi_1\left(\alpha, \alpha', \beta; \gamma; 1-\frac{t}{x}, \lambda(x-t)\right)f(t)\,dt= \\ =x^{\beta}I_{0+}^{\alpha}x^{-\beta}I_{0+}^{\gamma-\alpha-\alpha'}e^{\lambda x}I_{0+}^{\alpha'}e^{-\lambda x}f(x)=g(x). \tag{37.106}$$

Обратив теперь каждый из операторов этой композиции, получим искомую формулу (37.102). Теорема доказана.

5°. **W-преобразование и его обращение.** В этом пункте рассмотрим некоторые свойства так называемого W-преобразования, которое вводится по аналогии с G-преобразованием из § 36 и является обобщением так называемых интегральных преобразований по индексу, примерами которых являются известные преобразования Конторовича—Лебедева и Мелера—Фока (см. § 1, п. 4° и формулы (37.109), (37.110), (37.141) ниже).

Определение 37.1. *W-преобразованием функции $f(x)$ назовем значение следующего интеграла:*

$$(Wf)(x) \equiv \left(W_{pq}^{mn}\left|\begin{matrix}\nu, & (\alpha_p)\\ & (\beta_q)\end{matrix}\right| f(t)\right)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma[\nu - ix - s,\ \nu + ix - s] \times$$
$$\times \Gamma\left[\begin{matrix}(\beta_m)+s, & 1-(\alpha_n)-s\\ (\alpha_p^{n+1})+s, & 1-(\beta_q^{m+1})-s\end{matrix}\right] f^*(1-s)\,ds, \qquad (37.107)$$

где ν ($\operatorname{Re}\nu>1/2$), а также компоненты векторов (α_p), (β_q) (см. пояснения к (36.3)) — некоторые комплексные параметры, удовлетворяющие условиям (36.5), $f^*(s)$ — преобразование Меллина (1.112) функции $f(x)$, контур $\sigma=\{s, \operatorname{Re} s=1/2\}$.

Очевидно, имеет место следующая формула, связывающая G- и W-преобразования:

$$(Wf)(x) = \left(G_{p+2,q}^{m,n+2}\left|\begin{matrix}1-\nu+ix, & 1-\nu-ix, & (\alpha_p)\\ & (\beta_q) & \end{matrix}\right| f_1(y)\right)(1), \qquad (37.108)$$

где $f_1(y)=y^{-1}f(y^{-1})$, см. (36.3).

Определение 37.2. *Прямым и обратным преобразованиями Конторовича—Лебедева назовем соответственно преобразования*

$$K_{ix}\{f(t)\} = \int_0^\infty K_{ix}(t)f(t)\,dt, \qquad (37.109)$$

$$K_{ix}^{-1}\{g(t)\} = \frac{2}{\pi^2 x}\int_0^\infty t\operatorname{sh}\pi t K_{it}(x)\,g(t)\,dt, \qquad (37.110)$$

где $K_{ix}(t)$ — функция Макдональда (1.85) с мнимым индексом ($\nu=ix$).

Справедливы следующие теоремы, в формулировках и доказательствах которых широко используется терминология из § 36.

Теорема 37.11. *W-преобразование (37.107) с характеристикой $(c^*+1, \gamma^*-2\operatorname{Re}\nu+2)$, где $\operatorname{Re}\nu>1/2$, существует в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ тогда и только тогда, когда*

$$2\operatorname{sign}(c^*+c+1)+\operatorname{sign}(\gamma+\gamma^*-2\operatorname{Re}\nu+2)\geqslant 0. \qquad (37.111)$$

Доказательство следует из теоремы 36.2, поскольку в силу (37.108) W-преобразование можно рассматривать как G-преобразование, вычисленное в точке 1 и имеющее характеристику $(c^*+1, \gamma^*-2\operatorname{Re}\nu+2)$.

Теорема 37.12. *Пусть выполняются условия (36.22) и неравенство*

$$4\operatorname{sign}(c^*+1)+2\operatorname{sign}(\gamma^*-2\operatorname{Re}\nu+2)+\operatorname{sign}|2+p-q|>0. \qquad (37.112)$$

Тогда W-преобразование (37.107) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ существует и может быть представлено по формуле

$$(Wf)(x) = \int_0^\infty G_{p+2,q}^{m,n+2}\left(t\left|\begin{matrix}1-\nu+ix, & 1-\nu-ix, & (\alpha_p)\\ & (\beta_q) & \end{matrix}\right.\right) f(t)\,dt. \qquad (37.113)$$

Доказательство следует из теоремы 36.3 с учетом сказанного в доказательстве теоремы 37.11.

Теорема 37.13. *Пусть выполняется условие (36.19), а также (37.111). Тогда в пространстве* $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *W-преобразование может быть представлено через композицию G-преобразования (36.3) и прямого преобразования Конторовича—Лебедева (37.109) по формуле*

$$(Wf)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix} \left\{ t^{2\nu-1} \left(G_{pq}^{mn} \left| \begin{matrix} (\alpha_p) \\ (\beta_q) \end{matrix} \right| f_1(y) \right) \left(\frac{t^2}{4} \right) \right\}, \qquad (37.114)$$

$f_1(y)$ *см. в* (37.108).

Доказательство. Из теоремы 37.11 следует, что W-преобразование в пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ при условиях данной теоремы существует. Приняв во внимание формулу 9.3(1) из книги О. И. Маричева [10], которую можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \Gamma[\nu - ix - s, \ \nu + ix - s] = \int_0^\infty K_{2ix}(2\sqrt{y})\, y^{\nu-s-1} dy, \qquad (37.115)$$

соотношение (37.107) преобразуем к следующему:

$$(Wf)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \Gamma \left[\begin{matrix} (\beta_m) + s, & 1 - (\alpha_n) - s \\ (\alpha_p^{n+1}) + s, & 1 - (\beta_q^{m+1}) - s \end{matrix} \right] f^*(1-s)\, ds \times$$

$$\times 2 \int_0^\infty K_{2ix}(2\sqrt{y})\, y^{\nu-s-1} dy. \qquad (37.116)$$

Условие (36.19) обеспечивает возможность изменения порядка интегрирования в (37.116) на основе теоремы Фубини 1.1, что после замены переменной $2\sqrt{y} = t$ и использования определения (36.3) легко приводит к представлению (37.114). Теорема доказана.

Теорема 37.14. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{M}^{-1}(L)$. *Тогда преобразование Конторовича—Лебедева (37.109) имеет следующее композиционное представление через два прямых и одно обратное преобразования Лапласа (36.31), (36.32), (1.119):*

$$K_{i\sqrt{x}} \{f(t)\} = \sqrt{\pi} x^{-1/2} \Lambda_-^{-1} x^{1/2} \Lambda_+ x^{-1/2} L\{f(t);\ \mathrm{ch}(2/\sqrt{x})\}. \qquad (37.117)$$

Доказательство. Из интегрального представления функции Макдональда

$$K_{ix}(t) = \int_0^\infty e^{-t \,\mathrm{ch}\, u} \cos ux\, du \qquad (37.118)$$

(см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.4.18.4]) следует возможность представления (37.109) в виде

$$K_{ix}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, dt \int_0^\infty e^{-t\,\mathrm{ch}\, u} \cos ux\, du. \qquad (37.119)$$

Поскольку $f(t) \in \mathfrak{M}^{-1}(L)$, то из (37.119) вытекает оценка

$$|K_{ix}\{f(t)\}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty dt \int_\sigma F(s)\, t^{-s} ds \int_0^\infty e^{-t\,\mathrm{ch}\, u} \cos ux\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\sigma |F(s)|\, ds \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t\,\mathrm{ch}\, u} t^{-1/2} dt\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\sigma |F(s)|\, ds \int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi} du}{\sqrt{\mathrm{ch}\, u}} < +\infty,$$

которая позволяет поменять порядок интегрирования в (37.119):

$$K_{ix}\{f(t)\} = \int_0^\infty \cos ux du \int_0^\infty e^{-t\operatorname{ch} u} f(t)\, dt.$$

Совершив теперь замену переменной $u = 2/\sqrt{u'}$, поменяв x на $\sqrt{x}$ и применив факторизацию косинус-преобразования Фурье, получающуюся из формул (36.62), (36.63) при $\nu = -1/2$ с учетом равенства $J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)} \cos z$, придем к соотношению (37.117). Теорема доказана.

Теорема 37.15. *Пусть* $f \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, $1/2 < \operatorname{Re}\nu < 3/4$ *и выполняется неравенство*

$$2 \operatorname{sign}(c + c^*) + \operatorname{sign}(\gamma + \gamma^* - 1/4) \geqslant 0. \tag{37.120}$$

Тогда обратный оператор W-преобразования (37.107) $((Wf)(x) = g(x))$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(G_{p,q}^{q-m,p-n}\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}), & -(\alpha_n)\\ -(\beta_q^{m+1}), & -(\beta_m)\end{matrix}\right| y^{1/2-\nu} K_{2i\sqrt{y}}^{-1}\left\{g\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\}\right)(x). \tag{37.121}$$

Если, кроме того, $q - m - n > m + n - p$, $\operatorname{Re}\beta_j < 1/4$, $j = m + 1, \ldots, q$, $xe^{2\pi x} g(x) \in L_1(0, \infty)$ и выполняются условия (36.22), то равенство (37.121) может быть представлено в форме

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2 x}\int_0^\infty t \operatorname{sh} 2\pi t\, G_{p+2,q}^{q-m,p-n+2}\left(x\left|\begin{matrix}1+\nu+it, \\ 1-(\beta_q^{m+1}),\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}1+\nu-it, & 1-(\alpha_p^{n+1}), & 1-(\alpha_n)\\ 1-(\beta_m) & & \end{matrix}\right) g(t)\, dt. \tag{37.122}$$

Доказательство. Применив оператор $K_{2i\sqrt{x}}^{-1}\{g(\tau/2)\}$ к W-преобразованию $(Wf)(x/2) = g(x/2)$, получим соотношения

$$K_{2i\sqrt{x}}^{-1}\left\{g\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{x})(Wf)\left(\frac{\tau}{2}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{x})\, d\tau\, \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \Gamma\left(\nu - s - \frac{i\tau}{2}\right)\Gamma\left(\nu - s + \frac{i\tau}{2}\right)\times$$

$$\times \Gamma\left[\begin{matrix}(\beta_m)+s, & 1-(\alpha_n)-s\\ (\alpha_p^{n+1})+s, & 1-(\beta_q^{m+1})-s\end{matrix}\right] f^*(1-s)\, ds. \tag{37.123}$$

Условие (37.120) дает возможность воспользоваться результатами работы Ву Ким Туана, С. Б. Якубовича [1], обеспечивающими возможность изменения порядка интегрирования в (37.123) при условии $1/2 < \operatorname{Re}\nu < 3/4$. Вычислив теперь внутренний интеграл по формуле (19) из указанной работы:

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{sh}\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{x})\,\Gamma(\nu - s - i\tau/2)\,\Gamma(\nu - s + i\tau/2)\, d\tau = 2\pi^2 x^{\nu - s}, \tag{37.124}$$

равенство (37.123) перепишем в виде

$$K_{2i\sqrt{x}}^{-1}\left\{g\left(\frac{\tau}{2}\right)\right\} = 2x^{\nu-1/2}\left(G_{pq}^{mn}\left|\begin{matrix}(\alpha_p)\\ (\beta_q)\end{matrix}\right| \frac{1}{y} f\left(\frac{1}{y}\right)\right)(x). \tag{37.125}$$

Теперь для получения представления (37.121) достаточно воспользоваться теоремой 36.6 по отношению к G-преобразованию (37.125) и формулами отражения и сдвига (1.96), (1.97) для G-функции.

Докажем теперь возможность представления решения в виде (37.122). Поскольку $q-m-n>m+n-p$ и выполняются условия (36.22), по теореме 36.3 формулу (37.121) можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty G_{p,q}^{q-m,p-n}\left(xy\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}), & -(\alpha_n)\\ -(\beta_q^{m+1}), & -(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)y^{-\nu}dy\times$$

$$\times\int_0^\infty \tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau K_{i\tau}(2\sqrt{y})(Wf)\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau. \qquad (37.126)$$

Теперь для получения представления (37.122) достаточно применить формулу

$$\int_0^\infty y^{-\nu}K_{i\tau}(2\sqrt{y})\,G_{p,q}^{q-m,p-n}\left(xy\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}), & -(\alpha_n)\\ -(\beta_q^{m+1}), & -(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}G_{p+2,q}^{q-m,p-n+2}\left(x\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}), & -(\alpha_n)\\ -(\beta_q^{m+1}), & -(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)$$

и свойство (1.97) G-функции после изменения порядка интегрирования в (37.126). Такое изменение законно в силу условий $\tau\,\mathrm{sh}\,\pi\tau g(\tau/2)\in L_1(0,\infty)$, $\mathrm{Re}\,\beta_j<1/4$, $j=m+1,\ \ldots,\ q$, и оценки

$$\left|\int_0^\infty G_{p,q}^{q-m,p-n}\left(xy\left|\begin{matrix}-(\alpha_p^{n+1}), & -(\alpha_n)\\ -(\beta_q^{m+1}), & -(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)y^{-\nu}K_{i\tau}(2\sqrt{y})\,dy\right|<$$

$$<\mathrm{const}\int_0^\infty y^{-\mathrm{Re}\,\nu}(xy)^{-1/4}K_0(2\sqrt{y})\,dy<+\infty.$$

Теорема доказана.

6°. Использование дробных интегралов при обращении W-преобразования. Пример. Как было показано в теореме 37.13, W-преобразование представимо через композицию, включающую G-преобразование (36.3). Последнее же может быть факторизовано через операторы (36.31), (36.32), которые в силу теоремы 36.10 после попарного объединения могут приводить к операторам дробного интегродифференцирования. Для более подробного изучения таких преобразований остановимся на исследовании важного частного случая W-преобразования (37.107), который обобщает известное преобразование Мелера—Фока, а именно на преобразовании, задаваемом равенством

$$(F_3f)(x)=\left(W_{13}^{01}\left|\begin{matrix}\nu, & (\alpha_1)\\ & (\beta_3)\end{matrix}\right|f(t)\right)(x)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{\Gamma(\nu-ix-s)\,\Gamma(\nu+ix-s)\,\Gamma(1-\alpha_1-s)}{\Gamma(1-\beta_1-s)\,\Gamma(1-\beta_2-s)\,\Gamma(1-\beta_3-s)}f^*(1-s)\,ds, \qquad (37.127)$$

где $\mathrm{Re}\,\nu>1/2$, а параметры α_1, β_1, β_2, β_3 удовлетворяют условиям (36.5). Будем называть его F_3-преобразованием, поскольку ядро интеграла (37.127) имеет вид (10.47) и связано с функцией Горна F_3 (10.45).

Выделив из ядра функции $\Gamma(\nu-ix-s)$, $\Gamma(\nu+ix-s)$, для оставшихся четырех гамма-функций посчитаем характеристику (36.7):

$$c^*=-1,\quad \gamma^*=\mathrm{Re}(\alpha_1-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)). \qquad (37.128)$$

Теперь несложно сформулировать следующие 4 теоремы, являющиеся частными случаями теорем 37.11—37.15.

Теорема 37.16. *F_3-преобразование (37.127) с характеристикой* $(0, \gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2)$, *где* $\operatorname{Re}\nu > 1/2$, *существует в пространстве* $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *тогда и только тогда, когда*

$$2\operatorname{sign} c + \operatorname{sign}(\gamma + \gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2) \geqslant 0. \qquad (37.129)$$

Теорема 37.17. *Пусть выполняются условия (36.22) по отношению к параметрам* α_1, β_1, β_2, β_3 *и*

$$\gamma^* - 2\operatorname{Re}\nu + 2 > 0. \qquad (37.130)$$

Тогда F_3-преобразование (37.127) в пространстве $\mathfrak{M}^{-1}(L)$ существует и представимо в виде

$$(F_3 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2 - 2\nu - \beta)} \int_1^\infty (t-1)^{1-2\nu-\beta} F_3\Big(1 - \nu - \beta - ix,\ a',$$

$$1 - \nu - \beta + ix,\ b';\ 2 - 2\nu - \beta;\ 1 - t,\ 1 - \frac{1}{t}\Big) f(t)\,dt, \qquad (37.131)$$

где

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_1 = a', \quad \beta_2 = b', \quad \beta_3 = \beta. \qquad (37.132)$$

Теорема 37.18. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$, $1/2 < \operatorname{Re}\nu < 3/4$ *и*

$$2\operatorname{sign}(c-1) + \operatorname{sign}(\gamma - \operatorname{Re}\beta - 1/4) \geqslant 0. \qquad (37.133)$$

Тогда при условиях

$$\operatorname{Re}\beta < 1/4, \quad \operatorname{Re}a' < 1/4, \quad \operatorname{Re}b' < 1/4 \qquad (37.134)$$

и функции $xe^{2\pi x} g(x) \in L(0, \infty)$ *имеет место следующая формула обращения F_3-преобразования* ($g(-x) \overset{\text{det}}{=} g(x)$):

$$(F_3^{-1} g)(x) = \frac{x^{\nu-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\nu-a'+it)\Gamma(1-\nu-b'+it)\Gamma(1-\nu-\beta+it)}{\Gamma(1-\nu-a'-b'+it)\,\Gamma(2it)} \times$$

$$\times\ {}_3F_2(1-\nu-a'+it,\quad 1-\nu-b'+it,\quad 1-\nu-\beta+it;$$

$$1-\nu-a'-b'+it,\quad 2it+1;\quad 1/x)\, x^{it} g(t)\,dt. \qquad (37.135)$$

Теорема 37.19. *Пусть* $\operatorname{Re}\nu > 1/2$, *а параметры* $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2$, β_1, β_2, $\beta_3 = \beta$ *удовлетворяют условиям (36.22) при* $m = 0$, $n = p = 1$, $q = 3$ *и выполняется неравенство*

$$2\operatorname{sign}(c-1) + \operatorname{sign}(\gamma - \operatorname{Re}\beta) \geqslant 0. \qquad (37.136)$$

Тогда в классе $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ справедливы следующие типы факторизаций F_3-преобразования через преобразование Конторовича—Лебедева (37.109), видоизмененные преобразования Лапласа (36.31), (36.32) и операторы дробного интегродифференцирования:

$$(F_3 f)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix} \left\{ \left[t^{2\nu-1}\, t^b \Lambda_-^{-1}\, t^\varepsilon \Lambda_-^{-1}\, t^d I_{0+}^\delta\, t_x^{\gamma_1} \left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right] \left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}, \qquad (37.137)$$

$$(F_3 f)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix} \left\{ \left[t^{2\nu-1} t^b\, \Lambda_-^{-1}\, t^\varepsilon I_{0+}^\delta\, t^d \Lambda_-^{-1}\, x^{\gamma_1} \left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right] \left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}, \qquad (37.138)$$

$$(F_3 f)(x) = 2^{2-2\nu} K_{2ix} \left\{ \left[t^{2\nu-1} t^b I_{0+}^{\delta} t^{\varepsilon} \Lambda_{-}^{-1} t^d \Lambda_{-}^{-1} t^{\gamma_1} \left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right] \left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}. \tag{37.139}$$

Значения параметров b, ε, d, δ, γ_1 с условием $\operatorname{Re}\delta>0$ *для каждой из этих трех формул приводятся соответственно в табл. 37.1—37.3.*

Доказательство следует из теоремы 36.5 с учетом сказанного в доказательстве теоремы 37.11.

В частных случаях, как уже отмечалось, F_3-преобразование включает преобразования Олевского и Мелера—Фока, которые получаются из (37.107) соответственно при $a'=0$ и $a'=0$, $\beta=1/2-\nu$ (с учетом (1.79)):

$$({}_2F_1 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-2\nu-\beta)} \int_1^{\infty} (t-1)^{1-2\nu-\beta} {}_2F_1(1-\nu-\beta-ix,\ 1-\nu-\beta+ix;\ 2-2\nu-\beta;\ 1-t) f(t)\,dt, \tag{37.140}$$

$$g(x) = \int_1^{\infty} t^{1/4-\nu/2} (t-1)^{1/4-\nu/2} P_{-1/2+ix}^{\nu-1/2}(2t-1) f(t)\,dt \tag{37.141}$$

(эти формулы отличаются от представлений (8.55) и (8.42) из книги О. И. Маричева [10] некоторыми заменами переменных и функций). Условие (37.130) для формул (37.140) и (37.141) соответственно приобретает вид $2-2\operatorname{Re}\nu-\operatorname{Re}\beta>0$ и $3/2-\operatorname{Re}\nu>0$, и в силу ограничения $1/2<\operatorname{Re}\nu<3/4$ из теоремы 37.15 оно выполняется.

По отношению к преобразованию Мелера—Фока вида (37.141) из теоремы 37.19 следует

Теорема 37.20. *Пусть* $1/2<\operatorname{Re}\nu<3/4$ *и справедливо неравенство*

$$2\operatorname{sign}(c-1) + \operatorname{sign}(\gamma - \operatorname{Re}\nu - 1/2) \geqslant 0. \tag{37.142}$$

ТАБЛИЦА 37.1

b	ε	d	δ	γ_1
$a'-1$	$b'-a'$	$1-b'+\beta$	$a'+b'-\beta$	$-a'-b'$
$a'-1$	$\beta-a'$	$1+b'-\beta$	a'	$-a'-b'$
$\beta-1$	$b'-a'$	$1+a'-b'$	b'	$-a'-b'$

ТАБЛИЦА 37.2

b	ε	d	δ	γ_1
$a'-1$	$1+b'-a'$	$\beta-a'-b'-1$	a'	$1-\beta$
$\beta-1$	$1+b'-\beta$	$b'-1$	a'	$1-a'$
$a'-1$	$1+\beta-a'$	$a'-1$	$a'+b'-\beta$	$1-b'$

ТАБЛИЦА 37.3

b	ε	d	δ	γ_1
b'	$\beta-a'-b'-1$	$a'-\beta$	a'	$1-a'$
b'	$\beta-a'-b'-1$	$\beta-a'$	a'	$1-b'$
β	$-a'-1$	$a'-b'$	$a'+b'-\beta$	$1-a'$

Тогда преобразование (37.141) можно факторизовать в классе $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ *по формуле*

$$g(x) = 2^{2-2\nu}K_{2ix}\left\{\left(t^{2\nu-1}t^{b}\,\Lambda_{-}^{-1}\,t^{\varepsilon}\Lambda_{-}^{-1}\,t^{d}\left(\frac{1}{t}f\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right)\left(\frac{t^2}{4}\right)\right\}, \quad (37.143)$$

где параметры принимают значения $b=-1$, $\varepsilon=1/2-\nu$, $d=1/2+\nu$ *или* $b=-1/2-\nu$, $\varepsilon=\nu-1/2$, $d=1$.

§ 38. ПРИЛОЖЕНИЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решения многих прикладных задач механики со смешанными условиями сводятся к так называемым парным и тройным интегральным уравнениям, которые характерны тем, что искомая функция на разных отрезках задается различными интегральными соотношениями. Достаточно подробное изложение элементов теории таких уравнений, в том числе обзоры различных методов их решения, можно найти, например, в монографиях И. Снеддона (I. N. Sneddon [3, 7 или 6]), Я. С. Уфлянда [1] и обзорной статье Г. Я. Попова [1]. Остановимся на рассмотрении нескольких характерных примеров применения метода дробного интегродифференцирования для сведения парных и тройных уравнений к одному уравнению Фредгольма 2-го рода, теория которого хорошо известна.

1°. Парные уравнения.

Пример 38.1. При исследовании смешанных краевых задач математической физики с помощью преобразования Ханкеля часто встречаются парные интегральные уравнения с функциями Бесселя (1.83) в ядрах вида

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty t^{-2\alpha}[1+R(t)]\,\Psi(t)\,J_\mu(xt)\,dt = F(x),\quad 0<x<1,\\&\int_0^\infty t^{-2\beta}\Psi(t)\,J_\nu(xt)\,dt = G(x),\quad 1<x<\infty,\end{aligned} \quad (38.1)$$

где $R(t)$, $F(x)$ и $G(x)$ — известные, а $\Psi(t)$ — неизвестная функции. Для преобразования (38.1) к форме, удобной для использования операторов Кобера (18.5), (18.6), осуществим следующие замены:

$$\begin{aligned}&\psi(y) = y^{-1/2}\,\Psi(2\sqrt{y}),\quad f(x) = 2^{2\alpha}x^{-\alpha}F(\sqrt{x}),\\&g(x) = 2^{2\beta}x^{-\beta}G(\sqrt{x}),\quad \mathrm{k}(y) = R(2\sqrt{y}).\end{aligned} \quad (38.2)$$

Тогда с помощью оператора (18.19) эти уравнения перепишутся в виде

$$S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1}(1+\mathrm{k})\,\psi = f,\quad S_{\nu/2-\beta,2\beta,1}\psi = g, \quad (38.3)$$

где функция f задана на интервале $I_1=(0,\ 1)$, а g — на $I_2=(1,\ \infty)$.

Рассмотрим вначале случай $\mathrm{k}(y)\equiv 0$. Введем обозначение

$$\lambda = (\mu+\nu)/2+\beta-\alpha. \quad (38.4)$$

Применив к равенствам (38.3) соответственно операторы (18.5) и (18.6) и воспользовавшись формулами (18.21), придем к равенствам

$$\begin{aligned}&I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu}f = I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu}S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1}\psi = S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\psi,\\&K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}g = K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}S_{\nu/2-\beta,2\beta,1}\psi = S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\psi.\end{aligned} \quad (38.5)$$

Пусть функция h задается по формуле

$$h = \begin{cases} I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu}f, & x\in I_1,\\ K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}\,g, & x\in I_2.\end{cases} \quad (38.6)$$

Тогда соотношения (38.5) можно записать в виде одного уравнения

$$S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\psi = {}^{\nu}h, \tag{38.7}$$

формула обращения которого в силу (18.20) имеет вид

$$\psi = S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1}\, h. \tag{38.8}$$

Подставив сюда значение (38.6) и совершив обратные замены (38.2), придем к решению $\Psi(t)$ исходных парных уравнений (38.1) при $R(t)\equiv 0$ в явном виде. Все проведенные операции законны при соответствующих условиях на параметры и функции.

Решение уравнений (38.1) можно получить и иным способом. Для этого функцию f представим в виде $f=f_1+f_2$, где

$$f_1 = \begin{cases} f & \text{на } I_1, \\ 0 & \text{на } I_2, \end{cases} \quad f_2 = \begin{cases} 0 & \text{на } I_1, \\ f & \text{на } I_2, \end{cases} \tag{38.9}$$

и аналогично запишем $g = g_1 + g_2$. Тогда в силу (38.5) имеем

$$I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu} f = K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda} g. \tag{38.10}$$

Поскольку функции f_1 и g_2 заданы, то (38.10) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных f_2 и g_1 вида

$$I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu} f_2 - K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda}\, g_1 = K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda} g_2 - I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu} f_1. \tag{38.11}$$

На интервале I_1 первый член слева исчезает и получается соотношение, из которого функцию g_1 можно найти по второй формуле (18.17). Значит, функция $g=g_1+g_2$ будет найдена. Выразив теперь функцию ψ из второй формулы (38.3) через g с помощью формулы обращения (18.20), окончательно придем к представлению решения в виде

$$\psi = S_{\nu/2+\beta,-2\beta,1} g. \tag{38.12}$$

Соотношение (38.11) можно рассмотреть на интервале I_2. Тогда его второй член слева обратится в нуль, и после аналогичных рассуждений можно прийти к представлению решения в другом виде:

$$\psi = S_{\mu/2+\alpha,-2\alpha,1} f. \tag{38.13}$$

Можно показать, что построенные решения (38.8), (38.12), (38.13) эквивалентны между собой.

Остановимся теперь на случае (38.1) с произвольной функцией $R(t)$. Полученное выше решение (38.8) частного случая $R(t)\equiv 0$ будем использовать как «пробное» решение, содержащее некоторую неизвестную функцию $h=h_1+h_2$ вида (38.9). Подставив его в (38.3), придем к системе:

$$\begin{gathered} f = S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1}\, h + S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1}\, \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h, \\ g = S_{\nu/2-\beta,2\beta,1} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h = K^{-}_{\nu/2-\beta,\lambda-\nu}\, h. \end{gathered} \tag{38.14}$$

Обратив второе из этих уравнений по формуле из (18.17), найдем функцию h на интервале I_2: $h_2 = K^{-}_{\mu/2-\alpha,\nu-\lambda} g_2$. А первое из этих уравнений на интервале I_1, приняв во внимание равенство $h = h_1 + h_2$ и первую из формул (18.22), можно записать в виде

$$\begin{aligned} I^{+}_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda} h_1 + S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1} \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h_1 = \\ = f - S_{\mu/2-\alpha,2\alpha,1} \mathrm{k} S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1} h_2. \end{aligned} \tag{38.15}$$

Обратив теперь первый оператор по формуле из (18.17) и воспользовавшись первой из формул (18.21), окончательно придем к соотношению

$$h_1 + S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\,\mathrm{k}S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1}\;h_1 = H,$$

$$H = I^{+}_{\mu/2+\alpha,\lambda-\mu}f - S_{\mu/2-\alpha,\lambda-\mu+2\alpha,1}\mathrm{k}S_{\nu/2+\beta,\mu-\lambda-2\alpha,1}h_2$$

на интервале I_1. При соответствующих условиях на заданные функции оно представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода относительно функции h_1. Его ядро содержит функцию k, а правая часть является известной функцией, так как входящая в нее функция h_2 была найдена ранее. Исследовав и построив решение этого уравнения, можно найти функцию h, а затем по формулам (38.8), (38.2) и решение исходной системы (38.1).

Пример 38.2. Рассмотрим здесь парные уравнения вида

$$\int\limits_k^\infty t^{-\mu-\nu}(t^2-k^2)^\beta J_\mu(xt)\,\Psi(t)\,dt = F(x),\quad 0<x<1, \tag{38.16}$$

$$\int\limits_k^\infty J_\nu(xt)\,\Psi(t)\,dt = G(x),\quad 1<x<\infty,$$

где $k \geqslant 0$. Как и в предыдущем примере, обозначим $I_1 = (0,\ 1)$, $I_2 = (1,\ \infty)$. После замены

$$\Psi(t) = t^{\nu+1}\psi(t),\quad F(x) = (x/2)^{\mu-2\beta}f(x),\quad G(x) = (2/x)^\nu g(x) \tag{38.17}$$

и использования обозначения (37.47) уравнения (38.16) принимают вид

$$S\begin{pmatrix}0, & 0, & k\\ \beta, & \mu-2\beta, & \beta\end{pmatrix}\psi(x) = f(x),\ x\in I_1;\quad S\begin{pmatrix}0, & 0, & k\\ \nu, & -\nu, & 0\end{pmatrix}\psi(x) = g(x),\ x\in I_2. \tag{38.18}$$

Применив к (38.18) соответственно операторы (37.45) и (37.46) и воспользовавшись свойствами (37.60), (37.61), придем к одному уравнению

$$S\begin{pmatrix}0, & k, & k\\ \beta, & -\beta, & \beta/2\end{pmatrix}\psi(x) = h(x),\quad x\in I_1\cup I_2, \tag{38.19}$$

где $h = h_1 + h_2$ (см. (38.9)) и

$$h_1(x) = J_{ik}(\mu-\beta,\ \beta-\mu)f(x),\quad h_2(x) = R_k(\beta,\ \nu-\beta)g(x). \tag{38.20}$$

Воспользовавшись теперь формулой обращения (37.65), найдем

$$\psi(x) = S\begin{pmatrix}k, & 0, & 0\\ 0, & \beta, & \beta/2\end{pmatrix}h(x), \tag{38.21}$$

откуда после обратной замены (38.17) несложно выразить решение исходной системы (38.16) в явном виде.

Пример 38.3. Исследуем теперь парные уравнения иного типа:

$$\begin{aligned}&P^\mu\{H(\tau)\psi(\tau);\ x\} = f(x),\quad 0\leqslant x\leqslant a;\\ &P^\mu\{\psi(\tau);\ x\} = g(x),\quad a<x<\infty,\quad |\mu|<1/2,\end{aligned} \tag{38.22}$$

где

$$P^\mu\{\psi(\tau);\ x\} = \int\limits_0^\infty P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} x)\,\psi(\tau)\,d\tau,\quad 0\leqslant x<\infty, \tag{38.23}$$

— обратное обобщенное интегральное преобразование Мелера—Фока с присоединенной функцией Лежандра $P^{-\mu}_{-1/2+i\tau}(z)$ (1.79) в ядре. (Здесь отметим, что если во второй из формул (38.22) заменить $\psi(\tau)$ на $\pi^{-1}\tau\operatorname{sh}\tau\pi\times\Gamma(1-\nu+i\tau)\Gamma(1-\nu-i\tau)g(\tau)$, $g(x)$ на $2^{\nu-3/2}\operatorname{sh}^{1/2-\nu}x\,f(\operatorname{ch}^2(x/2))$ и положить

$\mu = 1/2 - \nu$, то в силу формул (8.42), (8.43) из книги О. И. Маричева [10] получится обращение прямого видоизмененного преобразования Мелера — Фока (37.141). Функция $H(\tau)$ в (38.22) предполагается известной.

Введем аналоги операторов Эрдейи — Кобера, определяемые через следующие дробные интегралы от функции по другой функции $\operatorname{ch} x$ (§ 18, п. 2°):

$$I_{\pm\mu}\{\varphi(t);\ x\} = (\pi/2)^{\pm 1/2}\Gamma^{-1}(1/2 \mp \mu)(\operatorname{sh} x)^{-(\mu\mp\mu)/2} \times$$

$$\times \int_0^x (\operatorname{sh} t)^{(1+\mu\pm 1\pm\mu)/2}(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)^{-1/2\mp\mu}\varphi(t)\,dt,\quad |\mu| < 1/2, \tag{38.24}$$

$$K_{\pm\mu}\{\varphi(t);\ x\} = (\pi/2)^{\mp 1/2}\Gamma^{-1}(1/2 \mp \mu)(\operatorname{sh} x)^{(\mu\pm\mu)/2} \times$$

$$\times \int_x^\infty (\operatorname{sh} t)^{(1-\mu\mp 1\pm\mu)/2}(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x)^{-1/2\mp\mu}\varphi(t)\,dt,\quad |\mu| < 1/2. \tag{38.25}$$

Обратные к ним операторы, которые здесь не выписываются, обозначим соответственно через $I_{\pm\mu}^{-1}$ и $K_{\pm\mu}^{-1}$. Тогда прямым вычислением можно установить следующие две формулы композиции:

$$I_{-\mu}^{-1}\{P^\mu\{\chi(\tau);\ t\};\ x\} = (\mathcal{F}_c\chi)(x),\quad \chi \in L_1(0,\ \infty), \tag{38.26}$$

$$K_\mu^{-1}\{P^\mu\{\chi(\tau);\ t\};\ x\} = \mathcal{F}_s\left\{\frac{\chi(t)}{\omega(t)\operatorname{th}\pi t};\ x\right\},\quad \frac{\chi}{\omega} \in L_1(0,\ \infty), \tag{38.27}$$

где $|\mu| < 1/2$, $\omega(t) = \Gamma(1/2+\mu+it)\Gamma(1/2+\mu-it)[\Gamma(1/2+it)\Gamma(1/2-it)]^{-1}$, а $\mathcal{F}_c$ и $\mathcal{F}_s$ — косинус- и синус-преобразования Фурье (1.108), (1.109).

Введем обозначение

$$G(x) = \begin{cases} G_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant a, \\ G_2(x), & a < x < \infty, \end{cases} \tag{38.28}$$

где $G_2(x) = \sqrt{2/\pi}K_\mu^{-1}\{g(t);\ x\}$, $a < x < \infty$, а $G_1(x)$ — некоторая неизвестная пока функция. Тогда, применив к уравнениям (38.22) соответственно операторы $I_{-\mu}^{-1}$ и K_μ^{-1} и учтя (38.26), (38.27), придем к соотношениям

$$\mathcal{F}_c\{H(\tau)\psi(\tau);\ x\} = F(x),\ 0 \leqslant x \leqslant a;\ \mathcal{F}_s\left\{\frac{\psi(\tau)}{\omega(\tau)\operatorname{th}\tau\pi};\ x\right\} = G(x),\ a < x < \infty, \tag{38.29}$$

где $F(x) = \sqrt{2/\pi}\, I_{-\mu}^{-1}\{f(t);\ x\}$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Обратив второе из них, с помощью формулы (1.111) найдем значение

$$\psi(\tau) = \frac{2}{\pi}\omega(\tau)\operatorname{th}\pi\tau\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}(\mathcal{F}_s G_1)(\tau) + \begin{pmatrix} \infty \\ a \end{pmatrix}(\mathcal{F}_s G_2)(\tau)\right], \tag{38.30}$$

где символ $\binom{b}{a}(\mathcal{F}_s G)(\tau)$ здесь и ниже означает, что в соответствующем интеграле (1.109) интегрирование ведется лишь по интервалу $(a,\ b)$ (вместо $(0,\ \infty)$). Для нахождения неизвестной функции G_1 подставим (38.30) в первое из уравнений (38.29), в результате чего получится интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. После его решения и нахождения функции G (38.28) искомую функцию $\psi(\tau)$ можно найти по формуле (38.30).

2°. Тройные уравнения.

Пример 38.4. Рассмотрим тройные интегральные уравнения вида

$$\int_0^\infty t^{-2\beta}J_\nu(xt)\Psi(t)\,dt = F_1(x),\quad 0 < x < a,$$

$$\int_0^\infty t^{-2\alpha} J_\mu(xt)\,\Psi(t)\,dt = G_2(x),\quad a<x<b, \tag{38.31}$$
$$\int_0^\infty t^{-2\beta} J_\nu(xt)\,\Psi(t)\,dt = F_3(x),\quad b<x<\infty,$$

где F_1, G_2 и F_3 — известные, а Ψ — искомая функции. Совершим здесь замены

$$\psi(t) = t^{-1}\Psi(t),\quad f(x) = (2/x)^{2\beta} F(x),\quad g(x) = (2/x)^{2\alpha} G(x), \tag{38.32}$$

положив

$$F(x) = \sum_{j=1}^{3} F_j(x);\quad F_j(x) = \begin{cases} F(x), & x\in I_j,\\ 0 & x\bar{\in} I_j,\end{cases}$$
$$I_1=(0,\ a),\ I_2=(a,\ b),\ I_3=(b,\ \infty) \tag{38.33}$$

и аналогично доопределив функцию $G(x)$. Очевидно, что функции G_1, G_3 и F_2 пока неизвестны. Тогда система (38.31) в силу (18.19) примет вид

$$S_{\nu/2-\beta,\,2\beta,\,2}\psi(x) = f(x),\quad S_{\mu/2-\alpha,\,2\alpha,\,2}\,\psi(x) = g(x). \tag{38.34}$$

Из последнего уравнения с помощью формулы (18.20) получаем

$$\psi(x) = S_{\mu/2+\alpha,\,-2\alpha,\,2}\, g(x), \tag{38.35}$$

где $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$, т. е. g содержит неизвестные функции g_1 и g_3. Для их нахождения введем обозначения

$$K = K_{\nu/2-\beta,\,(\mu-\nu)/2-\alpha+\beta},\quad I = I_{\mu/2+\alpha,\,(\nu-\mu)/2+\beta-\alpha} \tag{38.36}$$

и к первой из формул (38.34) применим оператор I^{-1}, обратный к I, а ко второй из этих формул — оператор K и воспользуемся соотношениями (18.17), (18.21), которые приведут к равенству $I^{-1}f=Kg$:

$$I^{-1}f = I^{-1}S\psi = I_{\nu/2+\beta,\,(\mu-\nu)/2+\alpha-\beta} S_{\nu/2-\beta,\,2\beta,\,2}\psi(x) =$$
$$= S_{\nu/2-\beta,\,(\mu-\nu)/2+\alpha+\beta,\,2}\psi(x), \tag{38.37}$$
$$Kg = K_{\nu/2-\beta,\,(\mu-\nu)/2+\beta-\alpha}\, S_{\mu/2-\alpha,\,2\alpha,\,2}\ \psi(x) = S_{\nu/2-\beta,\,(\mu-\nu)/2+\alpha+\beta,\,2}\psi(x).$$

Таким же образом после аналогичных применений операторов K^{-1} и I несложно прийти и ко второму соотношению такого же рода, которое в совокупности с первым образует систему

$$I^{-1}f(x) = Kg(x),\quad K^{-1}f(x) = Ig(x). \tag{38.38}$$

Уравнения (38.38) соответственно на интервалах I_1 и I_3 можно записать в виде

$$\binom{x}{0} I^{-1}f_1(x) = \binom{a}{x} Kg_1(x) + \binom{b}{a} Kg_2(x) + \binom{\infty}{b} Kg_3(x),\quad x\in I_1, \tag{38.39}$$

$$\binom{\infty}{x} K^{-1}f_3(x) = \binom{a}{0} Ig_1(x) + \binom{b}{a} Ig_2(x) + \binom{x}{b} Ig_3(x),\quad x\in I_3. \tag{38.40}$$

Обращая их соответственно относительно g_1 и g_3, приходим к следующей системе для этих неизвестных функций:

$$g_1(x) = -\binom{a}{x} K^{-1}\binom{\infty}{b} Kg_3(x) + \binom{a}{x} K^{-1}\binom{x}{0} I^{-1}f_1(x) -$$
$$-\binom{a}{x} K^{-1}\binom{b}{a} Kg_2(x), \tag{38.41}$$

$$g_3(x) = -\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I g_1(x) + \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1} \begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} K^{-1} f_3(x) -$$
$$- \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I g_2(x). \quad (38.42)$$

Отсюда, исключив g_3, окончательно находим соотношение

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I g_1(x) + \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} I^{-1} f_1(x) - \right. \quad (38.43)$$
$$\left. - \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} K g_2(x) \right\} - \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} K^{-1} \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} I^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} K^{-1} f_3(x) - \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I g_2(x) \right\}.$$

Вычислив указанные в нем композиции операторов, можно убедиться, что это соотношение при соответствующих условиях на функции является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода относительно g_1. Решив его и воспользовавшись формулами (38.42), (38.35), (38.32), можно найти искомое решение системы (38.31).

В конце этого параграфа показано, что система (38.31) в частном случае $F_1 = F_3 = 0$ эквивалентна системе, исследуемой в следующем примере.

Пример 38.5. Рассмотрим тройные интегральные уравнения

$$\mathfrak{M}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(\xi + s/\delta)}{\Gamma(\xi + \beta + s/\delta)} \varphi^*(s);\ x \right\} = 0,\ x \in I_1 \cup I_3;$$
$$\mathfrak{M}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(1 + \eta - s/\sigma)}{\Gamma(1 + \eta + \alpha - s/\sigma)} \varphi^*(s);\ x \right\} = g_2(x),\ x \in I_2, \quad (38.44)$$

где $I_j (j = 1, 2, 3)$ — интервалы (38.33), α, β, ξ, η, $\delta > 0$, $\sigma > 0$ — вещественные параметры, а искомая функция $\varphi^*(s) = \mathfrak{M}\{\varphi(x);\ s\}$ является преобразованием Меллина (1.112) некоторой функции $\varphi(x)$.

Воспользовавшись обозначениями типа (38.33) и формулами (23.1), (23.2), систему (38.44) приведем к виду

$$I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} \varphi(x) = g(x),\ I^{\beta}_{-,\delta,\xi} \varphi(x) = f(x) \quad (38.45)$$

или же на соответствующих интервалах

$$\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi} \varphi_1(x) + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi} \varphi_2(x) + \begin{pmatrix} \infty \\ b \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi} \varphi_3(x) = 0,\ x \in I_1,$$
$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} \varphi_1(x) + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} \varphi_2(x) = g_2(x), \qquad x \in I_2, \quad (38.46)$$
$$\begin{pmatrix} \infty \\ x \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi} \varphi_3(x) = 0, \qquad x \in I_3.$$

Обратив третье, второе и первое из этих уравнений по формулам (18.17) относительно функций φ_3, φ_2 и φ_1, получим соотношения

$$\varphi_3(x) = 0,$$
$$\varphi_2(x) = -\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta} \varphi_1(x) + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I^{-\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\alpha} g_2(x), \quad (38.47)$$
$$\varphi_1(x) = -\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} I^{-\beta}_{-,\delta,\xi+\beta} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I^{\beta}_{-,\delta,\xi} \varphi_2(x).$$

Подставив значение φ_1 из третьего соотношения во второе, окончательно придем к уравнению Фредгольма 2-го рода относительно φ_2:

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I_{0+;\sigma,\eta+\alpha}^{-\alpha} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} I_{0+;\sigma,\eta}^{\alpha} \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} I_{-,\delta,\xi+\beta}^{-\beta} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} I_{-,\delta,\xi}^{\beta} \varphi_2(x) + \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} I_{0+;\sigma,\eta+\alpha}^{-\alpha} g_2(x). \tag{38.48}$$

Обратив его, несложно восстановить искомое решение системы (38.44).

В заключение отметим, что если в системе (38.31) положить

$$F_1 = F_3 = 0,\ G_2(x) = (x/2)^{2\alpha+1} g_2(x),\ \mu = \alpha_0 + \beta_0 + \xi + \eta,\ \nu = \xi + \eta,$$
$$\alpha = (\alpha_0 - \beta_0 + \eta - \xi - 1)/2,\ \beta = (\eta - \xi - 1)/2,\ \Psi(t) = S_{\eta,\beta_0+\xi-\eta,2}\,\varphi(t), \tag{38.49}$$

то в силу равенств (18.19), (18.22), (23.1), (23.2) она примет вид (38.44) с параметрами α_0, β_0 вместо α, β и $\delta = \sigma = 2$. Получив ее решение, по формуле $\Psi(t) = S_{\eta,\beta_0+\xi-\eta}\varphi(t)$ найдем решение системы (38.31), (38.49).

§ 39. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 7

1°. **Исторические сведения. К § 35, п. 1°.** Впервые уравнение вида (35.4) с $d=1$ и переменным нижним пределом рассмотрел Т. Хиггинс (T. P. Higgins [3], 1964 г.), получивший решения типа (35.11), (35.14) в классе достаточно гладких функций. Отметим, что ранее частные случаи этого уравнения с многочленами Чебышева и Лежандра в ядре рассматривали Та Ли (Ta Li [1], 1960 г., и [2], 1961 г.) и Р. Бушман (R. G. Buschman [1], 1962 г.) соответственно, см. далее п. 2°, 35.1.

Впервые методы дробного интегродифференцирования к изучению уравнений (35.1)—(35.4) в классах Q_q, R_r (см. § 17, п. 1° (к § 10, п. 1°)) применил Э. Лав (E. R. Love [2, 3], 1967 г.), см. далее п. 2°, 35.2.

Теорема 36.1 ранее не публиковалась, но случай $p=1$ содержится в указанных выше работах Э. Лава.

К § 35, п. 2°. Впервые уравнение (35.16) было получено и обращено Е. Копсоном (E. T. Copson [5, с. 353], 1958 г.) при решении задачи Дирихле в первом квадранте для гиперболического уравнения (40.19) с $\lambda=0$. Однако в этой работе указанный результат специально не выделялся, и поэтому работа Р. Бушмана (R. G. Buschman [3], 1963 г.), в которой были обращены уравнения (35.16), (35.18), вполне заслуженно считается первой. А. Эрдейи (A. Erdelyi [9], 1964 г., и [12], 1967 г.) нашел решения уравнений (35.15), (35.17) в виде (35.25), (35.35), использовав методы дробного интегродифференцирования и теории обобщенных функций, см. далее п. 2°, 35.3.

К § 36, пп. 1, 2°. Идея определения дробных интегралов и производных через операторы обратного преобразования Меллина (36.1), (36.2) содержалась в работах Х. Кобера (H. Kober [1], 1940 г.) и А. Эрдейи (A. Erdelyi [4], 1940 г.), хотя ранее ее высказывал Н. Зейлон (N. Zeilon [1, с. 4], 1924 г.).

Определение G-преобразования через интеграл Меллина — Барнса (36.3) впервые введено в работе Ву Ким Туана, О. И. Маричева и С. Б. Якубовича [1], 1986 г., в несколько отличной от (36.3) форме. Ранее частный случай такого преобразования вида (36.23) рассматривался в работе Narain Roop [1], 1959 г., и более глубоко исследовался в статьях Narain Roop [2—4], 1962—1963 гг., и C. Fox [2], 1961 г. Пространство $\mathfrak{M}_{0,0}^{-1}(L)$ было введено в работе Ву Ким Туана [1], 1985 г., где оно обозначалось через L^{-1}, а более общее пространство $\mathfrak{M}_{\Phi}^{-1}(L)$ — в работе Ву Ким Туана [4], 1986 г. Пространство $L_2^{(c,\gamma)}$ является частным случаем пространства L_2^{Φ}, введенного С. А. Акопяном [1, с. 6], 1960 г. (см. также М. М. Джрбашян [2]). Теоремы 36.1 — 36.4 доказаны в работах Ву Ким Туана [5], 1986 г., и Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г.

К § 36, п. 3°. Идея факторизации интегральных преобразований, т. е. их представлений через композиции других «более простых» интегральных преобразований, по-видимому, впервые проявилась в формуле разложения преобразования Стилтьеса через композицию двух прямых преобразований Лапласа (см. D. V. Widder [1], 1938 г., и [2], 1946 г., а также Г. Бейтмен, А. Эрдейи [4]). Ф. Трикоми (F. G. Tricomi [2], 1935 г.) указал формулу разложения преобразования Ханкеля через композицию прямого и обратного преобразований Лапласа. Такого сорта композиции систематически применялись И. И. Хиршманом, Д. В. Уиддером [1], 1958 г., при изучении преобразований типа свертки. В отношении к G-преобразованию типа (36.23) идея факторизации развивалась Ч. Фоксом (C. Fox [3], 1963 г., и [6], 1971 г.) и П. Руни (P. G. Rooney [5], 1983 г.), см. далее п. 2°, 36.1—36.4.

Впервые техника факторизации G-преобразования вида (36.23) через более простые G-преобразования такого вида и специальные таблицы и обозначения, позволяющие ее осуществить, были разработаны формально (без описания всех условий и классов функций) в статье Ю. А. Брычкова, Х.-Ю. Глеске, О. И. Маричева [1], 1983 г. Ей предшествовали исследования О. И. Маричева [3], 1973 г. и [6], 1976 г., и труднодоступные работы Т. Хиггинса (T. P. Higgins [4, 5], 1965 г.). В пространстве $\mathfrak{M}_{c,\gamma}^{-1}(L)$ проблема факторизации была решена в работе Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г., где была установлена теорема 36.5.

К § 36, пп. 4—8°. Теоремы 36.6—36.8 и 36.10—36.13 содержатся соответственно в работах Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г., и О. И. Маричева, Ву Ким Туана [2], 1985 г. Остальные результаты принадлежат Ву Ким Туану и ранее не публиковались.

К § 37, п. 1°. Решение уравнения вида (37.1) при $\lambda=1$ получил К. Сривастава (K. N. Srivastava [5], 1964 г.), но в более громоздкой форме, чем (37.31)—(37.34). Решение вида (37.31) с $l=0$, $a=0$ дано Дж. Уимпом (J. Wimp [2], 1965 г.) с помощью преобразования Лапласа, см. также К. С. Rusia [4, 6]. Наиболее глубокое исследование уравнения (37.1) проведено Т. Прабхакаром (T. R. Prabhakar [1], 1969 г., в случае $\lambda=1$, $a=0$; [2], 1971 г.), который нашел решения (37.32) и (37.33) с помощью методов дробного интегродифференцирования при $\operatorname{Re}\alpha>0$ в случаях $\operatorname{Re}\beta>0$ и $\operatorname{Re}\beta<\operatorname{Re}\alpha$ соответственно.

Впервые уравнение (37.2) при $a=0$, $\alpha=2n+1$, $\lambda=i$, т. е. уравнение

$$\int_0^x (x-t)^n I_n(x-t) f(t)\,dt = g(x),$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя (1.84), при целых неотрицательных n рассмотрел О. Тидони (O. Tedone [1], 1914 г.). В случае натурального n он свел это уравнение к простейшему уравнению с $n=0$ и получил его формальное решение. Решение уравнения (37.2) при $a=0$, $\alpha=1$ с помощью соотношения (37.20) нашел Х. Эльрод (H. G. Elrod [1], 1958 г.).

Формальное решение уравнения (37.41), отличающегося от уравнения (37.4) лишь заменой переменных, получили Дж. Бурлак (J. Burlak [1], 1962 г.) и И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.). Достаточные условия его разрешимости указал Р. Сривастав (R. P. Srivastav [1], 1966 г.). Отметим только, что уравнение (37.4) в другой форме было решено еще Н. Я. Сониным в 1884 г., см. далее п. 2°, 37.3, а также краткий исторический очерк в начале книги.

Решение уравнений (37.5)—(37.7) дано О. И. Маричевым в работе [8], 1978 г., по материалам которой и написан этот пункт.

К § 37, п. 2°. Формально решения (37.43), (37.44) уравнений (37.41), (37.42) получили Дж. Бурлак (J. Burlak [1], 1962 г.) и И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.), см. также работы (R. P. Srivastav [1], K. C. Rusia [3]). Необходимые условия существования решения уравнения (37.41) в классе непрерывных функций даны П. Бхаратия (P. L. Bharatiya [1], 1965 г.), а необходимые и достаточные в классе $L_2(0,\infty)$ — К. Сони (K. Soni [5], 1971 г.).

Считается, что впервые решение уравнения (37.41), а следовательно, и уравнения (37.4) дали Дж. Бурлак и И. Снеддон. Однако на самом деле к такому уравнению квадратичной заменой переменных в частном случае приводится уравнение, решенное Н. Я. Сониным [4], 1884 г. (см. также [6], 1954 г., и далее п. 2°, 37.3). Отметим также, что, не зная об этой работе, И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.) тем не менее назвал оператор (37.41) оператором Сонина, основываясь на том, что Н. Я. Сонин вычислил два специальных интеграла такого рода от функций Бесселя, известных в литературе под именем интегралов Сонина, см. (2.54) и справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, формулы 2.12.4.6 и 2.12.35.12]. Заметим также, что формула обращения уравнения (37.41) при $\nu=0$ в классе $L_2(0,\infty)$ указана в работе Т. А. Розета [1], 1947 г. (см. далее п. 2°, 37.4).

Обобщенные операторы Эрдейи—Кобера (37.45), (37.46) и обобщенный оператор преобразования Ханкеля (37.47) введены в работе Дж. Лаундеса (J. S. Lowndes [1], 1970 г.), в которой наряду с формулами (37.48)—(37.66) доказаны и некоторые другие результаты.

К § 37, п. 3°. Обратный оператор к оператору (37.67) при $0<\alpha<1$ в форме (37.81) впервые построен Н. И. Бакиевичем [1], 1963 г. Однако обращение этого оператора для частного случая $\alpha=1$ в форме соотношений из теоремы 37.6 было получено ранее в работе И. Н. Векуа [1], 1945 г., см. также его монографию [3, с. 69, 70], где, кроме формул вида (37.78), (37.79), указаны более общие соотношения, установленные в 1942 г., которые связывают решения уравнений Лапласа $\Delta u=0$ и Гельмгольца $\Delta u+\lambda^2 u=0$ (об этом см. в § 40, п. 2° и § 43, п. 2°, 40.1).

Частный случай равенства (37.71), записанный в другой форме, имеется в статье P. Henrici [1, с. 256], 1957 г. Остальные результаты этого пункта являются развитием результатов работы Дж. Лаундеса (J. S. Lowndes [9], 1985 г.), где был введен и изучен оператор (37.68) в видоизмененной форме. Теорема 37.7 была указана в статье О. И. Маричева [1], 1972 г., как частный случай более общего результата.

К § 37, п. 4°. Приведенный результат получен в статье О. И. Маричева [1], 1972 г.

К § 37, п. 5°. Частные случаи так называемых интегральных преобразований по индексам (по параметрам) специальных функций были выявлены и изучены сравнительно недавно, см. об этом в монографии Н. Н. Лебедева [4], где излагаются основы теории преобразований Конторовича—Лебедева (37.109), (37.110) и Мелера—Фока (37.141), (38.23). В 1964 г. появилась работа Дж. Уимпа (J. Wimp [1]), в которой было введено значительно более общее преобразование (37.113) с G-функцией Мейера в ядре, и для него была получена формула обращения и выписаны пять частных случаев, см. об этом также в монографии О. И. Маричева [10, с. 118]. Более компактный вид формулы обращения (37.122) указал С. Б. Якубович [1], 1985 г., который также изучил композиционную структуру этого преобразования, см. статью Ву Ким Туана, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1986 г., по материалам которой написан п. 5°.

Отметим также, что различные представители указанного класса преобразований с G-функциями и H-функциями в ядрах рассматривались в работах R. N. Kalia [1], 1970 г., и M. Shah [1], 1972 г.

К § 37, п. 6°. Преобразование (37.127) в форме (37.131) было введено в работе Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева, С. Б. Якубовича [1], 1985 г. Теоремы 37.17—37.21 доказаны С. Б. Якубовичем и публикуются впервые.

К § 38, пп. 1, 2°. Впервые решение парного уравнения (38.1) в случае $R=G=\mu=\nu=0$, $\alpha-\beta=1/2$, $F\equiv 1$ было получено в работе Э. Бельтрами (E. Beltrami [1], 1881 г.). Заметим, что этой работе предшествовала работа Г. Вебера (H. Weber [1], 1872 г.), в которой были поставлены задачи для уравнений в частных производных, сводящиеся к парным уравнениям. Различные случаи уравнения (38.1) в основном при $R=G=\mu=\nu=0$ изучались значительно позже в работах L. V. King [1], 1935 г., I. W. Busbridge [1], 1938 г., C. J. Tranter [1—3], 1950—1954 гг., A. N. Gordon [1], 1954 г., и B. Noble [1], 1955 г., см. также книгу Е. Титчмарша [1], 1937, 1948 гг. Во всех этих работах использовались разнообразные методы, в основном отличные от дробного интегродифференцирования.

Впервые дробное интегрирование (порядка 1/2) при решении парных уравнений вида (38.1) использовал Е. Копсон (E. T. Copson [3], 1947 г.), см. также B. Noble [2], 1958 г., и I. N. Sneddon [1], 1960 г. Этот метод был развит в работах E. T. Copson [6], 1961 г., A. S. Peters [1], 1961 г., M. Lowengrub, I. N. Sneddon [1], 1962 г., и [2], 1963 г., для решения уравнений (38.1) в случае $\mu=\nu$, $R\equiv 0$.

Дробное интегрирование с операторами Н. Я. Сонина (см. п. 2°, 37.3) при решении парных уравнений вида (38.16) с $F=\mu=\nu=0$ и измененным порядком условий на x впервые использовал Н. И. Ахиезер [1], 1954 г., см. также работу [2], 1957 г., где этот результат обобщен на случай $\nu=-\mu$. Исследованию уравнения (38.16) для произвольных μ и ν были посвящены работы A. S. Peters [1], 1961 г., J. Burlak [1], 1962 г., J. S. Lowndes [1], 1970 г., и др. Однако во всех этих работах содержится некорректная постановка задач: вместо интегрирования по (k, ∞) в первом из уравнений (38.16) интегрирование ведется по лучу $(0, \infty)$, что при произвольном β недопустимо, если специально не оговаривать значения функции $(t^2-k^2)^\beta$ при $0<t<k$.

Следует отметить, что начало систематическому применению операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.6) в теории парных, тройных и т. п. уравнений положили работы А. Эрдейи, И. Снеддона (A. Erdelyi, I. N. Sneddon [1], 1962 г.) и И. Снеддона (I. N. Sneddon [2], 1962 г.). Вместе с тем в этих и многих последующих работах исследования проводились формально, без изучения классов функций и условий на параметры.

Пункты 1, 2° написаны по материалам работ A. Erdelyi, I. N. Sneddon [1], 1962 г., и I. N. Sneddon [2], 1962 г. (пример 38.1), J. S. Lowndes [1], 1970 г. (пример 38.2), Н. А. Вирченко, С. П. Пономаренко [1], 1979 г. (пример 38.3), Н. А. Вирченко, Л. Г. Макаренко [2], 1975 г. (пример 38.4), J. S. Lowndes [2], 1971 г., I. N. Sneddon [5], 1975 г., и [6], 1979 г. (пример 38.5) с некоторыми изменениями. Отметим еще, что решение (38.8) получили Е. Титчмарш [1, с. 334], 1937 г., при $\mu=\nu$ и А. Петерс (A. S. Peters [1], 1961 г.), а решение (38.12), (38.13) — Б. Нобл (B. Noble [1], 1955 г.); метод «пробного» решения (см. пример 38.1) использовали А. Гордон (A. N. Gordon [1], 1954 г.) и Е. Копсон (E. T. Copson [6], 1961 г.).

2°. Обзор других результатов. 35.1. В работе T. P. Higgins [3] рассмотрено интегральное уравнение

$$\int_x^1 \frac{(t-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(\alpha,\ \beta;\ c;\ 1-\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = g(x),\quad 0<x_0\leqslant x\leqslant 1, \tag{39.1}$$

и получены две формы его решения:

$$f(x) = I_{1-}^{\alpha-c} x^{\beta} I_{1-}^{-\alpha} x^{-\beta} g(x),$$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-c+m)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-c+m-1} t^{\beta} (I_{1-}^{-m-\alpha} g_1)(t) \times$$

$$\times {}_2F_1\left(m, -\beta; \alpha-c+m; 1-\frac{x}{t}\right) dt, \quad g_1(\tau) = \tau^{-\beta} g(\tau), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

в зависимости от условий на достаточно гладкую правую часть $g(x)$. Здесь I_{1-}^{α} — оператор дробного интегродифференцирования (2.18) или (2.34). Отметим, что указанная работа была первой работой, в которой применялась техника факторизации ${}_2F_1$-преобразования (39.1) с помощью операторов дробного интегродифференцирования. Решение уравнения, отличающегося от (39.1) заменой $1-t/x$ на $1-x/t$, которое имеет вид

$$f(x) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-c)} \int_x^1 (t-x)^{m-c-1} {}_2F_1\left(-\alpha, -\beta; m-c; 1-\frac{t}{x}\right) g^{(m)}(t)\, dt,$$

$$m = 1, 2, \ldots, m > \operatorname{Re} c > 0,$$

с помощью преобразования Лапласа получил Дж. Уимп (J. Wimp [2]). Ранее частные случаи этого уравнения с многочленом Чебышева 1-го рода $T_n(x)$ в ядре

$$\int_x^1 \frac{T_n(t/x)}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x_0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{39.2}$$

и с многочленом Лежандра $P_n(x)$ в ядре

$$\int_x^1 P_n(t/x) f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x_0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{39.3}$$

рассматривались в работах Ta Li [1, 2] и R. G. Buschman [1] соответственно. В этих работах использовалась классическая схема решения уравнения Абеля (2.1), см. § 2, п. 1°. В статье D. V. Widder [4] уравнения (39.2) и (39.3) решены методом, основанным на преобразовании Лапласа. Заметим также, что в работе A. Erdelyi [7] уравнение типа (39.3) решено с помощью формулы Родрига. В работах R. P. Singh [1] и L. A. Dixit [1, 2] получены решения уравнения вида (39.3) с заменой $P_n(x)$ на обобщенные многочлены Лежандра $Q_{mk}(x)$ и Райса $H_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и гипергеометрическую функцию ${}_4F_3(-n, \alpha+\beta+n+1, \xi, \xi'; p, p', 1+\alpha; x)$ соответственно.

Решение интегрального уравнения

$$\int_x^1 (t-x)^{\alpha} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2t}{x}-1\right) f(t)\, dt = g(x), \quad 0 < x_0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{39.4}$$

с полиномом Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha+1)_n [n!]^{-1} {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; (1-x)/2)$, которое является частным случаем уравнения (39.1), впервые получено в статье T. P. Higgins [2], см. также K. N. Srivastava [4] и K. C. Rusia [5]. В работах B. R. Bhonsle [1, 2], K. C. Rusia [2, 7], C. Singh [3] и K. N. Srivastava [3, 6—8] получены решения других уравнений однородного типа, содержащих в ядрах полиномы Якоби.

35.2. Обозначим через $Q_q(a, b)$, $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$, класс функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на (a, b), и таких, что функция $x^q\varphi(x)$ локально интегрируема на (a, b). В работе E. R. Love [2] получены необходимые, а также достаточные условия существования и единственности в $Q_q(0, d)$, $0 < d < \infty$, решения уравнений (35.1), (35.2) и даны явные выражения для их решений в виде (35.5)—(35.8). Эти исследования продолжены в работе E. R. Love [3], где в классе $Q_q(d, \infty)$, $0 < d < \infty$, установлены формулы (35.9)—(35.12), выражающие решения уравнений (35.3), (35.4).

Заметим, что представление решения в виде композиции двух операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) для уравнения вида (35.2) формально дано в работе R. G. Buschman [5], а в статье C. Müller, R. Richberg [1] получены формулы обращения частного случая уравнения (35.3) с многочленом Чебышева 1-го рода в ядре

$$\int_x^{\infty} \frac{T_n(x/t)}{\sqrt{t^2-x^2}} f(t)\, dt = g(x), \quad x > 0,$$

которое является аналогом уравнения (39.2).

В работе R. K. Saxena, R. K. Kumbhat [3] выведены формулы обращения операторов

$$\frac{x^{-\eta-\delta}}{\Gamma(\delta)}\int_0^x t^{\eta}(x-t)^{\delta-1}{}_2F_1\left(\alpha,\ \beta;\ \delta;\ 1-\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt,$$

$$\frac{x^{\eta}}{\Gamma(\gamma)}\int_x^\infty t^{-\eta-\nu}(t-x)^{\gamma-1}{}_2F_1\left(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1-\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt \qquad (39.5)$$

для $f(x)\in L_p(0,\ \infty)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, при некоторых условиях на параметры.

В работе B. L. J. Braaksma, A. Schuitman [1] установлены формулы обращения оператора вида (35.4):

$$(Af)(x)=\frac{1}{\Gamma(c)}\int_x^\infty\left(1-\frac{x}{t}\right)^{c-1}{}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{t}{x}\right)f(t)\frac{dt}{t}$$

в пространстве основных функций $T(\lambda,\ \mu)$ и сопряженного ему оператора A' в пространстве обобщенных функций $T'(\lambda,\mu)$ (см. § 23, п. 2°, 18.3).

Следуя работам E. R. Love [2, 3], T. R. Prabhakar [4] построил решение уравнения

$$\int_x^b\frac{(t^m-x^m)^{c-1}}{\Gamma(c)}{}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{x^m}{t^m}\right)mt^{m-1}f(t)\,dt=g(x),\quad x>0,\ \operatorname{Re}c>0. \qquad (39.6)$$

В работе A. C. McBride [1] получены формулы обращения уравнения $H_m^c f=g$, см. § 23, п. 2°, 18.5, которое обобщает уравнение (35.1), а также аналогичных обобщений уравнений (35.2)—(35.4). Исследования проведены в пространствах основных $F_{p\mu}$ и обобщенных $F'_{p\mu}$ функций, рассмотренных в § 8, п. 4°.

В работе М. М. Смирнова [5] сведением к уравнению вида (35.1) получено обращение некоторого уравнения 1-го рода с функцией Гаусса, которое возникает при изучении задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения.

35.3. В статье A. Erdelyi [9] методами дробного интегродифференцирования получены необходимые, а также достаточные условия для существования интегрируемого на конечном отрезке решения уравнения (35.15) при $\operatorname{Re}\mu<1$, $\operatorname{Re}\nu\geqslant-1/2$ и дано явное решение в виде (35.25). Здесь также указано решение уравнения (35.17) с $d=\infty$ в форме (35.35), которое ранее исследовал K. N. Srivastava [1] (в формуле его обращения содержится ошибка), см. также G. M. Habibullah [2].

В работе A. Erdelyi [12] изучено уравнение (35.15) при произвольных действительных μ и ν в классе обобщенных функций с носителем на $(0,\ \infty)$, а также выяснены условия, при которых полученное решение будет обычной функцией.

Достаточные условия обратимости и формулы обращения двух уравнений вида (35.15), (35.16), но записанных в иной форме, указал М. М. Смирнов [4, 6].

Заметим, что ряд работ (R. G. Buschman [2], T. P. Higgins [1] и K. N. Srivastava [2]) посвящен решению уравнения вида (35.17) с ультрасферическими многочленами Гегенбауэра $C_n^\lambda(x)$ в ядре вместо $P_n^\lambda(x)$.

35.4. В работе I. N. Sneddon [4] предложен общий метод для нахождения решения уравнений вида

$$\int_x^a \mathrm{k}\left(\frac{x}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t}=g(x),\quad 0\leqslant x\leqslant a,\quad a\leqslant\infty, \qquad (39.7)$$

основанный на использовании преобразования Меллина (1.112) и теоремы о свертке (1.115). В качестве примеров даны решения уравнений (35.4), (35.15), (35.17) с $d=\infty$, (39.1)—(39.3) и др.

35.5. В работе S. L. Kalla, R. K. Saxena [2] получены формулы обращения более общих, чем (23.5), (23.6), операторов

$$\frac{\mu x^{-\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x {}_2F_1\left(\alpha,\ \beta+m;\ \gamma;\ \frac{at^{\mu}}{x^{\mu}}\right)t^{\eta}f(t)\,dt, \qquad (39.8)$$

$$\frac{\mu x^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} {}_2F_1\left(\alpha, \beta+m; \gamma; \frac{ax^{\mu}}{t^{\mu}}\right) t^{-\delta-1} f(t)\, dt \qquad (39.9)$$

для $f(x) \in L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, или $f(x) \in \mathfrak{M}_p(0, \infty)$, $p>2$, при выполнении условий $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>m-1$, $m=1, 2, \ldots$, $\mu>0$, $\mathrm{Re}\,\eta > \max(1/p, 1/p')$, $1/p+1/p'=1$, $|\arg(1-a)|<\pi$.

Здесь через $\mathfrak{M}_p(0, \infty)$ обозначено подпространство $L_p(0, \infty)$, $p>2$, состоящее из функций, являющихся обратными преобразованиями Меллина функций из $L_{p'}(-i\infty, i\infty)$, см. также § 23, п. 2°, 18.1.

В работе В. Р. Parashar [1] рассматривались обобщающие (23.5), (23.6) уравнения с G-функцией Мейера в ядрах и при некоторых условиях была доказана единственность их решения в классе $L_1(0, \infty)$. Формулы обращения таких уравнений в $L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, или в $\mathfrak{M}_p(0, \infty)$, $p>2$, получены в работе S. L. Kalla [3] с помощью преобразования Меллина. Эти результаты распространены в работах S. L. Kalla [12, 11] на более общие уравнения с H-функцией Фокса и произвольной функцией в ядрах соответственно.

35.6. В работе E. R. Love [6] даны необходимые, а также достаточные условия разрешимости интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} {}_2F_1(a, b; c; -x/t)\, t^b f(t)\, dt = g(x), \quad 0<x<\infty,$$

и построено его решение на основании представления левой части в виде композиции оператора дробного интегрирования Римана—Лиувилля (5.1) и преобразования Стилтьеса (см. § 9, п. 2°, 7.3). Другая форма решения этого уравнения через обратное преобразование Меллина ранее была получена в статье R. Swaroop [1].

Эти исследования продолжены в работах T. R. Prabhakar, N. K. Kashyap [1] и E. R. Love, T. R. Prabhakar, N. K. Kashyap [1], где интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; -\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = g(x), \quad \int_0^{\infty} \frac{t^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_1F_1(a; c; -xt)\, f(t)\, dt = g(x)$$

решены на основании представления левых частей в виде композиции оператора дробного интегрирования Римана—Лиувилля (5.3) и преобразований Стилтьеса и Лапласа соответственно.

35.7. В работе Н. Н. Лебедева [1] показано, что интегральное уравнение

$$(Tf)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \mathrm{K}\left(\frac{2\sqrt{tx}}{t+x}\right) \frac{f(t)\, dt}{t+x} = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \qquad (39.10)$$

где $\mathrm{K}(u) = (\pi/2)\, {}_2F_1(1/2, 1/2; 1; u^2)$ — эллиптический интеграл 1-го рода, имеет решение

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2-x^2}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau g(\tau)\, d\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}}.$$

Этот результат основан на представлении оператора T в виде композиции двух операторов дробного интегрирования — правостороннего и левостороннего — по функции x^2:

$$(Tf)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{x^2-t^2}} \int_t^a \frac{f(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\tau^2-t^2}}.$$

Этот же метод одновременно был применен Е. Копсоном (E. T. Copson [3]) для решения одного двумерного уравнения электростатики. Следует отметить, что работы Н. Н. Лебедева и Е. Копсона являются первыми работами, в которых интегральные уравнения первого рода со специальными функциями в ядрах решались путем разложения на композиции более простых уравнений типа Абеля, решения которых известны. Другими словами, в этих работах был впервые применен метод факторизации интегральных операторов со специальными функциями в ядрах.

Отметим также, что в указанной работе Н. Н. Лебедева полученный им результат перенесен на уравнение

$$\int_0^a \frac{(xt)^m}{(x+t)^{2m+1}}\, {}_2F_1\left(m+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}; 2m+1; \frac{4xt}{(x+t)^2}\right) f(t)\, dt = g(x),$$

а в статье S. L. Kalla [10] методом Н. Н. Лебедева решено уравнение такого же типа, но с другими параметрами:

$$\int_0^a (x+t)^{-2\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \frac{1}{2}; 1; \frac{4xt}{(x+t)^2}\right) f(t)\,dt = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0<\alpha<1.$$

В работе Н. И. Ахиезера, В. А. Щербины [1] дано формальное решение уравнения

$$\int_0^a \frac{1}{(x^2+t^2)^p} {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}; \frac{q}{2}; \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) f(t)\,dt = g(x), \quad 0<x<a, \tag{39.10'}$$

где $0<a\leqslant+\infty$, $0<2p<q<2p+2$, частным случаем которого при $p=1/2$, $q=2$ является уравнение (39.10), см. также работу W. E. Williams [1].

35.8. В работах J. S. Lowndes [4, 6] с помощью операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.4) для интегрального уравнения 1-го рода

$$\int_a^b \mathscr{K}(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad a<x<b, \tag{39.11}$$

получено решение в следующих случаях:

$$\mathscr{K}(x, t) = \frac{\sigma\delta x^{\sigma\eta-1}\, t^{\delta\mu}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)} \int_{\max(x,t)}^{\infty} \frac{\tau^{\sigma(\alpha-\eta)+\delta(\beta-\mu)-1}}{(\tau^\sigma - x^\sigma)^{\alpha}(\tau^\delta - t^\delta)^{\beta}}\,\psi(\tau)\,d\tau,$$

$$a=0,\ b=+\infty,\ 0<\alpha,\ \beta<1,\ \sigma>0,\ \delta>0,\ -\infty<\mu,\ \eta<\infty;$$

и

$$\mathscr{K}_1(x, t) = \frac{\sigma\delta x^{-\sigma(\alpha+\eta)}\, t^{\delta(1-\mu-\beta)-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^{\min(x,t)} \frac{\tau^{\sigma(\eta+1)+\mu\delta-1}\psi(\tau)\,d\tau}{(x^\sigma-\tau^\sigma)^{1-\alpha}(t^\delta-\tau^\delta)^{1-\beta}},$$

$$\mathscr{K}_2(x, t) = x^{1-\sigma(\alpha+\eta+1-s)}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{d}{dx}x^{1-\sigma}\right)^s \left(x^{\sigma(\alpha+\eta-1)-1}\mathscr{K}_1(x, t)\right),$$

$$b<+\infty,\ \sigma>0,\ \delta>0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ -\infty<\mu,\ \eta<\infty,$$

$\psi(t)$ — некоторая функция (см. также статью W. E. Williams [1]).

В качестве примеров рассмотрены уравнение

$$\int_0^a K_\lambda(p\,|x-t|)\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^\lambda} = f(x), \quad 0<x<a, \quad \operatorname{Re} p>0, \quad |\lambda|<1/2,$$

с модифицированной функцией Бесселя $K_\lambda(z)$ и уравнение вида (39.10').

36.1. Ряд работ (C. Fox [3, 5, 6]) посвящен разработке методов решения интегрального уравнения

$$\mathrm{K}f(x) \equiv \int_0^\infty \mathrm{k}(xt)\,f(t)\,dt = g(x), \quad x>0, \tag{39.12}$$

в случае, когда преобразование Меллина $\mathrm{k}^*(s) = \mathfrak{M}\{\mathrm{k}(x); s\}$ (1.112) ядра k удовлетворяет некоторым условиям.

В работе C. Fox [3] разработан метод, основанный на теореме о свертке (1.116) для преобразования Меллина, позволяющий находить решение в $L_2(0, \infty)$ уравнения (39.12) при функции $\mathrm{k}^*(s)$, удовлетворяющей функциональному уравнению

$$\mathrm{k}^*(s)\,\mathrm{k}^*(1-s) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_j + (\eta_j+1-s)/m_j)\,\Gamma(\alpha_j + (\eta_j+s)/m_j)}{\Gamma((\eta_j+1-s)/m_j)\,\Gamma((\eta_j+s)/m_j)}. \tag{39.13}$$

Простейший случай (39.13), когда $\mathrm{k}^*(s)\mathrm{k}^*(1-s)=1$, общеизвестен, см., например, книгу Е. Титчмарша [1, с. 401]. В работе C. Fox [3] решение уравнения (39.12) с ядром $\mathrm{k}(x)$, удовлетворяющим условию (39.13), выражается через операторы типа

Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.4). Например, если это условие выполняется при $n=1$, $\alpha_1=\alpha$, $\eta_1=\eta$, $m_1=m$, то формальное решение уравнения (39.12) имеет вид

$$f(x)=\int_0^\infty (I^\alpha_{0+;\,m,\,\eta/m}\mathrm{k})(xt)\,(I^\alpha_{0+;\,m,\,\eta/m}g)(t)\,dt,$$

где $I^\alpha_{0+;\,\sigma,\eta}$ — оператор (18.1). В качестве примера дано также решение уравнения (39.12) с $\mathrm{k}(x)=\sqrt{2/\pi}\,x^\alpha\cos(x-\alpha\pi/2)$.

В работах C. Fox [5, 6] разработан метод, основанный на прямом и обратном преобразованиях Лапласа (1.119) и (1.120), который дает формальное решение уравнения (39.12) с ядром $\mathrm{k}(x)$, где

$$\mathrm{k}^*(s)=\prod_{j=1}^{n}\Gamma(\alpha_j s+\beta_j)\Big[\prod_{k=1}^{n}\Gamma(\gamma_k s+\delta_k)\Big]^{-1}. \qquad (39.14)$$

В качестве примеров получено решение уравнения (39.12), когда $\mathrm{k}(x)=\sin x$, $\mathrm{k}(x)=\sqrt{x}\,J_\nu(x)$, $\mathrm{k}(x)=x^\nu K_\nu(x)$, где $J_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$—функция Бесселя 1-го рода (1.83) и функция Макдональда (1.85) соответственно. В работе C. Fox [7] этот метод применен для получения формулы обращения преобразования Варма (9.6), а в работе R. U. Verma [8]—преобразования (39.12) с G-функцией Мейера $G^{2,0}_{1,2}(x)$ в ядре (см. (1.95)).

36.2. Говорят, что функции $\mathrm{k}(x)$ и $\mathrm{h}(x)$ образуют пару *ядер Фурье*, если они удовлетворяют взаимно обратным соотношениям

$$\int_0^\infty \mathrm{k}(xt)\,f(t)\,dt=g(x),\quad \int_0^\infty \mathrm{h}(xt)\,g(t)\,dt=f(x), \qquad (39.15)$$

каждое из которых можно рассматривать как формулу обращения другого. Если $\mathrm{h}(t)\neq\mathrm{k}(t)$, ядра Фурье называют *несимметричными*, а если $\mathrm{h}(t)=\mathrm{k}(t)$, —*симметричными*. Часто вместо (39.15) рассматриваются более общие равенства

$$\int_0^\infty \mathrm{k}_1(xt)\,f(t)\frac{dt}{t}=\int_0^x g(t)\,dt,\quad \int_0^\infty h_1(xt)\,g(t)\frac{dt}{t}=\int_0^x f(t)\,dt, \qquad (39.16)$$

где $\mathrm{k}_1(x)=\int_0^x \mathrm{k}(t)\,dt$, $\mathrm{h}_1(x)=\int_0^x \mathrm{h}(t)dt$, которые сводятся к (39.15) в случае возможности дифференцирования под знаком интеграла.

Впервые изучение G-функции Мейера (1.95) как симметричного ядра Фурье провел Narain Roop [1]. Эти исследования были развиты в работе C. Fox [2], в которой также впервые введена и изучена новая общая функция гипергеометрического типа, названная впоследствии H-функцией Фокса (изложение теории этой функции имеется в статье B. L. J. Braaksma [1], монографии A. M. Mathai, R. K. Saxena [1] и справочнике А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3]).

Вопросы, связанные с симметричными ядрами Фурье, рассматривались также в книге О. И. Маричева [10] и статье R. U. Verma [4]. В работах R. U. Verma [5, 6] методом, основанным на применении прямого и обратного преобразований Лапласа, уравнения вида (39.12) с G- и H-функциями соответственно в ядрах были сведены к уравнениям с симметричными ядрами Фурье, что позволило построить их решения в замкнутом виде. В работах R. N. Kesarwani [2—5] указанные функции изучались как несимметричные ядра Фурье. Заметим также, что в работе R. N. Kesarwani [6] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы функции $f(x)$, $g(x)\in L_2(0,\infty)$ удовлетворяли двойственным уравнениям (39.15) с $\mathrm{k}(x)=\mathrm{h}(x)=\gamma\mu^{\gamma/2}x^{(\gamma-1)/2}G^{q,p}_{2p,2q}\left((\mu x)^\gamma\times\right.$
$\left.\times\left|\begin{matrix}a_1,\ \ldots,\ a_p,\ -a_1,\ \ldots,\ -a_p\\ b_1,\ \ldots,\ b_q,\ -b_1,\ \ldots,\ -b_q\end{matrix}\right.\right)$, где $G^{q,p}_{2p,\,2q}$ — G-функция Мейера (1.95).

В случае, когда $\mathrm{h}(t)=\mathrm{k}(t)$ в (39.15) или (39.16), функции $f(x)$ и $g(x)$ называют k-*преобразованиями* друг друга. В работах V. P. Mainra [1] и B. Singh [1] изучены классы k-преобразований (39.15) с ядрами Фурье, в качестве которых взяты обобщенная функция Ватсона $w^{\nu_1,\ldots,\nu_m}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$, выражающаяся через многократный интеграл от произведения функций Бесселя, и функции, образованные действием на функцию Ватсона операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) соответственно. В работе K. Soni [2] показано, что если $f(x)$, $g(x)\in L_2(0,\infty)$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\mathrm{Re}\,\eta>-1/2$, то $f(x)$ и $g(x)$ являются k-преобразованиями тогда и только тогда, когда таковыми будут функции $I^{+}_{\eta,\alpha}f(x)$ и $K^{-}_{\eta,\alpha}f(x)$, где $I^{+}_{\eta,\alpha}$, $K^{-}_{\eta,\alpha}$ — операторы Кобера (18.5), (18.6).

36.3. Ряд работ (C. Fox [2], R. N. Kesarwani [5], R. K. Saxena [2, 4], K. C. Gupta, P. K. Mittal [1], Singh Rattan [1], S. L. Kalla [9], R. G. Buschman, H. M. Srivastava [1], R. K. Kumbhat [1], C. Nasim [1]) посвящен нахождению формул обращения в $L_1(0, \infty)$ или $L_2(0, \infty)$ уравнений вида (39.12) с H-функцией Фокса в ядре или же ее частными случаями. Решения в некоторых специальных случаях включают операторы дробного интегрирования типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) (R. K. Saxena [2], S. L. Kalla [9], R. G. Buschman, H. M. Srivastava [1]). В качестве примеров приведены формулы обращения преобразований Варма (9.6), Ханкеля и Мейера (см. § 1, п. 4°).

В работах V. P. Saxena [1], V. M. Bhise, Madhavi Dighe [1] и Madhavi Dighe [1] интегральные операторы вида (39.12) с H-функцией Фокса в ядре представлены в виде композиций операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) и операторов вида (39.12) с H-функцией Фокса меньшего порядка. В работе R. U. Verma [7] формально построено решение двумерного интегрального уравнения с ядром, являющимся произведением двух H-функций Фокса одной переменной.

Заметим еще, что в работах R. K. Raina, C. L. Koul [1, 2] и R. K. Raina [1] показано, что дробные интегралы (5.1), (5.3) от H-функции Фокса также являются H-функциями, но большего порядка.

36.4. В работе P. G. Rooney [5] исследовалось действие интегрального преобразования

$$(\mathrm{K}f)(x) = \int_0^\infty G^{mn}_{pq}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) f(t)\, dt, \quad x > 0, \tag{39.17}$$

из весового пространства $\mathcal{L}_{\mu,r} = \left\{ f : \int_0^\infty |x^\mu f(x)|^r x^{-1} dx < \infty, \quad 1 \leqslant r < \infty \right\}$ (см. P. G. Rooney [3]) на $\mathcal{L}_{1-\mu,s}$. С помощью преобразования Меллина дано описание образа оператора $\mathrm{K}f$ в терминах образов операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) и модифицированных преобразований Ханкеля и Лапласа:

$$(H_{k,\eta}f)(x) = \int_0^\infty (xt)^{1/k-1/2} J_\eta(|k|(xt)^{1/k}) f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} \eta > -1,$$

$$(L_{k,\alpha}f)(x) = \int_0^\infty (xt)^{-\alpha} e^{-|k|(xt)^{1/k}} f(t)\, dt, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, x > 0,$$

при различных значениях параметров G-функции Мейера из ядра. В случае $p + q = 2m + 2n$ получены условия и формула обращения уравнения $(\mathrm{K}f)(x) = g(x)$.

36.5. Ряд работ (K. M. Saksena [1], C. Fox [5], R. K. Saxena [1], G. O. Okikiolu [3, 6], H. M. Srivastava [1], R. P. Manandhar [1], R. S. Pathak [1]) посвящен применению операторов типа Эрдейи—Кобера (18.2), (18.4) для получения формул обращения интегральных преобразований (39.12) со специальными функциями Макдональда $K_\nu(x)$ и Уиттекера $W_{k,\mu}(x)$ в ядрах.

В работах K. M. Saksena [1], C. Fox [5], G. O. Okikiolu [3] и R. P. Manandhar [1] операторы типа Эрдейи—Кобера (18.1)—(18.4) и преобразование Меллина (1.112) использованы для нахождения формулы обращения в $L_p(0, \infty)$ преобразования

$$x^\gamma \int_0^\infty (xt)^{\alpha-1/2} K_{\nu-1/2}(xt) f(t)\, dt = g(x), \quad x > 0, \tag{39.18}$$

соответственно в случаях $p = 2$, $\gamma = 0$, $\alpha = \nu > 1/2$; $p > 1$, $\nu > 1/p$, $\gamma \geqslant 1 - 2/p > \gamma - \nu$, $\alpha + 1 - 1/p > \nu > -\alpha + 1/p$ и $1 \leqslant p < \infty$, $\nu \in R^1$, $\alpha > |\nu - 1/2| + 1/2 + 1/p'$ $(1/p + 1/p' = 1)$ при $\nu > 0$ и $\alpha > |\nu| - 1/p'$ при $\nu < 0$.

В работе G. O. Okikiolu [3] показано, что оператор (39.18) представим в виде композиции операторов модифицированного преобразования Лапласа и типа Эрдейи—Кобера (18.3) и действует ограниченно из $L_p(0, \infty)$ в $L_q(0, \infty)$, $1/q = 1 - \gamma - 1/p > 0$. Кроме того, доказано, что интегральные преобразования вида (39.18) с заменой $y^{\alpha-1/2}K_{\nu-1/2}(y)$ на $y^{1/2-\nu} J_{\nu-1/2}(y)$, $y^{1/2-\nu} Y_{1/2-\nu}(y)$, $y^{1/2-\nu} \mathbf{H}_{1/2-\nu}(y)$, где $J_\mu(y)$, $Y_\mu(y)$, $\mathbf{H}_\mu(y)$ — функции Бесселя и Струве (см. (1.83) и Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 12]), представимы в виде композиций дробных интегралов типа Эрдейи—Кобера (18.1), (18.3) и косинус- или синус-преобразований Фурье (1.108), (1.109).

Операторы Кобера (18.6) применены в работах K. M. Saksena [1] и R. K. Saxena [1] для получения формулы обращения преобразования Варма (9.6). Заметим также, что обращение преобразования Варма в терминах операторов прямого L и обратного L^{-1} преобразований Лапласа найдено в работе C. Fox [7].

В работе H. M. Srivastava [1] дана формула обращения преобразования

$$\int_0^\infty (xt)^{\nu-1/2} e^{-xt/2} W_{k+1/2,\mu}(xt) f(t)\, dt = g(x), \quad x > 0, \tag{39.19}$$

частным случаем которого при $\mu = \nu$ является преобразование Варма. Показано, что если $f(x) \in L_2(0, \infty)$ — решение уравнения (39.19) и $-\nu \leqslant k < \nu + 1/2$, то $f(x) = L^{-1} I^{\nu+k}_{-,1,\nu-k}\, g(x)$, где L^{-1}—оператор обратного преобразования Лапласа, $I^{\nu+k}_{-,1,\nu-k}$— оператор Эрдейи—Кобера (18.2). Другие формы решения уравнения (39.19) получены в работе R. S. Pathak [1].

Заметим также, что в работах B. H. J. McKellar, M. A. Box, E. R. Love [1] и E. R. Love [8] дробное интегродифференцирование прнменялось при получении формул обращения интегрального преобразования вида (39.12) с функцией Струве $\mathbf{H}_\nu(z)$ в ядре (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 46]).

36.6. Операторы Кобера (18.5), (18.6) в работе K. J. Srivastava [1] применены для изучения свойств обобщенного преобразования Мейера (9.7), действующего из $L_p(0, \infty)$ в $L_{p'}(0, \infty)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2,\ 1/p + 1/p' = 1)$, а в работах K. J. Srivastava [2, 3]—для изучения преобразования $\int_0^\infty \omega_{\mu,\nu}(xt) f(t)\, dt$ с функцией Ватсона $\omega_{\mu,\nu}(x) = x^{1/2} \int_0^\infty t^{-1} J_\nu(t) \times$ $\times J_\mu(x/t)\, dt$ в ядре, где $J_\nu(x)$—функция Бесселя (1.83), которое действует в $L_2(0, \infty)$.

36.7. В работах О. И. Маричева [1, 2] рассмотрено уравнение

$$\int_a^x f(t) \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} F_3\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; c; 1 - \frac{x}{t}, 1 - \frac{t}{x}\right) dt = g(x),$$

$$0 \leqslant a < x < b \leqslant \infty, \quad \operatorname{Re} c > 0,$$

содержащее в ядре функцию Аппеля F_3 двух переменных (10.45), и получено его решение через композиции трех операторов дробного интегродифференцирования или же через оператор с функцией F_3 в ядре (см. § 10, п. 3°). Уравнения подобного типа, но с функцией Аппеля F_1 в ядре изучены в работе О. И. Маричева, Ву Ким Туана [1].

36.8. В работе H. M. Srivastava, R. G. Buschman [1] рассмотрены операторы вида

$$x^{-\gamma-\alpha} \int_0^x (x + at)^{\alpha-1} t^\gamma f(t)\, dt, \qquad x^\delta \int_x^\infty (t + bx)^{\beta-1} t^{-\delta-\beta} f(t)\, dt,$$

из которых при $a = -1$, $b = -1$ получаются операторы Кобера (18.5), (18.6). Показано, что композиция таких операторов дает интегральный оператор с однородным ядром, включающим функцию Аппеля F_1 и, в частности, гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1$.

36.9. В работе G. M. Habibullah [1] рассмотрены интегральные операторы

$$Af(x) = x^\lambda \int_0^\infty (xt)^{b-1} {}_2F_1(a, b; c; -xt) f(t)\, dt,$$

$$Bf(x) = x^\lambda \int_0^\infty (xt)^{a-1} {}_1F_1(a; c; -xt) f(t)\, dt,$$

$$Cf(x) = x^\lambda \int_0^\infty (xt)^{a-1} \Psi(a, c; xt) f(t)\, dt,$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция (1.81), а Ψ — функция Трикоми (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 245]). Показано, что операторы A и B представимы в виде композиции операторов типа Эрдейи—Кобера (18.1) и обобщенных преобразований Стилтьеса и Лапласа соответственно, а оператор C — в виде композиции обобщенных преобразований Стилтьеса и Лапласа (см. § 1, п. 4° и § 9, п. 2°, 7.3 и 7.8). На основании этого установлена ограниченность операторов A, B, C из $L_p(0, \infty)$, $p \geqslant 1$, в $L_q(0, \infty)$, $1/q = 1 - 1/p - \lambda \geqslant 0$, и найдены их формулы обращения при некоторых условиях на параметры. Отметим, что ранее такого же рода результат, но в другом классе функций в отношении к операторам A и B получил R. Swaroop [1] (см. также книгу О. И. Маричева [10, с. 113—115]), а по отношению к оператору A — E. R. Love [6].

36.10. Пусть $I^{+}_{\eta,\alpha}$ — оператор Кобера (18.5), ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), а T_n — интегральный оператор $(T_n f)(x) = (-1)^n x f(x) + \int\limits_0^x k(t/x) f(t)\,dt$. В работе A. Erdelyi [5] показано, что если $f(x) \in L_2(0, \infty)$, $k(x) = [B(n, \nu+1)]^{-1} \times x^{\nu/2} {}_2F_1(1-n, \nu+n-1; \nu+1; x)$, $\nu > -1$, то имеет место представление

$$(T_n f)(x^{-1}) = (I^{+}_{\nu/2,\alpha})^{-1} R I^{+}_{\nu/2,\alpha} f(x), \quad Rg(x) = x^{-1} g(x^{-1}).$$

36.11. В работе О. И. Маричева [6] установлен ряд соотношений композиционного характера с участием дробных интегралов $x^{\beta} I^{\alpha}_{0+} x^{\gamma}$ и $x^{\beta} I^{\alpha}_{-} x^{\gamma}$, которые являются частными случаями равенства (36.34). Особый интерес представляют аналоги формул (11.27)—(11.30), реализующие связь некоторых пар интегральных операторов со специальными функциями в ядрах с сингулярным оператором. Укажем две пары формул такого типа:

$$\{J_{-\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi = (\cos\nu\pi + \sin\nu\pi x^{-\nu/2} S x^{\nu/2})\{J_{\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi,$$

$$\{J_{\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi = \{J_{-\nu}(2\sqrt{x})\}(\cos\nu\pi - \sin\nu\pi x^{\nu/2} S x^{-\nu/2})\varphi, \tag{39.20}$$

где $|\mathrm{Re}\,\nu| < 1/2$, $\{J_{\nu}(2\sqrt{x})\}\varphi = \int\limits_0^{\infty} J_{\nu}(2\sqrt{x/t})\varphi(t)t^{-1}\,dt$, и

$${}_3I^{c}_{-}(a, b)\varphi(x) = [\cos c\pi + \gamma x^{c-a-b} S x^{a+b-c} + \lambda S]\, {}_1I^{c}_{0+}(a, b)\varphi(x),$$

$${}_2I^{c}_{0+}(a, b)\varphi(x) = {}_4I^{c}_{-}(a, b)[\cos c\pi - \gamma x^{a+b} S x^{-a-b} - \lambda x^{c} S x^{-c}]\varphi(x), \tag{39.21}$$

где ${}_jI^{c}_{0+}(a, b)$ $(j = 1, 2)$, ${}_kI^{c}_{-}(a, b)$ $(k = 3, 4)$ — операторы (10.18)—(10.21) и

$$\gamma = -\frac{\sin a\pi \sin b\pi}{\sin(c-a-b)\pi}, \quad \lambda = \frac{\sin(c-a)\pi \sin(c-b)\pi}{\sin(c-a-b)\pi}, \quad c \neq a+b,$$

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}.$$

Эти соотношения были получены еще ранее в работе О. И. Маричева [3]. Все такие формулы справедливы на достаточно хороших функциях и проверяются применением к обеим частям преобразования Меллина (1.112).

Отметим еще, что в работе О. И. Маричева [7] с помощью формул такого типа и преобразования Меллина был указан некоторый класс полных сингулярных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами, разрешимых в квадратурах.

37.1. Решению частных случаев уравнения (37.1) с обобщенными многочленами Лагерра $L^{\alpha}_{n}(x)$ или функциями Уиттекера $M_{k,\nu}(x)$ в ядре посвящен ряд работ (D. V. Widder [3], R. G. Buschman [4], P. R. Khandekar [1], K. N. Srivastava [9, 10], K. C. Rusia [1, 5], C. Singh [1, 2, 4], B. K. Joshi [1], H. L. Gupta, K. C. Rusia [1]). В этих работах применялся метод преобразования Лапласа или исходное уравнение приводилось к интегральному уравнению Абеля (2.1).

В работе S. D. Gupta [1] с помощью преобразования Лапласа решено уравнение

$$\int\limits_0^x e^{a(x-t)}(x-t)^{\alpha} L^{\alpha}_{m,\mu}[(x-t)^{\mu}] f(t)\,dt = g(x), \quad 0 < x < a,$$

содержащее в ядре обобщенный полином Лагерра $L^{\alpha}_{m,\mu}(z)$, который определяется через преобразование Лапласа по формуле

$$L\{x^{\alpha} e^{ax} L^{\alpha}_{m,\mu}(x);\ p\} = \frac{\Gamma(m\mu+\alpha+1)}{\Gamma(m\mu+1)}(p-a)^{-\alpha}[1-(p-a)^{-\mu}]^{-m}, \quad \alpha > 0, \ \mathrm{Re}(p-a) > 0$$

(ср. с (37.19)).

В работе H. M. Srivastava [3] с помощью преобразования Лапласа получена формула обращения обобщающего (37.1) интегрального уравнения с вырожденной гипергеометрической функцией нескольких переменных

$$\Phi_2^r(a_1, \ldots, a_r; b; z_1, \ldots, z_r) = \sum_{m_1, \ldots, m_r=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \ldots (a_r)_{m_r}}{(b)_{m_1+\ldots+m_r}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \ldots \frac{z_r^{m_r}}{m_r!},$$

а также указано на применимость этого метода для решения общего уравнения (4.2) в случае, когда преобразование Лапласа ядра $L\,\mathrm{k}(p)$ представимо в виде $L\,\mathrm{k}(p) = [(p - \alpha)^n (L\,\mathrm{k}_1)(p)]^{-1}$, где $\mathrm{k}_1(x)$ — некоторая функция.

37.2. В работах S. L. Kalla [2] и T. N. Srivastava, Y. P. Singh [1] с помощью преобразования Лапласа получены решения уравнений (см. (37.2)):

$$\int_a^x (x^2 - t^2)^{\nu} J_{\nu}(\lambda(x^2 - t^2))\, e^{-b(x^2-t^2)} f(t)\, dt = g(x),$$

$$\int_0^x (x - t)^{\nu} J_{\nu}^{\mu}(\lambda(x - t)^{\mu}) f(t)\, dt = g(x),$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя (1.83), а $J_\nu^\mu(x)$—функция Бесселя—Мейтленда (см. § 23, п. 2°, 18.2).

В работе T. R. Prabhakar [3] метод дробного интегродифференцирования применен для решения интегрального уравнения

$$\int_a^x (x - t)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\rho}[\lambda(x - t)] f(t)\, dt = g(x), \quad \mathrm{Re}\,\beta > 0,$$

и аналогичного уравнения с переменным нижним пределом, где $E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{k!\Gamma(\alpha k + \beta)}$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, — обобщенная функция Миттаг-Леффлера.

В работе H. M. Srivastava, R. G. Buschman [2] метод, основанный на преобразовании Лапласа, был использован для нахождения решения наиболее общего сверточного уравнения

$$\int_0^x (x - t)^{\alpha-1} H_{p,q}^{m,n}\left[x - t \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \ldots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right.\right] f(t)\, dt = g(x) \qquad (39.22)$$

с H-функцией Фокса в ядре. В качестве примеров были рассмотрены частные случаи этого уравнения с обобщенной гипергеометрической функцией Райта ${}_p\Psi_{q-1}$, специальным случаем G-функции Мейера вида $G_{p,q}^{1,n}(x)$ и обобщенной гипергеометрической функцией типа ${}_pF_{p-1}$, см. также работу V. C. Nair [1], где рассмотрены сверточные уравнения с обобщенной гипергеометрической функцией Райта ${}_p\Psi_q$ и обобщенной функцией Бесселя—Мейтленда $J_\nu^\mu(x)$. В работе H. M. Srivastava [2] решение аналогичного (39.22) уравнения с переменным нижним и бесконечным верхним пределами было получено с помощью преобразования Меллина, а в качестве частных случаев были рассмотрены уравнения с G-функцией вида $G_{p,q}^{m,n}(x)$, обобщенной гипергеометрической функцией типа ${}_pF_q(x)$, функцией Уиттекера $W_{\lambda,\mu}(x)$ и функциями Бесселя $J_\nu(x)$, $K_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$.

37.3. Н. Я. Сонин ([4, 5], 1884 г., см. также [6, с. 151]) показал, что свойством (4.2″) наряду с операторами дробного интегродифференцирования ($\mathrm{k}(x) = x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, $l(x) = x^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$) обладают также операторы (4.2), (4.2′) с ядрами

$$\mathrm{k}(x) = (2x)^{-p} \frac{J_{-p}(2i\sqrt{xy})}{(2i\sqrt{xy})^{-p}}, \quad l(x) = \frac{(2x)^{p-1} J_{p-1}(2\sqrt{xy})}{(2\sqrt{xy})^{p-1}}, \quad 0 < p < 1, \qquad (39.23)$$

их частные случаи при $p = 1/2$ вида

$$\mathrm{k}(x) = \frac{\cos(2i\sqrt{xy})}{\sqrt{\pi x}}, \qquad l(x) = \frac{\cos(2\sqrt{xy})}{\sqrt{\pi x}}, \qquad (39.24)$$

а также операторы с ядрами

$$\mathrm{k}(x)=\frac{x^{-p}e^{-yx}}{\Gamma(1-p)},\quad l(x)=\frac{1}{\Gamma(p-1)}\int\limits_{-\infty}^{x}\tau^{p-2}e^{-\tau x}d\tau.$$

После квадратичных замен переменных и функций соответственно вида

$$x=\xi^2,\ t=\tau^2,\ a=c^2,\ 2\sqrt{y}=\lambda,\ 2^{1-p}\tau f(\tau^2)=F(\tau),\ g(\xi^2)=G(\xi);$$

$$x=a+b^2-\xi^2,\ t=a+b^2-\tau^2,\ 2i\sqrt{y}=\lambda,\ 2f(t)=\sqrt{\pi}F(\tau),\ g(x)=G(\xi)$$

операторы (4.2), (4.2′) с ядрами (39.23) принимают форму

$$\int\limits_{c}^{\xi}\left(\frac{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}{i\lambda}\right)^{-p}J_{-p}(i\lambda\sqrt{\xi^2-\tau^2})\,F(\tau)\,d\tau=G(\xi),$$

$$F(\tau)=\frac{d}{d\tau}\int\limits_{c}^{\tau}\left(\frac{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}{\lambda}\right)^{p-1}J_{p-1}(\lambda\sqrt{\tau^2-\xi^2})\,\xi\,G(\xi)\,d\xi,\quad 0<p<1,$$

что совпадает с (37.41), (37.43), а операторы с ядрами (39.24)—вид

$$\int\limits_{\xi}^{b}\frac{\cos(\lambda\sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}\,\tau F(\tau)\,d\tau=G(\xi),$$

$$F(\tau)=-\frac{2}{\pi\tau}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\tau}^{b}\frac{\operatorname{ch}(\lambda\sqrt{\xi^2-\tau^2})}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,\xi G(\xi)\,d\xi.$$

Авторство последних формул в некоторых работах приписывают Д. Джонсу (D. S. Jones [1]).

37.4. В работе Т. А. Розета [1] получена формула обращения в $L_2(0,\infty)$ общего интегрального уравнения (39.11) при определенных условиях на ядро $K(x, t)$. В качестве примеров даны формулы решения уравнений

$$\int\limits_{0}^{x}\frac{J_1(2\sqrt{x(x-t)})}{\sqrt{x-t}}f(t)\,dt=g(x),\qquad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{J_n(\sqrt{x(x+t)})}{(\sqrt{x+t})^n}f(t)\,dt=g(x),$$

первое из которых является предельным случаем уравнения (37.68) при $\alpha=0$, $\lambda=2i$.

Формула обращения несверточного уравнения $(J^{+}_{\alpha,\lambda}f)(x)=g(x)$ с оператором (37.67) при $\alpha=1$ получена в работе A. G. Mackie [1] (см. также работу K. Soni [4]) как пример более общего результата (см. далее п. 37.11).

В работе K. Soni [1] с помощью несверточных операторов (37.67) и операторов дробного интегродифференцирования (5.1), (5.8) решена задача описания класса функций $f(x)\in L_2(0,\infty)$, для которых $x^{\nu/2}\int\limits_{0}^{\infty}J_\nu(2\sqrt{xt})\,t^{-\nu/2}f(t)\,dt\in L_2(0,\infty)$ при $\nu>0$.

37.5. В работе H. Pollard, D. V. Widder [1] метод операционного исчисления применен для получения решения уравнения $\int\limits_{0}^{x}\mathrm{k}(x-t)f(t)\,dt=g(x)$, $x>0$, ядро $\mathrm{k}(u)=$ $=\dfrac{1}{u\sqrt{4\pi u}}\exp\left(-\dfrac{1}{4u}\right)$ $(u>0)$ которого связано с решением уравнения теплопроводности. При этом решение этого уравнения выражается через операторы дробного интегродифференцирования Римана—Лиувилля порядка 1/2.

37.6. Пусть $J_\lambda(\eta,\alpha)$, $R_\lambda(\eta,\alpha)$ — операторы (37.45), (37.46), $L_{p,\nu}\equiv L_p([0,\infty);\ x^{\nu p-1})$ — весовое пространство. Если $\alpha\geqslant 1/2$, $1<p<\infty$, то оператор $J_\lambda(\eta,\alpha)$ ограничен в $L_{p,\nu}$ при $\nu<2+2\eta$, а оператор $R_\lambda(\eta,\alpha)$ — при $\nu>-2\eta$. Если $0<\alpha<1/2$, $2/(1+2\alpha)<p<2/(1-2\alpha)$, то оператор $J_\lambda(\eta,\alpha)$ ограничен в $L_{p,\nu}$ при $\nu<\min(1,2/p)+$ $+2\alpha+2\eta$, а оператор $R_\lambda(\eta,\alpha)$ — при $\nu>\max(1,2/p)-2\alpha-2\eta$ (P. Heywood, P. G. Rooney [1], P. Heywood [3]).

37.7. Следуя работам T. R. Prabhakar [1, 2], в статье T. R. Prabhakar, M. Chakrabarty [1] с помощью дробных q-интегралов (см. § 23, п. 2°, 18.15) получена формула обращения q-интегрального аналога уравнения (37.1) с заменой ${}_1F_1$ на базисную вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1\Phi_1$ в ядре (см. L. J. Slater [1]).

37.8. В работе E. Pinney [1] рассмотрено интегральное уравнение

$$\int_0^\infty p(t)\,\varphi(\sqrt{x^2+t^2})\,dt = f(x), \quad x>0, \tag{39.25}$$

и дано его решение $\varphi(x) = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(\sqrt{x^2+t^2})\,q(t)\,dt$ в предположении, что для функции $p(x)$ существует функция $q(x)$ такая, что $\int_0^{\pi/2} p(r\cos\varphi)\,q(r\sin\varphi)\,d\varphi = 1$ для любого $r>0$. В этой работе также получены достаточные условия для выполнения последнего соотношения, которое для уравнения (39.25) является аналогом равенства (4.2″) для уравнения Н. Я. Сонина (4.2), и рассмотрены следующие частные случаи:

$$p(t) = t^{1-2\mu} L_\nu^{-\mu}(kt^2), \quad 0<\operatorname{Re}\mu<1,$$

где

$$L_\nu^{-\mu}(z) = -\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\nu)}{\Gamma(k+\mu+1)}\,\frac{z^k}{k!}$$

— обобщенная функция Лежандра (при натуральном $\nu=n$ многочлен Лежандра $L_n^{-\mu}(z)$); в частности, $p(t)\to t^{1-2\mu}$ при $\nu\to 0$; и

$$p(t) = t^{1-\mu} J_{-\mu}(\alpha t), \quad 0<\operatorname{Re}\mu<1,$$

где $J_{-\mu}(z)$ — функция Бесселя 1-го рода (1.83); в частности, $p(t)=\cos\alpha t$ при $\mu=1/2$. В случае $p(t)=t^{1-2\mu}$, $0<\operatorname{Re}\mu<1$, показана связь уравнения (39.25) с уравнением Абеля (2.1), а при $p(t)=\cos\alpha t$ уравнение (39.25) сведено к виду $\int_x^\infty \frac{\cos(\alpha\sqrt{t-x})}{\sqrt{t-x}}\times$ $\times f(t)\,dt = g(x)$, $x>0$.

37.9. В работе K. Soni [3] для операторов вида (37.4) найдено представление

$$\int_0^x (x-t)^{\nu/2} J_\nu[2\sqrt{k(x-t)}]\,f(t)\,dt = \frac{k^{\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^x (x-t)^\nu \times$$
$$\times\left[\frac{d}{dt}\int_0^t J_0[2\sqrt{k(t-\tau)}]\,f(\tau)\,d\tau\right]dt;$$

для уравнения

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x J_0[2\sqrt{k(x-t)}]\,f(t)\,dt = g(x), \qquad -\infty<x<\infty,$$

даны необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_2(-\infty,\infty)$ и получено его решение вида $f(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^\infty J_0[2\sqrt{k(t-x)}]\,g(t)\,dt$, а для уравнения

$$\frac{d}{dx}\int_a^x J_0[2\sqrt{k(x-t)}]\,f(t)\,dt = g(x), \quad a>-\infty,$$

исследованы условия единственности его решения в классе $L_2(a,+\infty)$ в связи с тем, что соответствующее однородное уравнение ($g\equiv 0$) может иметь в $L_2(a,+\infty)$ нетривиальное решение. Аналогичные исследования проведены для операторов с переменным нижним пределом (см. также C. J. Bouwkamp [1]). В работе W. E. Williams [1] методом представления в виде композиции двух уравнений вида (37.4) решено уравнение (39.11) с ядром

$$\mathscr{K}(x,t) = \int_b^\infty (\tau^2-b^2)^r\,\tau^{-m-n-1} J_m(x\tau)\,J_n(t\tau)\,d\tau.$$

Отметим здесь, что в приложениях встречаются и другие интегральные уравнения с функцией Бесселя $J_\nu(x)$ в ядре, рассматриваемые на всей оси. Два таких уравнения можно получить из формул (40.26), (40.27), если в первой произвести дифференцирование по y при $y=0$ и учесть (40.45), (40.44), а во второй положить $y=0$ и учесть (40.32), (40.47). Тогда при $\mu=0$ после замены $\tau(x)=l_2 g(x)$ при $|p|<1/2$, $p\neq 0$ получатся соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu(t)}{|t-x|^{2p}} \overline{J}_{-p}(\lambda|t-x|)\,dt = g(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\nu(x) = -\frac{\operatorname{ctg} p\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(t-x)}{|t-x|^{1-2p}} \frac{d}{dt}\left[g(t)\overline{J}_{p-1}(\lambda|t-x|)\right] dt,$$

где $\overline{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя—Клиффорда (37.8). Можно убедиться, что второе из них обращает первое при соответствующих условиях на функцию $g(x)$.

37.10. Пусть $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (1.85), $Y_\nu(z)$ — функция Бесселя 2-го рода (Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 12]). В работе V. K. Varma [1] с помощью преобразования Меллина и использования формул 21 и 20 из табл. 9.1 даны решения аналогичных (37.4) уравнений с переменным нижним и бесконечным верхним пределами с заменой J_ν на K_ν и Y_ν :

$$\int_x^{\infty} (t-x)^{(\nu-1)/2} K_\nu(2\sqrt{t-x})\, f(t)\,dt = g(x),$$

$$\int_x^{\infty} (t-x)^{(\nu-1)/2} Y_\nu(2\sqrt{t-x})\, f(t)\,dt = g(x).$$

37.11. В работе A. G. Mackie [1] методом сведения к краевой задаче для дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + c(x, y)\varphi = 0,\ c(x, y)=c(y, x),\ \varphi(x, 0)=f(x),\ x>0,\ \varphi(0, y)= -f(y),\ y>0, \tag{39.26}$$

в первом квадранте $x>0$, $y>0$ получено решение интегрального уравнения

$$\int_0^x \mathcal{K}(x, t)\, g(t)\,dt = f(x), \qquad g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\Big|_{x=y},$$

где $\mathcal{K}(x, t) = R(x, x;\ t, 0)$, а $R(x, x_0;\ t, t_0)$—функция Римаиа уравнения (39.26), см. определение 40.2. В качестве примеров решены уравнение (37.67) при $\alpha=1$ и уравнения $\int_0^x P_n(x/t)\,\varphi(t)\,dt = g(x)$, $\int_0^x P_n(t/x)\,\varphi(t)\,dt = g(x)$ с многочленами Лежандра $P_n(z)$ в ядрах (ср. с уравнением (39.3)).

37.12. В работе T. R. Prabhakar [5] рассмотрены уравнения вида

$$\int_\alpha^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} \Phi_1(a, b;\ c;\ 1-x/t,\ \lambda(x-t))\, f(t)\,dt = g(x), \quad \alpha < x < \beta, \tag{39.27}$$

$$\int_\alpha^x \frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} \Phi_1(a, b;\ c;\ 1-t/x,\ \lambda(x-t))\, f(t)\,dt = g(x), \quad \alpha < x < \beta, \tag{39.28}$$

где $\Phi_1(a, b;\ c;\ x, y)$ — функция Гумберта (10.64), $\alpha>0$, $\beta<\infty$. В частности, при $\lambda=0$ уравнения (39.27), (39.28) являются уравнениями Лава (35.1), (35.2), а при $b=0$ — уравнениями вида (37.1). Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости этих уравнений в $L_1(\alpha, \beta)$ и получены их решения в виде

$$f(x) = e^{\lambda x} x^{-b} I_{\alpha+}^{-a} e^{-\lambda x} x^b I_{\alpha+}^{a-c} g(x), \qquad f(x) = I_{\alpha+}^{a-c} e^{\lambda x} x^b I_{\alpha+}^{-a} e^{-\lambda x} x^{-b} g(x)$$

соответственно. Здесь $I_{\alpha+}^{a}$ — оператор дробного интегродифференцирования Римана—Лиувилля (см. § 2). В работе T. R. Prabhakar [6] эти результаты перенесены на уравнения вида (39.27), (39.28) с переменным нижним и конечным верхним пределами и более общие уравнения, например, уравнение

$$\int\limits_x^\beta \frac{[\mathrm{h}(t)-\mathrm{h}(x)]^{c-1}}{\Gamma(c)}\,\Phi_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{\mathrm{h}(x)}{\mathrm{h}(t)},\ \lambda(\mathrm{h}(x)-\mathrm{h}(t))\right)f(t)\,d\,\mathrm{h}(t)=g(x),\ \alpha<x<\beta,$$

где $\mathrm{h}(t)\in C^\infty[\alpha,\ \beta]$, $\mathrm{h}'(t)>0$. Заметим, что, в частности, при $\lambda=0$, $\mathrm{h}(t)=t^m$ последнее уравнение сводится к уравнению (39.6), а при $b=0$, $\mathrm{h}(t)=t$ — к уравнению (37.1).

37.13. В работе Y. Tanno [1] изучена проблема обращения интегральных преобразований типа свертки $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{k}(x-t)f(t)\,dt=g(x)$, где $\mathrm{k}(x)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}[l(t)]^{-1}e^{xt}dt$, а $l(t)$—мероморфная функция с действительными нулями и полюсами, а также более общих преобразований (см. по этой тематике монографию И. И. Хиршмана, Д. В. Уиддера [1]). В качестве примеров получены решения уравнения Абеля (2.1), уравнения Хиггинса (39.1) и уравнения вида (39.4).

37.14. В работе R. K. Saxena, P. L. Sethi [1] установлены аналогичные (37.60), (37.61) операторные соотношения, которые связывают оператор обобщенного преобразования Ханкеля (37.47) и модификации операторов (23.5), (23.6).

37.15. В работе O. Tedone [2] рассмотрено интегральное уравнение

$$\int\limits_a^x (x-t)^n\,I_m(x-t)\,f(t)\,dt=g(x),\quad m\geqslant 0,\ m+n\geqslant 0,\tag{39.29}$$

с модифицированной функцией Бесселя (1.84) в ядре. На основании свойств функции $I_m(z)$ для операторов (39.29) установлены некоторые дифференциально-рекуррентные соотношения. С их помощью решение уравнения (39.29) при m, $n=0$, 1, 2, ... сведено к последовательному решению простейших уравнений с $m=n=0$ (см. п. 1° (к § 37, п. 1°)) и дифференциального уравнения, а при $m=0$, 1, 2, ..., $n=-1$, -2, ..., $m+n>0$ — к решению интегрального уравнения Вольтерра с разностным ядром.

38.1. Н. Н. Лебедев [2] при изучении частного случая уравнений (38.1) пришел к уравнению Шлемильха

$$\int\limits_0^r \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\equiv-\int\limits_0^{\pi/2}\varphi(r\cos\theta)\,d\theta=g(r),$$

содержащему дробный интеграл порядка 1/2 по функции x^2 (см. § 18, п. 2°). Обращение этого уравнения было использовано в работе Н. Н. Лебедева, Я. С. Уфлянда [1].

38.2. В работе C. J. Tranter [3] решение уравнений (38.1) в случае $G=0$, $\mu=\nu$ представлено в виде ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k J_{\nu+2k+n}(x)$ по функциям Бесселя (1.83), в результате чего задача была сведена к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно a_k.

В работе J. C. Cook [1] использован интегральный аналог такого метода, давший возможность свести эту систему к уравнению Фредгольма 2-го рода.

38.3. В работах J. R. Walton [1, 2] изучен вопрос единственности решения парного уравнения (38.1) в классе обобщенных функций.

38.4. В работе C. Nasim, I. N. Sneddon [1] исследованы парные уравнения с ядрами общего вида с помощью преобразования Меллина. В качестве примеров рассмотрены парные уравнения с различными функциями Бесселя и тригонометрическими функциями в ядрах вида (38.1).

38.5. В работе Л. Г. Макаренко [1] с помощью двумерных аналогов операторов Эрдейи—Кобера (см. § 29, п. 2°, 24.2) были изучены двумерные парные и тройные интегральные уравнения с функциями Бесселя в ядрах.

38.6. В работе P. L. Sethi, P. K. Banerji [1] с помощью дробного интегродифференцирования уравнение более общее, чем (38.16), сводится к уравнению Фредгольма 2-го рода.

38.7. Впервые система парных уравнений, связанная с преобразованием Мелера—Фока и сводящаяся к (38.22) при $g=\mu=0$, $H(\tau)=th\tau\pi/\tau$, была исследована В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко [1]. В этой работе использовались дробные интегралы порядка 1/2 по функции $\mathrm{ch}\,x$, что позволило систему свести к уравнению Фредгольма 2-го рода.

Две системы с такими же ядрами и две системы с тригонометрическими ядрами подобным методом независимо исследовал А. А. Баблоян [1], а систему вида (38.22), но с целым μ впервые исследовали А. Н. Руховец, Я. С. Уфлянд [1]. Эти результаты были развиты в статье Н. А. Вирченко, Л. Г. Макаренко [1].

Отметим также работу Н. Н. Лебедева, И. П. Скальской [1], где при изучении системы (38.22) с $\mu=0$ и $H(\tau)$ специального вида вместо дробных интегралов было получено уравнение с функцией Гаусса

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\, {}_2F_1\left(\alpha, -\alpha; \frac{1}{2}; 1-\frac{x}{t}\right) dt = g(x),$$

для обращения которого использовался результат работы E. R. Love [2], см. § 35, п. 1°.

В статье Н. А. Вирченко [1] при исследовании трех парных уравнений с обобщенной присоединенной функцией Лежандра в ядре использовалась формула обращения более общего уравнения с функцией Гаусса

$$\int_a^x \varphi(t)\,(\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} t)^{c-1}\, {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} x+d}\right) dt = g(x), \quad c>0.$$

В работе С. П. Пономаренко [2] рассматривалась система парных уравнений матричного типа $P^{\mu}[A_j(\tau)\,\Psi(\tau)] = f^{(j)}(x)$, $j=1, 2$, которая с помощью операторов (38.24)—(38.27) была сведена к системе уравнений Фредгольма 2-го рода.

Наряду с уравнениями (38.22) в некоторых работах рассматривались аналогичные уравнения, связанные с обратным преобразованием Конторовича—Лебедева. Парные и тройные уравнения такого типа исследованы в статье J. S. Lowndes [3], причем парные как предельный частный случай тройных. Один из случаев парных уравнений решен в замкнутой форме, а остальные сведены к уравнениям Фредгольма 2-го рода.

38.8. Уравнения (38.31) обобщают системы из работ J. C. Cooke [3] и Н. М. Бородачева [1] и пересекаются с системой из работы С. П. Пономаренко [1]. Все эти системы с помощью операторов Эрдейи—Кобера сводятся к уравнениям Фредгольма 2-го рода.

38.9. В работах Н. А. Вирченко, Л. Г. Макаренко [3] и Л. Г. Макаренко [1] рассматривались парные и тройные интегральные уравнения с более общими, чем $J_\nu(z)$, ядрами с функцией Ватсона $\omega_{\mu,\nu}(x)$, см. выше п. 36.6. Эти уравнения были сведены к уравнениям Фредгольма 2-го рода.

38.10. В статье Н. А. Вирченко [2] метод из § 38, п. 1°, пример 38.1, использован для вывода формул обращения двух парных уравнений с функциями ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$ в ядрах путем их сведения к уравнению $Af=g$, где A — оператор из п. 36.9.

38.11. В работах K. N. Srivastava [11] и Н. А. Вирченко, В. А. Ромащенко [1] рассматривались тройные интегральные уравнения типа (38.22) при $\mu=0$ и произвольном μ соответственно. В последней из этих работ был обобщен результат из статьи R. S. Pathak [2].

В работах M. Lowengrub, J. Walton [1], J. R. Walton [3] система тройных уравнений типа (38.31) с помощью операторов Эрдейи—Кобера (18.5), (18.6) сведена к системе обобщенных интегральных уравнений Абеля, см. § 34, п. 2°, 30.9.

38.12. В некоторых работах рассматривались 4-кратные и n-арные интегральные уравнения. Так, в работе M. I. Ahmad [1] методом из работы J. C. Cooke [2] были исследованы 4-кратные уравнения с функциями $J_\nu(z)$ в ядрах, а в работе A. P. Dwivedi, T. N. Trivedi [1] метод, использованный в § 38 при решении системы (38.16), был применен к аналогичным тройным и 4-кратным уравнениям.

Дальнейшее обобщение в этом направлении было сделано в работе Ву Ким Туана [5], в которой рассматривались n-арные уравнения с G-функцией Мейера в ядрах вида

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty xG^{m,\,l_i+1}_{p+l_i+1,\,q_i+m+1}\left(xy\,\middle|\,\begin{matrix}0, & (a^i_{l_i}), & (c_p)\\ (b_m), & (d^i_{q_i}), & -1\end{matrix}\right) f(y)\,dy = g_i(x), \quad \alpha_{i-1}<x<\alpha_i,$$

$$x\,\frac{d}{dx}\int_0^\infty G^{m_i,\,l+1}_{p_i+l+1,\,q+m_i+1}\left(xy\,\middle|\,\begin{matrix}1, & (a_l), & (c^i_{p_i})\\ (b^i_{m_i}), & (d_q), & 0\end{matrix}\right) f(y)\,dy = g_i(x), \quad \alpha_{i-1}<x<\alpha_i,$$

где $0<\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=\infty$ — некоторое разбиение луча $[0, \infty)$ на n интервалов, $g_i(x)$ — заданные функции, а остальные параметры удовлетворяют специальным условиям. Было доказано, что для разрешимости системы в классе $f(x)\in L_2(0, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы $g_i\in L_2(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Единственное решение в этом случае было найдено в замкнутом виде. При этом использовались методы работ C. Fox [4] и R. K. Saxena [3, 4], где формально (без исследования классов функций) строились решения парных уравнений с более общей H-функцией Фокса в ядрах. В этих работах применялись операторы Эрдейи—Кобера.