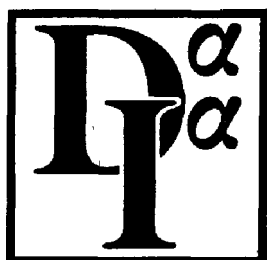


С.Г.Самко/А.А.Килбас/О.И.Маричев

ИНТЕГРАЛЫ
И ПРОИЗВОДНЫЕ
ДРОБНОГО
ПОРЯДКА
И НЕКОТОРЫЕ
ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ



МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1987

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.** Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Книга посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложениям теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты указанной теории. В конце каждой главы приводятся исторические сведения и обзоры работ по тематике главы. Книга носит энциклопедический характер, охватывает самые разнообразные известные формы дробного интегрирования и дифференцирования и огромное число публикаций в этой области вплоть до 1986 г.

Включение в книгу необходимых предварительных сведений и подробное изложение доказательств делают ее доступной студентам физико-математических факультетов, а также технических вузов.

Предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим анализом и его приложениями.

Табл. 11. Ил. 6. Библиогр.: 1421 назв.

Редактор

академик АН СССР С. М. Никольский

Рецензенты:

П. И. Лизоркин, д-р физ.-мат. наук,
М. М. Смирнов, д-р физ.-мат. наук,
А. П. Прудников, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. Брычков, канд. физ.-мат. наук

ГЛАВА

5

Дробное интегриро- дифференцирование функций многих переменных

В этой главе исследуем интегрирование и дифференцирование дробного порядка функций многих переменных. Здесь можно рассматривать частные производные дробного порядка $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_h^\alpha}$, смешанные дробные производные $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ и т. п. вместе с соответствующими дробными интегралами. Этому подходу посвящен § 24. Можно пойти по другому пути — вводить дробные степени $(-\Delta)^{\alpha/2}$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots$

$\dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Такой подход развит в § 25, 26.

Он допускает естественное обобщение — можно вводить дробные степени $[P(\mathcal{D})]^\alpha$ дифференциального оператора $P(\mathcal{D})$ в частных производных с постоянными коэффициентами. Мы не останавливаемся в этой книге на таком обобщении, рассмотрев лишь некоторые специальные случаи операторов $P(\mathcal{D})$ в § 27 и 28. В § 29 можно найти ссылки на более общие ситуации.

Всюду в этой главе будут приняты следующие обозначения. Через R^n обозначаем n -мерное евклидово пространство; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ и т. п. — точки (векторы) в R^n ; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $x \cdot t = x_1 t_1 + \dots + x_n t_n$ — скалярное произведение в R^n ; $x \circ t = (x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$ — вектор в R^n ; $dt = dt_1 \dots dt_n$. Будем обозначать $R_{+ \dots +}^n = \{x: x \in R^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ — октант в R^n с неотрицательными координатами, S_{n-1} — единичную сферу в R^n с центром в начале координат, $|S_{n-1}| = 2\pi^{n/2} \Gamma^{-1}(n/2)$ — ее площадь. Через $j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ обозначаем мультииндекс, так что $x^j = x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$, а через $|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$ — длину мультииндекса (не опасаясь смешения с обозначением для расстояния в R^n). Пусть $\mathcal{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$. Тогда $\mathcal{D}^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}$.

Запись $\alpha > 0$ в случае, когда $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, означает, что $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Как обычно, $L_p(R^n)$ обозначает пространство функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$,

для которых $\|f\|_p = \left\{ \int_{R^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty$, а $C_0^\infty = C_0^\infty(R^n)$ — класс бесконечно дифференцируемых финитных функций.

§ 24. ЧАСТНЫЕ И СМЕШАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Дадим непосредственное распространение операций дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля на случай многих переменных, когда эти операции применяются независимо по каждой переменной или по некоторым из них. Рассмотрим наряду с интегродифференцированием по Риману—Лиувиллю и другие его формы (Маршо, Грюнвальда—Летникова, Вейля для периодических функций многих переменных).

1°. Многомерное интегральное уравнение Абеля. Начнем с обобщения уравнения (2.1) на случай многих переменных. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — функции n независимых переменных и $a = (a_1, \dots, a_n)$ — фиксированная точка в R^n . Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a, \quad (24.1)$$

где

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (x-t)^{\alpha-1} = (x_1-t_1)^{\alpha_1-1} \dots (x_n-t_n)^{\alpha_n-1}, \quad (24.2)$$

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n), \quad dt = dt_1 \dots dt_n$$

и запись $x > a$ означает, что $x_1 > a_1, \dots, x_n > a_n$.

Считая, что $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, действуем по каждой переменной точно так же, как в (2.2), (2.3). Придем к соотношению

$$\int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}$$

с учетом обозначений (24.2). Дифференцируя это равенство по $x_1, \dots, x_n$, получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}. \quad (24.3)$$

Таким образом, если уравнение (24.1) имеет решение, то оно единственно и дается формулой (24.3).

2°. Частные и смешанные дробные интегралы и производные. Отправляясь от одномерного определения (2.17), естественно ввести *частный интеграл Римана—Лиувилля дробного порядка α_k по k -й переменной* равенством

$$(I_{a_k}^{\alpha_k} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{a_k}^{x_k} \frac{\varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n)}{(x_k - \xi)^{1-\alpha_k}} d\xi, \quad (24.4)$$

где $\alpha_k > 0$. [Это определение предполагает, что функции $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ заданы при $x_k > a_k$. Если ввести обозначение $e_k = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{k-1}$

для k -го единичного орта, то частный дробный интеграл (24.4) можно компактно записать в виде

$$(I_{a_k+}^{\alpha_k} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_0^{x_k - a_k} \frac{\varphi(x - \xi e_k)}{\xi^{1-\alpha_k}} d\xi.$$

Далее, выражение

$$(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) = (I_{a_1+}^{\alpha_1} \dots I_{a_n+}^{\alpha_n} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_n}^{x_n} \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (24.5)$$

определенное для функций $\varphi(x)$, заданных при $x_k > a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, будем называть (левосторонним) смешанным дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Смешанный дробный интеграл может применяться по части переменных, т. е. могут допускаться значения $\alpha_k = 0$. В этом случае полагаем $I_{a_k+}^{\alpha_k} \varphi \equiv \varphi$ в (24.5) и, считая для простоты, что $\alpha_k = 0$ для $k = m+1, \dots, n$ и $\alpha_k > 0$ для $k = 1, 2, \dots, m$, имеем

$$(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_m)} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_m}^{x_m} \frac{\varphi(\tau, x'')}{(x' - \tau)^{1-\alpha'}} d\tau, \quad (24.6)$$

где $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, $(x' - \tau)^{1-\alpha'} = \prod_{k=1}^m (x_k - \tau_k)^{1-\alpha_k}$, $1 - \alpha' = (1 - \alpha_1, \dots, 1 - \alpha_m)$.

Аналогично определяется (правосторонний) смешанный дробный интеграл $I_{b-}^{\alpha} \varphi$ для функций $\varphi(x)$, заданных при $x < b$. Возможен более общий вариант, когда по части переменных применяется левостороннее интегрирование, а по другой части — правостороннее, например,

$$(I_{a+, b-}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_m}^{x_m} \int_{x_{m+1}}^{b_{m+1}} \dots \int_{x_n}^{b_n} \frac{\varphi(t) dt}{(x' - t')^{1-\alpha'} (t'' - x'')^{1-\alpha''}}, \quad (24.7)$$

где x', x'' — те же, что в (24.6), $1 - \alpha'' = (1 - \alpha_{m+1}, \dots, 1 - \alpha_n)$, а $t = (t', t'')$, $t' = (t_1, \dots, t_m)$, $t'' = (t_{m+1}, \dots, t_n)$, $1 \leq m \leq n$.

Аналогично (24.4), отходя от (2.22), вводим частную дробную производную Римана—Лиувилля порядка α_k , $0 < \alpha_k < 1$, по k -й переменной

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a_k+}^{\alpha_k} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{a_k}^{x_k} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n)}{(x_k - \xi)^{\alpha_k}} d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^{x_k - a_k} \xi^{-\alpha_k} f(x - \xi e_k) d\xi. \end{aligned}$$

Для дифференцируемых функций $f(x)$ это выражение можно записать подобно (2.24) в виде

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a_k+}^{\alpha_k} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k)} \left[\frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)}{(x_k - a_k)^{\alpha_k}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_k}^{x_k} \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n)}{(x_k - \xi)^{\alpha_k}} d\xi \right]. \quad (24.8) \end{aligned}$$

Ввиду обращения (24.3), справедливого при $0 < \alpha_k < 1$, правую часть в (24.3) будем называть *смешанной дробной производной Римана—Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$* . Подобно (24.6) смешанная дробная производная может применяться по части переменных. Именно пусть, как и в (24.6), $\alpha_k = 0$ для $k = m+1, \dots, n$ и $0 < \alpha_k < 1, k = 1, 2, \dots, m$. Выражение

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} \int_{a_1}^{x_1} \dots \int_{a_m}^{x_m} \frac{f(\tau, x'')}{(x' - \tau)^{\alpha}} d\tau \quad (24.9)$$

и будем называть *смешанной дробной производной Римана—Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, \dots, 0)$* .

Заметим, что в (24.9) существует порядок дифференцирования. Так, функция $f(x_1, x_2) = (x_2 - a_2)^{\alpha_2 - 1} g(x_1)$, $0 < \alpha_2 < 1$, где $g(x_1)$ лишь непрерывна, но не более того, имеет производную $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f \equiv 0$ при указанном в (24.9) порядке, но не имеет этой производной, если в (24.9) взять $\partial^2 / \partial x_2 \partial x_1$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема до порядка m , то выражение (24.9) можно привести к виду, подобному (24.8), с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Ограничимся соответствующей записью в случае двух переменных, $x = (x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{(a_1, a_2)+}^{(\alpha_1, \alpha_2)} f)(x) = & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1) \Gamma(1-\alpha_2)} \left[\frac{f(a_1, a_2)}{(x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2}} + \right. \\ & + \frac{1}{(x_1 - a_1)^{\alpha_1}} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial f(a_1, t_2)}{\partial t_2} \frac{dt_2}{(x_2 - t_2)^{\alpha_2}} + \frac{1}{(x_2 - a_2)^{\alpha_2}} \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial f(t_1, a_2)}{\partial t_1} \times \\ & \times \frac{dt_1}{(x_1 - t_1)^{\alpha_1}} + \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\partial^2 f(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{dt_1 dt_2}{(x_1 - t_1)^{\alpha_1} (x_2 - t_2)^{\alpha_2}} \Big]. \end{aligned}$$

В случае $\alpha_h > 1$ смешанные дробные производные вводим, следуя (2.30), равенством

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = \mathcal{D}^j I_{a+}^{j-\alpha} f, \quad \alpha \geq 0, \quad (24.10)$$

где $j = ([\alpha_1] + 1, \dots, [\alpha_m] + 1, 0, \dots, 0)$.

Можно, очевидно, вводить интегродифференциальные операции I_{a+}^{α} , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, с порядками α_h разных знаков, т. е. такие операции, когда по одной части переменных применяется дробное интегрирование, а по другой — дробное дифференцирование.

Подобно (2.21) проверяется выполнение полугруппового свойства

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad (24.11)$$

где $\alpha + \beta$ — сумма векторов α, β . Здесь $\varphi(x)$ — произвольная функция, суммируемая в любой ограниченной части октанта $x > a$.

Непосредственно проверяется, что для любого монома $x^{\beta-1} = x_1^{\beta_1-1} \dots x_n^{\beta_n-1}$ его частные и смешанные дробные интегралы и производные (24.4), (24.5), (24.9), (24.10) при выборе $a = (0, \dots, 0)$ вычисляются по формуле

$$\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} (x^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} x^{\beta-\alpha-1},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — любое, $\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} = I_{0+}^{-\alpha_i}$ при $\alpha_i < 0$ и $\Gamma(\beta) = \Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_n)$ (ср. с (2.44)).

В случае функций, заданных во всем пространстве R^n , будем рассматривать *лиувиллевские дробные интегралы*

$$I_{+\dots+}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{R_{+\dots+}^n} t^{\alpha-1} \varphi(x-t) dt, \quad (24.12)$$

$$I_{-\dots-}^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{R_{+\dots+}^n} t^{\alpha-1} \varphi(x+t) dt, \quad (24.13)$$

где $R_{+\dots+}^n$ — октант $\{t: t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0\}$, $t^{\alpha-1} = t_1^{\alpha_1-1} \dots t_n^{\alpha_n-1}$. Можно ввести также подобно (24.7) дробное интегрирование типа $I_{\pm \dots \pm}^{\alpha}$ с произвольным выбором знаков $+$ и $-$.

Лиувиллевские частные производные $\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f$ вводятся равенствами

$$\frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}} f \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_{+}^{\alpha_k} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_0^{\infty} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n)}{\xi^{\alpha_k}} d\xi, \quad (24.14)$$

а смешанные лиувиллевские производные

$$\mathcal{D}_{+\dots+}^{\alpha} f, \quad \mathcal{D}_{-\dots-}^{\alpha} f \quad (24.15)$$

записываются аналогично (24.9), (24.10), например,

$$\mathcal{D}_{-\dots-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^{n+[\alpha_1]+\dots+[\alpha_n]}}{\prod_{k=1}^n \Gamma([\alpha_k] + 1 - \alpha_k)} \frac{\partial^{[\alpha_1]+\dots+[\alpha_n]+n}}{\partial x_1^{[\alpha_1]+1} \dots \partial x_n^{[\alpha_n]+1}} \int_{R_{+\dots+}^n} t^{\alpha-1} \varphi(x+t) dt. \quad (24.15')$$

Отметим аналог формулы (5.16) «дробного интегрирования по частям»:

$$\int_{R^n} \varphi(x) (I_{+\dots+}^{\alpha} \psi)(x) dx = \int_{R^n} \psi(x) (I_{-\dots-}^{\alpha} \varphi)(x) dx, \quad (24.16)$$

вытекающий непосредственно из (5.16).

3°. Случай двух переменных. Тензорное произведение операторов. Рассмотрим здесь отдельно случай двух переменных x_1, x_2 . Нам будет удобно пользоваться понятием тензорного произведения операторов. Приведем соответствующее

Определение 24.1. Пусть $A_1 u$ и $A_2 v$ — линейные операторы, заданные на функциях $u(x_1), v(x_2)$ одного переменного. Тензорным произведением операторов A_1 и A_2 называется оператор $A_1 \otimes A_2$, определенный на функциях вида

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_i u_i(x_1) v_i(x_2) \quad (24.17)$$

равенством

$$(A_1 \otimes A_2) \varphi = \sum_i A_1 u_i A_2 v_i. \quad (24.18)$$

При рассмотрении конкретных классов X функций φ (например, $X = L_p(R^2)$) функции вида (24.17) образуют обычно плотное в X множество и поэтому оператор $A_1 \otimes A_2$ в случае его непрерывности единственным образом продолжается с функций (24.17) на все пространство X .

Из определения 24.1 вытекает, что смешанный дробный интеграл $I_{a+}^{\alpha} \varphi$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, является тензорным произведением одномерных дробных интегралов:

$$I_{a+}^{\alpha} \varphi = I_{a_1+}^{\alpha_1} \otimes I_{a_2+}^{\alpha_2} \varphi, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad (24.19)$$

и то же самое относится к дробному дифференцированию:

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = \mathcal{D}_{a_1+}^{\alpha_1} \otimes \mathcal{D}_{a_2+}^{\alpha_2} f, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0.$$

В случае, когда α_1 и α_2 разных знаков, полагаем

$$I_{a+}^{\alpha} \varphi = \mathcal{D}_{a_1+}^{-\alpha_1} \otimes I_{a_2+}^{\alpha_2} \varphi, \quad \alpha_1 < 0, \quad \alpha_2 \geq 0.$$

Для функций $\varphi(x_1, x_2)$, заданных на всей плоскости, лиувиллевские формы (24.12), (24.13) дробного интегрирования принимают вид

$$I_{\pm\pm}^{\alpha} \varphi = I_{\pm}^{\alpha_1} \otimes I_{\pm}^{\alpha_2} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x_1 \mp t_1, x_2 \mp t_2)}{t_1^{1-\alpha_1} t_2^{1-\alpha_2}} dt_1 dt_2. \quad (24.20)$$

Можно рассматривать также операторы

$$I_{\pm\mp}^{\alpha} \varphi = I_{\pm}^{\alpha_1} \otimes I_{\mp}^{\alpha_2} \varphi, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad (24.21)$$

при соответственном выборе знаков. Случаю $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_2 = 0$ отвечает частное дробное интегрирование

$$I_{\pm\pm}^{(\alpha_1, 0)} = I_{\pm}^{\alpha_1} \otimes E, \quad I_{\pm\pm}^{(0, \alpha_2)} = E \otimes I_{\pm}^{\alpha_2}, \quad (24.22)$$

где E — единичный оператор.

Пусть $Q_1 \varphi = \varphi(-x_1, x_2)$, $Q_2 \varphi = \varphi(x_1, -x_2)$, $Q_{12} \varphi = \varphi(-x_1, -x_2)$, так что в соответствии с (5.9) и определением (24.18)

$$Q_1 = Q \otimes E, \quad Q_2 = E \otimes Q, \quad Q_{12} = Q_1 Q_2 = Q \otimes Q.$$

Справедливы очевидные равенства

$$Q_1 I_{++}^{\alpha} = I_{-+}^{\alpha} Q_1, \quad Q_2 I_{++}^{\alpha} = I_{+-}^{\alpha} Q_2, \quad Q_{12} I_{++}^{\alpha} = I_{--}^{\alpha} Q_{12}$$

(ср. с (5.9)).

Тождества, аналогичные равенствам (24.19) — (24.22), можно записать и для дробного дифференцирования, например,

$$\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha_1, 0)} f = (\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha_1} \otimes E) f = \pm \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\infty} t_1^{\alpha_1-1} f(x_1 \mp t_1, x_2) dt_1, \quad (24.23)$$

$$\mathcal{D}_{\pm\pm}^{\alpha} f = \mathcal{D}_{\pm}^{\alpha_1} \otimes \mathcal{D}_{\pm}^{\alpha_2} f \quad \text{и т. п.}$$

Понятие тензорного произведения операторов легко распространяется на случай n переменных. Останавливаться на этом не станем.

4°. Действие операторов дробного интегрирования в пространствах $L_{\bar{p}}(R^n)$ (со смешанной нормой). Для простоты изложения ограничимся случаем двух переменных x_1, x_2 . Желая получить естественный аналог теоремы Харди — Литтлвуда 5.3, будем рассматривать действие операторов $I_{\pm\pm}^{(\alpha_1, 0)}$, $I_{\pm\pm}^{(0, \alpha_2)}$, $I_{\pm\pm}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ не из $L_p(R^2)$ в $L_q(R^2)$ подобно теореме 5.3, а в рамках пространств функций, интегрируемых по каждой переменной в различных, вообще говоря, степенях p_1 и p_2 . Именно введем пространство $L_{\bar{p}}(R^2)$, $\bar{p} = (p_1, p_2)$, функций $f(x_1, x_2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\vec{p}} = \left\{ \int_{R^1} \left[\int_{R^1} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right\}^{1/p_2} < \infty. \quad (24.24)$$

Считаем, как обычно, что $1 \leq p_i < \infty$, $i = 1, 2$. Пространство $L_{\vec{p}}(R^2)$ называют пространством со смешанной нормой. В случае $p_1 = p_2 = p$, очевидно, $L_{\vec{p}}(R^2) = L_p(R^2)$.

Прежде чем дать основную теорему, докажем следующую лемму.

Лемма 24.1. Пусть A_1 — произвольный линейный оператор, ограниченный из $L_{p_1}(R^1)$ в $L_{q_1}(R^1)$, а A_2 — оператор свертки

$$A_2 \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} k(\xi) \varphi(x_2 - \xi) d\xi$$

с неотрицательным ядром $k(\xi) \geq 0$, ограниченный из $L_{p_2}(R^1)$ в $L_{q_2}(R^1)$, $1 \leq p_i < \infty$, $1 \leq q_i < \infty$, $i = 1, 2$. Тогда оператор $A_1 \otimes A_2$ ограничен из $L_{\vec{p}}(R^2)$ в $L_{\vec{q}}(R^2)$, $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$.

Доказательство. Непосредственно с помощью теоремы Фубини 1.1 проверяется, что оператор $A_1 \otimes E$ ограничен из $L_{p_1, q_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ (при любом q_2), если оператор A_1 ограничен из $L_{p_1}(R^1)$ в $L_{q_1}(R^1)$. Так как $A_1 \otimes A_2 = (A_1 \otimes E)(E \otimes A_2)$, то достаточно доказать тогда, что оператор $E \otimes A_2$ ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{p_1, q_2}(R^2)$. Имеем

$$(E \otimes A_2) \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} k(t_2) \varphi(x_1, x_2 - t_2) dt_2,$$

и применение обобщенного неравенства Минковского (1.33) дает:

$$\left\{ \int_{R^1} |(E \otimes A_2) \varphi|^{p_1} dx_1 \right\}^{1/p_1} \leq \int_{R^1} k(t_2) \|\varphi(\cdot, x_2 - t_2)\|_{p_1} dt_2, \quad (24.25)$$

где норма справа применена по первой переменной. Здесь $\|\varphi(\cdot, t_2)\|_{p_1} \in L_{p_2}(R^1)$. Поэтому в силу ограниченности оператора A_2 из $L_{p_2}(R^1)$ в $L_{q_2}(R^1)$ получаем, оценивая (24.25) по норме пространства $L_{q_2}(R^1)$ по переменной x_2 :

$$\|(E \otimes A_2) \varphi\|_{p_1, q_2} = \| \|\varphi(\cdot, x_2 - t_2)\|_{p_1} \|_{q_2} \leq c \|\varphi\|_{p_1, p_2},$$

что и требовалось.

Теорема 24.1. Пусть $1 \leq p_i < \infty$, $1 \leq q_i < \infty$, $i = 1, 2$. Оператор частного дробного интегрирования $I_{\pm\pm}^{(\alpha_1, 0)}$ ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ тогда и только тогда, когда

$$1 < p_1 < 1/\alpha_1, \quad 1 \leq p_2 < \infty, \quad 1/q_1 = 1/p_1 - \alpha_1, \quad q_2 = p_2. \quad (24.26)$$

Операторы смешанного дробного интегрирования $I_{\pm\pm}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ ограничены из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, q_2}(R^2)$ тогда и только тогда, когда

$$1 < p_i < 1/\alpha_i, \quad 1/q_i = 1/p_i - \alpha_i, \quad i = 1, 2. \quad (24.27)$$

Утверждение теоремы в достаточной части вытекает на основании равенств (24.22), (24.20) непосредственно из леммы 24.1 и одномерной теоремы Харди — Литтлвуда 5.3. Проверка необходимости условий (24.26), (24.27) осуществляется точно так же, как для функций одного переменного в теореме 5.3 с помощью оператора растяжения по каждой переменной: $\Pi_{\delta} \varphi = \varphi(\delta \circ x)$, $\delta \circ x = (\delta_1 x_1, \dots, \delta_n x_n)$, $\delta > 0$, для которого $\|\Pi_{\delta} \varphi\|_{\vec{p}} = \delta^{-1/\vec{p}} \|\varphi\|_{\vec{p}}$, где $\delta^{-1/\vec{p}} = \delta_1^{-1/p_1} \dots \delta_n^{-1/p_n}$.

Замечание 24.1. Отметим, что в пространстве $L_{\vec{p}}(R^2)$ (при определении которого в (24.24) интегрирование ведется сначала по x_1 , затем по x_2) поведение операторов $A_1 \otimes E$, $E \otimes A_2$ неравноправно. Именно $A_1 \otimes E$

ограничен из $L_{p_1, p_2}(R^2)$ в $L_{q_1, p_2}(R^2)$ при любом p_2 , если A_1 ограничен из $L_{p_1}(R^1)$ в $L_{q_1}(R^1)$ (теорема Фубини). Однако ограниченность A_2 из $L_{q_1}(R^1)$ в $L_{q_2}(R^2)$ влечет за собой ограниченность $E \otimes A_2$ из $L_{p_1, q_1}(R^2)$ в $L_{p_1, q_2}(R^2)$ не при всех p_1 . (Укажем работу В. Л. Крепкогорского [1], в которой построены примеры операторов A_2 , ограниченных в $L_2(R^1)$, таких, что $E \otimes A_2$ ограничен в $L_{p_1, 2}(R^2)$ не при всех p_1 .)

5°. Связь с сингулярным интегралом. Для функций двух переменных рассмотрим оператор

$$N\varphi = a_0\varphi(x_1, x_2) + \frac{a_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t_1, x_2)}{t_1 - x_1} dt_1 + \\ + \frac{a_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x_1, t_2)}{t_2 - x_2} dt_2 + \frac{a_{12}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2}{(t_1 - x_1)(t_2 - x_2)}, \quad (24.28)$$

называемый *бисингулярным интегральным оператором*. Коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_{12} у нас будут постоянными. Используя обозначение $S\varphi =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t - x}$$

для одномерного сингулярного оператора, можем записать бисингулярный оператор (24.28) в терминах тензорных произведений:

$$N = a_0 E \otimes E + a_1 S \otimes E + a_2 E \otimes S + a_{12} S \otimes S.$$

Лемма 24.2. *Бисингулярные операторы $S \otimes E, E \otimes S, S \otimes S$ ограничены в пространстве $L_{\vec{p}}(R^2)$, $1 < p_i < \infty, i = 1, 2$.*

В этой лемме ограниченность $S \otimes E$ вытекает из леммы 24.1. Доказательство ограниченности оператора $E \otimes S$ не приводим, замечая лишь, что его можно получить с помощью одной теоремы Дж. Шварца о сингулярных операторах со значениями в банаховом пространстве (J. T. Schwartz [1]), см. по этому поводу статью П. И. Лизоркина [7]. Ограниченность $S \otimes S$ следует из того, что $S \otimes S = (S \otimes E)(E \otimes S)$.

Обозначим через

$$N_{\alpha_1} \varphi = \cos \alpha_1 \pi \varphi + \sin \alpha_1 \pi S \varphi$$

одномерный сингулярный оператор, возникающий в тождествах (11.10), (11.11), связывающих одномерное дробное интегрирование $I_{+}^{\alpha}, I_{-}^{\alpha}$ друг с другом. Введем аналогичный бисингулярный оператор

$$N_{\alpha_1, \alpha_2} \varphi = N_{\alpha_1} \otimes N_{\alpha_2} \varphi. \quad (24.29)$$

С его помощью можно записать связи между операторами $I_{++}^{\alpha}, I_{+-}^{\alpha}, I_{--}^{\alpha}$. Именно справедлива

Теорема 24.2. Пусть $\varphi(x_1, x_2) \in L_{\vec{p}}(R^2)$, $1 < p_i < 1/\alpha_i, i = 1, 2$. Справедливы тождества

$$I_{++}^{\alpha} \varphi = I_{-+}^{\alpha} N_{\alpha_1, 0} \varphi, \quad (24.30)$$

$$I_{++}^{\alpha} \varphi = I_{+-}^{\alpha} N_{0, \alpha_2} \varphi, \quad (24.31)$$

$$I_{++}^{\alpha} \varphi = I_{--}^{\alpha} N_{\alpha_1, \alpha_2} \varphi, \quad I_{--}^{\alpha} \varphi = I_{++}^{\alpha} N_{-\alpha_1, -\alpha_2} \varphi. \quad (24.32)$$

Доказательство. Тождества (24.30) — (24.32) следуют из тождеств (11.10), (11.11) для функций одного переменного. Действительно, из тождеств (11.10), (11.11) непосредственно видна справедливость равенств (24.30) — (24.32) на функциях вида $\varphi(x_1, x_2) = \sum_s u_s(x_1) v_s(x_2)$, $u_s(x_1) \in L_{p_1}(R^1), v_s(x_2) \in L_{p_2}(R^1)$. Такие функции плотны в $L_{\vec{p}}(R^2)$ (достаточно в

качестве функций $u_s(x_1)$, $v_s(x_2)$ взять ступенчатые функции). Поэтому выполнимость требуемых тождеств на всем пространстве $L_{\bar{p}}(R^2)$ вытекает из ограниченности операторов, стоящих в левой и правой частях тождеств. Эта ограниченность следует из теоремы 24.1 и леммы 24.2.

6°. Частные и смешанные дробные производные в форме Маршо. Согласно (5.57), частные дробные производные Лиувилля (24.14) могут быть записаны (на достаточно хороших функциях) в форме Маршо:

$$\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha_k} f = \frac{\alpha_k}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x \mp \xi e_k)}{\xi^{1+\alpha_k}} d\xi, \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad (24.33)$$

где $e_k = \overbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}^{k-1}$. В случае $\alpha_k \geq 1$ подобный переход делаем на основании равенства (5.80):

$$\mathcal{D}_{+}^{\alpha_k} f = \frac{1}{\kappa(\alpha_k, l_k)} \int_0^{\infty} \frac{(\Delta_{\xi e_k}^{l_k} f)(x)}{\xi^{1+\alpha_k}} d\xi, \quad (24.34)$$

где целое число l_k взято так, что $l_k > \alpha_k$, конечная разность $\Delta_{\xi e_k}^{l_k}$ применена по переменной x_k , $\kappa(\alpha_k, l_k)$ — постоянная (5.81). Отсюда нетрудно видеть, что для смешанных дробных производных $\mathcal{D}_{\pm \dots \pm}^{\alpha} f$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, вместо (24.34) получим

$$\mathcal{D}_{\pm \dots \pm}^{\alpha} f = \frac{1}{\kappa(\alpha, l)} \int_{R_{+ \dots +}^n} \frac{(\Delta_{\pm t}^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad \alpha > 0, \quad (24.35)$$

где введена конечная разность

$$(\Delta_t^l f)(x) = \Delta_{t_1}^{l_1} [\Delta_{t_2}^{l_2} \dots (\Delta_{t_n}^{l_n} f)](x) = \sum_{0 \leq j \leq l} (-1)^{|j|} \binom{l}{j} f(x - j \circ t) \quad (24.36)$$

векторного порядка $l = (l_1, \dots, l_n)$ с векторным шагом $t = (t_1, \dots, t_n)$; здесь $j \circ h = (j_1 h_1, \dots, j_n h_n)$, l_k — целые числа, такие, что $0 < \alpha_k < l_k$, и $\binom{l}{j} = \prod_{k=1}^n \binom{l_k}{j_k}$. Нормировочная постоянная $\kappa(\alpha, l)$ в (24.35) равна

$$\kappa(\alpha, l) = \prod_{k=1}^n \kappa(\alpha_k, l_k).$$

Правую часть в (24.35) будем обозначать отдельным символом $\mathbf{D}_{\pm \dots \pm}^{\alpha} f$, учитывая, что она может существовать и тогда, когда $\mathcal{D}_{\pm \dots \pm}^{\alpha} f$ не существует.

В (24.35) можно рассматривать различные варианты дробного дифференцирования (типа $\mathcal{D}_{+ \dots -}^{\alpha}$), отвечающие разному выбору знаков: по одним переменным применяется левостороннее, по другим — правостороннее дробное дифференцирование. В этом случае выбирается шаг разности типа $(t_1, -t_2, -t_3, t_4, \dots)$, отвечающий выбранному распределению знаков $+$ и $-$.

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) > 0$. Усеченной дробной производной Маршо назовем выражение

$$\mathbf{D}_{+ \dots +, \varepsilon}^{\alpha} f = \frac{1}{\kappa(\alpha, l)} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \dots \int_{\varepsilon_n}^{\infty} \frac{(\Delta_{t \varepsilon}^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (24.37)$$

В равенствах (24.35), (24.37) предполагалось, что $\alpha > 0$. Читатель может легко выписать соответствующие конструкции в случаях, когда $\alpha_k = 0$ для некоторых $k=1, 2, \dots$

В заключение этого пункта остановимся на понятии дробного интегродифференцирования по направлению. Здесь возможны различные варианты определений. Рассмотренная ранее форма (24.33) дробного частного дифференцирования по k -й переменной допускает непосредственное обобщение на дифференцирование в заданном направлении. Именно пусть $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $|\omega| = 1$, есть вектор в R^n , задающий направление. Дробной производной порядка $\alpha \in R^1$, $0 < \alpha < 1$, в направлении ω назовем, следуя (24.33), выражение

$$(\mathcal{D}_\omega^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x - \xi\omega)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi. \quad (24.38)$$

В случае произвольного $\alpha \in R^1_+$ дробную производную по направлению введем, отправляясь от (24.34), равенством

$$(\mathcal{D}_\omega^\alpha f)(x) = \frac{1}{\kappa(\alpha, 1)} \int_0^\infty \frac{(\Delta_{\xi\omega}^1 f)(x)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi \quad (24.38')$$

с помощью конечной разности, взятой вдоль направления ω , $|\omega| = 1$. Это определение приспособлено для функций $f(x)$, заданных в R^n (или, по крайней мере, в бесконечной области, содержащей вместе с каждой своей точкой и выходящий из нее луч, параллельный вектору $-\omega$). Для функций, заданных в ограниченной области Ω в R^n , можно ввести аналог дробной производной Маршо на отрезке, см. (13.2). Именно пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ — фиксированная точка в области Ω . Можно ввести, отправляясь от (13.2) и (24.38), выражение

$$D_{a+}^\alpha f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)|x-a|^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{|x-a|} \frac{f(x) - f\left(x - \xi \frac{x-a}{|x-a|}\right)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (24.38'')$$

и назвать его дробной производной порядка α в точке x в направлении из точки a (аналогичный вариант с $D_{a-}^\alpha f$ назвали бы производной по направлению к точке a).

Можно ввести также «дробный интеграл по направлению»:

$$I_\omega^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} f(x - \xi\omega) d\xi. \quad (24.39)$$

На достаточно хороших функциях $f(x)$ можно записать дробную производную (24.38) в виде

$$\mathcal{D}_\omega^\alpha f = \frac{d}{d\omega} I_\omega^\alpha f, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $\frac{d}{d\omega}$ означает обычное дифференцирование в направлении ω . Операция (24.38') дробного дифференцирования по направлению является обратной по отношению к дробному интегрированию (24.39) по направлению: $\mathcal{D}_\omega^\alpha I_\omega^\alpha \varphi \equiv \varphi$ в случае достаточно хороших функций $\varphi(x)$. В этом можно убедиться непосредственно, но проще всего сослаться на формулы (24.48') преобразования Фурье дробных интегралов и производных. Из этих формул вытекает также полугрупповое свойство $I_\omega^\alpha I_\omega^\beta \varphi \equiv I_\omega^{\alpha+\beta} \varphi$.

По поводу дробного интегродифференцирования по направлению см. также § 29, п. 2°.

7°. Описание дробных интегралов от функций из $L_p^-(R^2)$. В этом пункте рассматриваются функции $f(x_1, x_2)$ двух переменных. Получаемые здесь утверждения примыкают к соответствующим построениям § 6, п. 2°, являясь их непосредственным распространением на частное и смешанное дробное интегрирование функций двух переменных. Следуя (6.7), обозначим $\mathcal{K}_\alpha(t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{t_+^{\alpha-1} - (t-1)_+^{\alpha-1}}{t}$, подчеркнув зависимость этого ядра от α . Подобно (6.6) получаем равенства

$$D_{+, \varepsilon_1}^{(\alpha_1, 0)} I_{+, \varepsilon_1}^{(\alpha_1, 0)} \varphi = \int_0^\infty \mathcal{K}_{\alpha_1}(t) \varphi(x_1 - \varepsilon_1 t, x_2) dt, \quad (24.40)$$

$$D_{+, \varepsilon_2}^{(0, \alpha_2)} I_{+, \varepsilon_2}^{(0, \alpha_2)} \varphi = \int_0^\infty \mathcal{K}_{\alpha_2}(t) \varphi(x_1, x_2 - \varepsilon_2 t) dt, \quad (24.41)$$

$$D_{++, \varepsilon}^\alpha I_{++, \varepsilon}^\alpha \varphi = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{K}_{\alpha_1}(t_1) \mathcal{K}_{\alpha_2}(t_2) \varphi(x_1 - \varepsilon_1 t_1, x_2 - \varepsilon_2 t_2) dt_1 dt_2, \quad (24.42)$$

где $D_{+, \varepsilon_1}^{(\alpha_1, 0)} = D_{+, \varepsilon_1}^{\alpha_1} \otimes E$ — усеченное дробное дифференцирование Маршо (5.59) по первой переменной (и аналогично $D_{+, \varepsilon_2}^{(0, \alpha_2)}$ — по второй), а $D_{++, \varepsilon}^\alpha$ — усеченное смешанное дробное дифференцирование Маршо (24.37). Из равенств (24.40) — (24.42) выводится

Теорема 24.3. Пусть $f(x_1, x_2) = I_{+, \varepsilon_1}^{(\alpha_1, 0)} \varphi$, где $\varphi(x_1, x_2) \in L_p^-(R^2)$, $1 \leq p_1 < 1/\alpha_1$, $1 \leq p_2 < \infty$. Тогда $\varphi(x_1, x_2) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} D_{+, \varepsilon_1}^{(\alpha_1, 0)} f$, где предел понимается по норме пространства $L_p^-(R^2)$. Аналогично, если $f(x_1, x_2) = I_{++, \varepsilon}^\alpha \varphi$, где $\varphi(x_1, x_2) \in L_p^-(R^2)$, $1 \leq p_i < 1/\alpha_i$, $i = 1, 2$, то

$$\varphi(x_1, x_2) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p^-(R^2))}} D_{++, \varepsilon}^\alpha f. \quad (24.43)$$

Теорема 24.3 доказывается на основании равенств (24.40) — (24.42) точно так же, как теорема 6.1: используются свойства (6.7), (6.8) ядер $\mathcal{K}_{\alpha_i}(t)$, $i = 1, 2$.

Введем аналогично (6.1) пространство

$$I_{\pm\pm}^\alpha(L_p^-) = \{f : f = I_{\pm\pm}^\alpha \varphi, \varphi \in L_p^-(R^2)\} \quad (24.44)$$

функций, являющихся смешанными дробными интегралами от функций из $L_p^-(R^2)$. Это пространство определено при $1 \leq p_i < 1/\alpha_i$, $i = 1, 2$. В силу теоремы 24.2 (и ограниченности в $L_p^-(R^2)$ бисингулярного оператора N_{α_1, α_2} согласно лемме 24.2) пространство (24.44) не зависит при $1 < p_i < 1/\alpha_i$, $i = 1, 2$, от выбора знаков, так что будем обозначать

$$I^\alpha(L_p^-) \stackrel{\text{def}}{=} I_{++}^\alpha(L_p^-) = I_{--}^\alpha(L_p^-) = I_{+-}^\alpha(L_p^-) = I_{-+}^\alpha(L_p^-), \quad (24.45)$$

$$1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}, \quad 0 \leq \alpha_i < 1, \quad i = 1, 2.$$

В следующей теореме используется обозначение

$$\bar{p}_\alpha = \left(\frac{p_1}{1 - \alpha_1 p_1}, \frac{p_2}{1 - \alpha_2 p_2} \right), \quad 1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2,$$

и обозначение $D_{++, \varepsilon}^\alpha f$ для усеченной дробной производной Маршо (24.37).

Теорема 24.4. Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_{\vec{p}}^-)$, где $0 < \alpha_i < 1$, $1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}$, $i = 1, 2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$1) f(x) \in L_{\vec{p}\alpha}^-(R^2),$$

$$2) \text{ существовал } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D}_{++\varepsilon}^\alpha f \text{ по норме пространства } L_{\vec{p}}^-(R^2).$$

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 24.3. Достаточность получается по схеме доказательства достаточности в теореме 6.2. Нужно показать, что условия 1) и 2) влекут за собой представимость $f(x) = I_{++}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_{\vec{p}}^-(R^2)$. Обозначим $g(x) = I_{++}^\alpha \mathbf{D}_{++}^\alpha f$, где $\mathbf{D}_{++}^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D}_{++\varepsilon}^\alpha f \in L_{\vec{p}}^-$ и вместо равенства $f(x) = g(x)$ будем доказывать равенство их конечных разностей:

$$(\Delta_{(h_1, h_2)}^{(1,1)} f)(x) = (\Delta_{(h_1, h_2)}^{(1,1)} g)(x), \quad (24.46)$$

где использована смешанная разность первого порядка по каждой переменной (см. (24.36)). Дальнейшие рассуждения ведутся точно так же, как в теореме 6.2 после равенства (6.21), и потому предоставляются читателю. Отметим только два узловых момента: а) вместо оператора (6.22) следует взять оператор

$$A_h \varphi = \int_{R^2} a_h(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_h(x) = (\Delta_h^{(1,1)} k_\alpha)(x),$$

где $h = (h_1, h_2)$, $k_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1}$ при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $k_\alpha(x) = 0$ при $x_1 < 0$ или $x_2 < 0$; б) вместо тождества (6.23) придем к равенству

$$A_h \mathbf{D}_{++\varepsilon}^\alpha f = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{K}_{\alpha_1}(t_1) \mathcal{K}_{\alpha_2}(t_2) (\Delta_{(h_1, h_2)}^{(1,1)} f)(x - \varepsilon t) dt.$$

Теорема 24.4 позволяет получить информацию о частных дробных производных из информации о смешанной дробной производной и о самой функции. Именно справедливо

Следствие. Если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D}_{++\varepsilon}^\alpha f \in L_{\vec{p}}^-(R^2)$, $f \in L_{\vec{p}\alpha}^-(R^2)$, то $\mathbf{D}_{++}^{(\alpha_1, 0)} f \in L_{p_1, r_2}(R^2)$, $\mathbf{D}_{++}^{(0, \alpha_2)} f \in L_{r_1, p_2}(R^2)$, $r_i = p_i/(1 - \alpha_i p_i)$, $i = 1, 2$.

Действительно, в силу теоремы 24.4 $f = I_{++}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_{p_1, p_2}$, и тогда $\mathbf{D}_{++}^{(\alpha_1, 0)} f = \mathbf{D}_{++}^{(\alpha_1, 0)} I_{++}^{(\alpha_1, \alpha_2)} \varphi = I_{++}^{\alpha_2} \varphi \in L_{p_1, r_2}(R^2)$, что и требовалось.

8°. Интегральные преобразования дробных интегралов и производных. В этом пункте рассматриваем функции n переменных, заданные на всем пространстве R^n . Пусть

$$\mathcal{F} \varphi = \hat{\varphi}(x) = \int_{R^n} e^{ix \cdot t} \varphi(t) dt$$

есть многомерное преобразование Фурье. Так как оно состоит в последовательном применении одномерного преобразования Фурье по каждой переменной, то из теоремы 7.1 заключаем, что для лиувиллевских дробных интегралов (24.12), (24.13) справедливы при $0 \leq \alpha_k < 1$, $k = 1, \dots, n$, формулы

$$\mathcal{F} I_{++\dots+}^\alpha \varphi = (-ix)^{-\alpha} \hat{\varphi}(x), \quad (24.47)$$

$$\mathcal{F} I_{--\dots-}^\alpha \varphi = (ix)^{-\alpha} \hat{\varphi}(x), \quad (24.48)$$

где $(-ix)^\alpha = (-ix_1)^{\alpha_1} \dots (-ix_n)^{\alpha_n}$ и аналогично для $(ix)^\alpha$, а $\varphi(x) \in L_1(R^n)$.

Можно записать также очевидные формулы для $I_{\pm \dots \pm}^{\alpha} \varphi$ при всевозможных выборах знаков $+$ и $-$.

Непосредственным вычислением устанавливается также формула

$$\mathcal{F}(I_{\omega}^{\alpha} f) = (-ix \cdot \omega)^{-\alpha} \hat{f}(x), \quad \mathcal{F}(\mathcal{D}_{\omega}^{\alpha} f) = (-ix \cdot \omega)^{\alpha} \hat{f}(x), \quad (24.48')$$

где $I_{\omega}^{\alpha} f$, $\mathcal{D}_{\omega}^{\alpha} f$ — дробное интегрирование и дифференцирование (24.39), (24.38), (24.38') по направлению ω .

Аналогично (7.14) для многомерного преобразования Лапласа

$$L\varphi = \int_{R_{+ \dots +}^n} e^{-y \cdot t} \varphi(t) dt, \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad (24.49)$$

где $R_{+ \dots +}^n$ — октант $\{t: t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0\}$, получается формула

$$(LI_{0+}^{\alpha} \varphi)(y) = y^{-\alpha} (L\varphi)(y), \quad (24.50)$$

где

$$I_{0+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} (x - t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt. \quad (24.51)$$

Известная формула дифференцирования интеграла Лапласа

$$(-\mathcal{D})^k L\varphi = L[t^k \varphi(t)], \quad k = (k_1, \dots, k_n),$$

распространяется на дробное дифференцирование:

$$\mathcal{D}_{- \dots -}^{\alpha} L\varphi = L\psi, \quad \psi(t) = t^{\alpha} \varphi(t), \quad \alpha \geq 0, \quad (24.52)$$

$$I_{- \dots -}^{\alpha} L\varphi = L\psi, \quad \psi(t) = t^{-\alpha} \varphi(t), \quad \alpha < 1, \quad (24.53)$$

в чем легко убедиться непосредственной перестановкой порядка интегрирования в левой части. Формула (24.52) верна и при $\alpha \geq 1$, если считать, что $t^{-\alpha} \varphi(t)$ интегрируема при $t=0$.

Для многомерного преобразования Меллина

$$(\mathfrak{M}\varphi)(x) = \int_{R_{+ \dots +}^n} t^{x-1} \varphi(t) dt \quad (24.54)$$

подобно (7.20), (7.21) справедливы равенства

$$(\mathfrak{M}I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{\Gamma(1-x-\alpha)}{\Gamma(1-x)} (\mathfrak{M}\varphi)(x+\alpha), \quad (24.55)$$

$$(\mathfrak{M}I_{- \dots -}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)} (\mathfrak{M}\varphi)(x+\alpha), \quad (24.56)$$

где, как обычно, $\Gamma(x+\alpha) = \Gamma(x_1+\alpha_1) \dots \Gamma(x_n+\alpha_n)$ и т. п.

Мы не останавливаемся на доказательствах приведенных формул: они легко выводятся из соответствующих одномерных формул в § 7 при надлежащих предположениях относительно функций $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$. Например, в (24.52) достаточно предполагать, что $t^{-\alpha} \varphi(t)$ локально интегрируема и медленно растет на бесконечности.

9°. Пространство Лизоркина, инвариантное относительно дробного интегродифференцирования. Следуя § 8, п. 2°, введем такое пространство Φ функций многих переменных, которое будет инвариантным относительно частного и смешанного дробного интегродифференцирования. Как и в § 8, п. 2°, идея такого пространства ясна в образах Фурье. Именно в силу формул (24.47), (24.48) ясно, что требуемая инвариантность

класса Φ будет иметь место, если функции $\varphi(t)$ этого класса будут иметь образы Фурье $\hat{\varphi}(x)$, тождественно аннулирующиеся на гиперплоскостях $x_k=0$. Обозначим поэтому через Ψ подкласс шварцева пространства $S(R^n)$, состоящий из функций, исчезающих вместе со всеми своими производными на гиперплоскостях $x_k=0, k=1, 2, \dots, n$:

$$\Psi = \{\psi(x) : \psi \in S(R^n), (\mathcal{D}^j \psi)(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \equiv 0, \\ |j| = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Примером функции $\psi(x) \in \Psi$ служит функция $\psi(x) = e^{-|x|^2 - \sum_{k=1}^n x_k^{-2}}$. Классом Лизоркина назовем класс прообразов Фурье функций из Ψ :

$$\Phi = \Phi(R^n) = \{\varphi : \varphi \in S(R^n), \hat{\varphi} \in \Psi\}. \quad (24.56')$$

Так как

$$\hat{\varphi}^{(j)}(x)|_{x_k=0} = \int_{R^{n-1}} e^{ix' \cdot t'} (t')^{j'} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t', \xi) \xi^{j_k} d\xi,$$

где $t' = (t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n)$, $j' = (j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_n)$, то непосредственно из определения следует, что класс $\Phi(R^n)$ состоит из тех и только тех функций $\varphi(t) \in S(R^n)$, для которых равны нулю все моменты:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, \dots, t_{k-1}, \xi, t_{k+1}, \dots, t_n) \xi^m d\xi = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

вдоль координатных осей, $k = 1, 2, \dots, n$.

Также непосредственно из определения заключаем, что если $\varphi(t) \in \Phi(R^n)$, то и любой ливиллевский дробный интеграл (производная) $I_{\pm \dots \pm}^{\alpha} \varphi$ принадлежит $\Phi(R^n)$, $-\infty < \alpha < \infty$.

Имеет место

Лемма 24.3. Формулы (24.47), (24.48) на функциях $\varphi(x) \in \Phi(R^n)$ справедливы при $\alpha_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 24.3 выводится из леммы 8.1 (с учетом того, что для $\varphi \in \Phi(R^n)$

функция $\varphi(t_1, \dots, t_{k-1}, \xi, t_{k+1}, \dots, t_n)$ при фиксированных $t_1, t_2, \dots$ принадлежит классу $\Phi(R^1)$).

Можно, как и в § 8, п. 2°, ввести пространство $\Phi'(R^n)$ обобщенных функций над $\Phi(R^n)$ и рассмотреть действие дробного интегродифференцирования над такими обобщенными функциями. Останавливаться на этом не станем. Отметим лишь, что на этом пути получается, например, обоснование формулы дробного интегрирования дельта-функции Дирака $\delta = \delta(x)$:

$$I_{+ \dots +}^{\alpha} \delta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_+^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \quad (24.57)$$

где $t_+^{\alpha-1} = t_1^{\alpha_1-1} \dots t_n^{\alpha_n-1}$, если $t_1 > 0, \dots, t_n > 0$, и $t_+^{\alpha-1} \equiv 0$, если $t_k < 0$ хотя бы для одного $k = 1, 2, \dots, n$.

10°. Дробные производные и интегралы периодических функций многих переменных. Рассмотрим периодические функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ многих переменных; пусть $\Delta = \{x : 0 \leq x_i < 2\pi\}$ — куб периодов, а $c_k = (2\pi)^{-n} \int_{\Delta} f(x) e^{ik \cdot x} dx$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, — коэффициенты Фурье функции

$f(x)$. Ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{-\infty < |k| < \infty} c_k e^{ik \cdot x} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)}.$$

Дробное интегродифференцирование Вейля периодической функции $f(x)$ определяется подобно (19.5), (19.6). Если в одномерном случае дробный интеграл был определен на всех (суммируемых) функциях, не содержащих постоянную c_0 в ряде Фурье, то теперь нужно будет исключить из рассмотрения функции, постоянные по каждой переменной. Именно следуя (19.5), вводим кратный (смешанный) интеграл Вейля периодической функции так, чтобы

$$I^{(\alpha)} f = \sum'_{-\infty < |k| < \infty} \frac{c_k}{(ik)^\alpha} e^{ik \cdot x}, \quad (24.58)$$

где штрих означает пропуск всех (!) слагаемых с мультииндексами $k = (k_1, \dots, k_n)$, у которых $k_i = 0$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, n$. Это означает, что рассматриваются функции, у которых $c_k = 0$ для таких k , т. е.

$$\int_0^{2\pi} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi = 0 \quad (24.59)$$

для $i = 1, 2, \dots, n$. Следуя работе П. И. Лизоркина, С. М. Никольского [1], будем называть периодическую функцию $f(x)$ *нейтральной* на Δ , если она удовлетворяет условию (24.59) при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Что же касается дробного дифференцирования, то оно будет определяться разложением

$$\mathcal{D}^{(\alpha)} f \sim \sum_{-\infty < |k| < \infty} c_k (ik)^\alpha e^{ik \cdot x}. \quad (24.60)$$

В (24.58), (24.60) мы выбрали для определенности вариант левостороннего дробного интегродифференцирования по каждой переменной. В соответствии с обозначениями, например, (24.12), (24.13) дробное интегродифференцирование можно было бы обозначать символами $I_{+}^{(\alpha)} \dots$, $\mathcal{D}_{+}^{(\alpha)} \dots$, но мы не будем здесь рассматривать для периодических функций других вариантов, кроме левостороннего.

Дробный интеграл Вейля (24.58), рассматриваемый на суммируемых по Δ функциях $f(x_1, \dots, x_n)$ с нулевыми средними значениями (24.59) по каждой переменной, истолковывается подобно (19.7) в виде

$$I^{(\alpha)} f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta} f(x - t) \prod_{i=1}^n \Psi_{+}^{\alpha_i}(t_i) dt, \quad \alpha_i > 0, \quad (24.61)$$

где $\Psi_{+}^{\alpha_i}(t_i)$ — функции (19.8) одного переменного.

Можно допускать случаи, когда $\alpha_i = 0$ для некоторых i . Тогда в (24.61) нужно исключить интегрирование по соответствующим переменным. Для простоты записи считаем, что $\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Дробное дифференцирование Вейля (24.60) при $0 < \alpha < 1$ записывается на достаточно хороших функциях f в виде

$$\mathcal{D}^{(\alpha)} f = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} I^{(1-\alpha)} f, \quad (24.62)$$

где $1 - \alpha = (1 - \alpha_1, \dots, 1 - \alpha_n)$.

Теорема 24.5. Оператор $I^{(\alpha)}$ ограничен в пространстве $L_p(\Delta)$, $1 \leq p \leq \infty$. Если $1 < p < \beta = (\max_i \alpha_i)^{-1}$, то $I^{(\alpha)}$ ограничен из $L_p(\Delta)$ в $L_q(\Delta)$, $q = p/(1 - \beta p)$.

Первое утверждение теоремы очевидно ввиду того, что $\prod_{i=1}^n \Psi_{+}^{\alpha_i}(t_i) \in L_1(\Delta)$ (см. (19.11)), а второе получается последовательным применением соответствующего одномерного утверждения (19.62) с учетом вложения $L_p(\Delta) \subset L_r(\Delta)$, $p > r$.

Можно получить утверждение, аналогичное теореме 24.1 об ограниченности оператора Вейля $I^{(\alpha)}$ в рамках пространств L_p^- со смешанной нормой. Предоставим это читателю.

Аналогично лемме 19.3 (с использованием свойств функций $\Psi_{+}^{\alpha_i}(t_i)$) получается

Теорема 24.6. На 2π -периодических функциях $\varphi(t) \in L_1(\Delta)$ с нулевыми средними значениями (24.59) дробный интеграл Вейля (24.61) совпадает с дробным интегралом Лиувилля:

$$I^{(\alpha)}\varphi = I_{+\dots+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{R_{+\dots+}^n} \varphi(x-t) t^{\alpha-1} dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

при условии, что интеграл справа понимается как условно сходящийся на бесконечности:

$$\int_{R_{+\dots+}^n} \varphi(x-t) t^{\alpha-1} dt = \lim_{|m| \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi m_1} \dots \int_0^{2\pi m_n} \varphi(x-t) t^{\alpha-1} dt,$$

$$m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Подобным же образом можно распространить на многомерный случай и другие построения § 19, относящиеся к дробному интегродифференцированию функций одного переменного. Отметим, например, аналогичное (19.34) совпадение дробных производных Вейля (24.62) с производными Маршо (24.35):

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}f = \frac{1}{\kappa(\alpha, l)} \int_{R_{+\dots+}^n} \frac{(\Delta_l' f)(x)}{t^{l+\alpha}} dt, \quad \alpha > 0. \quad (24.63)$$

Приведем также формулировку теоремы, доказываемой подобно теореме 19.2.

Теорема 24.7. Пусть $f(x)$ периодична с кубом периодов Δ , нейтральна на Δ и $f(x) \in L_p(\Delta)$, $1 \leq p < \infty$. Для того чтобы $f(x)$ была представима смешанным дробным интегралом Вейля (24.61):

$$f(x) = I^{(\alpha)}\varphi, \quad \varphi \in L_p(\Delta), \quad \alpha > 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{D}_{+\dots+}^{\alpha} \varepsilon f_{\varepsilon}' \in L_p(\Delta)$, где предел вычисляется по норме пространства $L_p(\Delta)$.

11°. Дробное дифференцирование по Грюнвальду—Летникову. В случае функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ многих переменных частные и смешанные дробные производные по Грюнвальду—Летникову определим, следуя (20.7). Именно пусть $h = (h_1, \dots, h_n)$ — векторное приращение и

$$(\Delta_h^{\alpha} f)(x) = \sum_{0 \leq |j| < \infty} (-1)^{|j|} \binom{\alpha}{j} f(x - j \circ h) \quad (24.64)$$

— разность дробного векторного порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, с векторным шагом h . В (24.64) j — мультииндекс и $j \circ h = (j_1 h_1, \dots, j_n h_n)$, $\binom{\alpha}{j} = \binom{\alpha_1}{j_1} \dots \binom{\alpha_n}{j_n}$, так что в случае, когда все α_i — целые, (24.64) превращается в (24.36). Определим теперь дробную производную Грюнвальда — Летникова порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ равенством

$$f_{+\dots+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}, \quad (24.65)$$

$$f_{-\dots-}^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha f)(x)}{h^\alpha}, \quad (24.66)$$

где $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$, $h_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Читатель без особого труда может с помощью результатов для одномерного дробного дифференцирования Грюнвальда—Летникова, изложенных в § 20, получить некоторые их многомерные аналоги. Остановимся, например, на распространении теоремы 20.2 на случай многих переменных, т. е. на теореме о том, что в случае периодических функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ смешанная дробная производная Грюнвальда—Летникова (24.65) существует одновременно со смешанной дробной производной Маршо. Пусть $\Delta = \{x : 0 \leq x_i < 2\pi\}$ — куб периодов функции $f(x)$.

Теорема 24.8. Пусть периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $L_p(\Delta)$, $1 \leq p < \infty$. Дробная смешанная производная Грюнвальда—Летникова (24.65) существует одновременно со смешанной дробной производной Маршо, и они совпадают:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow +0 \\ (L_p(\Delta))}} \frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} = \frac{1}{\kappa(\alpha, l)} \lim_{\substack{e \rightarrow 0 \\ (L_p(\Delta))}} \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \dots \int_{\varepsilon_n}^{\infty} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Доказательство теоремы, проводимое подобно доказательству теоремы 20.2 (с учетом теоремы 24.6 и результатов § 20), предоставляется читателю.

12°. Операторы типа полипотенциала. Введем, отправляясь от (12.1), оператор типа риссова потенциала по каждой переменной:

$$\mathcal{K}^\alpha \varphi = \frac{1}{A} \int_{R^n} \frac{\varphi(t) dt}{\prod_{k=1}^n |x_k - t_k|^{1-\alpha_k}}, \quad (24.67)$$

где $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \neq 1, 3, 5, \dots$, $k = 1, \dots, n$; $A = 2^n \prod_{k=1}^n \Gamma(\alpha_k) \cos \alpha_k \pi / 2$.

Будем называть (24.67) оператором типа полипотенциала (Рисса). Можно ввести также, обобщая (12.2), оператор

$$\mathcal{H}^\alpha \varphi = \frac{1}{B} \int_{R^n} \varphi(t) \prod_{k=1}^n \frac{\text{sign}(x_k - t_k)}{|x_k - t_k|^{1-\alpha_k}} dt, \quad (24.68)$$

где $\alpha_k > 0$, $\alpha_k \neq 2, 4, 6, \dots$; $B = 2^n \prod_{k=1}^n \Gamma(\alpha_k) \sin \alpha_k \pi / 2$.

Операторы $\mathcal{K}^\alpha$ и $\mathcal{H}^\alpha$ определены, например, на функциях $\varphi(t) \in L_p(R^n)$, $1 \leq p < \min_k (1/\alpha_k)$. В этом можно убедиться подобно одномерному случаю (см. о существовании дробных интегралов при $0 < \alpha < 1$ в § 5, п. 1°). Непосредственно из одномерной теоремы Харди—Литтлвуда 5.3 можно вывести (последовательным применением этой теоремы по каждой переменной), что в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ операторы $\mathcal{K}^\alpha$, $\mathcal{H}^\alpha$ ограничено действуют из пространства $L_p(R^n)$, $1 < p < 1/\alpha_1$, в пространство $L_q(R^n)$, $q = p/(1 - \alpha_1 p)$.

Значительно больший интерес представляет информация о действии в L_p операторов типа полипотенциала при различных α_k . В этом случае пространство L_p естественно рассматривать с вектором $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$,

см. п. 4° этого параграфа. Именно рассмотрим, обобщая (24.24), пространство $L_{\vec{p}}(R^n)$ функций со смешанной нормой

$$\|f\|_{\vec{p}} = \left\{ \int_{R^1} \left\{ \dots \left\{ \int_{R^1} \left[\int_{R^1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right\}^{p_3/p_2} \dots \right\}^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right\}^{1/p_n} < \infty.$$

Справедлива следующая

Теорема 24.9. *Оператор типа полипотенциала $\mathcal{H}^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_k > 0$, ограничен из $L_{\vec{p}}(R^n)$ в $L_{\vec{q}}(R^n)$, где $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $1 \leq p_k < \infty$, $1 \leq q_k < \infty$, тогда и только тогда, когда*

$$1 < p_k < 1/\alpha_k, \quad q_k = p_k/(1 - \alpha_k p_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 24.9 доказывается подобно теореме 24.1: достаточную часть можно получить, последовательно применяя одномерную теорему Харди—Литтлвуда 5.3 по каждой переменной, а в необходимой части следует воспользоваться оператором растяжения.

Можно без особых трудностей распространить различные результаты для одномерных операторов типа потенциала, изложенные в § 12, на случай операторов типа полипотенциала. Мы остановимся вкратце только на связи операторов $\mathcal{H}^\alpha$, $\mathcal{H}^\alpha$ друг с другом с помощью полисингулярного оператора. В одномерном случае такая связь давалась тождествами (12.6), (12.7). С помощью этих одномерных тождеств нетрудно получить, что для полипотенциалов $\mathcal{H}^\alpha$, $\mathcal{H}^\alpha$ справедливы равенства

$$\mathcal{H}^\alpha \varphi = S \mathcal{H}^\alpha \varphi, \quad \mathcal{H}^\alpha \varphi = -S \mathcal{H}^\alpha \varphi, \quad (24.69)$$

где S — полисингулярный оператор:

$$S\varphi = \int_{R^n} \frac{\varphi(t) dt}{\prod_{k=1}^n (t_k - x_k)}$$

(понимаемый в смысле главного значения по каждой переменной). Предполагается, что $\alpha_k > 0$. В случае, когда $\alpha_k = 0$ для некоторых k , полипотенциалы и полисингулярный оператор применяются только по тем переменным, для которых $\alpha_n \neq 0$.

Легко доказывается также на основании равенств (12.19) — (12.21), что

$$\mathcal{H}^\alpha \mathcal{H}^\beta = \mathcal{H}^{\alpha+\beta}, \quad \mathcal{H}^\alpha \mathcal{H}^\beta = -\mathcal{H}^{\alpha+\beta}, \quad \mathcal{H}^\alpha \mathcal{H}^\beta = \mathcal{H}^{\alpha+\beta}, \quad (24.70)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$.

Преобразование Фурье полипотенциала $\mathcal{H}^\alpha \varphi$ вычисляется в силу (12.23) по формуле

$$(\mathcal{H}^\alpha \varphi)(x) = \prod_{k=1}^n |x_k|^{-\alpha_k} \hat{\varphi}(x) \quad (24.71)$$

(ср. с (24.47), (24.48)).

Можно ввести также операторы типа бесселевых полипотенциалов:

$$G^\alpha \varphi = \int_{R^n} \prod_{k=1}^n G_{\alpha_k}(x_k - t_k) \varphi(t) dt, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (24.72)$$

(см. (18.61)), где ядро $G_{\alpha_k}(x_k)$ имеет своим образом Фурье по переменной x_k функцию $(1 + |x_k|^2)^{-\alpha_k/2}$. Удобна еще модификация полипотенциала (24.72) в духе (18.64), (18.65):

$$G_+^\alpha \varphi = \int_{R_+^n} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-t_k}}{\Gamma(\alpha_k) t_k^{1-\alpha_k}} \varphi(x - t) dt. \quad (24.73)$$

Можно рассмотреть пространства функций

$$G^\alpha(L_p), \quad G_+^\alpha(L_p), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

представимых в виде (24.72), (24.73) соответственно от функций $\varphi \in L_p(R^n)$. Нетрудно вывести из следствия теоремы 1.6 (с учетом формул (18.62), (18.63)), что

$$G^\alpha(L_p) = G_+^\alpha(L_p), \quad 1 < p < \infty. \quad (24.74)$$

Пространства $G^\alpha(L_p)$, $G_+^\alpha(L_p)$ могут быть охарактеризованы в терминах существования (и принадлежности L_p) смешанных дробных производных и потому имеют название пространств функций с доминирующей смешанной производной (см. об этом в § 29, п. 2°, 24.4).

§ 25. РИССОВО ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Изучим дробное интегродифференцирование функций многих переменных, которое является дробной степенью $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа. Идея введения такой степени прозрачна в образах Фурье: $(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1} |x|^\alpha \mathcal{F} f$ (на достаточно хороших функциях f , см. равенство (25.6) ниже). Построения этого параграфа нацелены на явную реализацию этой дробной степени и на изложение ее свойств. Отрицательные степени $(-\Delta)^{-\alpha/2}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, будут потенциалами Рисса

$$I^\alpha \varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{R^n} \frac{\varphi(y) dy}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad \alpha \neq n, n+2, n+4, \dots, \quad (25.1)$$

которые рассмотрены нами в одномерном случае в § 12; о нормировочной постоянной $\gamma_n(\alpha)$ см. далее. Положительные степени оператора Лапласа будут реализованы в виде так называемых гиперсингулярных интегралов $D^\alpha f$, см. (25.59). Операцию

$$(-\Delta)^{-\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1} |x|^{-\alpha} \mathcal{F} f = \begin{cases} I^\alpha f, & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ D^{-\alpha} f, & \operatorname{Re} \alpha < 0 \end{cases} \quad (25.2)$$

(точные определения см. ниже) и будем называть *(дробным) риссовым интегродифференцированием*.

Удобным и естественным средством исследования операции риссова интегродифференцирования служит преобразование Фурье.

1°. Предварительные сведения. Пусть

$$f(x) = (\mathcal{F} \varphi)(x) = \hat{\varphi}(x) = \int_{R^n} \varphi(y) e^{ix \cdot y} dy \quad (25.3)$$

есть преобразование Фурье функции $\varphi(y) = \varphi(y_1, \dots, y_n)$, а

$$\varphi(x) = (\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} f(y) e^{-ix \cdot y} dy$$

— обратное преобразование Фурье. Хорошо известно, что

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}^j f) = (-ix)^j \hat{f}(x), \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad (25.4)$$

так что для оператора Лапласа Δ имеем

$$\mathcal{F}(\Delta \varphi) = -|x|^2 \mathcal{F} \varphi \quad (25.5)$$

или

$$-\Delta \varphi = \mathcal{F}^{-1} |x|^2 \mathcal{F} \varphi. \quad (25.6)$$

Хорошо известно также, что для свертки

$$f * \varphi = \int_{R^n} f(x-y) \varphi(y) dy \quad (25.7)$$

преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}(f * \varphi) = \hat{f} \cdot \hat{\varphi}. \quad (25.8)$$

Поэтому, рассматривая потенциал Рисса (25.1), мы так или иначе заинтересованы в том, чтобы знать преобразование Фурье функции $|x|^{\alpha-n}$. Оно будет вычислено в п. 2° с помощью формулы Бохнера для преобразования Фурье радиальных функций, которая содержится в приводимой ниже лемме. Отметим, что *радиальной функцией* называется функция $\varphi = \varphi(|x|)$, зависящая только от расстояния $|x|$. Воспользуемся при доказательстве следующей ниже леммы известной формулой математического анализа:

$$\int_{S_{n-1}} f(x \cdot \sigma) d\sigma = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 f(|x|t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt, \quad (25.9)$$

где S_{n-1} — единичная сфера в R^n с центром в начале координат, $d\sigma$ — элемент площади на S_{n-1} (ее доказательство см., например, в книге Г. М. Фихтенгольца [1, с. 405—407] или в книге С. Г. Самко [31, с. 42—43]).

Л е м м а 25.1. *Преобразование Фурье радиальной функции есть также радиальная функция, при этом справедлива формула*

$$\int_{|y| < N} e^{ix \cdot y} \varphi(|y|) dy = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x|^{(n-2)/2}} \int_0^N \varphi(\rho) \rho^{n/2} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|x|) d\rho \quad (25.10)$$

для любой локально суммируемой функции $\varphi(\rho)$ и формула

$$\int_{R^n} e^{ix \cdot y} \varphi(|y|) dy = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x|^{(n-2)/2}} \int_0^\infty \varphi(\rho) \rho^{n/2} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho|x|) d\rho \quad (25.11)$$

для любой функции $\varphi(\rho)$, такой, что

$$\int_0^\infty \rho^{n-1} (1+\rho)^{(1-n)/2} |\varphi(\rho)| d\rho < \infty \quad (25.12)$$

при условии, что интеграл в левой части в (25.11) понимается как условно сходящийся (он абсолютно сходится, если $\int_0^\infty \rho^{n-1} |\varphi(\rho)| d\rho < \infty$).

Доказательство. Переходя к сферическим координатам в левой части в (25.10), имеем

$$\int_{|y| < N} e^{ix \cdot y} \varphi(|y|) dy = \int_0^N \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \int_{S_{n-1}} e^{i\rho x \cdot \sigma} d\sigma.$$

В силу формулы (25.9) и формулы Пуассона (2.52) получаем равенство

$$\int_{S_{n-1}} e^{ix \cdot \sigma} d\sigma = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x|^{\frac{n}{2}-1}} J_{\frac{n}{2}-1}(|x|), \quad (25.13)$$

что приводит к (25.10). Так как $|J_\nu(\rho)| \leq c/\sqrt{\rho}$ при $\rho \rightarrow \infty$, то для функций, удовлетворяющих условию (25.12), существует предел при $N \rightarrow \infty$ правой части в (25.10), что и дает (25.11). Лемма доказана.

В данной книге небезынтересно отметить, что n -мерное преобразование Фурье радиальной функции может быть выражено через одномерное преобразование Фурье с помощью дробного (вообще говоря) интегродифференцирования. С этой целью введем для радиальной функции $\varphi(|x|)$ обозначение

$$(\mathcal{F} * \varphi)(r) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irt} \varphi(t) dt, \quad \varphi(-t) \equiv \varphi(t).$$

Справедлива

Лемма 25.1'. При условии (25.12) справедливы формулы

$$\hat{\varphi}(x) = \pi^{(n-1)/2} (\mathcal{F} * I_{-; x^2}^{(n-1)/2} \varphi)(r), \quad r = |x|, \quad (25.14)$$

$$\varphi(r) = \pi^{\frac{1-n}{2}} (\mathcal{D}_{-; x^2}^{(n-1)/2} \mathcal{F}^{-1} f)(r), \quad (25.14')$$

где $f(r) = \hat{\varphi}(x)|_{|x|=r}$, $\hat{\varphi}(x)$ означает n -мерное преобразование Фурье функции $\varphi(|x|)$ по x , а $\mathcal{D}_{-; x^2}^{(n-1)/2}$, $I_{-; x^2}^{(n-1)/2}$ — интегродифференцирование (18.38),

(18.40) $(\mathcal{D}_{-; x^2}^{(n-1)/2} \equiv \left(-\frac{d}{dr^2}\right)^{(n-1)/2}$ при нечетном n).

Доказательство. Так как, согласно лемме 25.1, $\hat{\varphi}(x)$ зависит только от радиуса $\hat{\varphi}(x) = f(|x|)$, достаточно рассмотреть $\varphi(x)$ только для $x = (|x|, 0, \dots, 0)$. Для таких x имеем

$$\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|\xi_1} d\xi_1 \int_{R^{n-1}} \varphi(|\xi|) d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Переходя к полярным координатам во внутреннем интеграле, имеем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(x) &= |S_{n-2}| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|\xi_1} d\xi_1 \int_0^{\infty} \varphi(\sqrt{\rho^2 + \xi_1^2}) \rho^{n-2} d\rho = \\ &= |S_{n-2}| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|\xi_1} d\xi_1 \int_{|\xi_1|}^{\infty} t \varphi(t) (t^2 - \xi_1^2)^{(n-3)/2} dt. \end{aligned}$$

Отсюда в соответствии с обозначением (18.38) и получается равенство (25.14). Из него обращением одномерного преобразования Фурье $\mathcal{F}^*$ и интеграла $I_{-; x^2}^{(n-1)/2}$ получается (25.14').

Нам понадобится пространство Лизоркина основных функций, приспособленное к риссову интегродифференцированию. В отличие от такого пространства для частных дробных Лиувиллевских производных (см. § 24, п. 9°) здесь достаточно требовать обращения в нуль образов Фурье не на координатных плоскостях, а только в одной точке — начале координат. Положим

$$\Psi = \{\psi(x) : \psi \in S(R^n), (\mathcal{D}^j \psi)(0) = 0, |j| = 0, 1, 2, \dots\} \quad (25.15)$$

(ср. с определением такого класса в § 24, п. 9°, который, очевидно, существенно уже класса (25.15)). Примером функции класса (25.15) служит функция $\psi(x) = \exp(-|x|^2 - |x|^{-2})$. Рассмотрим теперь класс Φ , двойственный к (25.15), состоящий из преобразований Фурье функций из Ψ :

$$\Phi = \mathcal{F}(\Psi) = \{\varphi(x) : \varphi \in S(R^n), \varphi = \hat{\psi}, \psi \in \Psi\}. \quad (25.16)$$

Он допускает простое описание: класс Φ состоит из тех и только тех шварцевых функций φ , которые ортогональны многочленам:

$$\int_{R^n} x^j \varphi(x) dx = 0, \quad |j| = 0, 1, 2, \dots \quad (25.17)$$

Действительно, преобразование Фурье переводит, как известно (см., например, книгу И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, с. 208]), пространство S на себя и $\int_{R^n} x^j \varphi(x) dx = i^{-|j|} \int_{R^n} (ix)^j \varphi(x) e^{ix \cdot 0} dx = i^{-|j|} (\mathcal{D}^j \hat{\varphi})(0) = 0$ согласно (25.15).

Таким образом, Φ есть класс шварцевых функций, все моменты (25.17) которых равны нулю.

В Φ можно ввести топологию пространства $S(R^n)$, относительно которой Φ — полное пространство.

Ниже будем рассматривать обобщенные функции над Φ (и над Ψ) для обоснования совершаемых действий. Напомним, что преобразованием Фурье обобщенной функции $f \in \Phi'$ называется функционал $\hat{f} = \mathcal{F}f$, действующий по правилу

$$(\hat{f}, \psi) = (f, \hat{\psi}), \quad \psi \in \Psi. \quad (25.18)$$

Это определение корректно, так как $F(\Psi) = \Phi$ и преобразование Фурье является непрерывной операцией в топологии шварцева пространства $S(R^n)$ (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов [2, с. 208]). Если g — функционал из Ψ' , то аналогично равенство

$$(\hat{g}, \varphi) = (g, \hat{\varphi}), \quad \varphi \in \Phi, \quad (25.18')$$

служит определением преобразования Фурье функционала $g \in \Psi'$.

Функция $|x|^{-\alpha}$ как элемент пространства Ψ' порождает регулярный функционал $(|x|^{-\alpha}, \psi) = \int_{R^n} |x|^{-\alpha} \psi(x) dx$ при всех $\alpha \in C^1$ ввиду того, что

$(\mathcal{D}^j \psi)(0) = 0$, $|j| = 0, 1, 2, \dots$. Но уже как элемент пространства S' или Φ' — это нерегулярный функционал при $\operatorname{Re} \alpha \geq n$. Для таких α он будет пониматься в смысле регуляризации, получаемой аналитическим продолжением функционала $(|x|^{-\alpha}, \psi)$ из полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha < n$. Аналитическое продолжение осуществляется равенством

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{|x|^\alpha}, \varphi \right) &= \int_{|x| < 1} \frac{\varphi(x) - \sum_{|j| \leq m} (\mathcal{D}^j \varphi)(0) x^j / j!}{|x|^\alpha} dx + \\ &+ \int_{|x| > 1} \frac{\varphi(x) dx}{|x|^\alpha} + \sum_{i=0}^{[m/2]} \frac{c_i}{n - \alpha + 2i} (\Delta^i \varphi)(0), \quad \alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots, \end{aligned} \quad (25.19)$$

где $\varphi \in S(R^n)$, $m > \operatorname{Re} \alpha - n - 1$ и обозначено $c_i = \pi^{n/2} 2^{1-2i} [i! \Gamma(i + n/2)]^{-1}$. Последнее равенство дает явную реализацию аналитического продолжения в полуплоскость $\operatorname{Re} \alpha < m + n + 1$ функционала $(|x|^{-\alpha}, \varphi)$. Мы уже столкнулись с регуляризацией типа (25.19) в одномерном случае, см. (5.68).

Формула (25.19) выводится стандартным путем — вычитанием отрезка ряда Тейлора — с учетом того, что

$$\sum_{|j| \leq m} \frac{1}{j!} (\mathcal{D}^j \varphi)(0) \int_{|x| < 1} x^j |x|^{-\alpha} dx = \sum_{i=0}^{[m/2]} \frac{c_i}{n - \alpha + 2i} (\Delta^i \varphi)(0).$$

Последнее получается непосредственными преобразованиями с помощью равенства

$$\Delta^m = \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j!} \mathcal{D}^j. \quad (25.20)$$

В исключенных в (25.19) случаях $\alpha - n = 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, полагаем по определению

$$\left(\frac{1}{|x|^{n+2k}}, \varphi \right) = \lim_{\alpha \rightarrow n+2k} \left[\left(\frac{1}{|x|^\alpha}, \varphi \right) + \frac{c_k}{\alpha - n - 2k} (\Delta^k \varphi)(0) \right]. \quad (25.21)$$

Регуляризацию (25.19) можно записать более компактно при выборе $m = [\operatorname{Re} \alpha] - n$ (при $\operatorname{Re} \alpha > n$):

$$\left(\frac{1}{|x|^\alpha}, \varphi \right) = \int_{R^n} \frac{\varphi(x) - \sum_{|j| \leq [\operatorname{Re} \alpha] - n} \frac{1}{j!} (\mathcal{D}^j \varphi)(0) x^j}{|x|^\alpha} dx, \quad (25.22)$$

однако при этом приходится исключить целые значения $\operatorname{Re} \alpha = n, n+1, n+2, \dots$

З а м е ч а н и е 25.1. Определенный равенством (25.19) функционал аналитичен по параметру α для всех значений $\alpha \in C^1$ (за счет возможности выбрать m как угодно большим; очевидно, что правая часть в (25.19) не зависит от этого выбора), кроме точек $\alpha = \alpha_k = n + 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В точках же α_k функционал (25.19) имеет простой полюс, допуская в окрестности точек α_k представление

$$\left(\frac{1}{|x|^\alpha}, \varphi \right) = (g_\alpha, \varphi) - \frac{c_k}{\alpha - \alpha_k} (\Delta^k \varphi)(0), \quad (25.23)$$

где (g_α, φ) — функция, аналитическая в окрестности точки α_k , при этом

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_k} (g_\alpha, \varphi) = \left(\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \varphi \right). \quad (25.24)$$

2°. Потенциал Рисса и его преобразование Фурье. Инвариантное пространство Лизоркина. Рассуждая пока формально, видим, что операция (25.2) должна реализовываться как свертка (в обобщенном смысле) функции f с функцией $\mathcal{F}^{-1}(|x|^{-\alpha})$. Займемся вычислением этой функции, понимая преобразование Фурье в смысле обобщенных функций. В качестве основного класса здесь удобно использовать пространство Лизоркина (25.16). Справедлива следующая

Л е м м а 25.2. Преобразование Фурье функции $|x|^{-\alpha}$, понимаемое в смысле (25.18'), вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}(|x|^{-\alpha}) = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha \neq n+2k, \quad \alpha \neq -2k, \\ |x|^{\alpha-n} \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha = n+2k, \\ (-\Delta)^{-\alpha/2} \delta, & \alpha = -2k, \end{cases} \quad (25.25)$$

где $\delta = \delta(x)$ — дельта-функция, $k = 0, 1, 2, \dots$, множитель $\gamma_n(\alpha)$ равен:

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^n \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right), & \alpha \neq n+2k, \quad \alpha \neq -2k, \\ 1, & \alpha = -2k, \\ (-1)^{(n-\alpha)/2} \pi^{n/2} 2^{\alpha-1} \left[\frac{\alpha-n}{2} \right]! \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), & \alpha = n+2k. \end{cases} \quad (25.26)$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} \alpha < n$. Тогда $|x|^{-\alpha}$ — локально суммируемая функция. Воспользуемся для вычисления ее преобразования Фурье формулой Бохнера (25.11). Считаем пока, что $(n+1)/2 < \operatorname{Re} \alpha < n$, так что тогда для $\varphi(\rho) = \rho^{-\alpha}$ условие (25.12) выполнено. Формула (25.11) дает $\mathcal{F}(|x|^{-\alpha}) = |x|^{\alpha-n} J$, где $J = (2\pi)^{n/2} \int_0^\infty \rho^{-\alpha+n/2} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho) d\rho$.

Справедлива формула (интеграл Вебера)

$$\int_0^\infty \rho^\beta J_\nu(\rho) d\rho = 2^\beta \Gamma\left(\frac{\nu + \beta + 1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu - \beta + 1}{2}\right) \quad (25.27)$$

(получается подстановкой интеграла Пуассона (2.52) в левую часть в (25.27) с последующей перестановкой порядка интегрирования). Поэтому $J = (2\pi)^{n/2} 2^{-\alpha+n/2} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, т. е. мы получили первую строку из (25.25) при $(n+1)/2 < \operatorname{Re} \alpha < n$. Для остальных значений α преобразование Фурье функции $|x|^{-\alpha}$ уже будет пониматься в смысле (25.18'). В соответствии с (25.18') нужно показать, что

$$\frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)} \left(\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}, \varphi \right) = \left(\frac{1}{|x|^\alpha}, \hat{\varphi} \right), \quad \varphi \in \Phi, \quad \alpha \neq n+2k, \quad \alpha \neq -2k. \quad (25.28)$$

В силу только что доказанного равенство (25.28) выполняется при $(n+1)/2 < \operatorname{Re} \alpha < n$. Левая часть в (25.28) понимается в смысле (25.19) при $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$. Правая часть определена и аналитична при всех $\alpha \in C^1$, так как $\hat{\varphi} \in \Psi$. Левая часть аналитична при всех $\alpha \in C^1$, кроме точек $\alpha = -2k$ и $\alpha = n+2k$, где имеет устранимую особенность: в первой серии точек $(|x|^{n-\alpha}, \varphi)$ имеет полюс, погашаемый нулем функции $1/\gamma_n(\alpha)$, а во второй серии точек — нуль в силу (25.17), погашаемый нулем функции $\gamma_n(\alpha)$. Поэтому в силу теоремы единственности аналитических функций выполнимость равенства (25.28) следует из его выполнимости при $(n+1)/2 < \operatorname{Re} \alpha < n$.

Остались случаи $\alpha = -2k$, $\alpha = n+2k$, отвечающие устранимой особенности левой части в (25.28). Первый случай немедленно следует из (25.4). Для рассмотрения значений $\alpha = \alpha_k = n+2k$ перепишем (25.28) для α в окрестности точек α_k следующим образом: $(\alpha - \alpha_k)(|x|^{-\alpha}, \hat{\varphi}) = (2\pi)^n \times \times a(\alpha)(|x|^{\alpha-n}, \varphi)$, где $a(\alpha) = (\alpha - \alpha_k)/\gamma_n(\alpha)$. Дифференцируя это равенство по α , получаем

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\alpha - \alpha_k}{|x|^\alpha}, \hat{\varphi} \right) = (2\pi)^n \left(\frac{a'(\alpha) + a(\alpha) \ln |x|}{|x|^{n-\alpha}}, \varphi \right). \quad (25.29)$$

Ввиду представления (25.23) и свойства непрерывности (25.24) имеем $\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\alpha - \alpha_k}{|x|^\alpha}, \hat{\varphi} \right) = (g_\alpha, \hat{\varphi}) + (\alpha - \alpha_k) \frac{d}{d\alpha} (g_\alpha, \hat{\varphi}) \rightarrow \left(\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \hat{\varphi} \right)$ при $\alpha \rightarrow \alpha_k$. Тогда из (25.29)

$$\left(\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \hat{\varphi} \right) = (2\pi)^k a(\alpha_k) \left(\frac{\ln |x|}{|x|^{n-\alpha_k}}, \varphi \right) \quad (25.30)$$

с учетом того, что $(|x|^{\alpha_k-n}, \varphi) = 0$ в силу (25.17). Равенство (25.30) и дает вторую строчку в (25.25). Значение постоянной в виде $a(\alpha_k) = -[\gamma_n(\alpha_k)]^{-1}$ получается несложными преобразованиями. Лемма доказана.

Замечание 25.2. Если в (25.25) преобразование Фурье понимать в смысле обобщенных функций не над $\Phi = \Phi(R^n)$, а над пространством

Шварца $S(R^n)$, то в (25.25) следует заменить $\ln \frac{1}{|x|}$ на $\ln \frac{1}{|x|} + d_k$, где

$$d_k = \gamma_n(\alpha_k) \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_k} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\alpha - \alpha_k}{\gamma_n(\alpha)} \right] = \\ = \ln 2 + \frac{1}{2} \left[\Gamma'(1) + \Gamma' \left(\frac{\alpha_k}{2} \right) / \Gamma \left(\frac{\alpha_k}{2} \right) + \sum_{v=1}^k \frac{1}{v} \right], \quad \alpha_k = n + 2k,$$

что легко усматривается из действий в (25.29), (25.30).

Таким образом, операция $\mathcal{F}^{-1}|x|^{-\alpha}\mathcal{F}$ должна реализовываться как свертка с функцией (25.25). При $\operatorname{Re} \alpha > 0$ эта функция локально суммируема и свертка с нею есть потенциал Рисса (25.1) за исключением значений $\alpha = n, n+2, n+4, \dots$. В исключенных случаях нужно, согласно (25.25), ввести логарифмический множитель. Мы определим, таким образом, риссов потенциал при всех α , $\operatorname{Re} \alpha > 0$, как свертку

$$I^\alpha \varphi = \int_{R^n} k_\alpha(x-y) \varphi(y) dy, \quad (25.31)$$

где

$$k_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n}, & \alpha - n \neq 0, 2, 4, 6, \dots, \\ |x|^{\alpha-n} \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha - n = 0, 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (25.32)$$

и нормировочный множитель дается равенствами (25.26). Функция $k_\alpha(x)$ называется *риссовым ядром*.

Если в интеграле $I^\alpha \varphi = [\gamma_n(\alpha)]^{-1} \int_{R^n} |y|^{\alpha-n} \varphi(x-y) dy$, $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots$, перейти к полярным координатам, получим

$$I^\alpha \varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{S_{n-1}} d\sigma \int_0^\infty \frac{\varphi(x - \xi\sigma)}{\xi^{1-\alpha}} d\xi, \quad (25.33)$$

т. е. потенциал Рисса можно интерпретировать как результат дробного интегрирования порядка α в направлении вектора σ (см. (24.39)) с последующим интегрированием по σ . В обозначении (24.39) равенство (25.33) имеет вид

$$I^\alpha \varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2\pi^{(n+1)/2}} \int_{S_{n-1}} (I_\sigma^\alpha \varphi)(x) d\sigma. \quad (25.34)$$

Преобразование Фурье риссова потенциала $I^\alpha \varphi$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, сводится к делению на $|x|^\alpha$:

$$\mathcal{F}(I^\alpha \varphi) = \frac{1}{|x|^\alpha} \hat{\varphi}(x), \quad (25.35)$$

по крайней мере, для функций $\varphi(x) \in \Phi$. Обоснование этого фактически дано в лемме 25.2. Действительно, (25.35) равносильно равенству

$$\int_{R^n} k_\alpha(y) \varphi(x+y) dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} e^{ix \cdot y} \frac{\hat{\varphi}(y)}{|y|^\alpha} dy, \quad \varphi \in \Phi, \quad (25.36)$$

что доказано в лемме 25.2 при $x=0$ (см. равенство (25.28)) и вытекает из (25.28) в силу инвариантности Φ относительно сдвига.

Из (25.35) заключаем, что

$$\Delta I^\alpha \varphi = -I^{\alpha-2} \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad \operatorname{Re} \alpha > 2.$$

Теорема 25.1. *Пространство Лизоркина Φ инвариантно относительно риссова потенциала I^α , причем $I^\alpha(\Phi) = \Phi$ и*

$$I^\alpha I^\beta \varphi = I^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0. \quad (25.37)$$

Доказательство. Инвариантность пространства Φ видна из (25.35) или (25.36): так как $|y|^{-\alpha} \hat{\varphi}(y) \in \Psi$ при любом α для $\varphi(y) \in \Phi$, то правая часть в (25.36) принадлежит пространству Φ , т. е. $I^\alpha(\Phi) \subseteq \Phi$. Так как любая функция класса Ψ может быть представлена в виде $\psi(x) = |x|^{-\alpha} \psi_1(x)$, где $\psi_1(x) \in \Psi$, то $I^\alpha(\Phi) = \Phi$. Полугрупповое свойство (25.37) следует из (25.35).

Замечание 25.3. Для функций $\varphi(x) \in S(R^n)$ потенциал Рисса не обязан быстро убывать на бесконечности. Так, если $\varphi(x) \geq 0$ и $\varphi(x) \geq A > 0$, например, при $|x| < 1$, то $(I^\alpha \varphi)(x) \geq c|x|^{\alpha-n}$ при $|x| \rightarrow \infty$ (см. по этому поводу (7.8) в одномерном случае). Действительно, $(I^\alpha \varphi)(x) \geq A[\gamma_n(\alpha)]^{-1} \int_{|y|<1} |x-y|^{\alpha-n} dy$. Переходя здесь к полярным координатам,

$$\begin{aligned} \text{получаем } (I^\alpha \varphi)(x) &\geq c \int_{S_{n-1}} d\sigma \int_0^1 \rho^{n-1} (\rho^2 - 2\rho\sigma \cdot x + |x|^2)^{(\alpha-n)/2} d\rho \geq \frac{c}{2} \times \\ &\times \int_{S_{n-1}} d\sigma \int_0^1 \rho^{n-1} (\rho^2 + |x|^2)^{(\alpha-n)/2} d\rho \geq c_1 |x|^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Замечание 25.4. Выбор класса Лизоркина Φ для записи полугруппового свойства (25.37) при всех α, β с $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ существен. Именно равенство (25.37) на функциях $\varphi(x)$ из класса Шварца $S(R^n)$ имеет смысл ввиду замечания 25.3 при ограничении $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < n$.

Отметим, что из полугруппового свойства (25.37), переставляя порядок интегрирования в левой части, получаем равенство

$$\int_{R^n} |e - y|^{\alpha-n} |y|^{\beta-n} dy = \gamma_n(\alpha) \gamma_n(\beta) / \gamma_n(\alpha + \beta), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < n, \quad (25.38)$$

для любого единичного вектора $e, |e| = 1$. Отметим еще формулу

$$I^\alpha(e^{ia \cdot y}) = |a|^{-\alpha} e^{ia \cdot x}, \quad a = (a_1, \dots, a_n). \quad (25.39)$$

Она является перефразировкой утверждения $\hat{k}_\alpha(a) = |a|^{-\alpha}$. Потенциал Рисса от $e^{ia \cdot y}$ является условно сходящимся интегралом при $0 < \alpha < (n + 1)/2$. В случае $\alpha \geq (n + 1)/2$ его следует понимать в смысле аналитического продолжения по α .

3°. Действие оператора I^α в пространствах $L_p(R^n)$ и $L_p(R^n; \rho)$. Прежде всего отмечаем, что оператор I^α определен на функциях $\varphi(y) \in L_p(R^n)$ при $1 \leq p < n/\alpha, 0 < \alpha < n$. Это проверяется подобно одномерному случаю (см. § 5, п. 1°):

$$\gamma_n(\alpha) I^\alpha \varphi = \int_{|y|<1} |y|^{\alpha-n} \varphi(x-y) dy + \int_{|y|>1} |y|^{\alpha-n} \varphi(x-y) dy.$$

Здесь существование почти для всех $x \in R^n$ первого слагаемого можно установить, показав с помощью неравенства Минковского, что оно при-

надлежит локально L_p , а второе существует для всех x при $1 \leq p < n/\alpha$ в силу неравенства Гельдера.

Обобщением теоремы Харди—Литтлвуда 5.3 на случай многомерного риссова интегрирования I^α служит следующая теорема Соболева.

Теорема 25.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 0$. Оператор I^α ограничен из $L_p(R^n)$ в $L_q(R^n)$ тогда и только тогда, когда

$$0 < \alpha < n, \quad 1 < p < \frac{n}{\alpha}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}. \quad (25.40)$$

Доказательство этой теоремы мы опускаем так же, как и в одномерном случае, равно как и доказательство других теорем из этого пункта. В § 29, п. 1° можно найти соответствующие литературные ссылки.

Показатель $q = np/(n - \alpha p)$ в (25.40) называется *предельным показателем Соболева*. Ниже, в § 26, п. 7°, рассмотрим риссов потенциал от функций $\varphi \in L_p(R^n)$ и при $p \geq n/\alpha$, понимая потенциал Рисса в обобщенном смысле.

Пусть $L_p(R^n; \rho)$ — весовое пространство функций с конечной нормой $\|f\|_{L_p(R^n; \rho)} = \left\{ \int_{R^n} \rho(x) |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$, где $\rho(x)$ — неотрицательная функция.

Справедливо следующее обобщение теоремы Соболева 25.2 на случай веса, являющегося степенью расстояния $|x|$.

Теорема 25.3. Оператор I^α ограничен из $L_p(R^n; |x|^\gamma)$ в $L_r(R^n; |x|^\mu)$, если

$$\alpha > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 < r < \infty, \quad \alpha p - n < \gamma < n(p - 1),$$

$$\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p}, \quad \frac{\mu + n}{r} = \frac{\gamma + n}{p} - \alpha. \quad (25.41)$$

Эта теорема содержит (в достаточной части) теорему 25.2 при $\gamma = 0$, $\mu = 0$ и $r = np(n - \alpha p)^{-1}$. Отметим также полезный частный случай $\gamma = 0$, $\mu = -\alpha p$, $r = p$ в теореме 25.3:

$$\int_{R^n} |x|^{-\alpha p} |(I^\alpha \varphi)(x)|^p dx \leq A \|\varphi\|_p^p, \quad 1 < p < n/\alpha \quad (25.42)$$

(обобщение неравенства Харди (5.45)).

В случае $r = np(n - \alpha p)^{-1}$ имеется также распространение теоремы 25.3 на веса общей природы. Именно пусть вес $\rho(x)$ удовлетворяет так называемому *условию Макенхоупта—Видена*

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \rho^{q/p}(x) dx \right)^{p/q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \rho^{1/(1-p)}(x) dx \right)^{p-1} \leq c < \infty, \quad (25.43)$$

где Q — произвольный n -мерный куб, $|Q|$ — его мера. Справедлива следующая

Теорема 25.4. Пусть $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $q = np/(n - \alpha p)$. Для того чтобы оператор I^α был ограничен из $L_p(R^n; \rho)$ в $L_q(R^n; \rho^{q/p})$, необходимо и достаточно, чтобы вес $\rho(x)$ удовлетворял условию (25.43) с $q = np/(n - \alpha p)$.

Мы не приводим доказательства теорем 25.3 и 25.4, см. по этому поводу литературные ссылки в § 29, п. 1°.

В случае $p = 1$ утверждение теоремы Соболева не имеет места, но выполняется более слабое утверждение — так называемая оценка слабого типа. Именно пусть $\lambda_f(t)$ — функция распределения функции $f(x)$, $x \in R^n$:

$$\lambda_f(t) = \text{mes} \{x : |f(x)| > t\}, \quad t > 0. \quad (25.44)$$

Очевидно, $\lambda_f(t) \leq t^{-p} \|f\|_p^p$, $\|f\|_p^p = \int_{R^n} |f(x)|^p dx$, так что оценка

$$t\lambda_{Tf}^{1/q}(t) \leq c \|f\|_p \quad (25.45)$$

является более слабой, чем оценка $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$, дающая ограниченность оператора T из L_p в L_q . В терминах (25.44), (25.45) и заменяется информация о потенциале Рисса в теореме Соболева. Именно справедлива оценка

$$\text{mes} \{x: |(I^\alpha \varphi)(x)| > t\} \leq \left(\frac{c}{t} \|\varphi\|_1 \right)^q, \quad q = \frac{n}{n-\alpha}, \quad (25.46)$$

где $0 < \alpha < n$ и c не зависит от $t > 0$.

Отметим еще действие потенциала Рисса в классах гельдеровских функций $f(x)$, $x \in \dot{R}^n$, где $\dot{R}^n$ — пространство R^n , компактифицированное одной бесконечно удаленной точкой. Для существования потенциала Рисса $I^\alpha \varphi$ от гельдеровских функций требуется обращение $\varphi(x)$ в нуль при $x = \infty$, и нам будет удобно добиться этого за счет веса. Именно пусть

$$H^\lambda(\dot{R}^n; \rho) = \{f(x): \rho(x)f(x) \in H^\lambda(\dot{R}^n)\}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

где (ср. с (1.5), (1.6))

$$H^\lambda(\dot{R}^n) = \left\{ f(x): f(x) \in C(\dot{R}^n), |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{c|h|^\lambda}{(1+|x|)^\lambda(1+|x+h|)^\lambda} \right\}.$$

В пространстве $H^\lambda(\dot{R}^n; \rho)$ естественным образом вводится норма, превращающая его в банахово пространство. Справедлива следующая

Теорема 25.5. *Оператор I^α , $0 < \alpha < 1$, изоморфно отображает пространство $H^\lambda(\dot{R}^n; (1+|x|^2)^{(n+\alpha)/2})$ на пространство $H^{\lambda+\alpha}(\dot{R}^n; (1+|x|^2)^{(n-\alpha)/2})$, $\lambda + \alpha < 1$.*

Доказательство теоремы, получаемое отображением с помощью стереографической проекции пространства $\dot{R}^n$ на единичную сферу $S_n \subset R^{n+1}$, опустим. Отметим лишь, что при этом отображении потенциал Рисса $I^\alpha \varphi$ переходит (с точностью до веса) в аналогичный потенциал по сфере, т. е. по компактному множеству, где гельдеровость получается прямыми оценками (см. работу Б. Г. Вакулова [1]).

В заключение этого пункта отметим простые соотношения, связывающие потенциалы Рисса с одномерными дробными интегралами Лиувилевского типа. Указанная связь осуществляется с помощью *интегралов Пуассона* и *Гаусса—Вейерштрасса*, которые определяются равенствами

$$(P_t \varphi)(x) = \int_{R^n} P(y, t) \varphi(x-y) dy, \quad t > 0, \quad (25.47)$$

$$(W_t \varphi)(x) = \int_{R^n} W(y, t) \varphi(x-y) dy, \quad t > 0. \quad (25.48)$$

Здесь

$$P(x, t) = \frac{c_n t}{(|x|^2 + t^2)^{(n+1)/2}}, \quad c_n = \pi^{-(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad (25.49)$$

— ядро Пуассона и

$$W(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)} \quad (25.50)$$

— ядро Гаусса—Вейерштрасса.

Теорема 25.6. *Для потенциала Рисса $I^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 < p < n/\alpha$, имеют место представления*

$$(I^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (P_t \varphi)(x) dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} (W_t \varphi)(x) dt. \quad (25.51)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$(P_t I^\alpha \varphi)(x) = (I_-^\alpha (P_\tau \varphi)(x))(t), \quad (25.52)$$

$$(W_t I^\alpha \varphi)(x) = (I_-^{\alpha/2} (W_\tau \varphi)(x))(t), \quad (25.53)$$

в которых операторы I_-^α , $I_-^{\alpha/2}$ применяются по переменной t .

Доказательство. Подставляя выражения для $P_t \varphi$ и $W_t \varphi$ в (25.51) и меняя порядок интегрирования, приходим к легко вычисляемым внутренним интегралам и в результате получаем $I^\alpha \varphi$. Равенства (25.52), (25.53) выводятся из (25.51) применением операторов P_t , W_t с учетом полугруппового свойства $P_t P_\tau = P_{t+\tau}$, $W_t W_\tau = W_{t+\tau}$.

Заметим, что равенства (25.51) — (25.53) прозрачны в образах Фурье, если учесть, что

$$\hat{P}(\cdot, t) = e^{-t|\cdot|}, \quad (25.54)$$

$$\hat{W}(\cdot, t) = e^{-t|\cdot|^2} \quad (25.55)$$

(см., например, И. Стейн, Г. Вейс [1]).

Сравнивая (25.51) с лиувиллевским дробным интегралом (5.4) или, более общо, с выражением (5.86) для отрицательной дробной степени оператора, видим, что потенциал Рисса есть реализация формулы (5.86) при выборе оператора Пуассона в качестве полугруппы $T_t \varphi = P_t \varphi$ в (5.86).

4°. **Риссово дифференцирование (гиперсингулярный интеграл).** Риссово дифференцирование $(-\Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1} |x|^\alpha \mathcal{F} f$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, ввиду леммы 25.2 ожидает реализации в виде свертки с обобщенной функцией $|x|^{-\alpha-n}$. Такая свертка, т. е. интеграл с ядром $|x-y|^{-\alpha-n}$, в противоположность потенциалу Рисса имеет порядок особенности больше размерности пространства R^n и будет поэтому называться *гиперсингулярным интегралом*. Такой интеграл расходится, и потому рассматриваемая свертка нуждается в корректном определении. Пусть вначале $0 < \alpha < 1$ (или $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$). Сходимость свертки с $|x|^{-n-\alpha}$ можно обеспечить (на достаточно хороших функциях), взяв ее в виде

$$\int_{R^n} \frac{f(y) - f(x)}{|y-x|^{n+\alpha}} dy = - \int_{R^n} \frac{f(x) - f(x-y)}{|y|^{n+\alpha}} dy. \quad (25.56)$$

Этот интеграл сходится при $0 < \alpha < 1$ на дифференцируемых и ограниченных функциях и является многомерным аналогом дробной производной Маршо (5.58). Распространение на случай $\alpha \geq 1$ можно дать либо в терминах регуляризации, вычитая отрезок ряда Тейлора подобно (25.19) или (25.22), либо с помощью взятия конечных разностей. Оба подхода мы уже рассматривали в одномерном случае при изучении дробной производной Маршо порядка $\alpha \geq 1$, см. (5.68) и (5.80). Для реализации риссова дифференцирования будем использовать подход через конечные разности, более предпочтительный, хотя и равносильный, вообще говоря, первому (см. об этом в случае гладких функций в § 26, п. 5°).

Введем конечные разности $(\Delta_h^t f)(x)$ функции $f(x)$ многих переменных с векторным шагом h . Пусть τ_h — оператор сдвига на вектор h :

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h), \quad x, h \in R^n.$$

Различают *центрированные разности*

$$(\Delta_h^l f)(x) = (\tau_{-\frac{h}{2}} - \tau_{\frac{h}{2}})^l f = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} f \left[x + \left(\frac{l}{2} - k \right) h \right] \quad (25.57)$$

(с векторным шагом h и с центром в точке x) и *нецентрированные разности*

$$(\Delta_h^l f)(x) = (E - \tau_h)^l f = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} f(x - kh). \quad (25.58)$$

Чтобы не усложнять записей, будем использовать обозначение $(\Delta_h^l f)(x)$ для каждой из этих разностей, оговаривая тип разности в тех случаях, когда это существенно. Мы рассматриваем оба типа разности, так как не всегда можно будет использовать один тип разности (см. ниже § 26, п. 4°).

Итак, реализация операции $(-\Delta)^{\alpha/2}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, ожидается в виде *гиперсингулярного интеграла*

$$\mathbf{D}^\alpha f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad (25.59)$$

где нормировочный множитель $d_{n,l}(\alpha)$ будет выбран так, что $\mathbf{D}^\alpha f$ не зависит от l , лишь бы $l > \alpha$. Конструкцию

$$\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy \quad [(25.60)]$$

назовем *усеченным гиперсингулярным интегралом*.

Будет удобно иметь еще обозначение для интеграла (25.59) без нормировочного множителя:

$$T^\alpha f = \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad l > \alpha. \quad (25.61)$$

Следующий параграф посвящен детальному исследованию гиперсингулярных интегралов (25.59) и более общих конструкций. Здесь же остановимся только на главной мысли о том, что гиперсингулярный интеграл (25.59) и есть риссова производная в том смысле, что

$$\widehat{\mathbf{D}^\alpha f} = |x|^\alpha \hat{f}(x) \quad (25.62)$$

при надлежащем выборе нормировочного множителя $d_{n,l}(\alpha)$ в (25.59). Справедлива следующая

Л е м м а 25.3. *Преобразование Фурье интеграла $T^\alpha f$ вычисляется по формуле*

$$\mathcal{F}(T^\alpha f) = d_{n,l}(\alpha) |x|^\alpha \hat{f}(x), \quad f \in C_0^\infty, \quad (25.63)$$

где

$$d_{n,l}(\alpha) = \int_{R^n} (1 - e^{it_1})^l |t|^{-n-\alpha} dt \quad (25.64)$$

в случае *нецентрированной разности* $(\Delta_y^l f)(x)$ и

$$d_{n,l}(\alpha) = \int_{R^n} (e^{iy_1/2} - e^{-iy_1/2})^l |y|^{-n-\alpha} dy = 2^{l-\alpha} i^l \int_{R^n} \sin^l y_1 |y|^{-n-\alpha} dy \quad (25.65)$$

в случае *центрированной разности*.

Доказательство. Пусть $T_\varepsilon^\alpha f$ — усеченный интеграл (25.61), усеченный подобно (25.60). Пусть вначале разность $\Delta_y^l f$ — нецентрированная. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T_\varepsilon^\alpha f) &= \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha}} \int_{R^n} e^{ix \cdot \eta} f(\eta - ky) d\eta = \\ &= \hat{f}(x) \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_{|y|>\varepsilon} |y|^{-n-\alpha} e^{ikh \cdot y} dy,\end{aligned}$$

т. е.

$$\mathcal{F}(T_\varepsilon^\alpha f) = \hat{f}(x) \int_{|y|>\varepsilon} \frac{(1 - e^{ix \cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}} dy. \quad (25.66)$$

Нетрудно показать, что здесь возможен предельный переход (например, по норме L_2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, так что

$$\mathcal{F}(T^\alpha f) = |x|^\alpha \hat{f}(x) \int_{R^n} \frac{(1 - e^{i\xi \cdot x/|x|})^l}{|\xi|^{n+\alpha}} d\xi \quad (25.67)$$

(совершили преобразование подобия $y = |x|^{-1}\xi$). Осуществим еще одну замену переменных под знаком интеграла:

$$\xi = \omega_x(\eta), \quad \omega_x(e_1) = \frac{x}{|x|}, \quad (25.68)$$

где $\omega_x(\eta)$ — вращение в R^n , переводящее орт $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ в единичный вектор $x/|x|$. Очевидно, $|\xi| = |\eta|$, $\xi \cdot \frac{x}{|x|} = \eta \cdot e_1 = \eta_1$, так что

$$\int_{R^n} \frac{(1 - e^{i\xi \cdot x/|x|})^l}{|\xi|^{n+\alpha}} d\xi = \int_{R^n} \frac{(1 - e^{i\eta_1})^l}{|\eta|^{n+\alpha}} d\eta$$

и (25.67) превращается в (25.63), (25.64).

Если же разность центрирована, то аналогичные действия приводят к равенству (25.63) с нормировочной постоянной (25.65). Лемма доказана.

Из равенства (25.63) следует формула (25.62) после деления на $d_{n,l}(\alpha)$, однако здесь требуется осторожность из-за возможного обращения в нуль постоянной $d_{n,l}(\alpha)$ при некоторых α . В случае центрированной разности вопрос решается просто: как видно из (25.65), нормировочная постоянная $d_{n,l}(\alpha)$ равна нулю для всех α при нечетном l и заведомо отлична от нуля при четном l .

Таким образом, конструкция T^α является тождественным нулем: $T^\alpha f \equiv 0$ в случае центрированной разности нечетного порядка. Следовательно, центрированную разность нужно брать только четного порядка $l=2, 4, 6, \dots$, и тогда переход от (25.63) к (25.62) возможен при любых α , $0 < \alpha < l$.

Вопрос о необращении $d_{n,l}(\alpha)$ в нуль в случае нецентрированной разности сложнее и будет рассмотрен ниже в § 26, где проводится подробное исследование гиперсингулярных интегралов. В частности, будет показано, что $d_{n,l}(\alpha)$ как функция параметра α имеет нули в интервале $(0, l)$.

Сформулируем следствие из леммы 25.3.

С л е д с т в и е. При выборе нормирующего множителя по формулам (25.64), (25.65) (в случае, если он не обращается в нуль) гиперсингулярный интеграл $D^\alpha f$ не зависит от выбора l , $l > \alpha$.

В заключение этого пункта отметим примыкающие к (25.51) формулы

$$D^\alpha f = \frac{1}{\kappa(\alpha, l)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} (E - P_t)^l f dt, \quad 0 < \alpha < l, \quad (25.69)$$

$$D^\alpha f = \frac{1}{\kappa\left(\frac{\alpha}{2}, l\right)} \int_0^\infty t^{-1-\frac{\alpha}{2}} (E - W_t)^l f dt, \quad 0 < \alpha < 2l, \quad (25.70)$$

где $\kappa(\alpha, l)$ — постоянная (5.81), а $P_t f$, $W_t f$ — интегралы Пуассона и Гаусса—Вейерштрасса (25.47), (25.48). На «хороших» функциях эти формулы получаются из (25.52), (25.53) обращением одномерных операторов $I_\pm^\alpha$, $I_\pm^{\alpha/2}$ с помощью производной Маршо (5.57) с дальнейшим предельным переходом к пределу при $t \rightarrow 0$. Формулы (25.69), (25.70) являются реализацией формулы (5.85) при конкретном выборе полугруппы T_t в (5.85). При этом формула (25.69) реализует дробную степень $(\sqrt{-\Delta})^\alpha$, а формула (25.70) — дробную степень $(-\Delta)^{\alpha/2}$.

5°. Односторонние риссовы потенциалы. Односторонними риссовыми потенциалами будем называть интегральные операторы

$$I_\pm^\alpha \varphi = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{R_+^n} \frac{y_n^\alpha}{|y|^n} \varphi(x \mp y) dy, \quad c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}. \quad (25.71)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, а интегрирование ведется по полупространству $R_+^n = \{x: x \in R^n, x_n > 0\}$. В силу оценки $y_n^\alpha |y|^{-n} \leq |y|^{\alpha-n}$ операторы (25.71) близки по свойствам к потенциалам Рисса $I^\alpha \varphi$. Например, они ограничены из L_p в L_q , $q = np/(n - \alpha p)$, для $1 < p < n/\alpha$. Интегралы $I_\pm^\alpha \varphi$ являются непосредственными обобщениями лиувиллевских дробных интегралов (5.4), совпадая с ними при $n = 1$. Поэтому мы сохраняем для них то же обозначение. Как и в одномерном случае, потенциалы $I_\pm^\alpha \varphi$ будем называть левосторонними, а $I_-^\alpha \varphi$ — правосторонними. Обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и заметим, что конструкции (25.71) представляют собой «сплетение» операторов одномерного дробного интегрирования с интегралом Пуассона:

$$I_\pm^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y_n^{\alpha-1} (P_{y_n} \varphi(\cdot, x_n \mp y_n))(x') dy_n, \quad (25.72)$$

где

$$(P_{y_n} \varphi(\cdot, x_n - y_n))(x') = c_{n-1} y_n \int_{R^{n-1}} \frac{\varphi(x' - y', x_n - y_n)}{(|y'|^2 + y_n^2)^{n/2}} dy'.$$

Вычислим преобразование Фурье потенциалов $I_\pm^\alpha \varphi$. Как и в п. 2°, нам удобно привлечь для этой цели пространства Лизоркина Φ и Ψ из § 24, п. 9°.

Лемма 25.4. Пусть $\alpha > 0$, $\psi \in \Psi$, $\varphi \in \Phi$. Тогда

$$\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(x_n)_\pm^\alpha}{|x|^n} \hat{\psi}(x) dx = \int_{R^n} (|\xi'| \mp i\xi_n)^{-\alpha} \psi(\xi) d\xi, \quad (25.73)$$

$$\widehat{(I_\pm^\alpha \varphi)}(\xi) = (|\xi'| \mp i\xi_n)^{-\alpha} \hat{\varphi}(\xi). \quad (25.74)$$

Доказательство. Положим $k_{\pm, \varepsilon}^\alpha(x) = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} (x_n)_\pm^\alpha |x|^{-n} e^{-\varepsilon|x_n|} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x_n)_\pm^{\alpha-1} e^{-\varepsilon|x_n|} P(x', |x_n|)$, где $P(x', |x_n|)$ — ядро Пуассона (25.49)

$P(x', |x_n|) = c_{n-1} |x_n| (|x'|^2 + x_n^2)^{-n/2}$. С учетом (25.54) имеем $\widehat{k_{\pm, \varepsilon}^\alpha}(\xi) = (\mathcal{F}_{x_n} \mathcal{F}_{x'} k_{\pm, \varepsilon}^\alpha)(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x_n^{\alpha-1} e^{-x_n(\varepsilon + |\xi'| \mp i\xi_n)} dx_n$. Из формулы (7.5) следует, что последний интеграл равен $(\varepsilon + |\xi'| \mp i\xi_n)^\alpha$ (предполагается, что $\arg(\varepsilon + |\xi'| \mp i\xi_n) = 0$ при $\xi_n = 0$). Отсюда

$$\frac{c_n}{\Gamma(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(x_n)_\pm^\alpha e^{-\varepsilon|x_n|}}{|x|^\alpha} \hat{\psi}(x) dx = \int_{R^n} (\varepsilon + |\xi'| \mp i\xi_n)^{-\alpha} \psi(\xi) d\xi. \quad (25.75)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем (25.73), откуда, в свою очередь, легко выводится (25.74). Лемма доказана.

Следствие 1. Потенциалы $I_\pm^\alpha$ обладают полугрупповым свойством: $I_\pm^\alpha I_\pm^\beta = I_\pm^{\alpha+\beta}$.

Следствие 2. Справедливо представление риссова потенциала I^α в виде композиции односторонних потенциалов:

$$I^\alpha = I_+^{\alpha/2} I_-^{\alpha/2} = I_-^{\alpha/2} I_+^{\alpha/2}. \quad (25.76)$$

Найдем явный вид обратных к $I_\pm^\alpha$ операторов. Искомые конструкции должны совпадать при $n=1$ с производными Маршо $D_\pm^\alpha$ (см. (5.57), (5.58)). Применим формально к обеим частям равенства $(I_+^\alpha \varphi)(x) = f(x)$, $x = (x', x_n)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}_{x'}$ по переменной x' . С учетом (25.54) получаем

$$(I_+^\alpha e^{y_n |\xi'|} (\mathcal{F}_{x'} \varphi)(\xi', y_n))(x_n) = (\mathcal{F}_{x'} f)(\xi', x_n) e^{x_n |\xi'|},$$

где оператор I_+^α применен по одной переменной y_n . Обращая его с помощью производной Маршо (5.57), приходим к соотношению

$$e^{x_n |\xi'|} (\mathcal{F}_{x'} \varphi)(\xi', x_n) = - \frac{1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \times \right. \\ \left. \times (\mathcal{F}_{x'} f)(\xi', x_n - ky_n) e^{(x_n - y_n k) |\xi'|} \right) \frac{dy_n}{y_n^{l+\alpha}},$$

из которого после умножения на $e^{-x_n |\xi'|}$ и применения обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{x'}^{-1}$ окончательно имеем

$$\varphi(x) = \frac{c_{n-1}}{\kappa(\alpha, l)} \int_{R_+^n} \frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n} (\Delta_y^l f)(x) dy, \quad l > \alpha,$$

где $\Delta_y^l f$ — нецентрированная разность (25.58). Таким образом,

$$(I_\pm^\alpha)^{-1} f = \frac{c_{n-1}}{\kappa(\alpha, l)} \int_{R_+^n} \frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n} (\Delta_{\pm y}^l f)(x) dy \stackrel{\text{def}}{=} D_{\pm}^\alpha f, \quad l > \alpha. \quad (25.77)$$

Интегралы (25.77) являются гиперсингулярными. Можно показать, что для $f \in S(R^n)$ они сходятся (условно) в следующем смысле:

$$D_{\pm}^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{\pm, \varepsilon}^\alpha f,$$

$$\text{где } D_{\pm, \varepsilon}^\alpha f = \frac{c_{n-1}}{\kappa(\alpha, l)} \int_\varepsilon^\infty \int_{R^{n-1}} \frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n} (\Delta_{\pm y}^l f)(x) dy.$$

Конструкции $D_{\pm}^{\alpha} f$ совпадают с дробными производными Маршо при $n = 1$. По этой причине для них сохранено то же обозначение.

Отметим еще, что $(D_{\pm}^{\alpha} f)(\xi) = (|\xi'| \mp i\xi_n)^{\alpha} \hat{f}(\xi)$.

§ 26. ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОСТРАНСТВО $I^{\alpha}(L_p)$ РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Перейдем к подробному рассмотрению гиперсингулярного интеграла

$$D^{\alpha} f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad l > \alpha, \quad (26.1)$$

введенного в § 25. Будет, в частности, показано, что гиперсингулярный интеграл порождает «настоящий» обратный оператор к риссову потенциалу I^{α} при рассмотрении последнего в рамках пространств L_p . Будет выяснено, какими преимуществами обладает форма конечной разности — центрированная или нецентрированная — при определении гиперсингулярного интеграла. Кроме того, будут рассмотрены гиперсингулярные интегралы, более общие, чем $D^{\alpha} f$. Они окажутся естественным обобщением дифференциальных операторов в частных производных на случай дробных порядков, поскольку, как будет показано, всякий однородный дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами может быть записан в виде гиперсингулярного интеграла.

Особое место в этом параграфе занимает п. 7°, где изучается пространство $I^{\alpha}(L_p)$ риссовых потенциалов от функций из L_p , рассматриваются пространства $L_{p,r}^{\alpha}(R^n)$, обобщающие, вообще говоря, соболевские пространства $L_p^{\alpha}(R^n)$, и выясняется взаимоотношение между пространствами $L_{p,r}^{\alpha}(R^n)$ и пространством $I^{\alpha}(L_p)$. В качестве основного результата отметим, что

$$L_{p,r}^{\alpha}(R^n) = L_r \cap I^{\alpha}(L_p). \quad (26.2)$$

1°. Исследование нормировочных постоянных $d_{n,l}(\alpha)$ как функций параметра α . Как выяснено в конце § 25, необходимо прежде всего решить вопрос о нулях функций $d_{n,l}(\alpha)$, используемых в (26.1). Найдем в настоящем пункте эти нули, одновременно получив представления интегралов (25.64), (25.65) в виде элементарных функций (параметра α).

Введем следующие функции параметра α :

$$A_l(\alpha) = \begin{cases} A_l'(\alpha) = \sum_{k=0}^l (-1)^{k-1} \binom{l}{k} k^{\alpha} & \text{в случае нецентрированной} \\ & \text{разности,} \\ A_l''(\alpha) = 2 \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^{k-1} \binom{l}{k} \left(\frac{l}{2} - k \right)^{\alpha} & \text{в случае центрированной} \\ & \text{разности,} \end{cases} \quad (26.3)$$

через которые будут выражены постоянные $d_{n,l}(\alpha)$. Здесь $l = 1, 2, \dots$. Первая из этих функций знакома нам по одномерному случаю, где она возникла при вычислении нормировочного множителя для дробной производной Маршо порядка $\alpha \geq 1$, см. (5.73), (5.80). Там мы рассматривали дробные производные Маршо только с нецентрированными разностями. Вторую из функций (26.3) в случае четного $l = 2, 4, \dots$ можно записать также в виде

$$A_l''(\alpha) = \sum_{k=0}^l (-1)^{k-1} \binom{l}{k} \left| \frac{l}{2} - k \right|^{\alpha} \quad (26.4)$$

(при нечетном l сумма в правой части в (26.4) тождественно равна нулю и отличается от $A_l''(\alpha)$).

Лемма 26.1. *Функция $A_l'(\alpha)$, $\alpha \in R^1$, обращается в нуль в точках $\alpha = 1, 2, 3, \dots, l-1$, и только в них. Функция $A_l''(\alpha)$ имеет своими нулями четные числа $\alpha = 2, 4, 6, \dots, l-2$ при четном l и нечетные числа $\alpha = 1, 3, \dots, l-2$ при нечетном l .*

Доказательство. Рассмотрим вначале $A_l(\alpha) = A_l'(\alpha)$. Воспользуемся формулой

$$A_l'(\alpha) = \frac{l}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{l-1}}{|\ln \xi|^\alpha} d\xi, \quad \alpha < l, \quad (26.5)$$

полученной в § 5, см. равенства (5.81). Из (26.5) видно, что при $\alpha < l$ нули функции $A_l'(\alpha)$ суть полюса гамма-функции: $\alpha = 1, 2, \dots, l-1$. При $\alpha = l$, очевидно, $A_l'(\alpha) \neq 0$ в силу (5.74'). Пусть $\alpha > l$. Справедлива рекуррентная формула $\frac{1}{l+1} A_{l+1}'(\alpha+1) = A_{l+1}'(\alpha) - A_l'(\alpha)$, проверяемая

непосредственно на основании определения (26.3). С ее помощью методом индукции легко показывается, что при $\alpha > l$ выполняется неравенство $A_l'(\alpha) > 0$ в случае нечетного l и $A_l'(\alpha) < 0$ в случае четного l . Следовательно, $A_l'(\alpha) \neq 0$ и при $\alpha > l$.

Пусть теперь $A_l(\alpha) = A_l''(\alpha)$. С учетом (26.4) заключаем, что если α — целое и одинаковой четности с l , то

$$A_l''(\alpha) = \sum_{k=0}^l (-1)^{k-1} \binom{l}{k} \left(\frac{l}{2} - k \right)^\alpha.$$

Так как $(\rho^{1/2} - \rho^{-1/2})^l = \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} \rho^{l/2-v}$, то

$$-\left(\rho \frac{d}{d\rho} \right)^\alpha \left(\frac{\rho-1}{V\rho} \right)^l \Big|_{\rho=1} = A_l''(\alpha) \quad (26.6)$$

при целом α , имеющем одинаковую четность с l , откуда и следует утверждение леммы для $A_l''(\alpha)$.

З а м е ч а н и е 26.1. В лемме 26.1 решен вопрос о вещественных нулях функции $A_l(\alpha) = A_l'(\alpha)$. В некоторых задачах, связанных с гиперсингулярными интегралами (см. С. Г. Самко [31, с. 140]), представляет особый интерес вопрос об отсутствии других нулей у квазиполинома $A_l(z)$ в комплексной плоскости кроме точек $z = 1, 2, \dots, l-1$. Этот вопрос является открытым.

Т е о р е м а 26.1. *Нормировочные постоянные $d_{n,l}(\alpha)$ в (26.1) являются аналитическими функциями параметра α и вычисляются по формулам*

$$d_{n,l}(\alpha) = \beta_n(\alpha) \frac{A_l(\alpha)}{\sin(\alpha\pi/2)}, \quad (26.7)$$

$$\beta_n(\alpha) = \frac{\pi^{1+n/2}}{2^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \quad (26.8)$$

за исключением случая центрированной разности нечетного порядка l , когда $d_{n,l}(\alpha) \equiv 0$. Постоянная $d_{n,l}(\alpha)$ отлична от нуля при всех $\alpha > 0$ в случае центрированной разности и четного l , а в случае нецентрированной

ной разности она обращается в нуль при $\alpha > 0$ только в точках $\alpha = 1, 3, 5, \dots, 2[l/2] - 1$.

Доказательство. Начнем с замечания, что $A_l(\alpha) = 0$ при целом четном α согласно лемме 26.1, так что $A_l(\alpha)/\sin(\alpha\pi/2)$ в (26.7) понимается при $\alpha = 2, 4, 6, \dots$ как

$$\lim_{\xi \rightarrow \alpha} \frac{A_l(\xi)}{\sin(\xi\pi/2)} = \frac{2}{\pi} (-1)^{\alpha/2} \frac{d}{d\alpha} A_l(\alpha). \quad (26.9)$$

Вычисляя интеграл (25.64) в случае нецентрированной разности, имеем

$$\begin{aligned} d_{n,l}(\alpha) &= \int_{R^1} (1 - e^{iy_1})^l dy_1 \int_{R^{n-1}} (|\tilde{y}|^2 + y_1^2)^{-(\alpha+n)/2} d\tilde{y} = \\ &= \int_{R^1} (1 - e^{iy_1})^l |y_1|^{-1-\alpha} dy_1 \int_{R^{n-1}} (1 + |\eta|^2)^{-(\alpha+n)/2} d\eta. \end{aligned} \quad (26.10)$$

Интеграл по R^{n-1} находим переходом к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \int_{R^{n-1}} (1 + |\eta|^2)^{-(\alpha+n)/2} d\eta &= |S_{n-2}| \int_0^\infty \rho^{n-2} (1 + \rho^2)^{-(n+\alpha)/2} d\rho = \\ &= \frac{1}{2} |S_{n-2}| \int_0^\infty r^{(n-3)/2} (1 + r)^{-(n+\alpha)/2} dr = \frac{1}{2} |S_{n-2}| B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1+\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Так как

$$|S_{n-1}| = 2\pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right), \quad (26.11)$$

то

$$\int_{R^{n-1}} (1 + |\eta|^2)^{-(\alpha+n)/2} d\eta = \pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d_{n,l}(\alpha) &= \frac{\pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{it})^l + (1 - e^{-it})^l}{t^{1+\alpha}} dt = \\ &= \frac{2\pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \cos kt dt. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Воспользовавшись равенством $\sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} = 0$, оставшийся интеграл приводим с учетом вытекающей из (7.6) формулы

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin kx dx = \frac{\pi k^{\alpha-1}}{2 \sin(\alpha\pi/2) \Gamma(\alpha)} \quad (26.12)$$

к виду

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} (\cos kt - 1) dt = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} \binom{l}{k} k \int_0^\infty t^{-\alpha} \sin kt dt = \frac{\pi A_l(\alpha)}{2\Gamma(1+\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}, \end{aligned}$$

что дает указанное в (26.7) значение $d_{n,l}(\alpha)$. Для остальных значений $\alpha \geq 1$ требуемый результат получается аналитическим продолжением по α .

В случае центрированной разности аналогично (26.10) получаем при четном l :

$$d_{n,l}(\alpha) = (-1)^{l/2} \frac{2^{l-\alpha+1} \pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\sin^l t}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (26.13)$$

Воспользуемся формулой

$$\sin^l t = 2^{1-l} \sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-k} (1 - \cos 2kt),$$

получаемой разложением $\sin^l t$ в ряд Фурье по $\cos kt$ на отрезке $[0, \pi]$. После интегрирования по частям имеем (при $0 < \alpha < 2$):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} \sin^l t dt &= 2^{1-l} \sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-k} \frac{2k}{\alpha} \int_0^\infty t^{-\alpha} \sin 2kt dt = \\ &= \frac{\pi 2^{\alpha-l}}{\Gamma(1+\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-k} k^\alpha. \end{aligned} \quad (26.14)$$

Нетрудно видеть, что $\sum_{k=1}^{l/2} (-1)^{k-1} \binom{l}{l/2-k} k^\alpha = \frac{(-1)^{l/2}}{2} A_l'(\alpha)$. Поэтому (26.14) приводится к виду

$$\int_0^\infty \frac{\sin^l t}{t^{1+\alpha}} dt = (-1)^{l/2} \frac{2^{\alpha-l-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{A_l(\alpha)}{\sin(\alpha\pi/2)}. \quad (26.15)$$

Подставляя это выражение в (26.13), после простых преобразований получаем (26.7). На значения $\alpha \geq 1$ требуемый результат распространяем аналитическим продолжением по α . Наконец, равенство $d_{n,l}(\alpha) \equiv 0$ в случае центрированной разности и нечетного l усматривается непосредственно из (25.65).

Остается вопрос о необращении $d_{n,l}(\alpha)$ в нуль. Случай центрированной разности ясен ввиду (25.65). Пусть разность нецентрированная. В силу формулы (26.7) вопрос сводится к нулям функции $A_l(\alpha) = A_l'(\alpha)$, что выяснено в лемме 26.1. Нули этой функции — точки $\alpha = 1, 2, 3, \dots, l-1$ — являются простыми согласно (26.5). Поэтому в соответствии с (26.9) $d_{n,l}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha = 2, 4, 6, \dots$ и остаются лишь точки $\alpha = 1, 3, 5, \dots$. Теорема доказана.

Выпишем еще значения $d_{n,l}(\alpha)$ для четных α в явном виде:

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{(-1)^{\alpha/2} \pi^{n/2} 2^{1-\alpha}}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \frac{dA_l(\alpha)}{d\alpha}, \quad l=1, 2, 3, \dots, \quad (26.16)$$

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{(-1)^{1+(\alpha+l)/2} 2^{2-\alpha} \pi^{n/2} l!}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \frac{dA_l(\alpha)}{d\alpha}, \quad l=2, 4, 6, \dots, \quad (26.17)$$

$$\alpha = 2, 4, 6, \dots,$$

соответственно случаям нецентрированной и центрированной разности.

Ввиду теоремы 26.1 оператор $D^\alpha f$ определен равенством (26.1) корректно при выборе нормировочной постоянной $d_{n,l}(\alpha)$ по формулам (25.64), (25.65), (26.7) во всех случаях, кроме $\alpha = 1, 3, 5, \dots$, при использовании нецентрированной разности. В этом случае $d_{n,l}(\alpha) = 0$ и мы сталкиваемся с явлением «аннигиляции» конструкции (25.61):

$$T^\alpha f = 0, \quad \alpha = 1, 3, 5, \dots < l, \quad (26.18)$$

при использовании нецентрированной разности.

Таким образом, нецентрированная разность, с одной стороны, имеет то преимущество перед центрированной, что ее порядок не обязательно четный (требование выбрать l четным означает, вообще говоря, увеличение порядка l), а с другой стороны, нецентрированная разность приводит к нежелательным эффектам (26.18) при $\alpha = 1, 3, 5, \dots$. Этот случай мы рассмотрим особо в п. 2°.

2°. Сходимость гиперсингулярного интеграла на дифференцируемых функциях и снижение порядка l до $l > 2[\alpha/2]$ в случае нецентрированной разности. Покажем, что гиперсингулярный интеграл (26.1) сходится абсолютно на функциях $f(x)$, имеющих ограниченные производные до порядка $[\alpha] + 1$. Для определенности ограничимся случаем нецентрированной разности.

Справедлива формула

$$(\Delta_h^l f)(x) = m \sum_{|j|=m} \frac{h^j}{j!} \int_0^1 (1-u)^{m-1} \sum_{k=0}^l (-1)^{m-k} k^m \binom{l}{k} (\mathcal{D}^j f)(x - kuh) du, \quad l \geq m, \quad (26.19)$$

где $h^j = h_1^{j_1} \dots h_n^{j_n}$, доказанная нами ранее в одномерном случае, см. (5.75). В случае многих переменных она доказывается совершенно аналогично с помощью формулы Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в интегральной форме.

Из (26.19) заключаем, что

$$|(\Delta_h^l f)(x)| \leq c |h|^m \sup_{\substack{x \in R^n \\ |j|=m}} |(\mathcal{D}^j f)(x)| = c_1 |h|^m, \quad l \geq m. \quad (26.20)$$

С помощью (26.20) легко получаем, что интеграл (26.1) сходится абсолютно, если функция $f(x)$ и ее производные $(\mathcal{D}^j f)(x)$, $|j| = [\alpha] + 1$, ограничены.

Покажем, что гиперсингулярный интеграл (26.1) сходится условно при $l > 2[\alpha/2]$ в случае нецентрированной разности. Другими словами, в качестве l можно брать не обязательно целое число, большее α , а можно взять ближайшее к α (слева или справа) целое нечетное число. Будем считать, что l нечетно, поскольку, если l четно и $l > 2[\alpha/2]$, то $l > \alpha$.

Справедливо непосредственно проверяемое тождество

$$(\tau - 1)^l = P_l(\tau) + \left(\frac{1}{\tau} + \dots + \frac{1}{\tau^{(l-1)/2}} + \frac{1}{2\tau^{(l+1)/2}} \right) (\tau - 1)^{l+1}, \quad (26.21)$$

где функция $P_l(\tau) = \frac{1}{2}(\tau - 1)^l(\tau + 1)\tau^{-(l+1)/2}$ антиинвариантна относительно инверсии: $P_l(\tau^{-1}) = -P_l(\tau)$. Равенству (26.21) соответствует тождество в конечных разностях:

$$\begin{aligned} (\Delta_y^l f)(x) &= (P_y^l f)(x) - \sum_{k=1}^{(l-1)/2} (\Delta_y^{l+1} f)(x + ky) - \\ &- \frac{1}{2} (\Delta_y^{l+1} f) \left(x + \frac{l+1}{2} y \right), \quad x, y \in R^n, \end{aligned} \quad (26.22)$$

где функция $(P_y^l f)(x)$ нечетна по y . В таком случае предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy = - \sum_{k=1}^{(l-1)/2} \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^{l+1} f)(x + ky)}{|y|^{n+\alpha}} dy - \\ - \frac{1}{2} \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^{l+1} f) \left(x + \frac{l+1}{2} y \right)}{|y|^{n+\alpha}} dy \quad (26.23)$$

существует, поскольку $l+1 > \alpha$, что и дает условную сходимость гиперсингулярного интеграла $D^\alpha f$.

Возвратимся к явлению аннигиляции (26.18) гиперсингулярного интеграла нечетного порядка с нецентрированной разностью. Так как допускается $l > 2[\alpha/2]$, то этого явления можно избежать, выбирая $l = \alpha$ при $\alpha = 1, 3, 5, \dots$. Тогда $A_l(l) \neq 0$, и определение гиперсингулярного интеграла при $l = \alpha = 1, 3, 5, \dots$ равенством (26.1) становится корректным. Следует только подчеркнуть, что условная сходимость в этом случае существенна (даже на самых хороших функциях).

Далее везде без дополнительных оговорок считаем, что $l > \alpha$ и l четно в случае центрированной разности и $l > 2[\alpha/2]$ в случае нецентрированной разности с обязательным выбором $l = \alpha$ при $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ (но в п. 4° при обобщении гиперсингулярного интеграла (26.1) будет допускаться нечетное l и в случае центрированной разности).

Отметим в этом пункте следующую лемму, примыкающую к формуле (25.34).

Л е м м а 26.2. *Риссово дифференцирование $(-\Delta)^{\alpha/2} = D^\alpha$ может быть интерпретировано как результат дробного дифференцирования по произвольному направлению σ , $|\sigma| = 1$, с последующим интегрированием по σ :*

$$D^\alpha f = - \frac{\Gamma(-\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)} \int_{S_{n-1}} (\mathcal{D}_\sigma^\alpha f)(x) d\sigma, \quad (26.24)$$

где $\beta_n(\alpha)$ — постоянная (26.8), $(\mathcal{D}_\sigma^\alpha f)(x)$ — дробная производная (24.38), (24.38') по направлению σ , и $D^\alpha f$ взято с нецентрированной разностью.

Доказательство получается переходом к полярным координатам в интеграле (26.1).

3°. Гиперсингулярный интеграл как обратный риссову потенциалу. Гиперсингулярный интеграл (26.1) порождает обратный оператор к риссову потенциалу $I^\alpha \varphi$:

$$D^\alpha I^\alpha \varphi = \varphi \quad (26.25)$$

для достаточно хороших функций, например, $\varphi \in \Phi(R^n)$, что прозрачно в образах Фурье, см. (25.35) и (25.62). Покажем, что обращение (26.25) справедливо на всей области определения риссова потенциала в рамках L_p -пространств: $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, $1 \leq p < n/\alpha$.

Важно подчеркнуть при этом, что гиперсингулярный интеграл D^α применяется к «не очень хорошим» функциям $I^\alpha \varphi$ и уже не является, вообще говоря, абсолютно сходящимся. Он будет пониматься как условно сходящийся по норме пространства L_p :

$$D^\alpha f = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} D_\varepsilon^\alpha f, \quad (26.26)$$

где $D_\varepsilon^\alpha f$ — усеченный гиперсингулярный интеграл (25.60).

Введем некоторые вспомогательные функции — конечные разности рисова ядра $k_\alpha(x)$. Именно введем функцию ($\alpha > 0$, $l = 1, 2, 3, \dots$):

$$\Delta_{l,\alpha}(x, h) = (\Delta_h^l k_\alpha)(x) \quad (26.27)$$

и выделим важный для нас случай $h = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, положив

$$k_{l,\alpha}(x) = \Delta_{l,\alpha}(x, e_1), \quad (26.28)$$

так что

$$k_{l,\alpha}(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} |x - ke_1|^{\alpha-n} \quad (26.29)$$

при $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots$ и выборе нецентрированной разности. Немаловажную роль в наших построениях будет играть ядро

$$\mathcal{H}_{l,\alpha}(|x|) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha) |x|^n} \int_{|y| < |x|} k_{l,\alpha}(y) dy. \quad (26.30)$$

Так как $\hat{k}_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$ согласно (25.25), то преобразование Фурье функции (26.27) вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}(\Delta_{l,\alpha}(\cdot, h))(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha} (1 - e^{ix \cdot h})^l & \text{в случае нецентрированной разности,} \\ |x|^{-\alpha} (e^{ix \cdot h/2} - e^{-ix \cdot h/2})^l & \text{в случае центрированной разности.} \end{cases} \quad (26.31)$$

Функция $\Delta_{l,\alpha}(x, h)$ может быть выражена через $k_{l,\alpha}(x)$ с помощью вращения:

$$\Delta_{l,\alpha}(x, h) = |h|^{\alpha-n} k_{l,\alpha}\left(\frac{|x|}{|h|^2} \omega_x^{-1}(h)\right), \quad (26.32)$$

где $l > \alpha - n$ при $\alpha - n = 0, 2, 4, \dots$. Здесь $\omega_x(h)$ — вращение (25.68). Формула (26.32) проверяется непосредственно, с помощью равенства

$$|x - ke_1| = \left| |x| e_1 - k \frac{x}{|x|} \right|, \text{ из которого следует, что } \left| \frac{x}{|h|^2} \omega_x^{-1}(h) - ke_1 \right| = \\ = |h|^{-1} |x - kh|, \text{ и с учетом того, что } \ln |h| \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} |x - kh|^{\alpha-n} \equiv 0$$

при $\alpha - n = 0, 2, 4, 6, \dots$ и $l > \alpha - n$.

Лемма 26.3. Функция $k_{l,\alpha}(x)$ удовлетворяет оценке

$$|k_{l,\alpha}(x)| \leq c (1 + |x|)^{\alpha-n-l} \text{ при } |x| \geq l + 1, \quad (26.33)$$

так что при $l > \alpha$

$$k_{l,\alpha}(x) \in L_q(R^n), \quad 1 - \alpha/n < 1/q \leq 1, \quad (26.34)$$

при этом

$$\int_{R^n} k_{l,\alpha}(x) dx = 0. \quad (26.35)$$

Равенство (26.35) верно и при $2[\alpha/2] < l \leq \alpha$ в случае нечетного l и нецентрированной разности в (26.28), если интеграл в (26.35) понимать как $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|x - \frac{l}{2} e_1| < N} k_{l,\alpha}(x) dx$.

Доказательство. Обозначим $W(s) = k_\alpha(x + se_1)$, $0 \leq s \leq l$, так что $k_{l,\alpha}(x) = (\Delta_1^l W)(0)$. В силу известного тождества

$$(\Delta_1^l W)(s) = \int_0^s \dots \int_0^s W^{(l)}(s + s_1 + \dots + s_l) ds_1 \dots ds_l \quad (26.36)$$

получаем, что $k_{l,\alpha}(x) = W^{(l)}(\theta)$, $0 < \theta < l$, откуда (26.33) следует без труда (с учетом оценки $\left| \frac{d^l}{d\rho^l} (\rho^k \ln \rho) \right| \leq c \rho^{k-l}$ при $\rho > 1$ и $l > k$ в случае $\alpha - n = 0, 2, 4, \dots$). Так как $k_{l,\alpha}(x)$ локально суммируема в степени q , $1/q > 1 - \alpha/n$, то из (26.33) следует (26.34). Равенство (26.35), т. е. равенство $\hat{k}_{l,\alpha}(0) = 0$, следует при $l > \alpha$ из (26.31). И, наконец,

$$\int_{|x - \frac{l}{2} e_1| < N} k_{l,\alpha}(x) dx = \int_{\substack{|y| < N \\ y_1 > 0}} \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} k_{\alpha} \left(y + \left(\frac{l}{2} - v \right) e_1 \right) dy + \\ + \int_{\substack{|y| < N \\ y_1 > 0}} \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} k_{\alpha} \left(y - \left(\frac{l}{2} - v \right) e_1 \right) dy.$$

Поменяв индекс v на $l - v$ во втором слагаемом, видим, что оно отличается от первого множителем $(-1)^l$. Поэтому

$$\int_{|x - \frac{l}{2} e_1| < N} k_{l,\alpha}(x) dx = 0 \quad (26.37)$$

для всех $N > 0$ при нечетном l . Лемма 26.3 доказана.

Лемма 26.4. *Справедливы оценки*

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| \leq c \begin{cases} |x|^{\min(\alpha-n, 0)}, & \alpha \neq n, \\ \ln \frac{1}{|x|}, & \alpha = n, \end{cases} \quad \text{при } |x| \leq 1, \quad (26.38)$$

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| \leq c |x|^{\alpha-n-l^*} \quad \text{при } |x| \geq 1, \quad (26.39)$$

где $l^* = l$ во всех случаях, когда $l > \alpha$ и $l^* = l + 1$ в случае $2[\alpha/2] < l \leq \alpha$ (при использовании нецентрированной разности в (26.28)), так что $\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|) \in L_q(R^n)$, $1 - \alpha/n < 1/q \leq 1$.

Доказательство. Получение оценки (26.38) очевидно. Для $|x| \rightarrow \infty$ имеем при $l > \alpha$ в силу (26.35) и (26.33):

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| = \frac{1}{|x|^n} \left| \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|y| > |x|} k_{l,\alpha}(y) dy \right| \leq \frac{c}{|x|^{n+l-\alpha}}.$$

Если же $2[\alpha/2] < l \leq \alpha$ (так что l нечетно), то оценку (26.39) можно получить за счет предоставляемой равенством (26.37) возможности интегрировать не по шару $|y| < |x|$, а по слою $|x| - l/2 < |y| < |x| + l/2$. Именно в силу (26.37) имеем при $|x| > l + 1$ с учетом (26.39):

$$|\mathcal{K}_{l,\alpha}(|x|)| \leq \frac{1}{|x|^n |d_{n,l}(\alpha)|} \int_{|x| - \frac{l}{2} < |y| < |x| + \frac{l}{2}} |k_{l,\alpha}(y)| dy \leq \\ \leq \frac{c}{|x|^n} \left| \left(|x| + \frac{l}{2} \right)^{\alpha-l} - \left(|x| - \frac{l}{2} \right)^{\alpha-l} \right| \leq c_1 |x|^{-n+\alpha-l-1}.$$

Лемма 26.4 доказана.

Докажем теперь следующую подготовительную теорему для обращения риссова потенциала $I^{\alpha} \phi$, являющуюся многомерным обобщением леммы 6.1.

Теорема 26.2. Пусть $f(x) = I^\alpha \varphi$, $0 \leq \alpha < n$, $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 \leq p < n/\alpha$. Тогда для усеченного гиперсингулярного интеграла $D_\varepsilon^\alpha f$ справедливо представление

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) = \int_{R^n} \mathcal{H}_{l,\alpha}(|y|) \varphi(x - \varepsilon y) dy. \quad (26.40)$$

Доказательство. Применяя конечную разность к потенциалу Рисса, имеем

$$(\Delta_y^l f)(x) = \int_{R^n} \Delta_{l,\alpha}(\xi, y) \varphi(x - \xi) d\xi, \quad (26.41)$$

где $\Delta_{l,\alpha}(\xi, y)$ — функция (26.27). Отсюда

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \varphi(x - \xi) d\xi \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Delta_{l,\alpha}(\xi, y)}{|y|^{n+\alpha}} dy$$

(перестановка порядка интегрирования возможна ввиду абсолютной сходимости интегралов при $\varepsilon > 0$). Применим формулу (26.32) и сделаем после этого замену $\frac{|\xi|}{|y|^2} \omega_x^{-1}(y) = z \in R^n$, где $\omega_x^{-1}(y)$ — вращение, обратное вращению (25.68). Тогда $|y| = |\xi|/|z|$ и

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{\varphi(x - \xi)}{|\xi|^n} d\xi \int_{|z|<|\xi|/\varepsilon} k_{l,\alpha}(z) dz.$$

Преобразование подобия $\xi \rightarrow \varepsilon \xi$ приводит это равенство к (26.40).

Замечание 26.2. Ядро $\mathcal{H}_{l,\alpha}(|y|)$ является усредняющим:

$$\int_{R^n} \mathcal{H}_{l,\alpha}(|y|) dy = 1. \quad (26.42)$$

Это равенство (следствие выбора нормировочных постоянных) легко установить косвенным путем: пусть $\varphi \in \Phi$, тогда в (26.40) возможен предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$: $D^\alpha f = \varphi(x) \int_{R^n} \mathcal{H}_{l,\alpha}(|y|) dy$. Так как $D^\alpha f = \varphi$ для

$f = I^\alpha \varphi$ при $\varphi \in \Phi$ в силу (26.25), то отсюда и следует (26.42).

Следствие. Преобразование Фурье ядра $\mathcal{H}_{l,\alpha}(|x|)$ можно вычислить по формуле

$$\widehat{\mathcal{H}}_{l,\alpha}(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha) |x|^n} \int_{|y|>1} \frac{(1 - e^{ix \cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}} dy \quad (26.43)$$

(выписано для случая нецентрированной разности в (26.27)).

Действительно, взяв в (26.40) $f \in \Phi$, имеем $\widehat{D_\varepsilon^\alpha f}(x) = \widehat{\mathcal{H}}_{l,\alpha}(\varepsilon x) \widehat{D^\alpha f}(x)$. В силу (25.66) и (25.62) отсюда при $\varepsilon = 1$ и следует (26.43).

Теорема 26.3. Оператор $D^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^\alpha f$ является левым обратным к риссову потенциалу в пространствах $L_p(R^n)$:

$$D^\alpha I^\alpha \varphi \equiv \varphi, \quad \varphi \in L_p(R^n), \quad 1 \leq p < n/\alpha. \quad (26.44)$$

Доказательство этой теоремы подготовлено теоремой 26.2. Действительно, из (26.40) с учетом (26.42) имеем

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(x) - \varphi(x) = \int_{R^n} \mathcal{H}_{l,\alpha}(|y|) [\varphi(x - \varepsilon y) - \varphi(x)] dy. \quad (26.45)$$

Применяя неравенство Минковского, получаем

$$\|D_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_p \leq \int_{R^n} |\mathcal{H}_{l,\alpha}(|y|)| \omega_p^1(\varphi, \varepsilon y) dy, \quad (26.46)$$

где $\omega_p^1(\varphi, h) = \left\{ \int_{R^n} |\varphi(x) - \varphi(x+h)|^p dx \right\}^{1/p}$. Отсюда $\|D_\varepsilon^\alpha f - \varphi\|_p \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, так как $\mathcal{H}_{l,\alpha}(|y|) \in L_1(R^n)$ на основании леммы 26.4.

Подчеркнем, что в теореме 26.2 мы установили, что риссова производная (гиперсингулярный интеграл) $D_\varepsilon^\alpha f$ сходится на образе $I^\alpha(L_p)$ риссова потенциала по норме пространства L_p и в (26.46) дана оценка этой сходимости. Можно показать, что имеет место сходимость и почти всюду. Останавливаться на этом не станем (см. о сходимости почти всюду в § 29, п. 2°, 26.1).

В заключение этого пункта отметим, что введенные в предыдущем параграфе конструкции (25.69), (25.70) можно применять для обращения риссовых потенциалов $I^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, наряду с рассмотренными выше гиперсингулярными интегралами, т. е. справедлива (см. литературные ссылки в § 29) следующая

Теорема 26.3'. Пусть $f = I^\alpha \varphi$, $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$. Тогда

$$\varphi = \frac{1}{\kappa(\alpha, l)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\alpha} (E - P_t)^l f dt, \quad l > \alpha,$$

в смысле сходимости по L_p -норме или почти всюду.

Аналогичное утверждение справедливо и для конструкции (25.70).

4°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой. Обобщая гиперсингулярный интеграл (26.1), введем конструкцию вида

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) = \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(x, y) dy,$$

где функцию $\Omega(x, y)$, не зависящую от $f(x)$, назовем *характеристикой*, следуя терминологии, принятой в теории многомерных сингулярных интегралов (С. Г. Михлин [2]). В таком общем виде мы не станем рассматривать эти конструкции, а ограничимся случаем, когда характеристика $\Omega(x, y)$ не зависит от x и однородна по y : $\Omega = \Omega(y')$, $y' = y/|y|$:

$$D_\Omega^\alpha f = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y') dy, \quad l > \alpha \quad (26.47)$$

(нормировочный множитель взят по-прежнему, несмотря на появление произвольной однородной характеристики $\Omega(y')$ с тем, чтобы $D_\Omega^\alpha f$ не зависело от выбора $l > \alpha$, см. следствие 1 из теоремы 26.4).

Относительно более общих характеристик см. литературные указания в § 29.

Отметим сразу, что наличие характеристики $\Omega(y')$ в гиперсингулярном интеграле позволит рассматривать его и с центрированным разностями нечетного порядка.

Произведем сейчас некоторую классификацию гиперсингулярных интегралов (26.47) и коснемся в этом пункте следующих вопросов:

- а) каковы формулы вычисления преобразования Фурье для $D_\Omega^\alpha f$?
- б) при каких условиях на $\Omega(y')$ сходимость (по норме L_p) гиперсингулярного интеграла $D_\Omega^\alpha f$ с постоянной характеристикой влечет за собой сходимость гиперсингулярного интеграла с характеристикой $\Omega(y')$ и наоборот?

Ниже, в п. 6°, выясним, насколько богат класс гиперсингулярных интегралов (26.47). Будет показано, что он содержит, в частности, операторы вида $\mathcal{F}^{-1}a\mathcal{F}$, где $a(x) = |x|^\alpha a(x')$, $x' = x/|x|$, — достаточно гладкая однородная степени α функция. В случае целых α класс операторов (26.47) содержит в себе все однородные дифференциальные операторы в частных производных порядка α .

Прежде всего дадим следующее

О п р е д е л е н и е 26.1. *Интеграл (26.47) будем называть гиперсингулярным интегралом нейтрального типа, если он построен с помощью нецентрированной разности, и гиперсингулярным интегралом четного (нечетного) типа, если он построен с помощью центрированной разности четного (нечетного) типа порядка l .*

Интеграл (26.47) сходится при $l > \alpha$ в силу (26.20) в случае «достаточно хорошей» функции $f(x)$, если $\Omega(y') \in L_1(S_{n-1})$. Для гиперсингулярного интеграла нейтрального типа и четной характеристики $\Omega(y') = \Omega(-y')$ порядок разности можно снизить за счет условной сходимости до

$$l > 2[\alpha/2] \quad (26.48)$$

с обязательным выбором $l = \alpha$ при $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ Это показывается точно так же, как в п. 2°. Всюду ниже считаем l выбранным указанным способом.

Нейтральный тип гиперсингулярного интеграла имеет некоторые преимущества перед четным и нечетным типом (это уже проявилось в возможности понижения порядка l в (26.48)). Он более универсален в вопросах обращения операторов типа потенциала, см. книгу С. Г. Самко [31, гл. V]. В частности, гиперсингулярные интегралы четного (нечетного) типа имеет смысл рассматривать только для четных (нечетных) характеристик $\Omega(y')$. Именно если характеристика произвольна:

$$\Omega(y') = \Omega_+(y') + \Omega_-(y'), \quad \Omega_\pm(y') = \frac{\Omega(y') \pm \Omega(-y')}{2},$$

то

$$D_{\Omega}^\alpha f \equiv D_{\Omega_+}^\alpha f, \quad D_{\Omega}^\alpha f \equiv D_{\Omega_-}^\alpha f \quad (26.49)$$

для интегралов четного и нечетного типа соответственно (т. е. интегралы четного или нечетного типа аннулируются в случае характеристики противоположной четности). Соотношения (26.49) вытекают, например, из полученных ниже формул (26.69) — (26.71). С другой стороны, гиперсингулярные интегралы нейтрального типа имеют свои «странности», которые отражены в следующем замечании.

З а м е ч а н и е 26.3. Гиперсингулярный интеграл нейтрального типа в случае $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ тождественно аннулируется: $\int_{R^n} |y|^{-n-\alpha} (\Delta_y^l f)(x) \times \Omega(y') dy \equiv 0$, каковы бы ни были f и Ω , если $l > \alpha$. Это установлено в п. 1°, см. (26.18), для $\Omega(y') = \text{const}$. Для $\Omega(y') \neq \text{const}$ эта аннигиляция будет видна в образах Фурье (см. равенства (26.58), (26.59)). Если же $l = \alpha$, то гиперсингулярный интеграл нейтрального типа сходится (условно) тогда и только тогда, когда $\Omega(y')$ четна. Это можно усмотреть из действий в п. 2°, вставляя в левую часть (26.23) характеристику $\Omega(y')$.

З а м е ч а н и е 26.4. В случае гиперсингулярного интеграла нечетного типа нормирующий множитель $d_{n,l}(\alpha)$ в (26.47) не был еще определен (постоянная (25.65) равна нулю при нечетном l). Отправляясь от (26.7) и учитывая, что $A_l^*(\alpha) = 0$ при $\alpha = 1, 3, 5, \dots$, согласно лемме 26.1, положим по определению

$$d_{n,l}(\alpha) = \beta_n(\alpha) \frac{A_l^*(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)} \quad (26.50)$$

для гиперсингулярных интегралов нечетного типа.

Отметим еще, что для гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой справедлива формула

$$D_{\Omega}^{\alpha} f = - \frac{\Gamma(-\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma) (\mathcal{D}_{\sigma}^{\alpha} f)(x) d\sigma, \quad (26.51)$$

где $(\mathcal{D}_{\sigma}^{\alpha} f)(x)$ — дробная производная (24.38), (24.38') по направлению σ . Эта формула обобщает (26.24) и также получается переходом к полярным координатам в (26.47).

А. Вычисление преобразования Фурье $\mathcal{F}(D_{\Omega}^{\alpha} f)$. Действуя, как в (25.66), (25.67), нетрудно получить, что в образах Фурье справедливо равенство

$$\mathcal{F}(D_{\Omega}^{\alpha} f) = \mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) \hat{f}(x), \quad (26.52)$$

где функция $\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \begin{cases} \int_{R^n} \frac{(1 - e^{ix \cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y') dy & \text{в случае нецентрированной разности,} \\ \int_{R^n} \frac{(e^{\frac{i}{2}x \cdot y} - e^{-\frac{i}{2}x \cdot y})^l}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y') dy & \text{в случае центрированной разности.} \end{cases} \quad (26.53)$$

Функцию $\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x)$ будем называть *символом гиперсингулярного интеграла* $D_{\Omega}^{\alpha} f$ (следуя терминологии, принятой в теории многомерных сингулярных интегралов Кальдерона — Зигмунда, см. книгу С. Г. Михлина [2]). Очевидно, символ $\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x)$ однороден степени α :

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = |x|^{\alpha} \mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x'), \quad x' = x/|x|. \quad (26.54)$$

Теорема 26.4. Пусть $\Omega(\sigma) \in L_1(S_{n-1})$. Справедливы следующие представления символа:

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \frac{\omega_n(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma) (-ix \cdot \sigma)^{\alpha} d\sigma, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots, \quad (26.55)$$

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \omega_n(\alpha) \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma) |x \cdot \sigma|^{\alpha} d\sigma, \quad (26.56)$$

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = -i\omega_n(\alpha) \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma) |x \cdot \sigma|^{\alpha} \operatorname{sign}(x \cdot \sigma) d\sigma \quad (26.57)$$

для гиперсингулярного интеграла соответственно нейтрального, четного и нечетного типа, $\omega_n(\alpha) = \Gamma(n+\alpha)[2\pi^{(n-1)/2} \Gamma(1/2+\alpha/2)]^{-1}$. В (26.55) $(i\xi)^{\alpha} = |\xi|^{\alpha} e^{-i\frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} \xi}$. В случае четной характеристики $\Omega(\sigma)$ формулы (26.55), (26.56) совпадают и верны для гиперсингулярного интеграла нейтрального типа и при $\alpha = 1, 3, 5, \dots$

Доказательство. При использовании нецентрированной разности имеем

$$\mathcal{D}_{\Omega}^{\alpha}(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma) d\sigma \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{i\rho x \cdot \sigma})^l}{\rho^{1+\alpha}} d\rho. \quad (26.58)$$

В силу аналитичности по α внутреннего интеграла его достаточно вычислить при $0 < \alpha < 1$. Пользуясь тем, что $\sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} = 0$, получаем

$$\int_0^{\infty} \rho^{-1-\alpha} (1 - e^{i\rho\xi})^l d\rho = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \left[\int_0^{\infty} \rho^{-1-\alpha} (\cos k\rho\xi - 1) d\rho + \right. \\ \left. + i \int_0^{\infty} \rho^{-1-\alpha} \sin k\rho\xi d\rho \right],$$

где $\xi = x \cdot \sigma$. Интегрирование по частям в первом интеграле и формула (26.12) дают

$$\int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{i\rho\xi})^l}{\rho^{1+\alpha}} d\rho = \frac{\pi A_l'(\alpha)}{\Gamma(1+\alpha) \sin \alpha\pi} (-i\xi)^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad l > \alpha, \quad (26.59)$$

что и превращает (26.58) в (26.55) с учетом (26.7).

В случае центрированной разности аналогично (26.58) приходим к внутреннему интегралу

$$I(\xi) = \int_0^{\infty} \rho^{-1-\alpha} (e^{\frac{i}{2}\rho\xi} - e^{-\frac{i}{2}\rho\xi})^l d\rho = \\ = \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} \int_0^{\infty} \rho^{-1-\alpha} [e^{i\xi(\frac{l}{2}-v)\rho} - 1] d\rho, \quad \xi = x \cdot \sigma$$

(преобразовали его при $0 < \alpha < 1$). Применив (26.59), получим

$$I(\xi) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi \Gamma(1+\alpha)} \sum_{v=0}^l (-1)^{v-1} \binom{l}{v} \left[-i\xi \left(\frac{l}{2} - v \right) \right]^\alpha = \\ = \frac{\pi |\xi|^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \frac{1}{\sin(\alpha\pi/2)} \sum_{v=0}^l (-1)^{v-1} \binom{l}{v} \left| \frac{l}{2} - v \right|^\alpha + \right. \\ \left. + i \frac{\text{sign } \xi}{\cos(\alpha\pi/2)} \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} \left| \frac{l}{2} - v \right|^\alpha \text{sign} \left(\frac{l}{2} - v \right) \right\}.$$

Замечая, что $\sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} \left| \frac{l}{2} - v \right|^\alpha \equiv 0$ при нечетном l и $\sum_{v=0}^l (-1)^v \times$
 $\times \binom{l}{v} \left| \frac{l}{2} - v \right|^\alpha \text{sign} \left(\frac{l}{2} - v \right) \equiv 0$ при четном l , получаем, что $I(\xi) =$
 $= \frac{\pi A_l''(\alpha) |\xi|^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}$ при четном l и $I(\xi) = - \frac{\pi i A_l''(\alpha) |\xi|^\alpha \text{sign } \xi}{2\Gamma(1+\alpha) \cos(\alpha\pi/2)}$

при нечетном l , что и дает (26.56), (26.57). Теорема 26.4 доказана.

С л е д с т в и е 1. Гиперсингулярные интегралы (26.47) не зависят от порядка l конечной разности при сделанном выборе нормировочной постоянной $d_{n,l}(\alpha)$.

С л е д с т в и е 2. Гиперсингулярные интегралы нейтрального и четного типа с четной характеристикой совпадают.

Из (26.55) — (26.57) заключаем также, что для целых $\alpha = 1, 2, \dots$ гиперсингулярный интеграл $D_\Omega^\alpha f$ является однородным дифференциальным оператором в частных производных порядка α при надлежащем выборе типа гиперсингулярного интеграла. Именно справедливо

С л е д с т в и е 3. При $\alpha = 2, 4, 6, \dots$ символ гиперсингулярного интеграла нейтрального и четного типа, а при $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ символ гиперсингулярного интеграла нечетного типа является многочленом:

$$\mathcal{D}_\Omega^\alpha(x) = \frac{\pi}{2\delta\beta_n(\alpha)} \sum_{|j|=\alpha} \frac{\Omega_j}{j!} x^j, \quad (26.60)$$

где $\delta=1$ для гиперсингулярного интеграла нейтрального и четного типа и $\delta=i$ для гиперсингулярного интеграла нечетного типа, а Ω_j — сферические моменты функции $\Omega(\sigma)$:

$$\Omega_j = \int_{S_{n-1}} \sigma^j \Omega_1(\sigma) d\sigma. \quad (26.61)$$

Для получения (26.60) из (26.55) — (26.57) следует воспользоваться равенством

$$(x \cdot \sigma)^m = \sum_{|j|=m} \frac{m!}{j!} x^j \sigma^j.$$

Б. Сходимость гиперсингулярных интегралов с разными характеристиками. Мы хотим найти ответ на следующий вопрос. Пусть функция $f(x)$ такова, что на ней сходится гиперсингулярный интеграл $D_{\Omega_1}^\alpha f$ с некоторой характеристикой $\Omega_1(y')$. Будет ли сходиться на этой же функции гиперсингулярный интеграл с другой характеристикой $\Omega_2(y')$? Этот вопрос удобно расчленить следующим образом: влечет ли сходимость гиперсингулярного интеграла с постоянной характеристикой (т. е. сходимость риссовой производной (26.1)) за собой и сходимость такого интеграла с произвольной характеристикой и наоборот? В одну сторону этот вопрос будет решаться безусловно: сходимость $D^\alpha f$ влечет сходимость $D_{\Omega}^\alpha f$ при произвольной ограниченной характеристике (условие ограниченности можно ослабить). Так как, очевидно, сходимость $D_{\Omega}^\alpha f$ с характеристикой $\Omega(y') \equiv 0$ не может приводить к сходимости $D^\alpha f$, то для обратного утверждения потребуется некоторое условие эллиптичности на характеристику $\Omega(y')$.

Относительно самой функции $f(x)$ сделаем априорное предположение, что $f(x) \in L_r(R^n)$, $1 < r < \infty$, а сходимость гиперсингулярного интеграла от этой функции будем рассматривать по норме пространства $L_p(R^n)$, $1 < r < \infty$:

$$D_{\Omega}^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{\Omega, \varepsilon}^\alpha f, \quad (26.62)$$

где

$$D_{\Omega, \varepsilon}^\alpha f = \frac{1}{d_{n, l}(\alpha)} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y') dy.$$

Не вдаваясь в подробности, приведем только схему рассуждений. Детали доказательств можно найти в работах В. А. Ногина, С. Г. Самко [1, 3].

Пусть $f(x) \in L_r(R^n)$ и существует в $L_p(R^n)$ риссова производная $D^\alpha f$. На таких функциях непосредственно проверяется, что

$$D_{\Omega, \varepsilon}^\alpha f = A_\varepsilon D^\alpha f, \quad (26.63)$$

где A_ε — оператор свертки с ядром

$$a_\varepsilon(x) = \frac{1}{d_{n, l}(\alpha)} \int_{|y| > \varepsilon} \frac{\Delta_{l, \alpha}(x, y) \Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad (26.64)$$

$\Delta_{l, \alpha}(x, y)$ — функция (26.27). Это ядро локально суммируемо и $|a_\varepsilon(x)| \leq c|x|^{-n}$ при $|x| \rightarrow \infty$. Используя свойства функции $\Delta_{l, \alpha}(x, y)$ (см. п. 3° данного параграфа), можно показать, что оператор свертки с этим ядром ограничен в L_p равномерно по ε : $\|A_\varepsilon\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq c$, где c не зависит от ε . Это обстоятельство позволяет с помощью теоремы Банаха—Штейнгауза обосновать предельный переход в (26.63) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельный оператор $A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon$ есть многомерный сингулярный оператор вида $A\varphi = \Omega_0\varphi + B\varphi$,

где Ω_0 — среднее значение характеристики по сфере, B — некоторый оператор Кальдерона—Зигмунда, ограниченный в $L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$. Тем самым из (26.63) получается утверждение о сходимости $D_{\Omega, \varepsilon}^\alpha f$ в $L_p(R^n)$. Для получения обратного утверждения требуется, чтобы предельный оператор A был обратим. Вычисляя преобразование Фурье ядра этого сингулярного оператора, можно показать, что условие обратимости оператора A имеет (при использовании гиперсингулярных интегралов нейтрального типа) следующий вид:

$$\int_{S_{n-1}} (-ix \cdot \sigma)^\alpha \Omega(\sigma) d\sigma \neq 0, \quad |x| = 1 \quad (26.65)$$

(ср. с (26.55)). Для характеристики $\Omega(\sigma)$, достаточно гладкой и удовлетворяющей условию эллиптичности (26.65), из (26.63) выводится обратное утверждение о том, что сходимость (в L_p) $D_{\Omega}^\alpha f$ влечет за собой сходимость $D^\alpha f$ в L_p , $f \in L_r$. Приведенные рассуждения обосновываются при условиях $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, $1/p - \alpha/n \leq 1/r \leq 1/p$.

5°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой как свертки с обобщенной функцией. Покажем, что гиперсингулярный интеграл (26.47) можно представить в виде свертки с обобщенной функцией вида $\Omega(x')/|x|^{n+\alpha}$, т. е. что гиперсингулярный интеграл совпадает с регуляризацией расходящегося интеграла. В соответствии с регуляризацией (25.19) введем регуляризацию аналогичного расходящегося интеграла с характеристикой $\Omega(x')$ равенством

$$\begin{aligned} p.f. \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f &= \int_{|y|<1} \Omega(y') \frac{f(x-y) - (R_y^{l-1}f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy + \\ &+ \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y') f(x-y)}{|y|^{n+\alpha}} dy + \sum_{|j| \leq l-1} \frac{(-1)^{|j|}}{j!} (\mathcal{D}^j f)(x) p.f. \int_{|y|<1} \frac{y^j \Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} dy, \end{aligned} \quad (26.66)$$

где

$$(R_y^{l-1}f)(x) = \sum_{|j| \leq l-1} \frac{(-y)^j}{j!} (\mathcal{D}^j f)(x)$$

есть отрезок ряда Тейлора, $l > \alpha$. Переходя к сферическим координатам, легко получить (в соответствии с определением 5.2 $p.f.$ -интеграла), что

$$p.f. \int_{|y|<1} \frac{y^j \Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} dy = \begin{cases} \Omega_j/(|j| - \alpha), & |j| \neq \alpha, \\ 0, & |j| = \alpha, \end{cases}$$

где Ω_j — сферические моменты (26.61). Поэтому

$$\begin{aligned} p.f. \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f &= \int_{R^n} \Omega(y') \frac{f(x-y) - \chi(y) (R_y^{l-1}f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy + \\ &+ \sum'_{|j| \leq l-1} \frac{(-1)^{|j|} \Omega_j}{j! (|j| - \alpha)} (\mathcal{D}^j f)(x), \quad l > \alpha, \end{aligned} \quad (26.67)$$

где штрих означает пропуск слагаемых с номером $|j| = \alpha$ в случае целого α , а $\chi(y)$ — характеристическая функция шара $|y| < 1$.

Если в качестве l выбрать ближайшее целое к α , $l > \alpha$, т. е. $l = [\alpha] + 1$, то (26.67) можно записать в виде

$$p.f. \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f = \int_{R^n} \frac{f(x-y) - (R_y^{[\alpha]}f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y') dy, \quad \alpha \neq 1, 2, 3, \dots \quad (26.68)$$

что проверяется непосредственными преобразованиями. Запись (26.68) имеет, очевидно, преимущество перед (26.67) своей компактностью, но не пригодна при целых α (в случае целых α ей можно придать смысл только ценою ограничения $\int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma) d\sigma = 0$, что исключает, в частности, $\Omega(\sigma) = \text{const}$).

Теорема 26.5. Пусть $\Omega(\sigma) \in L_1(S_{n-1})$, а $f(x) \in C^l(R^n)$ и ограничена. Справедливы формулы

$$(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x) = - \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)} \rho. f. \frac{\Omega(x')}{|x|^{n+\alpha}} * f, \quad \alpha \neq 2, 4, 6, \dots, \quad (26.69)$$

$$(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x) = - \frac{\sin(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)} \rho. f. \frac{\Omega(x') + \Omega(-x')}{2|x|^{n+\alpha}} * f, \quad \alpha \neq 2, 4, 6, \dots, \quad (26.70)$$

$$(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x) = - \frac{\cos(\alpha\pi/2)}{\beta_n(\alpha)} \rho. f. \frac{\Omega(x') - \Omega(-x')}{2|x|^{n+\alpha}} * f, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots, \quad (26.71)$$

для гиперсингулярных интегралов соответственно нейтрального, четного и нечетного типа. В исключенных в (26.69)–(26.71) случаях целых α гиперсингулярный интеграл является дифференциальным оператором в частных производных порядка α :

$$(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^{[\alpha/2]}\pi}{2\beta_n(\alpha)} \sum_{|j|=\alpha} \frac{\Omega_j}{j!} (\mathcal{D}^j f)(x) \quad (26.72)$$

($\alpha=2, 4, 6, \dots$ для гиперсингулярного интеграла нейтрального и четного типа и $\alpha=1, 3, 5, \dots$ для гиперсингулярного интеграла нечетного типа).

Доказательство. Формула (26.72) следует из (26.60) (но может быть установлена и непосредственно, без обращения к образам Фурье). Приведем доказательство, например, формулы (26.69). Имеем

$$\begin{aligned} (D_{\Omega}^{\alpha} f)(x) &= \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} \left\{ f(x) + \sum_{v=1}^l (-1)^v \binom{l}{v} [f(x-vy) - \right. \\ &\quad \left. - R_{vy}^{l-1}(x) \chi(vy)] + \sum_{v=1}^l (-1)^v \binom{l}{v} R_{vy}^{l-1}(x) \chi(vy) \right\} dy. \end{aligned}$$

Отсюда после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} (D_{\Omega}^{\alpha} f)(x) &= - \frac{A'_l(\alpha)}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \Omega(y') \frac{f(x-y) - \chi(y) R_y^{l-1}(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy + \\ &\quad + \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{|j| \leq l-1} \frac{(-1)^{|j|} I_j}{j!} (\mathcal{D}^j f)(x), \end{aligned} \quad (26.73)$$

где

$$I_j = \int_{R^n} \frac{\Omega(y')}{|y|^{n+\alpha}} \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} (vy)^j \chi(vy) dy.$$

Непосредственными преобразованиями можно найти, что $I_j = \frac{A'_l(\alpha)}{\alpha - |j|} \Omega_j$,

где в случае $|j| = \alpha$ следует заменить $A'_l(\alpha)/(\alpha - |j|)$ на $dA'_l(\alpha)/d\alpha$. Поэтому (26.73) превращается в (26.69). Аналогично доказываются формулы (26.70), (26.71).

6°. Представление дифференциальных операторов в частных производных гиперсингулярными операторами. Выше мы убедились в том, что класс гиперсингулярных операторов (26.47) с однородной характеристикой содержит в себе некоторые однородные дифференциальные операторы, см. (26.72). В этом пункте докажем более сильное обратное утверждение о том, что все однородные дифференциальные операторы в частных производных порядка α с постоянными коэффициентами можно записать в виде гиперсингулярного интеграла $D_\Omega^\alpha f$ с однородной характеристикой. Вначале поставим более общий вопрос, навеянный равенствами (26.52) в образах Фурье. Пусть $a(x/|x|)$ — заданная однородная функция. Существует ли характеристика $\Omega(x/|x|)$ такая, что

$$D_\Omega^\alpha f = \mathcal{F}^{-1} a(x/|x|) |x|^\alpha \mathcal{F} f, \quad (26.74)$$

и как построить ее по заданной функции $a(x/|x|)$?

Заметим, что выражение, стоящее в правой части равенства (26.74), само по себе можно рассматривать как обобщение операции Лиувиллевого дифференцирования. Оно содержит в себе, в частности, Лиувиллевы дробные производные, частные и смешанные, см. (24.14) — (24.15'), при выборе $a(x) = |x|^{-|\alpha|} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Такое обобщение дробного дифференцирования (свертка с однородной обобщенной функцией порядка $-\alpha-n$) рассматривалось и использовалось в работе С. Л. Соболева и С. М. Никольского [1]. Мы, таким образом, хотим показать, что это обобщенное дробное дифференцирование совпадает с гиперсингулярным интегралом с некоторой характеристикой.

Пусть для определенности рассматривается гиперсингулярный интеграл нейтрального типа. В силу формулы (26.55) равенство (26.74) сводится к равенству

$$\frac{\omega_n(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)} \int_{S_{n-1}} \Omega(\sigma) (-ix \cdot \sigma)^\alpha d\sigma = a(x), \quad |x| = 1, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots, \quad (26.75)$$

представляющему собой интегральное уравнение первого рода относительно искомой характеристики $\Omega(\sigma)$. Это уравнение можно решить средствами гармонического анализа на сфере. Воспользуемся аппаратом сферических гармоник, изложение которого можно найти в книгах И. Стейна [1], И. Стейна, Г. Вейса [1], С. Г. Самко [31] и др. Функции $f(x)$, $x \in S_{n-1}$, ставится в соответствие ее ряд Фурье—Лапласа

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(f, x), \quad (26.76)$$

где $Y_m(f, x)$ — сужение гармонического многочлена порядка m на единичную сферу. Гармоническая составляющая $Y_m(f, x)$ порядка m вычисляется по формуле

$$Y_m(f, x) = \frac{d_n(m)}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} f(\sigma) P_m(x \cdot \sigma) d\sigma, \quad (26.77)$$

где $d_n(m) = \frac{n+2m-2}{n+m-2} \binom{m+n-2}{m}$ — число линейно независимых гармоник порядка m , а $P_m(t)$ — обобщенный многочлен Лежандра:

$$P_m(t) = \begin{cases} \binom{m+n-3}{m}^{-1} C_m^{\frac{n-2}{2}}(t), & \text{где } C_m^\lambda(t) \text{ — многочлен Гегенбауэра,} \\ & \text{при } n \geq 3, \\ \cos(m \arccos t) & \text{— многочлен Чебышева при } n = 2. \end{cases}$$

Ряд в (26.76) сходится к функции $f(x)$, если она достаточно гладкая.

Разлагая в уравнении (26.75) правую часть и решение в ряд Фурье—Лапласа, приходим к соотношению

$$\frac{\omega_n(\alpha)}{\cos(\alpha\pi/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S_{n-1}} (-ix \cdot \sigma)^\alpha Y_m(\Omega, \sigma) d\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(a, x). \quad (26.78)$$

Для любой сферической гармоники $Y_m(\sigma)$ справедлива формула

$$\int_{S_{n-1}} (-ix \cdot \sigma)^\alpha Y_m(\sigma) d\sigma = -\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}}{2^\alpha} \Gamma(1+\alpha) \sin \alpha\pi \frac{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)} i^m Y_m(x), \quad (26.79)$$

где $|x|=1$; случаю целого α отвечает равенство

$$\int_{S_{n-1}} (x \cdot \sigma)^\alpha Y_m(\sigma) d\sigma = \begin{cases} c_m Y_m(x), & \alpha - m = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, & \alpha - m = 1, 3, 5, \dots, \\ & \alpha - m = -1, -2, -3, \dots, \end{cases} \quad (26.80)$$

где $|x|=1$ и $c_m = 2^{1-\alpha} \pi^{n/2} \Gamma(1+\alpha) \left[\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{\alpha-m}{2}\right) \right]^{-1}$ (см., например, С. Г. Самко [28, с. 163; 31, с. 91]). Поэтому из (26.78), считая α нецелым, получаем

$$\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha\pi}{2} Y_m(\Omega, x) = -\frac{\pi}{i^m} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)} Y_m(a, x)$$

в силу линейной независимости сферических гармоник разных порядков. Следовательно, искомое решение $\Omega(x)$ можно записать в виде ряда

$$\Omega(x) = -\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right)}{i^m \Gamma\left(\frac{m-\alpha}{2}\right)} Y_m(a, x), \quad (26.81)$$

$\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$

Можно показать, что этот ряд сходится и действительно дает решение уравнения (26.75), если потребовать, чтобы функция $a(x)$, $|x|=1$, была достаточно гладкой на сфере. Останавливаться на этом не станем. Заметим еще, что «плохо» сходящийся ряд (26.81) можно просуммировать в терминах расходящегося интеграла:

$$\Omega(x) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha+1}{2}\right)}{2\pi^{(n-1)/2} \Gamma(1+\alpha/2)} p. f. \int_{S_{n-1}} \frac{f(\sigma) d\sigma}{(ix \cdot \sigma)^{n+\alpha}}, \quad |x|=1, \alpha \neq 1, 2, 3, \dots \quad (26.82)$$

(см. С. Г. Самко [30, с. 37]; интегралу в правой части придается смысл методом регуляризации или аналитическим продолжением по α).

Случай целых α требует отдельного рассмотрения. Относящийся сюда результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 26.6. Пусть $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ и

$$a_\alpha(\mathcal{D}) = \sum_{|j|=\alpha} a_j \mathcal{D}^j$$

— однородный дифференциальный оператор порядка α с постоянными коэффициентами a_j . Существует однородный многочлен $\Omega_\alpha(y)$ порядка α , такой, что

$$a_\alpha(\mathcal{D})f_i = \frac{1}{d_{n,i}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\Delta_y^i f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega_\alpha\left(-\frac{y}{|y|}\right) dy, \quad (26.83)$$

где справа — гиперсингулярный интеграл нейтрального или четного типа при $\alpha=2, 4, 6, \dots$ и нечетного типа при $\alpha=1, 3, 5, \dots$. Характеристика $\Omega_\alpha(y')$ гиперсингулярного интеграла вычисляется по заданному многочлену $a_\alpha(x)$ по формуле

$$\Omega_\alpha(y) = \int_{S_{n-1}} a_\alpha(\sigma) \mathcal{K}(y \cdot \sigma) d\sigma, \quad |y| = 1, \quad (26.84)$$

где

$$\mathcal{K}(t) = \frac{(-1)^{[\alpha/2]} \Gamma(n/2)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)} \sum_{k=0}^{[\alpha/2]} (-1)^k \Gamma\left(\frac{n}{2} + \alpha - k\right) k! \times \\ \times d_n(\alpha - 2k) P_{\alpha-2k}(t),$$

— $1 < t < 1$, $d_n(\alpha - 2k)$ и $P_{\alpha-2k}(t)$ — то же, что и в (26.77).

Доказательство. Остановимся для определенности на случае четных $\alpha=2, 4, 6, \dots$. В силу формулы (26.56) для преобразования Фурье гиперсингулярного интеграла искомая характеристика для равенства (26.83) должна определяться из уравнения

$$\int_{S_{n-1}} \Omega_\alpha(\sigma) (x \cdot \sigma)^\alpha d\sigma = \frac{(-1)^{\alpha/2}}{\omega_n(\alpha)} a_\alpha(x), \quad |x| = 1. \quad (26.85)$$

Действуя, как и выше, разлагаем $a_\alpha(x)$ и $\Omega_\alpha(x)$ по сферическим гармоникам, как в (26.76), только теперь эти разложения будут конечными суммами. Подставляя эти разложения в (26.85), приходим к равенствам

$$\sum_{m=0}^{\alpha} \int_{S_{n-1}} (x \cdot \sigma)^\alpha Y_m(\Omega_\alpha, \sigma) d\sigma = \frac{(-1)^{\alpha/2}}{\omega_n(\alpha)} \sum_{m=0}^{\alpha} Y_m(a_\alpha, x).$$

Отсюда в силу (26.80)

$$\sum_{m=0}^{\alpha} c_m Y_m(\Omega_\alpha, x) = \frac{(-1)^{\frac{\alpha}{2}}}{\omega_n(\alpha)} \sum_{m=0}^{\alpha} Y_m(a_\alpha, x)$$

(в силу (26.80) суммирование в левой части осуществляется только по $m=0, 2, 4, \dots, \alpha$, что согласуется с тем что многочлен $a_\alpha(x)$ содержит гармонические составляющие $Y_m(a_\alpha, x)$ только четного порядка). Ввиду линейной независимости сферических гармоник получаем, что

$$Y_m(\Omega_\alpha, x) = (-1)^{\alpha/2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha-m}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} Y_m(a_\alpha, x).$$

Следовательно,

$$\Omega_\alpha(x) = \frac{(-1)^{\alpha/2}}{\Gamma(1 + \alpha/2)} \sum_{m=0}^{\alpha} \Gamma\left(\frac{m+n+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha-m}{2}\right) Y_m(a_\alpha, x),$$

что с помощью формулы (26.77) приводится к виду (26.84).

Случай $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ рассматривается аналогично. Теорема доказана. Можно показать с помощью непосредственных вычислений, что в случае $\alpha = 2$, когда $a_2(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$, формула (26.84) имеет простой вид:

$$\Omega_2(y) = -\frac{n+2}{2} a_2(y) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} a_2,$$

где $\operatorname{tr} a_2 = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \frac{n}{|S_{n-1}|} \int_{S_{n-1}} a_2(\sigma) d\sigma$. В частности, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{n+2}{2d_{n,l}(2)} \int_{R^n} \frac{(\Delta_l^1 f)(x)}{|t|^{n+\alpha}} \frac{t_i t_j}{|t|^2} dt, \quad i \neq j. \quad (26.86)$$

7°. Пространство $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов и его описание в терминах гиперсингулярных интегралов. Пространства $L_{p,r}^\alpha(R^n)$. Через

$$I^\alpha(L_p) = \{f : f = I^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p(R^n)\} \quad (26.87)$$

обозначаем пространство риссовых потенциалов от функций из $L_p(R^n)$. Оно определено при $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < n/\alpha$. Ввиду теоремы 25.2 и неравенства (25.42)

$$I^\alpha(L_p) \subset L_q(R^n), \quad I^\alpha(L_p) \subset L_p(R^n; |x|^{-\alpha p}), \quad 1 < p < n/\alpha, \quad q = np(n - \alpha p)^{-1},$$

и повторяя рассуждения из § 6, п. 1°, легко установить, что $I^\alpha(L_p) \neq L_q(R^n)$, $I^\alpha(L_p) \neq L_p(R^n; |x|^{-\alpha p})$. Можно показать, что $I^\alpha(L_p)$ не совпадает ни с каким пространством $L_r(R^n; \rho)$, $1 \leq r \leq \infty$, и потому нуждается в описании.

Пространство $I^\alpha(L_p)$ можно ввести и при $p \geq n/\alpha$ (в частности, при $\alpha \geq n$), понимая его в смысле обобщенных функций над классом Лизоркина (25.16):

$$(I^\alpha \varphi, \omega) = (\varphi, I^\alpha \omega), \quad \omega \in \Phi,$$

что корректно ввиду инвариантности Φ относительно I^α (теорема 25.1). Разумеется, теперь это будет класс обобщенных функций. Однако этот класс устроен любопытно в том отношении, что конечные разности (достаточно большого порядка $l > \alpha$) этих обобщенных функций являются обычными функциями. Конечные разности обобщенных функций понимаются стандартным способом: $(\Delta_h^l f, \omega) = (f, \Delta_{-h}^l \omega)$. С подобной ситуацией мы уже столкнулись в одномерном случае (см. замечание 8.2). Сформулируем более точно возникающую здесь картину в виде следующей леммы.

Лемма 26.5. Пусть $f = I^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $l > \alpha$. Тогда $(\Delta_h^l f)(x) \in L_p(R^n)$ при любом $h \in R^n$, если $p < n/\alpha$. Если $p \geq n/\alpha$, это утверждение заменяется следующим: функционал $\Delta_h^l f \in \Phi'$ является регулярным и допускает доопределение с класса Лизоркина Φ на класс Шварца S :

$$(\Delta_h^l f, \omega) = (g, \omega), \quad \omega \in S, \quad (26.88)$$

где $g = g(x) = \Delta_{l,\alpha}(\cdot, h) * \varphi \in L_p(R^n)$.

Доказательство. Из оценки (26.33) следует в силу связи (26.32), что

$$|\Delta_{l,\alpha}(x, h)| \leq c |h|^l (|h| + |x|)^{\alpha-n-l} \quad (26.89)$$

при $|x| \geq (l+1)|h|$, где c не зависит от x (и h). Поэтому $\Delta_{l,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$ при любом h и тогда из (26.41) вытекает, что $\Delta_h^l f \in L_p(R^n)$. Пусть $p \geq n/\alpha$.

Тогда равенство (26.41) справедливо в смысле пространства $\Phi' : (\Delta_h^l f, \omega) = (\Delta_{l,\alpha}(\cdot, h) * \varphi, \omega)$, $\omega \in \Phi$, $\varphi \in L_p$, что проверяется непосредственно. Правая часть этого равенства допускает доопределение для всех $\omega \in S$, а $g = \Delta_{l,\alpha}(\cdot, h) * \varphi \in L_p(R^n)$, поскольку $\Delta_{l,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$, что и требовалось. Норму в пространстве (26.87) введем равенством

$$\|f\|_{I^\alpha(L_p)} = \|\varphi\|_p, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (26.90)$$

Перейдем к описанию пространства $I^\alpha(L_p)$. Это описание докажем одновременно с рассмотрением пространств

$$L_{p,r}^\alpha(R^n) = \{f : f \in L_r(R^n), D^\alpha f \in L_p(R^n)\}, \quad (26.91)$$

$$\|f\|_{L_{p,r}^\alpha} = \|f\|_r + \|D^\alpha f\|_p, \quad \alpha > 0, \quad 1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq r < \infty,$$

естественно возникающих как некоторое обобщение пространства $I^\alpha(L_p)$. Подчеркнем, что $D^\alpha f$ в (26.91) понимается в смысле сходимости в L_p , см. (26.26). Начнем со следующей вспомогательной теоремы.

Теорема 26.7. Пусть $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq r < \infty$. Тогда для разности $(\Delta_h^m f)(x)$ справедливо при $m > \alpha$ представление

$$(\Delta_h^m f)(x) = \int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - \xi, h) (D^\alpha f)(\xi) d\xi, \quad (26.92)$$

где $\Delta_{m,\alpha}(x, h)$ — функция (26.27).

Доказательство. Предположим, что $D^\alpha f$ определяется нецентрированной разностью, разность Δ_h^m центрированная, и допустим для простоты, что $\alpha - n \neq 0, 2, 4, \dots$ (остальные варианты рассматриваются совершенно аналогично). Обозначим $\varphi_\varepsilon = D_\varepsilon^\alpha f$ и $B\varphi = \Delta_{m,\alpha}(\cdot, h) * \varphi$. Имеем

$$\begin{aligned} B\varphi_\varepsilon &= \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \left\{ \int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - y, h) f(y) dy \int_{|y-z|>\varepsilon} \frac{dz}{|y-z|^{n+\alpha}} + \right. \\ &+ \sum_{v=1}^l (-1)^v \binom{l}{v} v^\alpha \int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - y, h) dy \int_{|y-z|>\varepsilon v} \frac{f(z) dz}{|y-z|^{n+\alpha}} \Big\}. \end{aligned}$$

Так как в силу (26.89) $\Delta_{m,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$ при $m > \alpha$, то допустима перестановка порядка интегрирования. Поэтому

$$\begin{aligned} B\varphi_\varepsilon &= \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} \int_{R^n} f(z) dz \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Delta_{m,\alpha}(x - z - vy, h)}{|y|^{n+\alpha}} dy = \\ &= \frac{1}{\gamma_n(\alpha) d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m}{k} f \left[x - z + \left(\frac{m}{2} - k \right) h \right] dz \times \\ &\times \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{|z - vy|^{\alpha-n}}{|y|^{n+\alpha}} dy. \end{aligned}$$

Отсюда после замены $z = \varepsilon \tau$, $y = \varepsilon \frac{|\tau|}{|\xi|^2} \omega_x(\xi)$, где $\omega_x(\xi)$ — вращение (25.68), получаем

$$B\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_n(\alpha) d_{n,l}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(\Delta_h^m f)(x - \varepsilon\tau)}{|\tau|^\alpha} d\tau \int_{|\xi| < |\tau|} \sum_{v=0}^l (-1)^v \binom{l}{v} \times \\ \times \left| |\xi| e_1 - v \frac{\xi}{|\xi|} \right|^{\alpha-n} d\xi,$$

что ввиду формулы $||\xi| e_1 - v\xi/|\xi|| = |\xi - v e_1|$ дает равенство

$$\int_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - \tau, h) \varphi_\varepsilon(\tau) d\tau = \int_{R^n} (\Delta_h^m f)(x - \varepsilon\tau) \mathcal{H}_{l,\alpha}(|\tau|) d\tau. \quad (26.93)$$

Отсюда (26.92) получится при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обоснуем предельный переход в (26.93). Так как $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ в L_p , а $\Delta_{m,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$, то левая часть сходится по норме L_p . С другой стороны, так как $f(x) \in L_r$, а $\mathcal{H}_{l,\alpha}(|\tau|) \in L_1$, то правая часть сходится к $(\Delta_h^m f)(x)$ по норме L_r . В силу совпадения левой и правой частей в (26.93) их пределы обязаны совпадать почти всюду. Это и дает (26.92). Теорема доказана.

Замечание 26.5. Представление (26.92) является распространением представления (26.41) на тот случай, когда информация о том, что $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, заменена условием $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$.

Замечание 26.6. Так как представление (26.92) получено предельным переходом из (26.93), оно, очевидно, справедливо не только в предположении, что $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$, но и в предположении, что $(D^\alpha f)(x) \in L_p(R^n)$, $(\Delta_h^m f)(x) \in L_p(R^n)$, $m > \alpha$, $1 \leq p < \infty$.

Описание пространства $I^\alpha(L_p)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 26.8. Пусть $f(x)$ локально суммируема и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) $f(x) \in L_q(R^n)$, $q = np/(n - \alpha p)$, $D^\alpha f \in L_p(R^n)$ при $1 < p < n/\alpha$,
- 2) $(\Delta_h^l f)(x) \in L_p(R^n)$ и существовал $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} \int_{|h| > \varepsilon} |h|^{-n-\alpha} (\Delta_h^l f)(x) dh$ при $p \geq n/\alpha$, где $l \geq 2[\alpha/2]$ выбирается как в п. 2°. (В случае $p = 1$ условие $D^\alpha f \in L_1$ необходимо.) Кроме того,

$$I^\alpha(L_p) \cap L_r = L_{p,r}^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad 1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq r < \infty. \quad (26.94)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) \in I^\alpha(L_p)$. Если $1 < p < n/\alpha$, то $f \in L_q$ в силу теоремы Соболева 25.2, а если $1 \leq p < n/\alpha$, то $D^\alpha f \in L_p$ в силу теоремы 26.3. Пусть $p \geq n/\alpha$. Тогда $(\Delta_h^l f)(x) \in L_p$ в силу (26.41) и анализ доказательства теоремы 26.2 показывает, что для $D_\varepsilon^\alpha f$ справедливо представление (26.40), и потому существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^\alpha f$. Одновременно показано, что $I^\alpha(L_p) \cap L_r \subseteq L_{p,r}^\alpha(R^n)$.

Достаточность. Пусть $f(x) \in L_{p,r}^\alpha(R^n)$. Применимо представление (26.92). Замечаем, что правая часть в (26.92) есть $\Delta_h^m I^\alpha D^\alpha \varphi$, при этом $I^\alpha D^\alpha \varphi$, где $D^\alpha \varphi \in L_p$, понимается в обычном смысле при $1 \leq p < n/\alpha$ и в смысле Φ' при $p \geq n/\alpha$. Следовательно, (26.92) означает, что

$$\Delta_h^m f \equiv \Delta_h^m I^\alpha D^\alpha f \quad (\text{в смысле } \Phi').$$

Нетрудно видеть, что функционалы f и g , имеющие тождественно совпадающие конечные разности, могут отличаться разве лишь многочленом. Для этого достаточно перейти в рамках S' к образам Фурье: $(1 - e^{ix \cdot h})^m \times$

$\times(\hat{f} - \hat{g}) = 0$, $x, h \in R^n$, и воспользоваться теоремой об общем виде функционала, сосредоточенного в точке. Следовательно,

$$f(x) = I^\alpha D^\alpha f + P(x), \quad (26.95)$$

где $P(x)$ — многочлен. Здесь $f \in L_r$ «не содержит» многочлена. Если $1 < p < n/\alpha$, то $I^\alpha D^\alpha f \in L_q$ также не содержит многочлена. Поэтому $p(x) \equiv 0$, и тогда из (26.95) $f(x) \in I^\alpha(L_p)$. Если же $p \geq n/\alpha$, то (26.95) означает то же самое, так как присутствие многочлена согласуется с определением

пространства $I^\alpha(L_p)$ при $p \geq n/\alpha$. Тем самым доказано вложение $L_{p,r}^\alpha(R^n) \subseteq I^\alpha(L_p) \cap L_r$, что вместе с доказанным в необходимой части обратным вложением дает равенство (26.94).

Из (26.95) вытекает достаточность условий 1) (берем $r = np/(n - \alpha p)$). Чтобы получить достаточность условий 2), нужно повторить рассуждения, приведенные выше в достаточной части с учетом замечания 26.5. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $1 < p < n/\alpha$. Тогда

$$L_{p,q}^\alpha(R^n) = I^\alpha(L_p), \quad q = np/(n - \alpha p).$$

Следствие 2. Пространства $L_{p,r}^\alpha(R^n)$ не зависят от типа конечной разности, определяющей $D^\alpha f$, и от порядка l этой разности (при указанном в конце п. 2° правиле выбора l).

Следствие 3. Пространства $L_{p,r}^\alpha(R^n)$ полны.

Из теоремы 26.8 получается с учетом (26.19) простое достаточное условие принадлежности классу $I^\alpha(L_p)$, $1 < p < n/\alpha$: $|f(x)| \leq c/(1 + |x|)^\lambda$, $|(\mathcal{D}^j f)(x)| \leq c/(1 + |x|)^\mu$, $|j| = m > \alpha$; $\lambda > n/q$, $\mu > n/p$.

Приведем еще один полезный вариант описания пространства $I^\alpha(L_p)$, в котором условие сходимости усеченных риссовых производных $D_e^\alpha f_\pm$ по норме L_p заменяется требованием их равномерной ограниченности.

Теорема 26.9. Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < n/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) \in L_q(R^n), \quad q = np/(n - \alpha p), \quad \text{или} \quad (1 + |x|^\alpha) f(x) \in L_p(R^n) \quad (26.96)$$

и чтобы существовала последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0$ такая, что

$$\|D_{e_k}^\alpha f\|_p \leq c < \infty, \quad (26.97)$$

где c не зависит от ε_k .

Доказательство основано на слабой компактности пространства $L_p(R^n)$. Оно аналогично доказательству подобной одномерной теоремы 6.2 и потому опускается (см. доказательство теоремы 6.2, приведенное полностью; нужно заменить в нем оператор (6.22) на оператор $\Delta_{m,\alpha}(\cdot, h) * \varphi$, где $\Delta_{m,\alpha}(x, h)$ — функция (26.27), вместо представления (6.23) получим представление (26.95), после чего рассуждения повторяют действия в (6.24)).

Пространство $I^\alpha(L_p)$ можно описать также в терминах сходимости по L_p -норме гиперсингулярных интегралов (25.69), (25.70), связанных с полугруппами Пуассона и Гаусса—Вейерштрасса. Именно справедлива

Теорема 26.10. Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in L_q$, $q = np/(n - \alpha p)$, и

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)^\varepsilon}} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} (E - P_t)^l f dt \in L_p \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)^\varepsilon}} \int_0^\infty t^{-1-\alpha/2} (E - W_t)^l f dt \in L_p.$$

Отметим еще формулу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} D_\varepsilon^\alpha f = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-\alpha} (E - P_t)^\alpha f, \quad f \in L_q(R^n), \quad 1 < p < \infty, \quad 1 < q < \infty,$$

$(L_p) \qquad (L_p)$

справедливую в предположении, что существует один из этих пределов. При $q=p$ эта формула вытекает из утверждения теоремы 23.4, но можно показать ее справедливость и при $q \neq p$.

Завершим этот параграф некоторыми простыми оценками для интегральных модулей непрерывности риссова потенциала. Пусть $f = I^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, $1 < p < n/\alpha$, $l > \alpha$. Тогда

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leq c |h|^\alpha \|\varphi\|_p, \quad (26.98)$$

$$\|\Delta_h^l f\|_p = o(|h|^\alpha) \quad (26.98')$$

при $|h| \rightarrow 0$. Здесь $c = \|k_{l,\alpha}\|_1$, где $k_{l,\alpha}(x)$ — ядро (26.28). Оценка (26.98) вытекает из тождества

$$(\Delta_h^l f)(x) = |h|^\alpha \int_{R^n} k_{l,\alpha}(y) \varphi(x - |h| \omega_h(y)) dy, \quad (26.99)$$

где $\omega_h(y)$ — вращение (25.68), которое получается несложными преобразованиями:

$$\begin{aligned} (\Delta_h^l f)(x) &= \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_{R^n} \frac{\varphi(x - y) dy}{|y - kh|^{n-\alpha}} = \\ &= \frac{|h|^\alpha}{\gamma_n(\alpha)} \int_{R^n} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} |\xi - ke_1|^{\alpha-n} \varphi(x - |h| \omega_h(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

что совпадает с (26.99). Из (26.99) и вытекает (26.98) с учетом того, что $k_{l,\alpha}(x) \in L_1(R^n)$ в силу леммы 26.3, и получается (26.98') с учетом (26.35).

§ 27. БЕССЕЛЕВО ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Рассмотрим в этом параграфе дробное интегродифференцирование, являющееся дробной степенью $(E - \Delta)^{-\alpha/2}$, где E — единичный оператор, Δ — оператор Лапласа. Теперь (ср. с § 26, где рассматривались степени $(-\Delta)^{-\alpha/2}$) действие такого интегродифференцирования в образах Фурье будет сводиться к умножению на степень $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$. Оно будет реализовано как свертка с функцией $G_\alpha(x)$, являющейся прообразом Фурье функции $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$. Этот прообраз будет неэлементарной функцией, и в этом отличие рассматриваемого случая от риссова интегродифференцирования. Функция $G_\alpha(x)$ выражается через бесселевы функции (функцию Макдональда, см. ниже), и потому рассматриваемая в этом параграфе форма дробного интегродифференцирования получила такое название. Существенное достоинство бесселева дробного интегрирования состоит в том, что оно лучше ведет себя на бесконечности, нежели риссов потенциал. По этой причине бесселево интегрирование определено, например, на функциях из $L_p(R^n)$ при всех p , $1 \leq p \leq \infty$, и является ограниченным оператором в $L_p(R^n)$, чего нельзя сказать о риссовом дробном интегрировании.

1°. **Бесселево ядро и его свойства.** Прообраз Фурье функции $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$ вычислим по формуле Бохнера (25.11). Имеем

$$\mathcal{F}^{-1}[(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}] = (2\pi)^{-n/2} |x|^{1-n/2} \int_0^\infty \frac{\rho^{n/2} J_{n/2-1}(\rho |x|)}{(1 + \rho^2)^{\alpha/2}} d\rho.$$

Здесь интеграл сходится при $\alpha > (n+1)/2$. Будем считать пока это условие выполненным. В силу формулы (1.86) получаем

$$\mathcal{F}^{-1}[(1+|x|^2)^{-\alpha/2}] = \frac{2^{(2-n-\alpha)/2}}{\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)} \frac{K_{(n-\alpha)/2}(|x|)}{|x|^{(n-\alpha)/2}} \stackrel{\text{def}}{=} G_\alpha(x), \quad (27.1)$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (1.85). Полученное выражение имеет смысл при любых $\alpha > 0$. Функция $G_\alpha(x)$ называется *бесселевым ядром*. Отметим некоторые его свойства. Прежде всего установим в следующей лемме его поведение в начале координат и на бесконечности.

Л е м м а 27.1. *Функция $G_\alpha(x)$ бесконечно дифференцируема вне начала координат, допуская оценку*

$$G_\alpha(x) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)} |x|^{\alpha-n}, & \text{если } 0 < \alpha < n, \\ \frac{1}{2^{n-1} \pi^{n/2} \Gamma(n/2)} \ln \frac{1}{|x|}, & \text{если } \alpha = n, \\ \frac{\Gamma((\alpha-n)/2)}{2^n \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)}, & \text{если } \alpha > n \end{cases}$$

при $|x| \rightarrow 0$ и оценку

$$G_\alpha(x) \sim \frac{|x|^{(\alpha-n-1)/2} e^{-|x|}}{2^{(n+\alpha-1)/2} \pi^{(n-1)/2} \Gamma(\alpha/2)}$$

при $|x| \rightarrow \infty$.

Утверждение леммы немедленно вытекает из известных свойств функции Макдональда: $K_\nu(z) \sim 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) z^{-\nu}$, $\nu \neq 0$, $K_0(z) \sim \ln(1/z)$ при $z \rightarrow 0$ и $K_\nu(z) \sim (\pi/2z)^{1/2} e^{-z}$ при $z \rightarrow \infty$ (см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 32]). Отметим по этому поводу формулу

$$K_\nu(z) = \frac{(\pi/2)^{1/2} z^\nu e^{-z}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\nu-1/2} (1+t/2)^{\nu-1/2} dt. \quad (27.2)$$

С л е д с т в и е. $G_\alpha(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$.

Теперь, используя свойства функции $G_\alpha(x)$ и прежде всего ее быстрое убывание на бесконечности, легко показать с помощью той же формулы Бохнера (25.11), что

$$\hat{G}_\alpha(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2} \quad (27.3)$$

при всех $\alpha > 0$ (можно брать $\text{Re } \alpha > 0$).

Из (27.3) следует

$$G_\alpha * G_\beta = G_{\alpha+\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (27.4)$$

$$(E - \Delta) G_\alpha = G_{\alpha-2}, \quad \alpha > 2, \quad (27.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x) dx = 1, \quad \alpha > 0. \quad (27.6)$$

Отметим еще формулу

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \xi^{(\alpha-n)/2-1} e^{-\xi - |x|^2/(4\xi)} d\xi \quad (27.7)$$

(см. доказательство в книге И. Стейна [1, с. 155]).

Определим теперь *бесселев потенциал* равенством

$$G^\alpha \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x-y) \varphi(y) dy, \quad \alpha > 0. \quad (27.8)$$

В силу леммы 27.1 он определен, например, на функциях $\varphi(y) \in L_p(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, и порождает ограниченный в $L_p(R^n)$ оператор:

$$\|G^\alpha \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \alpha > 0 \quad (27.9)$$

(неравенство (27.9) получается с учетом (27.6) и положительности ядра $G_\alpha(x)$). Непосредственно из (27.3), (27.4) вытекают следующие простые свойства оператора бесселева дробного интегрирования:

$$G^\alpha G^\beta \varphi = G^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (27.10)$$

(полугрупповое свойство),

$$(E - \Delta) G^\alpha \varphi = G^{\alpha-2} \varphi, \quad \alpha > 2 \quad (27.11)$$

(в отличие от случая риссова потенциала (27.10) выполняется на функциях из L_p при всех $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$). Ниже при необходимости допущения $\alpha = 0$ будем полагать $G^0 = E$.

Оператор G^α является конструктивной реализацией отрицательной дробной степени оператора $E - \Delta$. Интересен вопрос об эффективной реализации положительной степени этого оператора, подобно тому как это было сделано в § 25 и 26 для $(-\Delta)^{\alpha/2}$. Такая реализация будет дана в п. 4° этого параграфа.

2°. Связь с полугруппами Пуассона, Гаусса—Вейерштрасса и метгармонического продолжения. Риссов потенциал был связан с интегралом Пуассона простым равенством (25.52). Аналогичная связь бесселева потенциала с этим интегралом сложнее и выражается в терминах специальных функций. Именно справедлива следующая

Теорема 27.1. Пусть $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$(G^\alpha \varphi)(x) = \frac{2^{(1-\alpha)/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{(\alpha-1)/2} J_{\frac{\alpha-1}{2}}(t) (P_t \varphi)(x) dt, \quad (27.12)$$

где $P_t \varphi$ — интеграл Пуассона¹ (25.47).

Доказательство теоремы получается после перестановки порядка интегрирования в правой части в (27.12), возможной в силу теоремы Фубини, с помощью формулы

$$\frac{2^{(1-\alpha)/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{(\alpha-1)/2} J_{(\alpha-1)/2}(t) P(x, t) dt = G_\alpha(x), \quad (27.13)$$

где $P(x, t)$ — ядро Пуассона (25.49). Формула же (27.13) содержится в (1.86) согласно (27.1).

Существует между тем модификация бесселева потенциала (предложенная Т. Флеттом), которая связана с интегралом Пуассона более простым образом. Эта модификация основана на рассмотрении в образах Фурье функции $(1 + |x|)^\alpha$ вместо $(1 + |x|^2)^{\alpha/2}$. Именно положим

$$\mathfrak{G}^\alpha \varphi = \int_{R^n} \mathfrak{G}_\alpha(x - y) \varphi(y) dy, \quad (27.14)$$

где ядро свертки $\mathfrak{G}_\alpha(x)$ есть прообраз Фурье функции $(1 + |x|)^{-\alpha}$. Этот прообраз связан с ядром Пуассона $P(x, t)$ равенством

$$\mathfrak{G}_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} P(x, t) dt, \quad (27.15)$$

что можно проверить, переходя в этом равенстве к образам Фурье:

$$(1 + |x|)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \hat{P}(\cdot, t) dt, \quad (27.16)$$

где точка означает, что по этой переменной применено преобразование Фурье. Справедливость же равенства (27.16) вытекает из (25.54).

Ядро $\mathcal{G}_\alpha(x)$ можно записать в виде

$$\mathcal{G}_\alpha(x) = \frac{c_n}{\Gamma(\alpha)} |x|^{\alpha-n} \int_0^\infty \frac{s^{\alpha-n} e^{-s|x|}}{(1+s^2)^{(n+1)/2}} ds, \quad (27.17)$$

где c_n — постоянная из (25.49), что является перефразировкой равенства (27.15). Из равенств (27.15), (27.17) легко выводятся следующие простые свойства ядра $\mathcal{G}_\alpha$;

1) $\mathcal{G}_\alpha$ — бесконечно дифференцируемая вне начала координат функция, $\mathcal{G}_\alpha(x) > 0$, $x \neq 0$;

2) $\mathcal{G}_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma((\alpha+1)/2) \Gamma((n-\alpha)/2)}{2\Gamma(\alpha) \pi^{(n+1)/2}} |x|^{\alpha-n}$ при $x \rightarrow 0$, если $0 < \alpha < n$,

$\mathcal{G}_n(x) \sim \frac{c_n}{\Gamma(n)} \ln \frac{1}{|x|}$ при $x \rightarrow 0$ и $\mathcal{G}_\alpha(x)$ непрерывна в точке $x=0$, если

$\alpha > n$;

3) $\mathcal{G}_\alpha(x) \sim \alpha c_n |x|^{-n-1}$ при $x \rightarrow \infty$, так что $\mathcal{G}_\alpha(x) \in L_1(R^n)$ и $\int_{R^n} \mathcal{G}_\alpha(x) dx = 1$.

Из отмеченных свойств следует, что потенциал $\mathcal{G}^\alpha \varphi$ определен на функциях $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, и является ограниченным оператором:

$$\|\mathcal{G}^\alpha \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (27.18)$$

Непосредственно из (27.15) вытекает, что справедлива следующая теорема о связи модифицированного бesselова потенциала $\mathcal{G}^\alpha \varphi$ с интегралом Пуассона (ср. с (25.51)).

Теорема 27.2. Пусть $\varphi(x) \in L_p(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$\mathcal{G}^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} P_t \varphi dt. \quad (27.19)$$

Приведем еще два интегральных представления типа (27.12), (27.15) для бesselова потенциала $G^\alpha \varphi$. Первое связывает $G^\alpha \varphi$ с интегралом Гаусса—Вейерштрасса:

$$G^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty t^{\alpha/2-1} e^{-t} (W_t \varphi)(x) dt. \quad (27.20)$$

Второе выражает $G^\alpha \varphi$ через метагармоническое продолжение

$$M_t \varphi = \frac{2t}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \int_{R^n} \frac{K_{(n+1)/2}(\sqrt{|y|^2 + t^2})}{(\sqrt{|y|^2 + t^2})^{(n+1)/2}} \varphi(x-y) dy \quad (27.21)$$

функции φ по формуле

$$G^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (M_t \varphi)(x) dt, \quad (27.22)$$

(ср. с представлением (25.51) для потенциалов Рисса). К соотношениям (27.20), (27.22) примыкают равенства

$$e^{-t} (W_t G^\alpha \varphi)(x) = (I_-^{\alpha/2} (e^{-\tau} W_\tau \varphi)(x))(t), \quad (27.23)$$

$$(M_t G^\alpha \varphi)(x) = (I_-^\alpha (M_\tau \varphi)(x))(t), \quad (27.24)$$

родственные (25.52), (25.53). Равенства (27.20) — (27.24) прозрачны в образах Фурье, если учесть, что

$$\mathcal{F}(e^{-t}W_t\varphi) = e^{-t(1+|x|^2)} \hat{\varphi}(x), \quad (27.25)$$

$$\mathcal{F}(M_t\varphi) = e^{-t\sqrt{1+|x|^2}} \hat{\varphi}(x), \quad (27.26)$$

и отражают полугрупповую природу операторов G^α .

3°. Пространство бesselевых потенциалов. Пространством бesselевых потенциалов называется образ

$$G^\alpha(L_p) = \{f: f(x) = G^\alpha\varphi, \varphi \in L_p(R^n)\}, \quad \alpha > 0, 1 \leq p \leq \infty, \quad (27.27)$$

оператора G^α (иногда это пространство называют *лиувиллевским классом дробной гладкости α*). Это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{G^\alpha(L_p)} = \|\varphi\|_p.$$

Как будет видно из дальнейшего, оно является обобщением на дробный порядок соболевских классов $L_p^m(R^n)$. Поэтому пространства (27.27) называют также *пространствами Соболева дробного порядка*.

Замечание 27.1. Пространства $G^\alpha(L_p)$ и $\mathcal{G}^\alpha(L_p)$, где $\mathcal{G}^\alpha\varphi$ — модифицированный бesselев потенциал (27.14), совпадают:

$$G^\alpha(L_p) = \mathcal{G}^\alpha(L_p), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

В этом можно убедиться с помощью того факта, что функции $\frac{(1+|x|)^\alpha}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} - 1$ и $\frac{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}{(1+|x|)^\alpha} - 1$ являются преобразованиями Фурье суммируемых

по R^n функций (ср. последнее со следствием из леммы 5.2 в книге С. Г. Самко [31, с. 52]).

Описание пространства $G^\alpha(L_p)$, излагаемое в этом пункте, переключается с описанием риссовых потенциалов (теорема 26.8) и дается в терминах риссовой производной. Выделим среди пространств $L_{p,r}^\alpha(R^n)$, рассмотренных в § 26, п. 7°, важный сейчас для нас случай $r = p$. Удобно ввести специальное обозначение

$$L_p^\alpha(R^n) = L_{p,p}^\alpha(R^n) = \{f: f \in L_p, D^\alpha f \in L_p\}, \quad \alpha > 0, 1 \leq p < \infty. \quad (27.28)$$

Теорема 27.3. Пространство бesselевых потенциалов состоит из тех и только тех функций $f(x) \in L_p(R^n)$, которые имеют в $L_p(R^n)$ риссову производную порядка α , т. е.

$$G^\alpha(L_p) = L_p^\alpha(R^n), \quad 1 \leq p < \infty, \quad \alpha > 0, \\ c_1 \|f\|_{L_p^\alpha} \leq \|f\|_{G^\alpha(L_p)} \leq c_2 \|f\|_{L_p^\alpha}.$$

Доказательству теоремы предположим следующую лемму.

Лемма 27.2. Класс C_0^∞ плотен в $L_p^\alpha(R^n)$, $1 \leq p < \infty$.

Доказательство леммы. 1. Сначала показываем, что бесконечно дифференцируемые функции из $L_p(R^n)$ плотны в $L_p^\alpha(R^n)$. Это достигается обычными средствами, применяемыми при доказательстве плотности «хороших» функций в различных функциональных пространствах, — с помощью соболевского усреднения (аппроксимации единицы):

$$f_m(x) = \int_{R^n} a(y) f\left(x - \frac{y}{m}\right) dy, \quad f \in L_p^\alpha,$$

где $a(y) \in C_0^\infty$, $\int_{R^n} a(y) dy = 1$. Тогда $\|f - f_m\|_p \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$, и нетрудно видеть, что $D^\alpha f_m = (D^\alpha f)_m$. Поэтому существует $D^\alpha f_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D^\alpha f_m$ и $D^\alpha f_m = (D^\alpha f)_m$. Но в таком случае $\|D^\alpha (f_m - f)\|_p = \|(D^\alpha f)_m - D^\alpha f\|_p \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Заметим, что так как $a(x) \in C_0^\infty$, то $\mathcal{D}^j f_m \in L_p(R^n)$ для всех $|j| = 0, 1, 2, \dots$.

2. Остается приблизить C_0^∞ -функциями функцию $f(x)$ в $L_p(R^n)$, считая, что $f(x) \in C^\infty(R^n)$ и что $(\mathcal{D}^j f)(x) \in L_p(R^n)$, $|j| = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $\mu(x)$ — какая-нибудь функция из C_0^∞ с носителем в шаре $|x| < 2$, тождественно равная единице при $|x| \leq 1$ и такая, что $|\mu(x)| \leq 1$. Нужно показать, что «урезание»

$$\mu_N(x) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(x/N) f(x) \in C_0^\infty$$

аппроксимирует при $N \rightarrow \infty$ функцию $f(x)$ по норме $\|f\|_p + \|D^\alpha f\|_p$. Обозначим $v(x) = 1 - \mu(x)$, $v_N(x) = v(x/N)$. Достаточно проверить, что $\|D^\alpha (v_N f)\|_p \rightarrow 0$. Имеем $D^\alpha (v_N f) = v_N D^\alpha f + d_{n,l}^{-1}(\alpha) \sum_{k=1}^l \binom{l}{k} B_{N,k} f$, где обозначено

$$B_{N,k} f = \int_{R^n} |y|^{-n-\alpha} (\Delta_y^k v_N)(x) (\Delta_y^{l-k} f)(x - ky) dy, \quad (27.29)$$

$k = 1, 2, \dots, l$, так что в доказательстве нуждается переход $\|B_{N,k} f\|_p \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Так как $\Delta_y^k v_N \equiv \Delta_y^k \mu_N$, $k > 0$, и $|(\Delta_y^k \mu)(x)| \leq c |y|^k / (1 + |y|)^k$ согласно (26.20), то после применения неравенства Минковского получаем

$$\|B_{N,k} f\|_p \leq c N^{-k} \int_{R^n} |y|^{k-n-\alpha} \left(1 + \frac{|y|}{N}\right)^{-k} \|\Delta_y^{l-k} f\|_p dy. \quad (27.30)$$

Из формулы (26.19) вытекает, что $\|\Delta_y^{l-k} f\|_p \leq c |y|^{l-k} \sum_{|j|=l-k} \|\mathcal{D}^j f\|_p = c |y|^{l-k}$, так как $\mathcal{D}^j f \in L_p(R^n)$ для всех $|j| = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому из (27.30)

$$\|B_{N,k} f\|_p \leq \frac{c_1}{N^k} \int_{|y| < 1} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha-l}} + \frac{c_2}{N^k} \int_{|y| > 1} \frac{dy}{|y|^{n+\alpha-k} \left(1 + \frac{|y|}{N}\right)^k}.$$

Отсюда несложными преобразованиями получаем, что $\|B_{N,k} f\|_p \leq c_3 N^{-k} + c_4 N^{-\alpha}$ (при $k \neq \alpha$; если α целое и $k = \alpha$, то $\|B_{N,k} f\|_p \leq c N^{-\alpha} \ln N$). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 27.3. Доказываем вложение

$$G^\alpha(L_p) \subseteq L_p^\alpha(R^n). \quad (27.31)$$

Так как $G_\alpha(x) \in L_1(R^n)$ согласно лемме 27.1, то $G^\alpha(L_p) \subset L_p$. Далее, имеем

$$\frac{1}{(1 + |x|^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{|x|^\alpha} \frac{|x|^\alpha}{(1 + |x|^2)^{\alpha/2}}. \quad (27.32)$$

Известно (И. Стейн [1, с. 157], см. также С. Г. Самко [31, с. 51]), что функция $|x|^\alpha (1 + |x|^2)^{-\alpha/2} - 1$ является преобразованием Фурье функции из $L_1(R^n)$. Поэтому равенство (27.32) в прообразах Фурье означает, что

$$G^\alpha \varphi = I^\alpha (E + A) \varphi, \quad (27.33)$$

где A — оператор свертки с суммируемым ядром. В силу ограниченности соответствующих операторов равенство (27.33) распространяется с функций $\varphi \in C_0^\infty$ на $\varphi \in L_p(R^n)$, $1 \leq p < n/\alpha$. Справедливость (27.33) для $\varphi \in L_p(R^n)$ при $p \geq n/\alpha$ есть следствие определения $I^\alpha \varphi$ для таких φ (см. § 26, п. 7°). Но тогда из (27.33) следует, что $G^\alpha(L_p) \subseteq L_p \cap I^\alpha(L_p)$. Поэтому в силу (26.94) вложение (27.31) доказано, при этом, согласно (27.33), для $f = G^\alpha \varphi$ имеем $\|f\|_{L_p^\alpha} = \|f\|_p + \|D^\alpha f\|_p \leq \|f\|_p + \|(E+A)\varphi\|_p \leq c\|\varphi\|_p = c\|f\|_{G^\alpha(L_p)}$.

Докажем обратное вложение. Пусть $f \in L_p^\alpha(R^n)$. Пользуясь плотностью C_0^∞ в $L_p^\alpha(R^n)$, доказанной в лемме 27.2, аппроксимируем f функциями $f_m \in C_0^\infty$ по норме $\|f\|_p + \|D^\alpha f\|_p$. Имеем $1 = \frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}} \frac{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}{1+|x|^\alpha} (1+|x|^\alpha)$.

Здесь $\frac{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}{1+|x|^\alpha} - 1$ является преобразованием Фурье суммируемой функции (см. И. Стейн [1, с. 157—158], см. также С. Г. Самко [31, с. 52]). Тогда этому равенству отвечает равенство в прообразах Фурье:

$$f_m = G^\alpha(E+U)(f_m + D^\alpha f_m), \quad (27.34)$$

где U — оператор свертки с суммируемым ядром. Так как операторы G^α и U ограничены в $L_p(R^n)$, $1 \leq p < \infty$, то из (27.34) после предельного перехода при $m \rightarrow \infty$ получаем, что $f \in G^\alpha(L_p)$, т. е. $L_p^\alpha(R^n) \subseteq G^\alpha(L_p)$, причем $\|f\|_{G^\alpha(L_p)} = \|(E+U)(f + D^\alpha f)\|_p \leq c(\|f\|_p + \|D^\alpha f\|_p) = c\|f\|_{L_p^\alpha}$, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие. Оператор G^α осуществляет изоморфизм между пространствами $L_p^\beta(R^n)$ и $L_p^{\alpha+\beta}(R^n)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

4°. Реализация $(E - \Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, с помощью гиперсингулярного интеграла. Так как $(E - \Delta)^{\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}(1+|x|^2)^{\alpha/2} \mathcal{F} f$, то речь пойдет по существу об обращении бесселевых потенциалов $f = G^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$. Плотность φ берется вначале из шварцева класса S , инвариантного для оператора G^α , затем рассматривается вопрос об обращении на функциях $\varphi \in L_p$. Обратный к G^α оператор будет построен с помощью гиперсингулярного интеграла $T^\alpha f$, содержащего остаток ряда Тейлора функции $f(x)$, см. конструкции (26.68).

Для $f \in S$ и $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2, 4, 6, \dots$, положим

$$T^\alpha f = \sum_{j \in \Lambda_\alpha} c_{\alpha,j} (\mathcal{D}^j f)(x) + d_\alpha \int_{R^n} [f(x-y) - (R_y^{[\alpha]} f)(x)] |y|^{-n-\alpha} \lambda_\alpha(|y|) dy, \quad (27.35)$$

где $(R_y^{[\alpha]} f)(x)$ — то же, что в (26.66), Λ_α — множество мультииндексов длины $\leq [\alpha]$ с четными компонентами;

$$d_\alpha = \frac{2^\alpha}{\pi^{n/2} \Gamma(-\alpha/2)}, \quad c_{\alpha,j} = \frac{d_\alpha \Gamma\left(\frac{|j|-\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+|j|}{2}\right)}{j! 2^{1+\alpha-|j|}} \omega_j, \\ \omega_j = \int_{S_{n-1}} \sigma^j d\sigma, \quad \lambda_\alpha(|y|) = 2^{1-(n+\alpha)/2} |y|^{(n+\alpha)/2} K_{(n+\alpha)/2}(|y|) = \\ = \int_0^\infty \xi^{-1+(n+\alpha)/2} e^{-\xi-|y|^2/4\xi} d\xi. \quad (27.36)$$

Заметим, что $\Gamma\left(\frac{n+|j|}{2}\right) \omega_j = 2\Gamma\left(\frac{j_1+1}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{j_n+1}{2}\right)$ в случае четных $j_1, \dots, j_n$.

Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$

$$T^\alpha f = f(x) - d_\alpha \int_{R^n} \frac{f(x) - f(y)}{|y|^{n+\alpha}} \lambda_\alpha(|y|) dy. \quad (27.37)$$

Легко проверить, что характеристика $\lambda_\alpha(|y|)$ гиперсингулярного интеграла в (27.35), (27.37) стабилизируется в начале координат и на бесконечности как гельдеровская функция; гиперсингулярные интегралы с такими характеристиками изучались в работе С. Г. Самко [20], результатами которой мы ниже воспользуемся.

Теорема 27.4. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2, 4, 6, \dots$; $\varphi \in S$. Тогда $T^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi$, где T^α — оператор (27.35).

Доказательство. Заметим, что обратный к G^α оператор в рамках S может быть записан в виде

$$(G^\alpha)^{-1} f = (\mathcal{F}^{-1}(1 + |y|^2)^{\alpha/2}, f(y + x)), \quad (27.38)$$

где преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}(1 + |y|^2)^{\alpha/2}$ понимается в смысле S' (обосновывается с помощью теоремы Гельфанда—Шилова, см. книгу И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [1, с. 179]). Нужно показать, что

$$(\mathcal{F}^{-1}(1 + |y|^2)^{\alpha/2}, f(y + x)) = (T^\alpha f)(x), \quad \alpha \neq 2, 4, \dots \quad (27.39)$$

При $\operatorname{Re} \alpha < 0$ имеем с учетом (27.36)

$$(\mathcal{F}^{-1}(1 + |y|^2)^{\alpha/2}, f(y + x)) = d_\alpha \int_{R^n} \frac{\lambda_\alpha(|y|)}{|y|^{n+\alpha}} f(y + x) dy. \quad (27.40)$$

Так как левая часть аналитична по α во всей комплексной плоскости, то (27.40) будет справедливо и при $\operatorname{Re} \alpha > 0$, если интеграл в правой части понимать как аналитическое продолжение. Такое продолжение и осуществляется вычитанием отрезка ряда Тейлора функции $f(x)$ под знаком интеграла. Произведя непосредственные вычисления, придем к (27.39). Теорема доказана.

Замечание 27.2. Так как $(1 + |x|^2)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} |x|^{2i}$, то при $\alpha = 2, 4, 6, \dots$ обратный к G^α оператор имеет вид

$$(G^\alpha)^{-1} f = \sum_{i=0}^{\alpha/2} \binom{\alpha/2}{i} (-\Delta)^i f. \quad (27.41)$$

Покажем теперь, что оператор T^α обращает потенциал $f = G^\alpha \varphi$ и для $\varphi \in L_p$, если его понимать следующим образом:

$$T^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} T_\varepsilon^\alpha f, \quad (27.42)$$

где $T_\varepsilon^\alpha f$ — конструкция вида (27.35), в которой интегрирование по R^n заменено интегрированием по $|y| > \varepsilon$. Производные $\mathcal{D}^j f$ функции $f(x) \in G^\alpha(L_p)$ будем понимать как обобщенные производные над классом бесконечно дифференцируемых функций (существование производных $\mathcal{D}^j f$ для $f = G^\alpha \varphi$ вытекает из того, что $G^\alpha(L_p) \subset L_p^m$, $m = 0, 1, \dots, [\alpha]$).

Теорема 27.5. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2, 4, 6, \dots$, $\varphi \in L_p$, $1 < p < \infty$. Тогда $T^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi$, где T^α — оператор (27.42).

Доказательство. Нужно показать, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} T_\varepsilon^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi. \quad (27.43)$$

Докажем вначале равномерную оценку

$$\|T_\varepsilon^\alpha G^\alpha \varphi\|_p \leq c \|\varphi\|_p, \quad (27.44)$$

где c не зависит от ε . Ее получение использует понятие о фурье-мультипликаторах в L_p (см. И. Стейн [1, с. 113]). Так как $\|\mathcal{D}^j G^\alpha \varphi\|_p \leq c \|\varphi\|_p$ (что легко проверяется с помощью теоремы 3 из книги И. Стейна [1, с. 114]), то (27.44) будет следовать из оценки

$$\|D_{\lambda_\alpha}^\alpha \varepsilon G^\alpha \varphi\|_p \leq c \|\varphi\|_p, \quad (27.45)$$

где c не зависит от ε , а

$$D_{\lambda_\alpha}^\alpha \varepsilon f = \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y) - (R_y^{[\alpha]} f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \lambda_\alpha(|y|) dy. \quad (27.46)$$

Положим

$$\sigma_\varepsilon(x) = \int_{|y|>\varepsilon} \left(e^{ix \cdot y} - \sum_{|j| \leq [\alpha]} \frac{i^{|j|} x^j y^j}{j!} \right) \frac{\lambda_\alpha(|y|)}{|y|^{n+\alpha}} dy,$$

так что $\mathcal{F}(D_{\lambda_\alpha}^\alpha \varepsilon f) = \sigma_\varepsilon(x) \hat{f}(x)$, $f \in S$. Неравенство (27.45) вытекает из следующей леммы.

Лемма 27.3. Функция $(1+|x|^2)^{-\alpha/2} \sigma_\varepsilon(x)$, $\alpha > 0$, принадлежит классу M_p фурье-мультипликаторов в L_p , $1 < p < \infty$ ($1 \leq p < \infty$ при $0 < \alpha < 1$), при этом

$$\|(1+|x|^2)^{-\alpha/2} \sigma_\varepsilon(x)\|_{M_p} \leq c, \quad (27.47)$$

где c не зависит от ε .

При $0 < \alpha < 1$ (27.47) получено в работе С. Г. Самко [20] для произвольных стабилизирующих характеристик (и в более сильном виде — в терминах абсолютной интегрируемости интеграла Фурье функции $(1+|x|^2)^{-\alpha/2} \sigma_\varepsilon(x)$ равномерно по ε), см. оценку (4.11') и лемму 1.4 в указанной работе. Докажем лемму при $\alpha \geq 1$. Воспользуемся теоремой 3 из книги И. Стейна [1, с. 114], согласно которой нужно проверить, что

$$|x|^{|v|} |\mathcal{D}^v (1+|x|^2)^{-\alpha/2} \sigma_\varepsilon(x)| \leq c, \quad |v| \leq [n/2] + 1, \quad (27.48)$$

где c не зависит от ε . С учетом формулы Лейбница (27.48) будет следовать из оценки

$$|\mathcal{D}^v \sigma_\varepsilon(x)| \leq c |x|^{\alpha-|v|}, \quad |v| \leq [n/2] + 1, \quad (27.49)$$

c не зависит от ε . Установим (27.49). Если $[\alpha] + 1 \leq |v| \leq [n/2] + 1$, то

$$\mathcal{D}^v \sigma_\varepsilon(x) = \int_{|y|>\varepsilon} \frac{(iy)^v}{|y|^{n+\alpha}} \lambda_\alpha(|y|) e^{ix \cdot y} dy \quad (27.50)$$

(дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу быстрого убывания $\lambda_\alpha(|y|)$ при $|y| \rightarrow \infty$, усматриваемого из (27.36)). Запишем моном $(iy)^v$ в виде $(iy)^v = \sum_{m=0}^{[|v|/2]} |y|^{2m} P_{|v|-2m}(y)$, где $P_{|v|-2m}(y)$ — однородные

гармонические многочлены степени $|v|-2m$ (см. книгу И. Стейна, Г. Вейса [1, с. 159]). После перехода к сферическим координатам и применения формулы Функа—Гекке (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 240], С. Г.

Самко [31, с. 43]) и формулы 2.12.2.2 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2] имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\nu} \sigma_{\varepsilon}(x) &= \sum_{m=0}^{[|\nu|/2]} i^{|\nu|-2m} P_{|\nu|-2m} \left(\frac{x}{|x|} \right) |x|^{\alpha-|\nu|} \times \\ &\times \int_{\varepsilon|x|}^{\infty} \frac{\lambda_{\alpha} \left(\frac{\xi}{|x|} \right) J_{|\nu|-2m-1+n/2}(\xi) d\xi}{\xi^{\alpha-|\nu|+n/2}}. \end{aligned} \quad (27.51)$$

Если $\alpha - |\nu| + (n+1)/2 > 1$, то с учетом поведения функции Бесселя при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow \infty$ получаем

$$|\mathcal{D}^{\nu} \sigma_{\varepsilon}(x)| \leq c |x|^{\alpha-|\nu|} \sum \int_0^{\infty} \xi^{|\nu|-\alpha-n/2} |J_{|\nu|-2m-1+n/2}(\xi)| d\xi = c |x|^{\alpha-|\nu|}.$$

Если же $\alpha - |\nu| + (n+1)/2 \leq 1$, то (27.49) следует из (27.51) в силу равномерной сходимости интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda_{\alpha}(\xi/|x|) J_{|\nu|-2m-1+n/2}(\xi) d\xi}{\xi^{\alpha-|\nu|+n/2}}, \quad m=0, 1, \dots, \left[\frac{|\nu|}{2} \right],$$

получаемой с учетом монотонности функции $\lambda_{\alpha}(\xi)$. Пусть теперь $|\nu| < [\alpha] + 1$. При $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^{\nu} \sigma_{\varepsilon}(x)| &\leq c \int_{|y| < |x|^{-1}} |y|^{|\nu|-\alpha-n} |(x \cdot y)|^{[\alpha]+1-|\nu|} dy + \\ &+ c \sum_{|j| \leq [\alpha]-|\nu|} |x|^{|j|} \int_{|y| > |x|^{-1}} |y|^{|\nu|+|j|-n-\alpha} dy \leq c |x|^{\alpha-|\nu|}. \end{aligned}$$

Если же $\alpha = 1, 3, 5, \dots$, то в силу формулы Тейлора с остатком в интегральной форме будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\nu} \sigma_{\varepsilon}(x) &= i^{|\nu|} \sum_{|j|=\alpha+1-|\nu|} \frac{(\alpha+1-|\nu|)!}{j!} x^j \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-|\nu|} d\xi \times \\ &\times \int_{|y|>\varepsilon} y^{\nu+j} |y|^{-n-\alpha} \lambda_{\alpha}(|y|) e^{i\xi x \cdot y} dy. \end{aligned}$$

Преобразуя интеграл по $|y| > \varepsilon$ так же, как интеграл в (27.50), получим (27.49). Лемма доказана.

В силу равномерной оценки (27.44) остается, согласно теореме Банаха—Штейнгауза, проверить (27.43) на плотном в L_p множестве S . Для $\varphi \in S$ с учетом того, что $T^{\alpha} G^{\alpha} \varphi = \varphi$, получаем, применяя равенство Парсеваля: $\|T_{\varepsilon}^{\alpha} G^{\alpha} \varphi - \varphi\|_{2 \rightarrow 0} \rightarrow 0$. Выберем $r > 1$ так, чтобы p было заключено между 2 и r , и положим $\theta = 2(r-p)/p(r-2)$. Тогда в силу интерполяционного неравенства $\|f\|_p \leq \|f\|_r^{1-\theta} \|f\|_2^{\theta}$ и равномерной оценки (27.44) заключаем, что (27.43) выполняется для $\varphi \in S$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 27.3. Легко проверить, что при $\alpha = 2, 4, 6, \dots$ оператор (27.41) будет обратным к потенциалу $G^{\alpha} \varphi$ в рамках L_p в слабом смысле:

$$\left(G^{\alpha} \varphi, \sum_{i=0}^{\alpha/2} \binom{\alpha/2}{i} (-\Delta)^i \omega \right) = (\varphi, \omega), \quad \varphi \in L_p, \quad \omega \in S.$$

В заключение укажем еще три способа конструктивной реализации оператора $(E - \Delta)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, в L_p . Ограничимся самыми краткими указа-

ниями. Соответствующие литературные ссылки по поводу приводимых ниже утверждений см. в § 29. Первый способ состоит в преобразовании оператора (27.35) к виду

$$T^\alpha f = h_\alpha * f + D_\Omega^\alpha f, \quad (27.52)$$

где $h_\alpha(y) \in L_1(R^n)$, а $D_\Omega^\alpha f$ — гиперсингулярный интеграл:

$$D_\Omega^\alpha f = \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{|y|^{n+\alpha}} \Omega(y) dy, \quad (27.53)$$

характеристика $\Omega(y)$ которого является многочленом степени меньше α (явный вид $h_\alpha(y)$ и $\Omega(y)$ см. в статье В. А. Ногина [6]).

Теорема 27.6. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2, 4, 6, \dots$, $1 < p < \infty$, $\varphi \in L_p(R^n)$. Тогда $T^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi$, где

$$T^\alpha f = h_\alpha * f + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} D_{\Omega, \varepsilon}^\alpha f,$$

$D_{\Omega, \varepsilon}^\alpha f$ — «усеченный» ($|y| > \varepsilon$) интеграл, соответствующий (27.53).

Заметим, что преимущество конструкции (27.52) перед (27.35) состоит в том, что она содержит гиперсингулярный интеграл более простого вида (построенный в терминах сдвигов функции $f(x)$).

Второй способ связан с формулой (27.20) и аналогичен утверждениям, полученным для рисовых потенциалов в формуле (25.70) и теоремах 26.3' и 26.10. Обозначим

$$\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha f = \frac{1}{\kappa(\alpha/2, l)} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\alpha/2} (E - e^{-t} W_t)^l f dt, \quad 0 < \alpha < 2l, \quad (27.54)$$

где $\kappa(\alpha/2, l)$ — постоянная (5.81).

Теорема 27.7. Пусть $\varphi \in L_p(R^n)$. Тогда $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (p, p.)}} \mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi$ при $1 \leq p \leq \infty$, $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} \mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha G^\alpha \varphi = \varphi$ при $1 \leq p < \infty$.

Теорема 27.7 остается справедливой, если положить

$$\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha f = \frac{1}{\kappa(\alpha, l)} \int_\varepsilon^\infty t^{-1-\alpha} (E - M_t)^\alpha f dt, \quad 0 < \alpha < l, \quad (27.55)$$

где M_t — полугруппа (27.21).

Наконец, третий способ основан на введении гиперсингулярных интегралов со «взвешенными» разностями:

$$T_l^\alpha f = \int_{R^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x, \rho)}{|y|^{n+\alpha}} dy, \quad (\Delta_y^l f)(x, \rho) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k \rho(k, y) f(x - ky) \quad (27.56)$$

(для простоты ограничиваемся случаем нецентрированных разностей). Отметим, что «взвешенная» разность с весом $\rho(k, y) = e^{-ky}$ уже встречалась при рассмотрении одномерных бесселевых потенциалов в § 18, п. 4°, см. равенство (18.77). Определим вес $\rho(k, y)$ в (27.56) равенством

$$\rho(k, y) = 2^{1-(n+\alpha)/2} \left(\Gamma \left(\frac{n+\alpha}{2} \right) \right)^{-1} (k|y|)^{(n+\alpha)/2} K_{(n+\alpha)/2}(k|y|).$$

Для $f \in S$ интегралы (27.56) с таким весом обладают свойствами: а) при $l > \alpha$ интеграл (27.56) сходится абсолютно, а при $2[\alpha/2] < l \leq \alpha$ — условно; б) если $\alpha = 1, 3, 5, \dots$ и $l > \alpha$, то $T_l^\alpha f \equiv 0$; в) $\mathcal{F}(T_l^\alpha f) = d_{n,l}(\alpha)(1 + |x|^2)^{\alpha/2} \hat{f}(x)$, где постоянная $d_{n,l}(\alpha)$ та же, что в § 26.

Утверждение теоремы 27.7 остается в силе, если под $\mathfrak{D}_\varepsilon^\alpha f$ подразумевать усеченный интеграл (27.56) (с интегрированием по $|y| > \varepsilon$), см. Б. С. Рубин [24, 25].

§ 28. ДРУГИЕ ФОРМЫ МНОГОМЕРНОГО ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Рассмотренное в § 25—27 дробное интегродифференцирование функций многих переменных, заданных во всем пространстве R^n , являлось реализацией дробной степени $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ или $(E - \Delta)^{-\alpha/2}$, где Δ — лапласиан. Прямое обобщение этого подхода состоит в том, чтобы рассматривать дробные степени произвольного дифференциального оператора в частных производных. Не касаясь этого вопроса в такой общности, остановимся на дробных степенях простейших дифференциальных операторов:

$$\square_p = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad 1 \leq p < n \quad (28.1)$$

(ультрагиперболический случай),

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (28.2)$$

(параболический случай).

Приведенное в § 25—27 дробное интегродифференцирование относится, таким образом, к эллиптическому случаю.

Реализация отрицательной дробной степени первого оператора приводит (при $p=1$) к риссовым гиперболическим потенциалам с лоренцевым расстоянием, а второго — к параболическим потенциалам. Они и рассмотрены вначале. Затем дана реализация положительной дробной степени оператора теплопроводности (28.2).

В заключение этого параграфа изучается дробное интегрирование, примыкающее к построениям § 24 и отличающееся от них тем, что в соответствующем дробном интеграле интегрирование производится не по октанту или по прямоугольному параллелепипеду с противоположными вершинами $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, как в § 24, а по пирамиде с вершиной в точке x и основанием — постоянной (не зависящей от x) гиперплоскостью. Такое дробное интегрирование названо пирамидальным.

1°. Потенциалы Рисса с лоренцевым расстоянием (гиперболические риссовы потенциалы). Как и при введении дробного риссова интегродифференцирования в эллиптическом случае в § 25, идея введения дробной степени прозрачна, по крайней мере формально, в образах Фурье. Именно учитывая, что действие оператора (28.1) сводится в образах Фурье к умножению на квадратичную форму:

$$\mathcal{F}(-\square_p \varphi) = P(x) \mathcal{F} \varphi, \quad (28.3)$$

$$P(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2,$$

естественно ввести дробные степени $(-\square_p)^\lambda$ как операторы, определяемые в образах Фурье умножением на дробную степень квадратичной формы $P(x)$. Однако в отличие от эллиптического случая квадратичная форма $P(x)$ не является знакоопределенной. Можно было бы, чтобы избежать возведения в дробную степень отрицательных значений, рас-

смотреть $|P(x)|^\lambda$ или $|P(x)|^\lambda \text{sign } P(x)$. Однако полученные на этом пути дробные степени не будут содержать обычные целые степени оператора $-\square_p$ (первая при нечетных λ , вторая при четных). Поэтому будем использовать обычное возведение в дробную степень с выбором «главного» значения.

Введем стандартные обозначения:

$$P_+^\lambda = \begin{cases} [P(x)]^\lambda, & \text{если } P(x) > 0, \\ 0, & \text{если } P(x) \leq 0, \end{cases} \quad P_-^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } P(x) \geq 0, \\ |P(x)|^\lambda, & \text{если } P(x) < 0, \end{cases}$$

и

$$(P \pm i0)^\lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (P \pm i\varepsilon)^\lambda = \begin{cases} [P(x)]^\lambda, & P(x) > 0, \\ e^{\pm \lambda \pi i} |P(x)|^\lambda, & P(x) < 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$(P \pm i0)^\lambda = P_+^\lambda + e^{\pm i\lambda\pi} P_-^\lambda. \quad (28.4)$$

Отправляясь от (28.3), введем две формы дробной степени *даламбертиана*:

$$(-\square_p)_\pm^\lambda \varphi = \mathcal{F}^{-1} (P \mp i0)^\lambda \mathcal{F} \varphi \quad (28.5)$$

(ср. с формулой (7.4) в одномерном случае). В теории обобщенных функций известна формула преобразования Фурье дробных степеней квадратичных форм. Приведем ее в удобном для нас виде:

$$\mathcal{F} [(P \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}}] = e^{\mp \frac{n-p}{2} \pi i} \gamma_n(\alpha) (P \mp i0)^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad (28.6)$$

где $\gamma_n(\alpha)$ — известный нам нормирующий множитель (25.26) для эллиптического риссова потенциала (доказательство формулы (28.6) можно найти в книге И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, с. 349]).

В силу формулы (28.6) операция (28.5) с $\lambda = -\alpha/2$ должна реализовываться как свертка с функцией

$$\frac{e^{\pm \frac{n-p}{2} \pi i}}{\gamma_n(\alpha)} (P \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}} = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} (e^{\pm \frac{n-p}{2} \pi i} P_+^{\frac{\alpha-n}{2}} + e^{\pm \frac{\alpha-p}{2} \pi i} P_-^{\frac{\alpha-n}{2}}). \quad (28.7)$$

Оператор этой свертки обозначим через

$$I_{P \pm i0}^\alpha \varphi = \frac{e^{\pm i \frac{n-p}{2} \pi}}{\gamma_n(\alpha)} (P \pm i0)^{\frac{\alpha-n}{2}} * \varphi,$$

так что $(-\square_p)_\pm^{-\alpha/2} = I_{P \pm i0}^\alpha$. В силу формулы (28.7) этот оператор имеет вид

$$I_{P \pm i0}^\alpha \varphi = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \left[e^{\pm \frac{n-p}{2} \pi i} \int_{K_+} \frac{\varphi(x-y) dy}{r^{n-\alpha}(y)} + e^{\pm \frac{\alpha-p}{2} \pi i} \int_{K_-} \frac{\varphi(x-y) dy}{|r^{n-\alpha}(y)|} \right], \quad (28.8)$$

где обозначено

$$r(y) = \sqrt{P(y)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2}$$

и $K_\pm$ — конусы:

$$K_+ = \{x: x \in R^n, P(x) \geq 0\}, \quad K_- = \{x: x \in R^n, P(x) \leq 0\}.$$

Заметим, что $r(y)$ называется *лоренцевым расстоянием*, а конус K_+ известен под названием *светового* или *характеристического конуса*.

Интегралы в (28.8) сходятся на достаточно хороших функциях, если $\alpha > n - 2$. В этом можно убедиться, записав $r^{n-\alpha}(y)$ в виде $r^{n-\alpha}(y) = \|y'\|^2 - \|y''\|^2 (n-\alpha)/2$, где $y' = (y_1, \dots, y_p) \in R^p$, $y'' = (y_{p+1}, \dots, y_n) \in R^{n-p}$, перейдя к повторному интегрированию по R^p и R^{n-p} и вводя полярные координаты в интеграле по R^{n-p} , что даст условие $(n-\alpha)/2 < 1$.

При $\alpha \leq n-2$ конструкция (28.8) не определена, но для нее можно получить аналитическое продолжение по α , пригодное при $\alpha \leq n-2$. Останавливаться на этом не станем.

Непосредственно из определения (28.5) следует, что

$$I_{P \pm i0}^\alpha I_{P \pm i0}^\beta = I_{P \pm i0}^{\alpha+\beta}. \quad (28.9)$$

Зададимся вопросом, можно ли ввести оператор гиперболического дробного интегрирования типа (28.8) с интегрированием только по одному из конусов K_+ , K_- и так, чтобы сохранялось полугрупповое свойство (28.9). Очевидно, для этого нужно отправляться не от функции $(P \pm i0)^\lambda$, а от P_+^λ или P_-^λ . В силу связи (28.4) из формулы (28.6) простыми преобразованиями получаются равенства

$$\mathcal{F}(P_+^{(\alpha-n)/2}) = \frac{\gamma_n(\alpha)}{\sin(n-\alpha)\pi/2} \left(\sin \frac{p-\alpha}{2} \pi P_+^{-\alpha/2} + \sin \frac{p\pi}{2} P_-^{-\alpha/2} \right), \quad (28.10)$$

$$\mathcal{F}(P_-^{(\alpha-n)/2}) = \frac{\gamma_n(\alpha)}{\sin(n-\alpha)\pi/2} \left(\sin \frac{n-p}{2} \pi P_+^{-\alpha/2} + \sin \frac{n-p-\alpha}{2} \pi P_-^{-\alpha/2} \right).$$

Отсюда

$$\mathcal{F}(P_+^{(\alpha-n)/2}) = (-1)^{p/2-1} \gamma_n(\alpha) \frac{\sin \alpha\pi/2}{\sin(n-\alpha)\pi/2} P_+^{-\alpha/2}, \quad (28.11)$$

если $p = 2, 4, 6, \dots$,

$$\mathcal{F}(P_-^{\frac{\alpha-n}{2}}) = (-1)^{\frac{n-p}{2}-1} \gamma_n(\alpha) \frac{\sin \alpha\pi/2}{\sin(n-\alpha)\pi/2} P_-^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad (28.12)$$

если $n-p = 2, 4, 6, \dots$

Следовательно, потенциалы

$$I_{P_+}^\alpha \varphi = \frac{(-1)^{p/2-1}}{H_n'(\alpha)} \int_{K_+} \frac{\varphi(x-y) dy}{r^{n-\alpha}(y)}, \quad p = 2, 4, 6, \dots, \quad (28.13)$$

$$I_{P_-}^\alpha \varphi = \frac{(-1)^{\frac{n-p}{2}-1}}{H_n'(\alpha)} \int_{K_-} \frac{\varphi(x-y) dy}{|r^{n-\alpha}(y)|}, \quad n-p = 2, 4, 6, \dots, \quad (28.14)$$

где $\alpha > n-2$ и

$$H_n'(\alpha) = \gamma_n(\alpha) \frac{\sin \alpha\pi/2}{\sin(n-\alpha)\pi/2}, \quad (28.15)$$

обладают в силу (28.11), (28.12) полугрупповым свойством

$$I_{P_\pm}^\alpha I_{P_\pm}^\beta = I_{P_\pm}^{\alpha+\beta} \quad (28.16)$$

при выборе $p = 2, 4, 6, \dots$ в случае знака $+$ и $p = n-2, n-4, n-6, \dots$ в случае знака $-$.

Выделим особо случай $p=1$. Форма (28.13) в этом случае неприемлема, а форму (28.14) можно использовать при нечетных n :

$$I_{P_-}^\alpha \varphi = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{H_n'(\alpha)} \int_{K_-} \frac{\varphi(x-y)}{|r^{n-\alpha}(y)|} dy, \quad p=1, \quad n=3, 5, 7, \dots \quad (28.17)$$

Однако в случае $p=1$ имеется и другой вариант, именно тот, который был введен М. Риссом. Выделим в световом конусе K_+ положительный полуконус

$$K_+^\pm = \{x: x_1^2 \geq x_2^2 + \dots + x_n^2, \quad x_1 \geq 0\}, \quad (28.18)$$

называемый также *световым конусом будущего*, и обозначим

$$I_\square^\alpha \varphi = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{K_+^\pm} \frac{\varphi(x-y)}{r^{n-\alpha}(y)} dy, \quad \alpha > n-2, \quad (28.19)$$

подчеркивая связь оператора (28.19) с даламбертианом (волновым оператором) $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Здесь нормировочная постоянная $H_n(\alpha)$ будет выбрана в виде

$$H_n(\alpha) = \frac{\gamma_n(\alpha)}{2 \sin(n-\alpha)\pi/2} = 2^{\alpha-1} \pi^{-1+n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-n}{2}\right). \quad (28.20)$$

Потенциал (28.19) и называется *гиперболическим риссовым потенциалом*. Его можно записать также в виде

$$I_\square^\alpha \varphi = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{K_+^\pm(x)} \frac{\varphi(y) dy}{r^{n-\alpha}(x-y)}, \quad (28.21)$$

где

$$K_+^\pm(x) = \{y: (x_1-y_1)^2 \geq (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2, \quad x_1-y_1 \geq 0\}$$

есть отрицательный световой конус, смещенный вершиной в точку x .

Покажем, что оператор $I_\square^\alpha$ обладает полугрупповым свойством:

$$I_\square^\alpha I_\square^\beta \varphi = I_\square^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \square I_\square^{\alpha+2} \varphi = I_\square^\alpha \varphi \quad (28.22)$$

при выборе нормировочной постоянной по правилу (28.20). Вычислим предварительно потенциал Рисса от экспоненты e^{x_1} . Имеем при $\alpha > n-2$

$$I_\square^\alpha(e^{x_1}) = \frac{e^{x_1}}{H_n(\alpha)} \int_{K_+^\pm} e^{-y_1} r^{\alpha-n}(y) dy$$

и при выборе

$$H_n(\alpha) = \int_{K_+^\pm} e^{-y_1} r^{\alpha-n}(y) dy \quad (28.23)$$

получим

$$I_\square^\alpha(e^{x_1}) = e^{x_1}. \quad (28.24)$$

Вычисляя интеграл (28.23), имеем

$$H_n(\alpha) = \int_0^\infty e^{-y_1} dy_1 \int_{|\xi| < y_1} (y_1^2 - |\xi|^2)^{(\alpha-n)/2} d\xi, \quad \xi = (y_2, \dots, y_n) \in R^{n-1}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H_n(\alpha) &= \int_0^\infty y_1^{\alpha-1} e^{-y_1} dy_1 \int_{|\eta| < 1} (1 - |\eta|^2)^{(\alpha-n)/2} d\eta = \\ &= \Gamma(\alpha) |S_{n-2}| \int_0^1 (1 - \rho^2)^{(\alpha-n)/2} \rho^{n-2} d\rho, \end{aligned}$$

что после простых преобразований совпадает с (28.20).

Заметим, что из формулы (28.24) можно вывести более общее равенство

$$I_{\square}^{\alpha}(e^{a \cdot x}) = \frac{e^{a \cdot x}}{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\alpha/2}}, \quad (28.25)$$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in K_+^+, \quad a \cdot x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

(ср. с равенством (25.39)).

Равенство (28.24) и позволяет дать прямой вывод полугруппового свойства (28.22). Считая, что $\alpha > n-2$, $\beta > n-2$, имеем

$$I_{\square}^{\alpha} I_{\square}^{\beta} \varphi = \frac{1}{H_n(\alpha) H_n(\beta)} \int_{K_+^-(x)} r^{\alpha-n}(x-y) dy \int_{K_+^-(y)} r^{\beta-n}(y-\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Очевидно, $K_+^-(y) \subset K_+^-(x)$ для $y \in K_+^-(x)$. Поэтому после перестановки порядка интегрирования получаем

$$I_{\square}^{\alpha} I_{\square}^{\beta} \varphi = \frac{1}{H_n(\alpha) H_n(\beta)} \int_{K_+^-(x)} \varphi(\xi) d\xi \int_{D(x, \xi)} r^{\alpha-n}(x-y) r^{\beta-n}(y-\xi) dy, \quad (28.26)$$

где $D(x, \xi) = K_+^-(x) \cap K_+^+(\xi)$ (ввести характеристическую функцию конуса $K_+^-(y)$ при перестановке порядка интегрирования). С помощью сдвига по поверхности конуса и преобразования подобия получаем, что внутренний интеграл равен

$$r^{\alpha+\beta-n}(x-\xi) B_n(\alpha, \beta), \quad B_n(\alpha, \beta) = \int_{D(0, e_1)} r^{\alpha-n}(y) r^{\beta-n}(e_1-y) dy,$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

где интеграл $B_n(\alpha, \beta)$ есть константа. Поэтому из (28.26) заключаем, что

$$I_{\square}^{\alpha} I_{\square}^{\beta} \varphi = \frac{B_n(\alpha, \beta)}{H_n(\alpha) H_n(\beta)} H_n(\alpha + \beta) I_{\square}^{\alpha+\beta} \varphi. \quad (28.27)$$

Выбрав здесь $\varphi = e^{x_1}$, видим, что в силу формулы (28.24) необходимо должно выполняться равенство

$$B_n(\alpha, \beta) = H_n(\alpha) H_n(\beta) / H_n(\alpha + \beta)$$

(ср. с равенством (25.38)), что превращает (28.27) в первое из равенств (28.22). Второе получается непосредственной проверкой после дифференцирования под знаком интеграла.

Замечание 28.1. Преобразование Фурье гиперболического риссова потенциала $I_{\square}^{\alpha} \varphi$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{F}(I_{\square}^{\alpha} \varphi) = \frac{q}{|r(x)|^{\alpha}} \hat{\varphi}(x), \quad x \in R^n, \quad (28.28)$$

где $q = e^{\frac{\alpha \pi i}{2} \text{sign } x_1}$ при $r^2(x) > 0$ и $q = 1$ при $r^2(x) < 0$, $r^2(x) = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$.

Завершим этот пункт рассмотрением риссова гиперболического потенциала (28.21) в двумерном случае:

$$I_{\square}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{H_2(\alpha)} \int_{|x_2 - y_2| < x_1 - y_1} \frac{\varphi(y) dy_1 dy_2}{[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2]^{1-\alpha/2}}$$

или

$$I_{\square}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{H_2(\alpha)} \int_{|y_2| < y_1} \frac{\varphi(x-y) dy_1 dy_2}{(y_1^2 - y_2^2)^{1-\alpha/2}}, \quad x=(x_1, x_2), \quad y=(y_1, y_2). \quad (28.29)$$

Замена переменных $y_1 + y_2 = 2\xi_1$, $y_1 - y_2 = 2\xi_2$ приводит этот потенциал к лиувиллевскому дробному интегрированию по каждой переменной, рассмотренному в § 24:

$$\begin{aligned} I_{\square}^{\alpha} \varphi &= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha/2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(z_1 + z_2 - \xi_1 - \xi_2, z_1 - z_2 - \xi_1 + \xi_2)}{|\xi_1|^{1-\alpha/2} |\xi_2|^{1-\alpha/2}} d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha/2)} \int_{-\infty}^{z_1} \int_{-\infty}^{z_2} \frac{\varphi(s_1 + s_2, s_1 - s_2) ds_1 ds_2}{(z_1 - s_1)^{1-\alpha/2} (z_2 - s_2)^{1-\alpha/2}}, \end{aligned} \quad (28.30)$$

где $z_1 = (x_1 + x_2)/2$, $z_2 = (x_1 - x_2)/2$.

В операторной форме равенство (28.30) имеет вид

$$I_{\square}^{\alpha} \varphi = A^{-1} I_{++}^{\alpha/2, \alpha/2} A \varphi, \quad (28.31)$$

где A — оператор линейной замены независимых переменных, $(A\varphi)(x) = \varphi(x_1 + x_2, x_1 - x_2)$, а $I_{++}^{\alpha/2, \alpha/2}$ — оператор лиувиллевского дробного интегрирования (24.20).

Непосредственно из связи (28.31) и теоремы 24.1 о лиувиллевском интегрировании $I_{++}^{\alpha, \beta}$ вытекает следующая

Теорема 28.1. Пусть $n=2$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq r < \infty$. Оператор $I_{\square}^{\alpha}$ ограничен из $L_p(R^2)$ в $L_r(R^2)$ тогда и только тогда, когда

$$0 < \alpha < 2, \quad 1 < p < 2/\alpha, \quad r = 2p/(2 - \alpha p).$$

2°. Параболические потенциалы. Рассмотрим в этом пункте отрицательные дробные степени оператора теплопроводности (28.2). Нам будет удобно выделить последнюю (временную) переменную, обозначив ее через t , а пространственные переменные через $x_1, \dots, x_n$, т. е. вести рассмотрение в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве R^{n+1} точек (x, t) , где $x \in R^n$, $t \in R^1$. Речь пойдет об отрицательной дробной степени оператора

$$T = -\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (28.32)$$

где Δ_x — лапласиан, применяемый по переменным $x_1, \dots, x_n$. Действие оператора (28.32) в образах Фурье имеет вид

$$\widehat{T\varphi} = (|x|^2 - it) \widehat{\varphi}(x, t), \quad (28.33)$$

где преобразование Фурье применяется по R^{n+1} :

$$(\mathcal{F}\varphi)(x, t) = \widehat{\varphi}(x, t) = \int_{R^{n+1}} e^{ix \cdot \xi + it\tau} \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (28.34)$$

Поэтому отрицательную дробную степень $T^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, естественно ввести в образах Фурье с помощью функции $(|x|^2 - it)^{-\alpha/2}$ (с выбором главного значения: $\arg(|x|^2 - it) \in (-\pi/2, \pi/2)$). Прообраз Фурье такой функции будет записываться в терминах ядра Гаусса — Вейерштрасса:

$$W(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4t)}, \quad t > 0. \quad (28.35)$$

Введем функцию

$$h_\alpha(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \begin{cases} t^{-1+\alpha/2} W(x, t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (28.36)$$

Лемма 28.1. Преобразование Фурье (28.34) функции $h_\alpha(x, t)$ равно:

$$\hat{h}_\alpha(x, t) = (|x|^2 - it)^{-\alpha/2}, \quad \alpha > 0. \quad (28.37)$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой:

$$\begin{aligned} & \int_{R^{n+1}} h_\alpha(\xi, \tau) e^{ix \cdot \xi + i\tau} d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{n/2} \Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha-n}{2}-1} e^{i\tau} d\tau \int_{R^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\tau} + ix \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл есть произведение легко вычисляемых одномерных интегралов, так что довести до конца проверку формулы (28.37) не составляет затруднений при малых $\alpha > 0$, после чего нужно воспользоваться аналитическим продолжением по α .

Лемма 28.1 позволяет ввести отрицательную дробную степень оператора теплопроводности T в виде следующей свертки:

$$\begin{aligned} T^{-\alpha/2} \varphi &= H^\alpha \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R^{n+1}} h_\alpha(\xi, \tau) \varphi(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_{R_+^{n+1}} \tau^{-1+\alpha/2} W(\xi, \tau) \varphi(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau \end{aligned} \quad (28.38)$$

или в явной записи

$$H^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2) (4\pi)^{n/2}} \int_{R_+^{n+1}} \tau^{-1+(\alpha-n)/2} e^{-|\xi|^2/4\tau} \varphi(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau, \quad (28.39)$$

где R_+^{n+1} — полупространство $\{(x, t) : x \in R^n, t > 0\}$.

Оператор (28.39) и называется *параболическим потенциалом*.

Если ввести еще обозначение

$$(W_\tau \varphi)(x, t) = (4\pi\tau)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-|\xi|^2/4\tau} \varphi(x - \xi, t) d\xi \quad (28.40)$$

для оператора Гаусса — Вейерштрасса, то оператор H^α можно переписать, как это следует из (28.38), в виде

$$(H^\alpha \varphi)(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \tau^{\alpha/2-1} (W_\tau \varphi)(x, t - \tau) d\tau \quad (28.41)$$

(ср. с формулой (25.51) для риссова потенциала).

Оператор H^α определен при любом $\alpha > 0$ на достаточно широком классе функций, например на функциях $\varphi(x, t)$, ограниченных и убывающих по t при $t \rightarrow \infty$ так, что $|\varphi(x, t)| \leq c(1 + |t|)^a$, $a > \alpha/2$. В этом можно убедиться непосредственно. Существование параболических потенциалов от функций из $L_p(R^{n+1})$ отражено в следующей теореме.

Теорема 28.2. Интеграл $H^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, где $\varphi \in L_p(R^{n+1})$, абсолютно сходится при $0 < \alpha < n + 2$ и $1 \leq p < (n + 2)/\alpha$, при этом оператор H^α ограничен из $L_p(R^{n+1})$ в $L_q(R^{n+1})$, где $1 < p < (n + 2)/\alpha$, $q = (n + 2)p/(n + 2 - \alpha p)$.

Мы не приводим доказательства этой теоремы, см. литературные ссылки в § 29.

Подобно пространствам $I^\alpha(L_p)$ риссовых потенциалов и пространствам $G^\alpha(L_p)$ бесселевых потенциалов вводятся пространства

$$H^\alpha(L_p) = \{f: f = H^\alpha \varphi, \varphi \in L_p(R^{n+1})\} \quad (28.42)$$

параболических потенциалов. Эти пространства определены, согласно теореме 28.2, при $1 \leq p < (n+2)/\alpha$. В следующем пункте укажем описание пространств $H^\alpha(L_p)$ в терминах сходимости некоторых интегралов типа гиперсингулярных.

Пространства (28.42) можно изучать и в случае функций $f(x)$, рассматриваемых в полупространстве R_+^{n+1} .

Отметим, наконец, что можно аналогично изложенному рассмотреть отрицательную дробную степень дифференциального оператора $E - \Delta_x + \partial/\partial t$, где E — единичный оператор. В образах Фурье будем иметь тогда дело с функцией

$$(1 + |x|^2 - it)^{-\alpha/2}, \quad (28.43)$$

так что вводимая на этом пути дробная степень

$$\left(E - \Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{-\alpha/2}, \quad (28.44)$$

т. е. соответствующий потенциал, будет соотноситься с уже рассмотренным параболическим потенциалом $H^\alpha \varphi$ так же, как бесселев потенциал $G^\alpha \varphi$ соотносится с риссовым потенциалом $I^\alpha \varphi$. Дробная степень (28.44) реализуется как свертка с прообразом Фурье функции (28.43) и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\alpha \varphi &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)(4\pi)^{n/2}} \int_{R_+^{n+1}} \tau^{\frac{\alpha-n}{2}-1} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4\tau}-\tau} \varphi(x-\xi, t-\tau) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty \tau^{-1-\alpha/2} e^{-\tau} (W_\tau \varphi)(x, t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (28.45)$$

(ср. с представлением (27.20) для бесселева потенциала).

Оператор (28.45) также называют *параболическим потенциалом*. За счет дополнительного множителя $e^{-\tau}$ по сравнению с (28.39) он имеет существенно более широкую область определения, нежели потенциал (28.39), и, в частности, ограничен во всех пространствах $L_p(R^{n+1})$, $1 \leq p < \infty$. Об операторе (28.45) см. также в § 29, п. 2°.

3°. Реализация дробных степеней $\left(-\Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha/2}$ и $\left(E - \Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha/2}$, $\alpha > 0$, в виде гиперсингулярного интеграла. В этом пункте строятся гиперсингулярные интегралы $T^\alpha f$ и $\mathcal{T}^\alpha f$, $\alpha > 0$, обратные к параболическим потенциалам $f = H^\alpha \varphi$ и $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$, определенным равенствами (28.39), (28.45). Поэтому эти гиперсингулярные интегралы естественно назвать параболическими гиперсингулярными интегралами. Они будут содержать конечные разности нестандартного вида, учитывающие разное поведение потенциалов по пространственной переменной x и временной переменной t .

Изложим вначале схему формального построения операторов T^α , $\mathcal{T}^\alpha$, $\alpha > 0$, обратных к потенциалам H^α , $\mathcal{H}^\alpha$, а затем покажем, что построенные операторы действительно обращают соответствующие потенциалы. Ниже

будем широко использовать ядро Гаусса — Вейерштрасса (28.35), обладающее следующими свойствами (см. И. Стейн, Г. Вейс [1, с. 16, 24]):

$$\int_{R^n} W(x, t) dx = 1, \quad (28.46)$$

$$\int_{R^n} W(y, t) W(x - y, \tau) dy = W(x, t + \tau), \quad (28.47)$$

$$(\mathcal{F}_x W)(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2}, \quad (28.48)$$

где

$$(\mathcal{F}_x \varphi)(\xi, t) = \int_{R^n} \varphi(x, t) e^{i\xi \cdot x} dx \quad (28.49)$$

означает преобразование Фурье по пространственной переменной x .

Пусть $f(x, t) = (H^\alpha \varphi)(x, t)$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{F}_x$ с учетом (28.48), получаем

$$I_+^{\alpha/2} e^{\eta|\xi|^2} (\mathcal{F}_x \varphi)(\xi, \eta)(t) = (\mathcal{F}_x f)(\xi, t) e^{t|\xi|^2}, \quad (28.50)$$

где $I_+^{\alpha/2}$ — оператор одномерного дробного интегрирования (5.4), примененный по переменной η . Обращая в (28.50) оператор $I_+^{\alpha/2}$ с помощью дробной производной Маршо (5.80), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} e^{t|\xi|^2} (\mathcal{F}_x \varphi)(\xi, t) = \\ = \frac{1}{\kappa(\alpha/2, l)} \int_0^\infty \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k (\mathcal{F}_x f)(\xi, t - k\eta) e^{(t-k\eta)|\xi|^2} \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}}, \end{aligned} \quad (28.51)$$

из которого после умножения на $e^{-t|\xi|^2}$ и применения оператора $\mathcal{F}_\xi^{-1}$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = \frac{1}{\kappa(\alpha/2, l)} \int_0^\infty \left[f(x, t) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_{R^n} f(x - y, t - k\eta) W(y, k\eta) dy \right] \frac{d\eta}{\eta^{1+\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда после замены $y \rightarrow V\bar{k}y$ и несложных преобразований имеем

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\kappa(\alpha/2, l)} \int_{R_+^{n+1}} \frac{(\Delta_{y, \eta}^l f)(x, t)}{\eta^{1+\alpha/2}} W(y, \eta) dy d\eta \stackrel{\text{def}}{=} T^\alpha f, \quad (28.52)$$

где

$$(\Delta_{y, \eta}^l f)(x, t) = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} f(x - V\bar{k}y, t - k\eta). \quad (28.53)$$

Таким образом, мы построили обратный оператор $T^\alpha = (H^\alpha)^{-1}$ в виде гиперсингулярного интеграла (28.52).

Аналогичные рассуждения применительно к уравнению $\mathcal{H}^\alpha \varphi = f(x, t)$ приводят к следующему выражению для $\varphi(x, t)$ в виде гиперсингулярного интеграла:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = \frac{1}{\kappa(\alpha/2, l)} \int_{R_+^{n+1}} \frac{(\Delta_{y, \eta}^l f)(x, t; e^{-\eta})}{\eta^{1+\alpha/2}} W(y, \eta) dy d\eta = \\ = \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{T}^\alpha f)(x, t), \end{aligned} \quad (28.54)$$

где использована взвешенная разность типа (28.53):

$$(\Delta_{y,\eta}^l f)(x, t; e^{-\eta}) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-1)^k e^{-k\eta} f(x - \sqrt{k}y, t - k\eta) \quad (28.55)$$

(взвешенные разности уже встречались у нас в эллиптическом случае, см. (27.56)).

Нетрудно показать, что интегралы в (28.52), (28.54) сходятся условно для $f \in S(R^{n+1})$ в каждой точке (x, t) , если их понимать следующим образом:

$$T^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon^\alpha f)(x, t), \quad \mathfrak{T}^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathfrak{T}_\varepsilon^\alpha f)(x, t), \quad (28.56)$$

где $T_\varepsilon^\alpha f$, $\mathfrak{T}_\varepsilon^\alpha f$ — усеченные интегралы (28.52), (28.54) с интегрированием по сдвинутому полупространству $R_{+, \varepsilon}^{n+1} = \{(y, \eta) : y \in R^n, \eta > \varepsilon\}$.

Покажем, что гиперсингулярные интегралы $T^\alpha f$, $\mathfrak{T}^\alpha f$ при указанном в (28.56) их понимании обращают соответствующие потенциалы $f = H^\alpha \varphi$, $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$ в рамках пространств $\Phi = \Phi(R^{n+1})$ и $S = S(R^{n+1})$, инвариантных для операторов H^α и $\mathcal{H}^\alpha$ соответственно.

Теорема 28.3. Пусть $f = H^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in \Phi$. Тогда $T^\alpha f \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^\alpha f = \varphi$.

Доказательство. Будем основываться на представлении

$$T_\varepsilon^\alpha f = \int_{R_+^{n+1}} W(y, \eta) \mathcal{K}_{l, \alpha}(\eta) \varphi(x - \sqrt{\varepsilon}y, t - \varepsilon\eta) dy d\eta, \quad (28.57)$$

где $\mathcal{K}_{l, \alpha}(\eta)$ — ядро (6.7'). В силу (6.8') и (28.46)

$$W(y, \eta) \mathcal{K}_{l, \alpha}(\eta) \in L_1(R^{n+1}), \quad \int_{R^{n+1}} W(y, \eta) \mathcal{K}_{l, \alpha}(\eta) d\eta = 1. \quad (28.58)$$

Докажем (28.57). Подставляя выражение для разности

$$(\Delta_{y,\eta}^l f)(x, t) = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_{R_+^{n+1}} h_\alpha(z - \sqrt{k}y, \zeta - k\eta) \varphi(x - z, t - \zeta) dz d\zeta,$$

где $h_\alpha(x, t)$ — ядро (28.36), в интеграл $T_\varepsilon^\alpha f$ и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^\alpha f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2) \kappa(\alpha/2, l)} \int_{R^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\zeta - k\eta)_+^{\alpha/2-1}}{\eta^{1+\alpha/2}} d\eta \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{R^n} W(y, \eta) W(z - \sqrt{k}y, \zeta - k\eta) \right] \varphi(x - z, t - \zeta) dz d\zeta. \end{aligned}$$

Производя замену $y \rightarrow y/\sqrt{k}$, $k \neq 0$, и замечая, что $W(y/\sqrt{k}, \eta) = k^{n/2} \times \times W(y, k\eta)$, в силу полугруппового свойства (28.47) ядра Гаусса — Вейерштрасса получим

$$\begin{aligned} T_\varepsilon^\alpha f &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2) \kappa(\alpha/2, l)} \int_{R^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\zeta - k\eta)_+^{\alpha/2-1}}{\eta^{1+\alpha/2}} d\eta \right] \times \\ &\quad \times W(z, \zeta) \varphi(x - z, t - \zeta) dz d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда, делая замены $\zeta \rightarrow \varepsilon/\zeta$, $\eta \rightarrow \varepsilon\eta$, приходим после простых вычислений к (28.57).

Свойства (28.58) дают возможность перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ под знаком интеграла в (28.57). В результате получаем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^\alpha f = \varphi$, что и требовалось.

Теорема 28.4. Пусть $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in S$. Тогда $\mathfrak{I}^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{I}_\varepsilon^\alpha f = \varphi$.

Утверждение теоремы получается предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$ в соотношении

$$\mathfrak{I}_\varepsilon^\alpha f = \int_{R_+^{n+1}} W(y, \eta) \mathcal{H}_{1,\alpha}(\eta) e^{-\varepsilon\eta} \varphi(x - V\varepsilon y, t - \varepsilon\eta) dy d\eta,$$

которое доказывается аналогично (28.57).

Гиперсингулярные интегралы $T^\alpha f$, $\mathfrak{I}^\alpha f$ являются обратными к потенциалам $f = H^\alpha \varphi$, $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$ и для $\varphi \in L_p$, если их понимать как пределы по L_p -норме соответствующих усеченных интегралов.

Теорема 28.5. Пусть $0 < \alpha < (n+2)/p$, $1 < p < \infty$, $f = H^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$. Тогда

$$T^\alpha f = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} T_\varepsilon^\alpha f = \varphi. \quad (28.59)$$

Доказательство. Равенство (28.57), справедливое для $\varphi \in \Phi$, распространяется и на функции $\varphi \in L_p$ с учетом ограниченности оператора $T_\varepsilon^\alpha H^\alpha$ и оператора, стоящего в правой части равенства (28.57), из L_p в L_q , $q = (n+2)p/(n+2-\alpha p)$ (этот факт вытекает из теоремы 28.2 в силу того, что $|\mathcal{H}_{1,\alpha}(y, \eta)| \leq c\eta^{-1+\alpha/2}$). Переходя в (28.57) к пределу по L_p -норме, получаем (28.59).

Аналогично доказывается

Теорема 28.6. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$ и $f = \mathcal{H}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$. Тогда

$$\mathfrak{I}^\alpha f = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} \mathfrak{I}_\varepsilon^\alpha f = \varphi.$$

4°. Пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных. Ранее в § 24 были введены смешанные интегралы и производные дробного порядка. Областью интегрирования таких операторов является прямоугольный параллелепипед с противоположными вершинами $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $a = (a_1, \dots, a_n)$, в частности, это может быть октант с вершиной x . Ядра этих операторов допускают особенности на тех гранях параллелепипеда, которые проходят через точку x . Теперь в качестве области интегрирования возьмем некоторую пирамиду с вершиной в точке x и основанием, лежащим на фиксированной (не зависящей от x) гиперплоскости, а в ядре будем допускать особенности на боковых гранях этой пирамиды, которые лежат на гиперплоскостях, проходящих через точку x . В результате возникнут так называемые пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных, которые, как показывается ниже, имеют существенные отличия и не сводятся к рассмотренным в § 24 смешанным дробным интегралам и производным. Для сравнения проиллюстрируем указанные области интегрирования смешанных дробных интегралов и производных и их пирамидальных аналогов в двумерном случае $n=2$ (см. рис. 4 и 5).

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные термины и обозначения. Пусть $A = \|a_{jk}\|$ ($a_{jk} \in R^1$) — матрица порядка $n \times n$ с определителем $|A| = \det A \neq 0$, вектор-строки которой обозначим через $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения

общности положим $|A|=1$. Пусть еще $A \cdot x = (a_1 \cdot x, \dots, a_n \cdot x)$, $(A \cdot x)^\alpha = (a_1 \cdot x)^{\alpha_1} \dots (a_n \cdot x)^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, и $b = (b_1, \dots, b_n) \in R^n$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$, $-\infty < b_j, c_j < \infty$. Обозначим через

$$A_c(b) = \{t \in R^n: A \cdot (b - t) \geq 0, c \cdot t \geq 0\} \quad (28.60)$$

n -мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке b , с основанием на гиперплоскости $c \cdot t = 0$ и с боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $a_j \cdot (b - t) = 0$, $j = 1, \dots, n$. В частности, когда $A = E = \|\delta_{jk}\|$ —

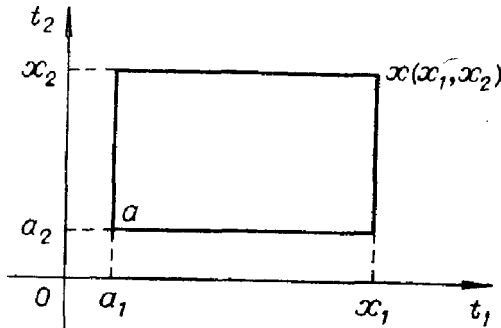


Рис. 4. Область интегрирования интеграла $I_{a+\varphi}^\alpha$

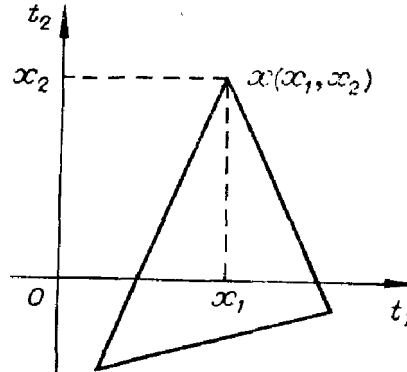


Рис. 5. Область интегрирования интеграла $I_{A_c}^\alpha \varphi$

единичная матрица, а $c = 1 = (1, \dots, 1)$, то (28.60) является простейшей модельной пирамидой вида

$$E_1(b) = \{t \in R^n: b \geq t, t \cdot 1 \geq 0\}. \quad (28.61)$$

При $n=2$ она совпадает с треугольником, ограниченным прямыми $t_1 = b_1$, $t_2 = b_2$ и $t_1 + t_2 = 0$ (рис. 6).

Соответствующее уравнение типа Абеля, которое будет отвечать указанным выше пирамидальным аналогам смешанных дробных интегралов (см. (28.65)), является обобщением уравнения, рассмотренного С. Г. Михлиным [1, с. 48].

Следующие ниже утверждения содержат условия непустоты и ограниченности пирамиды (28.60), а также формулу перестановки порядка интегрирования, аналогичную формуле Дирихле (1.32).

Лемма 28.2. Пусть $A_c(b)$ — пирамида (28.60). Для того чтобы пирамида $A_c(b)$ была непустой (ограниченной) в R^n , необходимо и достаточно, чтобы $A^{-1}c \cdot b > 0$ (соответственно $A^{-1}c > 0$).

Доказательство вытекает из того факта, что при линейном преобразовании $t \rightarrow A^{-1}t$, $b \rightarrow A^{-1}b$ пирамида $A_c(b)$ переходит в пирамиду

$$A_d(b) = \{t \in R^n: b \geq t, d \cdot t \geq 0\}, \quad d = A^{-1}c. \quad (28.62)$$

Лемма 28.3. Если функция $f(t, \tau)$, определенная на $A_c(b) \times A_c(b)$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:

$$\int_{A_c(b)} dt \int_{A_c(t)} f(t, \tau) d\tau = \int_{A_c(b)} d\tau \int_{\sigma(b, \tau)} f(t, \tau) dt, \quad (28.63)$$

где

$$\sigma(b, \tau) = \{t \in R^n: A \cdot \tau \leq A \cdot t \leq A \cdot b\}, \quad (28.64)$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (28.63) сходится абсолютно.

Доказательство получается непосредственно из теоремы Фубини 1.1.

В пирамиде $A_c(b)$ рассмотрим теперь интегральное уравнение типа Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_c(x)} \frac{\varphi(t) dt}{(A \cdot (x - t))^{1-\alpha}} = f(x), \quad x \in A_c(b), \quad (28.65)$$

где $0 < \alpha < 1$ (что означает $0 < \alpha_1 < 1, \dots, 0 < \alpha_n < 1$), $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)$ и $x < b$ (т. е. $x_1 < b_1, \dots, x_n < b_n$).

В частности, при $A_c(b) = E_1(b)$ уравнение (28.65) принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(x)} \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f_1(x), \quad x \in E_1(b), \quad (28.66)$$

который не совпадает с многомерным уравнением Абеля (24.1). Таким образом, уравнение (24.1) не является частным случаем (28.65). Тем не

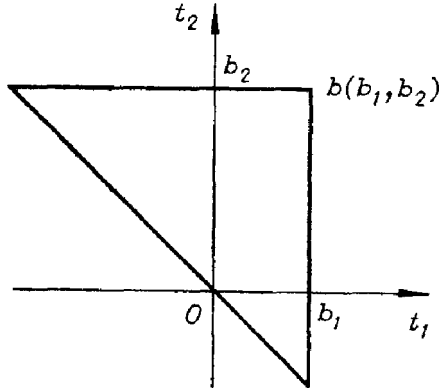


Рис. 6. Область интегрирования интеграла $I_{E_1}^\alpha \varphi$

менее для обращения уравнения (28.65) применим метод, использованный в § 2, п. 1°. Следуя ему, заменим в (28.65) t на τ , x на t , умножим обе части полученного равенства на $(A \cdot (x-t))^{-\alpha}$ и проинтегрируем по пирамиде $A_c(x)$, применив лемму 28.3:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_c(x)} \varphi(\tau) d\tau \int_{\sigma(x,\tau)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} \times \\ \times (A \cdot (t-\tau))^{\alpha-1} dt = \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} f(t) dt \quad (28.67)$$

область $\sigma(x, \tau)$ см. в (28.64)). Для вычисления внутреннего интеграла в (28.67) введем новые переменные $s_j = [a_j \cdot (x-t)]/[a_j \cdot (x-\tau)]$ и примем во внимание равенства $1-s_j = [a_j \cdot (t-\tau)]/[a_j \cdot (x-\tau)]$, а также формулы (1.68), (1.69). Тогда получим

$$\int_{\sigma(x,\tau)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} (A \cdot (t-\tau))^{\alpha-1} d\tau = \prod_{j=1}^n \int_0^1 s_j^{-\alpha_j} (1-s_j)^{\alpha_j-1} ds_j = \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha). \quad (28.68)$$

Следовательно, равенство (28.67) переписывается в виде

$$\int_{A_c(x)} \varphi(t) dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} f(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} f_{1-\alpha}(x). \quad (28.69)$$

Совершим еще замену переменных

$$t = A^{-1} \cdot \frac{\tau}{d}, \quad x = A^{-1} \cdot \frac{y}{d}, \quad \frac{x}{d} = \left(\frac{x_1}{d_1}, \dots, \frac{x_n}{d_n} \right), \quad (28.70)$$

где $d = (d_1, \dots, d_n)$ выражается формулой (28.62). Тогда в силу леммы 28.2

$$\int_{E_1(y)} \psi(\tau) d\tau = g(y), \quad (28.71)$$

где $E_1(y)$ — пирамида (28.61), а

$$\psi(\tau) = \varphi\left(A^{-1} \cdot \frac{\tau}{d}\right), \quad g(y) = f_{1-\alpha}\left(A^{-1} \cdot \frac{y}{d}\right) \prod_{k=1}^n d_k. \quad (28.72)$$

Для обращения уравнения (28.71) перепишем его в виде

$$\int_{-(y_1+\dots+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int_{-(y_1+\dots+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} \cdots \int_{-(\tau_2+\dots+\tau_n)}^{y_1} \psi(\tau) d\tau = g(y). \quad (28.73)$$

Продифференцировав это равенство последовательно по $y_n, y_{n-1}, \dots, y_1$, придем к соотношению

$$\psi(y) = \frac{\partial^n}{\partial y_1 \dots \partial y_n} g(y).$$

В последнем осуществим аналогичную (28.70) замену $x = A^{-1} \cdot \frac{y}{d}$, согласно которой

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{a_{jk}^{-1}}{d_k} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (28.74)$$

Тогда окончательно получим следующую формулу обращения уравнения (28.65):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} f(t) dt. \quad (28.75)$$

В частности, при $A_c(b) = E_1(b)$ решение (28.75) принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{E_1(x)} (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \quad (28.76)$$

где $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Осуществим теперь обоснование решения уравнения (28.65) в классе $L_1(A_c(b))$. Для этого введем обозначение

$$I_{A_c}(L_1) = \{g: g(x) = \int_{A_c(x)} h_i^*(t) dt, \quad h_i(t) \in L_1(A_c(b))\} \quad [(28.77)]$$

и заметим, что если $g \in I_{A_c}(L_1)$, то почти всюду на $A_c(b)$ существуют частные производные функции g до порядка n , причем

$$\prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g(x) = h(x). \quad (28.78)$$

Аналогом теоремы 2.1 здесь является следующая

Теорема 28.7. Для того чтобы уравнение типа Абеля (28.65) было разрешимым в $L_1(A_c(b))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{1-\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} f(t) dt \in I_{A_c}(L_1), \quad (28.79)$$

$$\begin{aligned} f_{1-\alpha}(x)|_{c \cdot x=0} &= \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jn} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{1-\alpha}(x)|_{c \cdot x=0} = \dots = \\ &= \prod_{k=2}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f_{1-\alpha}(x)|_{c \cdot x=0} = 0. \end{aligned} \quad (28.80)$$

При выполнении этих условий уравнение (28.65) имеет единственное решение, определяемое формулой (28.75).

Доказательство. В модельном случае $A_c(b) = E_1(b)$ утверждение теоремы вытекает из (28.71), (28.73). В случае произвольной пирамиды $A_c(b)$ оно получается из (28.71), (28.73) после замены переменных (28.70) с учетом (28.74).

Следствие. Для того чтобы уравнение (28.66) было разрешимо в $L_1(E_1(b))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(x)} (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \in I_{E_1}(L_1), \quad (28.81)$$

$$\left. f_{1-\alpha}(x) \right|_{1 \cdot x=0} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left. f_{1-\alpha}(x) \right|_{1 \cdot x=0} = \dots = \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n} \left. f_{1-\alpha}(x) \right|_{1 \cdot x=0} = 0. \quad (28.82)$$

При выполнении этих условий уравнение (28.66) имеет единственное решение, выражаемое формулой (28.76).

Теорема 28.7 дает необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (28.65) в терминах вспомогательной функции $f_{1-\alpha}(x)$. Простые достаточные условия в терминах самой функции $f(x)$ устанавливает следующая

Теорема 28.8. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, причем

$$\mathcal{D}^{\beta} f(x)|_{c \cdot x=0} = 0, \quad 0 \leq |\beta| \leq n-1. \quad (28.83)$$

Тогда уравнение (28.65) разрешимо и его единственное решение представимо в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial t_j} \right) f(t) dt. \quad (28.84)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай модельного уравнения (28.66). Представим $f_{1-\alpha}(x)$ так же, как в (28.73), в виде

$$\begin{aligned} f_{1-\alpha}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(x)} (x-t)^{-\alpha} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-(x_1+\dots+x_{n-1})}^{x_n} (x_n-t_n)^{-\alpha} dt_n \int_{-(x_1+\dots+x_{n-2}+t_n)}^{x_{n-1}} (x_{n-1}- \\ &\quad -t_{n-1})^{-\alpha_{n-1}} dt_{n-1} \dots \int_{-(t_2+\dots+t_n)}^{x_1} (x_1-t_1)^{-\alpha_1} f(t) dt. \end{aligned}$$

Осуществляя последовательно интегрирование по частям и учитывая условия (28.83) теоремы, имеем

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(x)} \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} dt. \quad (28.85)$$

Для функции (28.85) выполняются условия (28.81), (28.82). Первое условие очевидно, а второе проверяется последовательным дифференцированием (28.85) по $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$. Отсюда в силу следствия из теоремы 28.7 получаем утверждение теоремы для модельного уравнения (28.66). Случай общего уравнения (28.65) сводится к модельному с помощью замены (28.70). Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, причем

$$\mathcal{D}^{\beta} f(x)|_{1 \cdot x=0} = 0, \quad 0 \leq |\beta| \leq n-1, \quad (28.86)$$

то уравнение (28.66) имеет единственное решение, представимое формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{E_1(x)} (x-t)^{-\alpha} \frac{\partial^n f(t)}{\partial t_1 \dots \partial t_n} dt. \quad (28.87)$$

З а м е ч а н и е 28.2. Уравнение (28.71) является примером интегральных уравнений первого рода, возникающих в задачах интегральной геометрии, когда по заданным интегралам функции по некоторым множествам требуется восстановить саму функцию (см., например, монографию И. М. Гельфанда, М. И. Граева, Н. Я. Виленина [1, с. 111]).

Исходя из соотношений (28.65) и (28.75), введем операторы

$$(I_{A_c}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{A_c(x)} \frac{\varphi(t) dt}{(A \cdot (x-t))^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (28.88)$$

$$(\mathcal{D}_{A_c}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \int_{A_c(x)} \frac{f(t) dt}{(A \cdot (x-t))^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (28.89)$$

которые будем называть *пирамидальными аналогами смешанных дробных интегралов и производных Римана — Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$* (ср. с (24.5) и (24.9)). Выражения (28.88) и (28.89) определены на функциях, заданных на $A_c(b)$.

Теоремы 28.7 и 28.8 содержат условия существования смешанной дробной производной (28.89). В частности, если функция f имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно, удовлетворяющие условию (28.83), то дробная производная (28.89) представима в виде

$$(\mathcal{D}_{A_c}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{A_c(x)} (A \cdot (x-t))^{-\alpha} \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{jk} \frac{\partial}{\partial t_j} \right) f(t) dt. \quad (28.90)$$

С помощью формулы (28.67) можно проверить выполнение полугруппового свойства

$$I_{A_c}^\alpha I_{A_c}^\beta \varphi = I_{A_c}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad (28.91)$$

для любой функции $\varphi \in L_1(A_c(b))$ (здесь $I_{A_c}^0 \varphi = \varphi$, $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$).

Простейшими операторами вида (28.88), (28.89) являются следующие:

$$(I_{E_1}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{E_1(x)} \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (28.92)$$

$$(\mathcal{D}_{E_1}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_{E_1(x)} \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (28.93)$$

Будем их называть *модельными пирамидальными аналогами смешанных дробных интегралов и производных Римана — Лиувилля порядка α* . Если $\alpha_k > 1$, то подобно (24.10) модельные пирамидальные аналоги смешанных дробных производных введем равенствами

$$(\mathcal{D}_{E_1}^\alpha f)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{[\alpha]+1} (I_{E_1}^{\alpha-[\alpha]-1} f)(x), \quad \alpha > 0, \quad (28.94)$$

где $[\alpha] = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_n])$, $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{[\alpha]} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{[\alpha_1]} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{[\alpha_n]}$.

В дальнейшем будем рассматривать операторы (28.92) — (28.94).

Пример 28.1. Пусть $\varphi(t) = (t_1 + \dots + t_n)^{\beta-1}$, $\alpha > 0$. Тогда

$$(I_{E_1}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(|\alpha| + \beta)} (x_1 + \dots + x_n)^{|\alpha| + \beta - 1}, \quad \beta > 0, \quad (28.95)$$

$$(\mathcal{D}_{E_1}^\alpha \varphi)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - |\alpha|)} (x_1 + \dots + x_n)^{\beta - |\alpha| - 1}, \quad \beta > |\alpha|, \quad (28.96)$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Этот пример показывает, что модельные пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных (28.92) и (28.94) сохраняют степенное поведение на гиперплоскости $x_1 + \dots + x_n = 0$, являющейся основанием пирамиды $E_1(x)$. В отличие от этого смешанные дробные интегралы и производные (24.5) и (24.9) сохраняют степенное поведение на гиперплоскостях $x_k = a_k$, $k = 1, \dots, n$, поскольку

$$(I_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (28.97)$$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \beta > \alpha. \quad (28.98)$$

Подобно (24.6) и (24.9), можно ввести модельные пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных по части переменных. Пусть

$$x = (x', x''), \quad x' = (x_1, \dots, x_m), \quad x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n), \\ \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, \dots, 0), \quad (28.99)$$

$$E_1'(x) = \{t \in R^n : t' \leq x', t'' = x'', t' \cdot 1 + x'' \cdot 1 \geq 0\}.$$

Тогда положим

$$(I_{E_1'}^{\alpha'} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha')} \int_{E_1'(x)} (x' - t')^{\alpha'-1} \varphi(t', x'') dt', \quad \alpha' > 0, \quad (28.100)$$

$$(\mathcal{D}_{E_1'}^{\alpha'} f)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{[\alpha'+1]} (I_{E_1'}^{\alpha'-[\alpha'+1]} f)(x), \quad \alpha' > 0, \quad (28.101)$$

где $[\alpha'] = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_m], 0, \dots, 0)$. В частности, если $x'' = (x_2, \dots, x_n)$, то (28.100), (28.101) при фиксированном x'' совпадают с одномерными дробными интегралами (2.17) и производными (2.29):

$$(I_{E_1'}^{\alpha'} \varphi)(x) = (I_{-(x_2+\dots+x_n)}^{\alpha_1} \varphi(t', x''))(x'), \quad (28.102)$$

$$(\mathcal{D}_{E_1'}^{\alpha'} f)(x) = (\mathcal{D}_{-(x_2+\dots+x_n)}^{\alpha_1} f(t', x''))(x'). \quad (28.103)$$

Проведенные рассуждения показывают, что пирамидальные аналоги смешанных дробных интегралов и производных являются специфическими объектами, отличными от смешанных дробных интегралов и производных. В частности, их нельзя представить в виде тензорного произведения одномерных дробных интегралов. Тем не менее некоторые свойства одномерных дробных интегралов и производных переносятся и на такие операторы. Так, справедлив индексный закон (28.91). Имеет место и аналог теоремы Харди—Литтлвуда 5.3. Для его формулировки ограничимся так же, как и в § 24, п. 4°, случаем двух переменных.

Введем пространство $L_{p_1, p_2}(E_1(b))$ функций $f(x_1, x_2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_{\vec{p}}(E_1)} = \left\{ \int_{-b_1}^{b_1} \left[\int_{-x_2}^{b_2} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right\}^{1/p_2} < +\infty, \quad \vec{p} = (p_1, p_2). \quad (28.104)$$

Следствием теоремы 24.1 является следующая

Теорема 28.9. Если $1 < p_j < 1/\alpha_j$, $1/q_j = 1/p_j - \alpha_j$, $j = 1, 2$, то оператор пирамидального аналога (28.92) смешанного дробного интеграла ограничен из $L_{p_1, p_2}(E_1(b))$ в $L_{q_1, q_2}(E_1(b))$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) \in L_{p_1, p_2}(E_1(b))$. Доопределим нулем функцию $\varphi(t_1, t_2)$ с треугольника $E_1(b)$ (см. рис. 3) на прямоугольник $\Pi(b) = \{(t_1, t_2) \in R^2 : -b_2 < t_1 < b_1, -b_1 < t_2 < b_2\}$. Пусть $\chi_{E_1(b)} \varphi =$

$= \{\varphi, x \in E_1(b); 0, x \in \Pi(b) \setminus E_1(b)\}$ — характеристическая функция треугольника $E_1(b)$. Применяя теперь теорему 24.1, получаем $\|I_{E_1}^\alpha \varphi\|_{L_q^-(E_1)} = \|I_{-b_2, -b_1}^{\alpha_1, \alpha_2} \chi_{E_1(b)} \varphi\|_{L_q^-(E_1)} \leq \|I_{-b_2, -b_1}^{\alpha_1, \alpha_2} \chi_{E_1(b)} \varphi\|_{L_q^-(\Pi)} \leq c \|\chi_{E_1(b)} \varphi\|_{L_p^-(\Pi)} = c \|\varphi\|_{L_p^-(E_1)}$. Теорема доказана.

§ 29. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 5

1°. Исторические сведения. К § 24, п. 1°. Решение многомерного уравнения Абеля (24.1) следует считать давно известным (естественно предположить, что оно было известно еще Х. Хольмгрёну (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 гг.), см. ниже примечания к п. 2°), хотя в ранних публикациях оно не давалось. Укажем, что уравнение (24.1) решалось с помощью преобразования Лапласа в работе S. Vasilache [1], 1953 г., при $n=2$ и в работе P. Deleue [1], 1953 г., при произвольном n .

К § 24, п. 2°. Имеется немало работ, в которых «вводилось» дробное интегрирование функций многих переменных по каждой переменной или по части из них. Следует подчеркнуть, что эти понятия возникли с самого зарождения теории дробного интегрирования, и первым, кто ввел дробное интегрирование Римана—Лиувилля для функций двух переменных, был еще Х. Хольмгрён (Hj. Holmgren [1, с. 14], 1865—1866 гг.). Этими понятиями существенно пользовался в теории функций уже П. Монтель (P. Montel [1, с. 172], 1918 г.).

К § 24, п. 4°. Подробности относительно пространств L_p^- со смешанной нормой см. в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1, гл. 1], 1975 г., и в статье А. Бенедекка, Р. Панцоне (A. Benedek, R. Panzone [1], 1961 г.). Идея рассмотрения операторов дробного интегрирования в пространствах L_p^- содержится в последней работе, где она реализована для операторов типа потенциала (Рисса). Непосредственно для операторов $I_+^{\alpha_1} \otimes I_+^{\alpha_2}$ смешанного дробного интегрирования ограниченность из L_p^- в L_q^- , $q_i = p_i(1 - \alpha_i p_i)^{-1}$, и аналогично для частного дробного интегрирования отмечалась А. В. Скориковым [3], 1977 г., а для произвольного числа переменных—Г. Г. Магарил-Ильяевым [1], 1979 г., хотя, по-видимому, была известна раньше.

К § 24, п. 5°. Существование связей операторов дробного интегрирования с бисингулярным оператором впервые отмечено в работе В. С. Пилиди [1], 1968 г., в частности, там дано тождество (24.30) для $\varphi \in L_p$, $1 < p < \min(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1})$. Тождества (24.30)—(24.32) для $\varphi \in L_p^-$ были даны А. В. Скориковым [3], 1977 г.

К § 24, п. 6°. Частные и смешанные дробные производные Маршо (24.33)—(24.35) в случае двух переменных содержатся уже в работе A. Marchaud [1], 1927 г. Дробное интегрирование по направлению функций многих переменных в форме, отличной от (24.38), (24.39), впервые вводилось И. А. Киприяновым [1—6], 1959—1967 гг., см. об этом также в п. 2° этого параграфа.

К § 24, п. 7°. Теорема 24.4 в несколько менее сильной форме установлена А. В. Скориковым [3], 1977 г.

К § 24, п. 8°. Формулы п. 8° общеизвестны и легко вытекают из соответствующих одномерных формул. Имеется ряд работ, где давался их вывод, в основном в случае функций двух переменных, см., например, работу N. C. Jain [1], 1970 г., где содержится формула (24.56). Формулы (24.52), (24.53) при $n=2$ доказывались в работе R. K. Raina, V. S. Kiryakova [1], 1983 г.

К § 24, п. 9°. Пространство Φ , рассмотренное в этом пункте, вводилось и исследовалось П. И. Лизоркиным [1], 1963 г. Оно изучалось также К. Есинагой (K. Yoshinaga [1], 1964 г.).

К § 24, п. 10°. Частные и смешанные дробные производные по Вейлю периодических функций многих переменных впервые появляются в работе Ю. Л. Бессонова [1], 1964 г., где для функций f из L_p был выяснен вопрос о существовании (в L_p) одних частных или смешанных дробных производных, если существуют (в L_p) другие частные или смешанные производные (см. п. 2°, 24.5). Обстоятельное и полное исследование дробной дифференцируемости периодических функций многих переменных на основе пространств L_p было проведено П. И. Лизоркиным, С. М. Никольским [1], 1965 г., см. также работу Н. С. Никольской [1], 1974 г., где вопрос о существовании смешанных дробных производных Вейля увязан со скоростью сходимости частных сумм кратного ряда Фурье. Теорема 24.7 представляет собой модификацию теоремы 4 из работы П. И. Лизоркина, С. М. Никольского [1].

К § 24, п. 11°. Определения (24.65), (24.66) ранее, по-видимому, не вводились. Теорема 24.8 публикуется впервые.

К § 24, п. 12°. Полипотенциалы типа $\mathcal{H}^\alpha$ вводились (в более общем виде со степенными весами) в работе Ж. Окикиолу (G. O. Okikiolu [5], 1969 г.). Связь полипотенциалов $\mathcal{H}^\alpha$, $\mathcal{H}^\alpha$ друг с другом в виде (24.69) ранее не отмечалась.

К § 25, пп. 1, 2°. Формулу (25.11) обычно связывают с С. Бохнером [1, с. 263 и 315]. Формулы (25.14), (25.14') для преобразования Фурье радиальной функции в терминах дробного интегрирования даны Ж. Лере (J. Leraу [1], 1953 г.), см. также Ж. Лере [1, с. 24].

Пространство Φ вида (25.16) впервые появляется в работе В. И. Семяннистого [1], 1960 г. Затем в работах П. И. Лизоркина [1], 1963 г., см. также [5], 1969 г., и [8], 1972 г., дано обстоятельное исследование пространств такого типа вместе с приложениями в теории функциональных пространств дробной гладкости, после чего пространства Φ прочно вошли в математический обиход. Заметим, что это пространство появляется также в работе С. Хелгасона (S. Helgason [1, с. 162], 1965 г.). В книге С. Хелгасона [1, с. 20, 59, 62], 1983 г., по-видимому, не знавшего работ П. И. Лизоркина, показывается инвариантность пространства Φ для потенциалов Рисса в связи с использованием этих потенциалов в теории преобразования Радона.

Формула (25.25) формально известна давно, обоснование ее в смысле обобщенных функций над $S(R^n)$ дано в книге Л. Шварца (L. Schwartz [1, т. 2, с. 114], 1951 г.), полученное там выражение отличается от выражения (25.25) полиномиальным слагаемым во второй строке, ортогональным к Φ , см. замечание 25.2. Толкование преобразования Фурье функции $|x|^{-\alpha}$ в смысле обобщенных функций над Φ предложено В. И. Семяннистым [1], 1960 г., см. также работу П. И. Лизоркина [8, с. 242], 1972 г.

Впервые потенциал с ядром $|x|^{\alpha-n}$ появляется в диссертации О. Фростмана (O. Frostman [1], 1935 г.), посвященной задаче существования единственного так называемого равновесного потенциала компактного множества в R^n . Этот потенциал введен М. Риссом, учителем О. Фростмана (M. Riesz [2], 1936 г., и [4], 1938 г., см. также [5], 1939 г., и [6], 1949 г.). Мы не касаемся здесь связи потенциалов Рисса с супергармоническими функциями и вообще его роли в теории потенциала, см. об этом в книге Н. С. Ландкофа [1].

Инвариантность пространства Φ вида (25.16) относительно риссова потенциала указана В. И. Семяннистым [1], 1960 г., и П. И. Лизоркиным [2], 1963 г.

К § 25, п. 3°. Теорема 25.2 принадлежит С. Л. Соболеву [1], 1938 г. (доказательство необходимости теоремы см. в книге И. Стейна [1, с. 140]). Доказательство теоремы 25.2, основанное на теоремах о выпуклости, было дано Г. О. Ториним (G. O. Thorin [1], 1948 г.), см. также Г. О. Торин [1], 1957 г. В работе Н. Дю-Плесси (N. du Plessis [2], 1955 г.) указан совершенно элементарный прием (прием Дю-Плесси, см. об этом п. 2°, 25.2) сведения теоремы Соболева к случаю $n=1$. Б. Макенхоупт, И. Стейн (B. Muckenhoupt, E. M. Stein [1], 1965 г.) дали доказательство теоремы Соболева, основанное на интерполяции линейных операторов. Это доказательство приведено в книге И. Стейна [1]. Наиболее простое доказательство, пригодное при всех $n \geq 1$, предложено Л. Хедбергом (L. I. Hedberg [1], 1972 г.).

Теорема 25.3 доказана И. Стейном, Г. Вейсом (E. M. Stein, G. Weiss [1], 1958 г.).

Подобные теоремы с весом $\prod_{i=1}^n |x_i|^{v_i}$ или $(|x'|^2 + |x''|^2)^{v/2}$, где $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, доказаны В. П. Николаевым [1, 2], 1973 г. Теорема 25.4 получена Б. Макенхоуптом, Р. Виденом (B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden [1], 1974 г.). Более простое доказательство теоремы 25.4 дано в работе G. V. Welland [3]. Простое доказательство (и в более общем случае так называемых неизотропных риссовых потенциалов) дано В. М. Кокилашвили, М. А. Габидзашвили [1], 1985 г., см. его также в книге В. М. Кокилашвили [2, с. 36—54], 1985 г. Имеются другие обобщения теорем 25.3 и 25.4 — так называемые двухвесовые теоремы и др. (см. об этом в п. 2° настоящего параграфа).

Оценка (25.46) слабого типа для потенциалов Рисса обнаружена А. Зигмундом (A. Zygmund [4], 1956 г.). Теорема 25.5 получена Б. Г. Вакуловым [1], 1986 г., теорема 25.6 установлена И. Стейном, Г. Вейсом (E. M. Stein, G. Weiss [2, с. 57], 1960 г.) в случае интегралов Пуассона и Р. Джонсоном (R. Johnson [1], 1973 г.) в случае интегралов Гаусса—Вейерштрасса.

К § 25, п. 4°. Реализация риссова дифференцирования $\mathcal{F}^{-1}|\xi|^\alpha \mathcal{F}f$ в виде гиперсингулярного интеграла (25.62) впервые появляется в работе И. Стейна (E. M. Stein [1], 1961 г.) в случае $0 < \alpha < 2$. Общий случай $\alpha > 0$ рассмотрен П. И. Лизоркиным [6], 1970 г., который ввел гиперсингулярные интегралы (25.61) с центрированной разностью. Отметим, что П. И. Лизоркиным в работе [6] введен более общий, чем в (25.61), объект, отвечающий так называемому анизотропному случаю; в терминах этих анизотропных гиперсингулярных интегралов дано описание пространства анизотропных бесселевых потенциалов. Преобразование Фурье гиперсингулярного интеграла (формула (25.63)) рассматривалось П. И. Лизоркиным [6, с. 82] в случае центрированных разностей и С. Г. Самко [17, с. 1170], 1976 г., в случае нецентрированных разностей. Формулы (25.69), (25.70) обращения риссовых потенциалов $f = I^\alpha \phi$, $\phi \in L_p$, рассматривались Б. С. Рубиным [26].

К § 25, п. 5°. Интегралы (25.71) впервые встречаются, по-видимому, в работе Г. И. Эскина [1], 1973 г. Термин «односторонние потенциалы» введен Б. С. Рубиным [19—21], 1984—1985 гг., исследовавшим и другие потенциалы такого типа. Представление обратных к (25.71) операторов в виде гиперсингулярных интегралов (25.77) и обоснование обращения $D_{\pm}^{\alpha} I_{\pm}^{\alpha} \varphi \equiv \varphi$ для односторонних потенциалов на функциях $\varphi \in L_p(R^n)$ дано Б. С. Рубиным [16, 18, 20].

К § 26, п. 1°. Приведенные здесь исследования нормировочных постоянных даны по работам С. Г. Самко [17], 1976 г., и [26], 1978 г., см. также [28], 1980 г.

К § 26, п. 2°. Возможность снижения порядка l до $l > 2|\alpha/2|$ в случае нецентрированной разности указана С. Г. Самко [17], 1976 г. Случай $0 < \alpha < 2$, когда можно брать $l=1$, был известен ранее (Е. М. Stein [1], 1961 г., и П. И. Лизоркин [6, с. 85], 1970 г.). Способ избежать явления аннигиляции (26.18) за счет выбора $l=\alpha$ в случае нецентрированной разности предложен С. Г. Самко [17], 1976 г.

К § 26, п. 3°. Результаты этого пункта получены С. Г. Самко [17], 1976 г.

К § 26, п. 4°. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой появились в работах Р. Видена (R. L. Wheeden [1—4], 1967—1969 гг.), с характеристикой $\Omega(x, y)$ — в работе М. Фишера (M. J. Fisher [7], 1973 г.), однако в этих работах гиперсингулярные интегралы вводились при $\alpha \geq 2$ не с помощью конечных разностей, как в (26.47), а с помощью регуляризации (вычитанием отрезка ряда Тейлора), как в (26.68). В работах М. J. Fisher [1, 7] можно найти изложение теории гиперсингулярных интегралов с точки зрения дробных степеней операторов. В форме (26.47) гиперсингулярные интегралы рассматривались С. Г. Самко в работах [21], 1977 г., [26], 1978 г. и [28], 1980 г., в случае однородной характеристики и в работах [18], 1976 г., и [20], 1977 г., в случае неоднородной характеристики. Следует подчеркнуть, что в работах Р. Видена, М. Фишера исследование гиперсингулярных интегралов велось в контексте теории бесселевых потенциалов, т. е. гиперсингулярный интеграл $D_{\alpha} f$ рассматривался принадлежащим L_p вместе с f . Подход в работах С. Г. Самко и в настоящей книге позволяет брать $f \in L_r$, $D_{\alpha} f \in L_p$ с разными r и p , что допускает и «бесселеву» и «риссову» ситуацию.

Классификация гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой по типу и порядку используемой конечной разности предложена С. Г. Самко [26, с. 235], 1978 г., [28, с. 198], 1980 г. Формулы (26.55)—(26.57) получены С. Г. Самко (там же), формула (26.55) при $0 < \alpha < 1$ была доказана Э. Л. Раджабовым [1], 1974 г.

Вопрос о сходимости гиперсингулярных интегралов с разными однородными характеристиками рассматривался В. А. Ногиным, С. Г. Самко [1], 1981 г., [3], 1982 г. Этот же вопрос в случае неоднородных характеристик исследован В. А. Ногиным [1], 1980 г.

К § 26, пп. 5, 6°. Теорема 26.5 доказана С. Г. Самко [26], 1978 г. Решение вопроса (26.74) в виде (26.81), (26.82) получено С. Г. Самко ([28, с. 205—207], 1980 г.). Там же доказана теорема 26.6.

К § 26, п. 7°. Приведенное здесь исследование пространства $I^{\alpha}(L_p)$ дано по работам С. Г. Самко [17, 18], 1976 г., [20, 23], 1977 г., и [31], 1984 г., в том числе и в смысле обобщенных функций при $p \geq n/\alpha$. Пространство $I^{\alpha}(L_p)$ возникало и раньше, но без конструктивного описания его в терминах сходимости гиперсингулярных интегралов. Следует упомянуть работу В. Г. Мазыи, В. П. Хавина [1], 1972 г., где показано, что замыкание класса $C_0^{\infty}(R^n)$ по норме $\|\mathcal{F}^{-1}|\xi|^{\alpha}\mathcal{F}\varphi\|_p$ совпадает с $I^{\alpha}(L_p)$ при $1 < p < n/\alpha$ (более точно это утверждение нужно понимать в том смысле, что замыкание совпадает с $I^{\alpha}(L_p)$ после «отсеивания» приобретаемых при этом замыкании многочленов порядка меньше α). В работах С. Г. Самко получены, в частности, лемма 26.5 ([31, с. 78]), описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$, приведенное в теореме 26.8 ([17, 18], 1976 г., и [31, § 13], 1984 г.), теорема 26.9 ([23], 1977 г.), оценки (26.98), (26.99) ([17], 1976 г.). Освещаемые здесь пространства $L_{p,r}^{\alpha}(R^n)$ возникли как естественное обобщение пространств риссовых и бесселевых потенциалов, совпадая с первыми при $r=np/(n-\alpha p)$ и со вторыми при $r=p$. Они исследовались С. Г. Самко в работах [17], 1976 г., и [20], 1977 г.

Теорема 26.10 установлена Б. С. Рубиным [23, 26], утверждения (26.98), (26.98') см. в работе С. Г. Самко [17], 1976 г.

К § 27, п. 1°. Дробные степени $(E - \Delta)^{-\alpha/2}$ получили название бесселевых потенциалов после работ N. Aronszajn, K. T. Smith [1], 1961 г., A. P. Calderon [1], 1961 г., N. Aronszajn, F. Mulla, P. Szeptycki [1], 1963 г., N. Aronszajn [1], 1965 г., R. Adams, N. Aronszajn, K. T. Smith [1], 1967 г. Бесселево ядро как прообраз Фурье в смысле обобщенных функций для $(1 + |x|^2)^{-\alpha/2}$ рассматривалось у Л. Шварца (L. Schwartz [1, т. 2, с. 116], 1951 г.)

К § 27, п. 2°. Теорема 27.1 и модификация $\mathcal{G}^{\alpha}\varphi$ бесселева потенциала даны Т. Флеттом (T. M. Flett [6, с. 445—448], 1971 г.), формулы (27.20) и (27.23) получены Р. Джонсоном (R. Johnson [1], 1973 г.), формулы (27.22), (27.24), (27.26) — П. И. Лизоркиным [2], 1964 г.

К § 27, п. 3°. Теорема 27.3 принадлежит И. Стейну (E. M. Stein [1], 1961 г.) при $0 < \alpha < 2$ и П. И. Лизоркину [6], 1970 г., в общем случае.

В связи с изоморфизмом между пространствами $L_p^\alpha(R^n)$, осуществляемым оператором Бесселева дробного интегрирования, отметим, что ряд исследований посвящен изоморфизму между функциональными пространствами с помощью дробных степеней дифференциальных операторов. Мы ограничимся ссылками на работы С. М. Никольского, Ж. Лионса, П. И. Лизоркина [1], 1965 г., и Ш. А. Алимова [1], 1972 г. (см. также п. 2°, 25.13).

К § 27, п. 4°. Изложенные здесь результаты получены В. А. Ногиным [3, 4], 1982 г., и [6], 1985 г., за исключением теоремы 27.7 и группирующихся вокруг нее утверждений, которые принадлежат Б. С. Рубину [23–26]. Им же предложен подход к обращению бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов со взвешенными разностями (Б. С. Рубин [24, 25]).

К § 28, п. 1°. Использованные здесь формулы преобразования Фурье дробных степеней квадратичных форм см. в книге И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, гл. III, § 3]. Потенциал (28.21) введен М. Риссом (M. Riesz [3], 1936 г., и [8], 1967 (1939) г., см. также [6], 1949 г.). В этих работах, в частности, получены свойства (28.22), (28.24), (28.25) потенциала с лоренцевым расстоянием. Потенциалы с лоренцевым расстоянием рассматривались у Рисса не только по всему конусу $K_+^\perp$, но и по области D , ограниченной конической поверхностью $\rho=0$ и некоторой достаточно гладкой поверхностью. Мы ограничились для простоты тем случаем, когда область D есть весь конус $K_+^\perp$. Потенциалы с лоренцевым расстоянием оказались эффективным средством решения задачи Коши для гиперболических уравнений, что было продемонстрировано М. Риссом (M. Riesz [6], 1949 г., и [8], 1967 (1939) г.), см. об этом также, например, в книге В. В. Бакера, Е. Т. Корсона [1, с. 57–67], 1950 г. Различным приложениям потенциала Рисса с лоренцевым расстоянием посвящены работы Е. Т. Корсона [1], 1943 г., [2], 1947 г., и [4], 1956 г., и Н. Е. Фремберга [2, 3], 1946 г.

Потенциал Рисса $I_\alpha^\perp \phi$, определенный при $\operatorname{Re} \alpha > n-2$, допускает, как показано М. Риссом, аналитическое продолжение по α во всю комплексную плоскость (за исключением конечного числа полюсов). Другое доказательство аналитической продолжимости дал Н. Фремберг (N. E. Fremberg [1], 1945 г., см. также [2], 1946 г.). Отметим еще способ аналитического продолжения, указанный при $n=3$ в книге В. В. Бакера, Е. Т. Корсона [1, с. 60], 1950 г.

Формула (28.28) установлена Л. Шварцем (L. Schwartz [1, т. 2, с. 120], 1961 г.). В связи с вычислением преобразования Фурье (Лапласа) от степени лоренцева расстояния упомянем § 30 книги В. С. Владимирова [1], 1964 г., и книгу С. Трионе (S. E. Trione [1], 1980 г.), специально посвященную вычислению преобразования Фурье—Лапласа от функций, зависящих от лоренцева расстояния.

Утверждение теоремы 28.1 следует считать известным, однако авторы затрудняются дать соответствующую ссылку.

С построением дробных степеней дифференциальных операторов тесно связано исследование обобщенных функций $[P(x)]^\lambda$, где $P(x)$ — многочлен. В связи с этим следует упомянуть работы И. М. Гельфанда, М. И. Граева [1], 1955 г., М. В. Федорюка [1], 1959 г., Д. Брестерса (D. W. Bresters [1], 1968 г.), И. Н. Бернштейна, С. И. Гельфанда [1], 1969 г., М. Атья (M. F. Atiyah [1], 1970 г.), В. П. Паламодова [1], 1980 г., см. также книгу И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, гл. III, § 4], где имеются некоторые результаты для произвольных функций в степени λ .

К § 28, п. 2°. Параболические потенциалы $H^\alpha \phi$ и $\mathcal{H}^\alpha \phi$ (см. (28.39), (28.45)) были введены Б. Джонсом (B. F. Jones [1], 1968 г.) в связи с исследованием уравнений типа теплопроводности. Дальнейшее изучение этих потенциалов и порожденных ими пространств $H^\alpha(L_p)$, $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$ проводилось К. Сэмпсоном (C. H. Sampson [1], 1968 г.), Р. Бэгби (R. J. Bagby [1], 1971 г., и [2], 1974 г.), В. Гопала Рао (V. R. Gopala Rao [1], 1977 г., и [2], 1978 г.), С. Чанилло (S. Chanillo [1], 1981 г.), В. А. Ногиным [2], 1981 г., и [5], 1982 г., В. А. Ногиным, Б. С. Рубиным [1, 2], 1985 г. и [4, 5], 1986 г.

Доказательство теоремы 28.2 можно найти в работе В. Гопала Рао (V. R. Gopala Rao [1], 1977 г.).

К § 28, п. 3°. Этот пункт написан по работам В. А. Ногина [2], 1981 г., В. А. Ногина, Б. С. Рубина [1], 1985 г., и [4], 1986 г.

К § 28, п. 4°. Впервые интегральное уравнение типа Абеля (28.65) в частном случае $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$ было решено С. Г. Михлиным в 1940 г. в связи с задачами, встретившимися при исследовании отражения волн от прямолинейной границы (см. монографию С. Г. Михлина [1, с. 48], а также ссылки в работе Н. Г. Преображенского [1, с. 9]; в работе В. П. Федосова [1] см. приложения уравнений такого типа в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов).

Решение уравнения (28.65) в случае произвольного натурального n и $s = \overbrace{(0, \dots, 0, 1}^{k-1}$, $0, \dots, 0)$ получено в работе А. А. Килбаса, Ву Ким Туана [1]. Остальные материалы

этого пункта, в частности, определение и свойства пирамидных аналогов смешанных дробных интегралов и производных публикуются впервые.

2°. Обзор других результатов. 24.1. В работе R. K. Raina [3] вычислены смешанные дробные интегралы $I_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\alpha \varphi$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, от функций вида $\varphi(t) = \exp(-\sum p_i t_i) P(\sum t_i)$, где P — многочлен, в терминах некоторых специальных функций (обобщение аналогичного результата работы Н. М. Srivastava [4], см. по этому поводу § 9, п. 2°, 5.5).

В работах L. Koschmieder [1, 2] смешанные дробные интегралы (24.6) использовались для получения некоторых свойств гипергеометрической функции Лауричелла n переменных $F_A^{(n)}$ (см. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев [2, с. 745]).

24.2. Модификации дробного интегрирования в духе Эрдейи—Кобера для двух переменных вводились в работах R. U. Verma [1] и D. P. Mougya [1]. Именно вводились операторы типа $I_{0+;1,\xi}^\alpha \otimes I_{0+;1,\eta}^\beta$, $I_{-;1,\xi}^\alpha \otimes I_{-;1,\eta}^\beta$ (в обозначениях § 18, п. 1° и § 24, п. 3°) и т. п. В работе D. P. Mougya [1] установлены простейшие свойства таких операторов и дано приложение к некоторым специальным функциям (отметим, что в этой работе содержится опечатка на с. 173 и неточности на с. 175). В работе R. U. Verma [1] рассмотрено двумерное преобразование Меллина смешанных дробных интегралов Эрдейи—Кобера. Различные композиции двух операторов такого типа изучены в работе R. K. Raina [2]. С помощью смешанных дробных интегралов Эрдейи—Кобера в работах R. U. Verma [2, 3] рассмотрены свойства двумерных интегральных преобразований, обобщающих двумерное преобразование Ханкеля.

В работе С. L. Kaul [1] введены модификации обобщенного дробного интегрирования в стиле Саксена (23.5), (23.6) для двух переменных, найдены их двумерное преобразование Меллина и аналог формулы дробного интегрирования по частям. Эти результаты распространены на более общие многомерные операторы в работах R. K. Saxena, G. C. Modi [1] и B. L. Mathur, S. Krishna [1].

24.3. В ряде работ И. А. Киприянова [1—5] рассматривалась дробная производная $f_a^{(\alpha)}(x)$, $0 < \alpha < 1$, функции $f(x)$ в точке $x \in R^n$ по направлению из точки $a \in R^n$. Исходное определение этой производной по И. А. Киприянову состоит в том, что $f_a^{(\alpha)}(x)$ есть функция, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^{|x-a|} f_a^{(\alpha)}(a + \xi e) \xi^{n-1} d\xi = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{|x-a|} \frac{f(a + \xi e) - f(a)}{(|x-a| - \xi)^\alpha} \xi^{n-1} d\xi, \quad (29.1)$$

где e — единичный вектор в направлении от a к x , т. е. $e = (x-a)/|x-a|$ (мы несколько изменили обозначения по сравнению с обозначениями И. А. Киприянова). Как показано И. А. Киприяновым [2, 3], из этого определения выводится, что $f_a^{(\alpha)}(x)$ вычисляется по формуле

$$f_a^{(\alpha)}(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{|x-a|} \frac{f(x) - f(x - \xi e)}{\xi^{1+\alpha}} \left(1 - \frac{\xi}{|x-a|}\right)^{n-1} d\xi + \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{f(x) - f(a)}{|x-a|^{1+\alpha-n}} \quad (29.2)$$

(ср. с равенством (24.38')).

В отмеченном цикле работ И. А. Киприянова изучены различные свойства дробных производных по направлению, исследованы пространства функций (в области $\Omega \subset R^n$), имеющих дробные производные по всем направлениям, выяснены некоторые взаимоотношения этих пространств с пространствами Соболева $W_p^l(\Omega)$. Упомянем некоторые из этих результатов (см., например, работу [3]).

1. Если $f_a^{(\alpha)}(x)$ существует, непрерывна и ограничена для $(x, a) \in \Omega \times \Omega$, то $f(x) \in H^\alpha(\Omega)$; если $\int_\Omega \sup_{a \in \Omega} |f_a^{(\alpha)}(x)| dx < \infty$ и $\alpha > 1/p$, то $f(x) \in H_p^{\alpha-1/p}$, $p > 1$.

2. Если $0 < \alpha < \lambda \leq 1$ и $f(x) \in H^\lambda(\bar{\Omega})$, то $f_a^{(\alpha)}(x)$ существует для всех $(x, a) \in \Omega \times \Omega$ и непрерывна по (x, a) .

3. Пусть $C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})$ — пространство непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций, для которых $f_a^{(\alpha)}(x)$ непрерывна по $(x, a) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, $\|f\|_{C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})} = \|f\|_C + \max_{(x,a) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} |f_a^{(\alpha)}(x)|$. Тогда $\|f\|_{C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})} \leq A \|f\|_{W_p^l(\Omega)}$, если $l > n/p$, $0 < \alpha < \min(1, l - n/p)$. Здесь W_p^l — пространство Соболева целого порядка l .

4. Такой же результат, как и выше, имеет место для пространств $L_q^{(\alpha)}(\Omega)$ с нормой $\|f\|_{L_q^{(\alpha)}(\Omega)} + \|f_a^{(\alpha)}\|_{L_q(\Omega \times \Omega)}$.

Отметим еще, что в работе И. А. Киприянова [7] исследован оператор дробного дифференцирования по направлению вида

$$\mathfrak{D}_\rho^\alpha f(x) = \frac{1}{\rho^{n-1-\alpha} \Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\rho} \int_0^\rho (\rho^2 - \tau^2)^{-\alpha} f(a + \tau\omega) \tau^{n-1} d\tau, \quad (29.3)$$

где $\rho = |x - a|$, a — фиксированная точка, ω — заданное направление, $|\omega| = 1$. В работе [7] показано, что оператор (29.3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_\rho^\alpha f(x) = & \frac{2\rho^{1+\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\rho \frac{f(x) - f(a + \tau\omega)}{(\rho^2 - \tau^2)^{1+\alpha}} \left(\frac{\tau}{\rho}\right)^{n-1} d\tau + \\ & + \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{f(x)}{\rho^\alpha}, \quad \rho = |x - a| \end{aligned}$$

(ср. с (29.2) и (24.38')). В работе [7] построен также обратный к (29.3) оператор в форме

$$\frac{2\rho^{2-n}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\rho t^{n-1-\alpha} (\rho^2 - t^2)^{\alpha-1} f(\mathfrak{D}_t^\alpha f)(x) dt.$$

Кроме того, в той же работе с помощью операторов $\mathfrak{D}_\rho^\alpha$ построены пространства $L_q^{(\alpha)}(\Omega)$ дробно дифференцируемых функций и показано, что они (компактно) вложены в пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$ при надлежащих предположениях о p, l, q, α .

24.4. Лиувиллевские частные и смешанные дробные производные (24.15) в обобщенном смысле $(\mathcal{D}_{+,\dots,+}^\alpha f, \varphi) = (f, \mathcal{D}_{-,\dots,-}^\alpha \varphi)$, $\varphi \in \Phi$, Φ — класс (24.56'), вводились П. И. Лизоркиным [1]. В работе П. И. Лизоркина, С. М. Никольского [1] были введены пространства $S_p^\alpha(L(R^n)) = S_p^\alpha(R^n)$ с доминирующей смешанной [производной]. Пространства $S_p^\alpha(R^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, состоят из функций $f \in L_p(R^n)$, имеющих обобщенную смешанную производную $\mathcal{D}_{+,\dots,+}^\alpha f \in L_p(R^n)$, а также все опорные производные, принадлежащие $L_p(R^n)$. (Опорными производными для $\mathcal{D}_{+,\dots,+}^\alpha f$ называются производные $\mathcal{D}_{+,\dots,+}^{\tilde{\alpha}} f$, где $\tilde{\alpha}$ получается из $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ заменой некоторых α_k на 0.) В указанной работе показано, что

$$S_p^\alpha = G^\alpha(L_p), \quad \alpha > 0, \quad 1 < p < \infty, \quad (29.4)$$

где $G^\alpha(L_p)$ — пространство (24.74) полипотенциалов (24.72). В работе Н. С. Никольской [1] выяснен характер приближения функции $f \in S_p^\alpha(R^n)$ частичными суммами ее ряда Фурье.

В работе Ю. А. Брычкова [1] рассмотрены пространства S_p^α обобщенных функций при любых $\alpha \in R^n$ и доказано утверждение (29.4) при соответствующем толковании левой и правой частей. В этой работе введено также понятие порядка гладкости обобщенных функций из S_p^α по части переменных и выяснена связь между этим порядком и существованием следа обобщенной функции на гиперплоскостях.

24.5. Пусть $f(x)$ — 2π -периодическая функция многих переменных и $\mathcal{D}^{(\alpha)}f$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, означает дробную производную Вейля (24.60), (24.62). Справедливо (Ю. Л. Бессонов [1]) следующее утверждение.

Пусть $f \in L_p(\Delta)$, $\Delta = \{x: 0 \leq x_i \leq 2\pi\}$, $1 < p < \infty$. Если существуют $\mathcal{D}^{(\alpha)}f \in L_p(\Delta)$, $\mathcal{D}^{(\beta)}f \in L_p(\Delta)$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$, то $\mathcal{D}^{(\gamma)}f \in L_p(\Delta)$ для $\gamma = \theta\alpha + (1-\theta)\beta$, $0 \leq \theta \leq 1$.

24.6. В общем виде аналогичный вопрос о существовании одних дробных производных $\mathcal{D}_{-,\dots,-}^\beta f$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, при существовании других таких производных некоторых порядков $\alpha^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ исследован Г. Г. Магарил-Ильяевым [1] в непериодическом случае в общем контексте пространств $L_p^-(R^n)$ со смешанной нормой (так называемая задача о промежуточной производной). Этот вопрос тесно связан с мультипликативными неравенствами для дробных производных, выполнимость которых полностью исследована в указанной работе. Развитие результатов для задачи о промежуточной производной см. в работе того же автора [2], где оно дано в некоторых общих терминах, связанных с так называемыми обобщенными соболевскими пространствами.

24.7. В работе Г. Г. Магарил-Ильяева и В. М. Тихомирова [2] при изложении ряда вопросов гармонического анализа на многообразиях вида $M = T^{n'} \times R^{n''}$ (т. е. на произведении некоторого числа окружностей и прямых) рассмотрено дробное дифференцирование на таких многообразиях. Оно определяется с помощью аналога пространства Φ типа Лизоркина («приспособленного» к прямым и окружностям, образующим M). В терминах пространств $L_p^-(M)$ со смешанной нормой рассмотрены задача о промежуточной производной, неравенства типа Бернштейна—Никольского, Фавара для дробных производных и др.

24.8. Теорема типа Бернштейна для смешанных дробных производных функции $f(x, y)$ двух переменных рассматривалась еще Р. Montel [1, с. 187] и была получена им в виде: если $|f(x, y) - P_{n,m}(x, y)| \leq Am^{-\gamma} + Bn^{-\delta}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, где $P_{n,m}(x, y)$ — алгебраический многочлен, то $f(x, y)$ имеет все смешанные дробные производные порядков (α, β) таких, что $\alpha/\gamma + \beta/\delta < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

24.9. Связь между существованием в L_p смешанной дробной производной Вейля $\mathcal{D}_{++}^{(\alpha_1, \alpha_2)} f$ функции $f(x_1, x_2)$ двух переменных и поведением ее наилучших приближений, а также поведением частичных сумм ее ряда Фурье и смешанного [модуля непрерывности] исследована в работе М. Г. Есмаганбетова [2].

24.10. Пусть функция $f(x)$, рассматриваемая в области $\Omega \subset R^n$, является [сужением] на Ω функции $g(x)$, принадлежащей во всем пространстве R^n классу бесселевых потенциалов $L_p^\alpha(R^n)$ (о котором см. в § 27). Характеризация таких функций в терминах дробных частных производных Римана—Лиувилля по каждой переменной и более общо в терминах дробной производной Чженя отмечалась А. В. Скориковым [2] (см. § 23, п. 2°, 18.14 в случае $n=1$). Некоторые соображения в аналогичных ситуациях были развиты при $n=2$ в работах L. Biacino, D. Miserendino [1—3], L. Biacino, M. Di Giorgio, D. Miserendino [1], L. Biacino [1]. Упомянем в связи с этим также работы D. Miserendino [1, 2], в которых для функций из $L_2^\alpha(\Omega)$, где α — целое, Ω — параллелепипед в R^n , исследовано существование смешанных дробных производных в точках границы $\partial\Omega$ параллелепипеда и их принадлежность пространству $L_2(\partial\Omega)$.

24.11. Определение дифференцирования Грюнвальда—Летникова, рассмотренное в § 24, п. 11°, для функций, заданных во всем пространстве R^n , можно приспособить для функций, заданных в области. Это делается подобно § 20, п. 4°, где вводилось дробное дифференцирование Грюнвальда—Летникова на конечном отрезке. В случае, например, двух переменных соответствующее (20.42) определение имеет вид

$$\begin{aligned} f_{a+}^{(\alpha)}(x) = \lim_{\substack{N_1 \rightarrow \infty \\ N_2 \rightarrow \infty}} \left(\frac{N_1}{x_1 - a_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{N_2}{x_2 - a_2} \right)^{\alpha_2} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} (-1)^{i+j} \binom{\alpha_1}{i} \binom{\alpha_2}{j} \times \\ \times f \left(x_1 - i \frac{x_1 - a_1}{N_1}, x_2 - j \frac{x_2 - a_2}{N_2} \right), \end{aligned} \quad (29.5)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $a = (a_1, a_2)$, $x_1 \geq a_1$, $x_2 \geq a_2$. Подобное определение использовалось В. А. Красновым [1], рассматривавшим некоторые свойства дробных производных (29.5).

Развитие такого определения для аналитических функций, заданных в области $G \subset R^n$, содержится в работе В. А. Краснова, А. С. Фохта [1]. В ней подобный подход к дробным производным функций многих переменных рассматривался в связи с получением некоторых интегральных оценок для решений эллиптических дифференциальных уравнений. Этот вопрос изучался ранее в работе А. С. Фохта, В. А. Краснова [1] в случае уравнения Лапласа. В указанной работе использовалось определение дробного дифференцирования $\partial^\alpha f / \partial x^\alpha$ аналитических функций, сводящееся к дробному дифференцированию мономов x^j , $j = (j_1, \dots, j_n)$, но при этом отбрасывались мономы, у которых $j_k < \alpha$ хотя бы для одного $k = 1, \dots, n$.

25.1. Пространство Лизоркина (25.16) состоит из шварцевых функций $f \in \mathcal{S}$, преобразование Фурье которых исчезает в начале координат. Аналогичное пространство Φ , приспособленное для частных дробных производных и интегралов (см. § 24, п. 9°), связано с исчезновением образов Фурье на координатных гиперплоскостях. Для различных других задач возникает необходимость в построении класса Φ_V типа Лизоркина, для функций которого $(\mathcal{L}^k \Phi)(x) = 0$, $|k| = 0, 1, 2, \dots$, $x \in V$, где V — заданное множество в R^n . Такие пространства исследованы С. Г. Самко [25, 29], давшим описание пространств Φ_V в случае, когда V — конус в R^n , и доказавшим плотность Φ_V в $L_p(R^n)$ при $p \geq 2$ в случае произвольного множества V меры нуль, а при $1 < p < 2$ для некоторого класса множеств V меры нуль, названных в работе [29] квазиломаными (плотность Φ_V в $L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$, в случае, когда V — начало координат или совокупность координатных гиперплоскостей, установлена ранее П. И. Лизоркиным [5, 8]).

25.2. Прием N. du Plessis [2] сведения теоремы Соболева к случаю $n = 1$ состоит в наблюдении, что $|x|^n \geq \prod_{j=1}^n |x_j|$ (или, более точно, $|x|^n \geq n^{n/2} \prod_{j=1}^n |x_j|$), что вытекает из того факта, что среднее арифметическое не меньше, чем среднее геометрическое). Поэтому

$$\int_{R^n} \frac{\varphi(y) dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \leq \int_{R^n} \frac{|\varphi(y)| dy}{\prod_{j=1}^n |x_j - y_j|^{1-\alpha/n}},$$

и при оценке $\|I^\alpha \varphi\|_q$ достаточно располагать одномерной [теоремой Харди—Литтлвуда 5.3, применяя ее по каждой переменной.

25.3. В предельном случае $p = n/\alpha$ оператор I^α не определен своим непосредственным видом на всем пространстве $L_p(R^n)$, однако $\|I^\alpha \varphi\|_{\text{ВМО}} \leq c \|\varphi\|_p$ на плотном в L_p множестве функций φ , где ВМО — пространство функций ограниченной в среднем осцилляции, см. об этом в одномерном случае в § 4, п. 2°, 3.3 (и в § 17, п. 2°, 13.1), где даны ссылки и для многомерного случая. Здесь добавим, что в работе E. Harboure, R. A. Macias, C. Segovia [2] получены весовые оценки риссова потенциала в предельном случае $p = n/\alpha$. Упомянем также, что в работе R. S. Strichartz [2] рассмотрены риссовы (и бесселевы) потенциалы от функций из ВМО, а в работе S. Chanillo [2] — коммутаторы $b(x) (I^\alpha f)(x) - I^\alpha (bf)(x)$, $f \in L_p$, $b \in \text{ВМО}$.

25.4. Аналог теоремы Соболева 25.2 для пространств $L_{\vec{p}}(R^n)$ со смешанной нормой (см. определение в § 24, пп. 4, 12°) установлен в работе A. Benedek, R. Panzone [1]: I^α ограничен из $L_{\vec{p}}(R^n)$ в $L_{\vec{q}}(R^n)$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$, если $1 < p_i < n/\alpha$ и $1/q_i = 1/p_i - \alpha/n$. Более общее утверждение в этом направлении получено П. И. Лизоркиным [7], рассмотревшим широкий класс операторов свертки, включающий, в частности, так называемые *анизотропные риссовы потенциалы*

$$\int_{R^n} [\rho(x-y)]^{\alpha-n} \varphi(y) dy, \quad (29.6)$$

где $\rho(x)$ — неотрицательная α -однородная первой степени функция (т. е. $\rho(t^{a_1}x_1, \dots, t^{a_n}x_n) = t\rho(x)$ при $t > 0$, $a_j > 0$, $\sum a_j = n$), ограниченная снизу при $|x| = 1$. Для таких потенциалов П. И. Лизоркиным [7] доказана теорема об ограниченности из $L_{\vec{p}}(R^n)$

в $L_{\vec{q}}(R^n)$ при $1 < p_i \leq q_i < \infty$, $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i (1/p_i - 1/q_i)$, $p_n \neq q_n$ (см. доказательство

этой теоремы также в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1, с. 32]). Подобная теорема о действии риссова анизотропного потенциала с ядром $\rho(x) =$

$= \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^{2a_j} \right)^{1/2}$ в более общей ситуации весовых пространств со смешанной нормой и

на подпространствах разных измерений доказана В. М. Кокилашвили [1]. В связи с этим укажем, что теоремы типа Соболева для потенциала Рисса, где $y \in R^m$, $x \in R^n$, были получены В. П. Ильиным [2], см. об этом в более общем анизотропном случае в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1, с. 34].

Отметим еще работу D. R. Adams, R. J. Bagby [1], содержащую уточнения некоторых случаев оценок обычного (изотропного) риссова потенциала из $L_{\vec{p}}^-$ в $L_{\vec{q}}^-$.

25.5. Непрерывность интегралов типа потенциала

$$I_{\Omega}^{\alpha} \varphi = \int_{\Omega} |x-t|^{\alpha-n} \varphi(t) dt, \quad \varphi \in L_p(\Omega),$$

в случае ограниченной области $\Omega \subset R^n$ при $p > n/\alpha$ впервые указана С. Л. Соболевым [2, с. 48]. Более того (С. Л. Соболев [3, с. 256]),

$$I_{\Omega}^{\alpha} \varphi \in \begin{cases} H^{\alpha-n/p}(\Omega), & \text{если } 0 < \alpha - n/p < 1, \\ H^{1, 1/p'}(\Omega), & \text{если } \alpha - n/p = 1, \\ H^1(\Omega), & \text{если } \alpha - n/p > 1, 1/p + 1/p' = 1, \end{cases} \quad (29.7)$$

см. определение класса $H^{\lambda, h}(\Omega)$ в одномерном случае в § 1 (определение 1.6). К утверждению (29.7) примыкает аналогичный результат для $\Omega = R^n$: риссов потенциал $I^{\alpha} \varphi$, где $\varphi \in L_1(R^n) \cap L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$, является при $n/p < \alpha < 1 + n/p$ гельдеровской функцией: $I^{\alpha} \varphi \in h_{\text{loc}}^{\alpha-n/p}(R^n) = \{g: g(x+h) - g(x) = o(|h|^{\alpha-n/p}) \text{ равномерно по } x \text{ при } h \rightarrow 0\}$ (N. du Plessis [1]). Этот результат обобщен на операторы свертки (1.39) в ра-

боте М. Cotlar, R. Panzone [1] и на более общие операторы (1.101) в работе А. А. Килбаса [9].

Оценка (29.7) для интегралов $I_{\Omega}^{\alpha}\varphi$ при $\alpha - n/p > 1$ уточняется следующим образом: $I_{\Omega}^{\alpha}\varphi \in H^{\alpha-n/p}(\Omega)$ при $\alpha - n/p \neq 1, 2, \dots$ и $I_{\Omega}^{\alpha}\varphi \in H^{\alpha-n/p, 1/p'}(\Omega)$ при $\alpha - n/p = 1, 2, \dots$. Это утверждение есть следствие обобщенной гильбертовости более общих, чем $I_{\Omega}^{\alpha}\varphi$, интегралов типа потенциала (А. А. Килбас [12]).

25.6. В случае радиальных [функций] справедливо (см. Б. С. Рубин [17]) тождество

$$(I_a^{\alpha}\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_{|y|<a} \frac{\varphi(|y|) dy}{|x-y|^{n-\alpha}} = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int_0^a \rho^{\alpha-1} U\left(\frac{|x|}{\rho}\right) \varphi(\rho) d\rho, \quad 0 < a \leq \infty,$$

где ядро $U(\lambda)$ представляется через гипергеометрическую функцию: $U(\lambda) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \times$

$\times {}_2F_1\left(\frac{n-\alpha}{2}, 1-\frac{\alpha}{2}; \frac{n}{2}; \lambda^2\right)$. Имеется уточнение теоремы 25.3 в случае, когда плотность потенциала является радиальной функцией. Пусть B_a — шар в R^n с центром в начале координат радиуса a , $0 < a \leq \infty$. Справедлива (Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [1], случай $n=2$, и Б. С. Рубин [17], общий случай) следующая

Теорема 29.1. Пусть $\varphi(|x|) \in L_p(B_a; |x|^v)$, $1 < p < \infty$, $v < n(p-1)$, $n \geq 1$, $0 < \alpha < n$, $0 \leq m \leq \alpha$, $m < 1/p$, $q = p(1 - mp)$. Тогда $\|I_a^{\alpha}\varphi\|_{L_q(B_a; |x|^{v_0})} \leq c \|\varphi\|_{L_p(B_a; |x|^v)}$, где $v_0 = q(mn - \alpha + v/p)$ при $v > \alpha p - n$ и $v_0 = q(mn + \varepsilon - np)$ при $v \leq \alpha p - n$, $\varepsilon > 0$ (при $a = \infty$ случай $v \leq \alpha p - n$ исключается).

Доказательство теоремы основано на имеющем самостоятельный интерес представлении риссова потенциала с радиальной плотностью в терминах одномерного дробного интегрирования по радиальной переменной:

$$(I_a^{\alpha}\varphi)(\sqrt{r}) = 2^{-\alpha} r^{1-n/2} (I_{0+}^{\alpha/2} s^{(n-\alpha)/2-1} I_{a^2-}^{\alpha/2} \varphi(\sqrt{\tau}))(r), \quad 0 < r \leq a,$$

где $I_{0+}^{\alpha/2}$, $I_{a^2-}^{\alpha/2}$ — дробное интегрирование Римана—Лиувилля (2.17), (2.18), см. также работы Б. С. Рубина [17, 22], где дано обращение потенциалов с радиальной плотностью и описание образа.

25.7. В работе В. М. Кокилашвили, М. А. Габидзашвили [1] (см. также монографию В. М. Кокилашвили [2, с. 36—45]) теорема 25.4 о весовых оценках потенциала Рисса I^{α} перенесена на анизотропные риссовы потенциалы (29.6), где $\rho(x) =$

$$= \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^{2/\alpha_j} \right)^{1/2} \quad (\alpha_j > 0, j=1, \dots, n), \text{ и даны [приложения к теоремам [вложения$$

общих весовых лиувиллевских классов. В работах М. А. Габидзашвили [1—3] теорема 25.4 распространена на операторы типа потенциала T^{α} (обобщающие (29.6)), действующие в пространствах однородного типа X ; для T^{α} установлена теорема о двухвесовой оценке и доказаны теоремы типа Кусиса, позволяющие по данному весу ρ найти вес r такой, что оператор T^{α} ограничен из $L_p(X; \rho)$ в $L_q(X; r)$ и обратно.

25.8. Имеются обобщения весовых теорем 25.3 и 25.4 на более общие ситуации, в том числе и на случай двухвесовых оценок из $L_p(R^n; \rho_1)$ в $L_q(R^n; \rho_2)$. В настоящее время эти вопросы интенсивно развиваются и существенно продвинуты. Мы ограничимся указанием на обзор Е. М. Дынькина, Б. П. Осиленкера [1], книгу В. М. Кокилашвили [2] и работы Е. Harboure, R. A. Macias, C. Segovia [1, 2], Е. Sawyer [1], J.-O. Strömberg, R. L. Wheeden [1], Н. Р. Heinig [1, 2], А. Е. Gatto, С. Е. Gutierrez, R. L. Wheeden [1], К. F. Andersen [2], где можно найти и другие ссылки.

25.9. Действие оператора I^{α} из пространств Харди $H^p(R^n)$, $0 < p < +\infty$, которые при $1 < p < \infty$ совпадают с пространствами $L_p(R^n)$ с точностью до эквивалентности норм, исследовано Е. М. Stein, G. Weiss [2]. Их результаты дополнены S. G. Krantz [1], рассмотревшим также более общие, чем I^{α} , операторы. Двухвесовые оценки потенциала Рисса в пространствах Харди с весом $H^p(R^n; \rho)$ рассматривались в работах J.-O. Strömberg, R. L. Wheeden [1], А. Е. Gatto, С. Е. Gutierrez, R. L. Wheeden [2].

25.10. Теорема Соболева 25.2 распространена на обобщенные потенциалы Рисса

$$I_{\Omega}^{\alpha}\varphi = \int_{R^n} \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-\alpha}} \varphi(x-y) dy,$$

где $\Omega(y) = \Omega(y/|y|) \in L_{n/(n-\alpha)}(S_{n-1})$, см. В. Muckenhoupt [1]. В этой работе для таких же потенциалов рассмотрены предельные случаи $p = n/\alpha$ и $p = 1$. В частности, для $p=1$

дано обобщение на n -мерный случай одномерного результата А. Зигмунда—Т. Флетта (см. § 4, п. 2°, 3.2):

$$\left\{ \int_B |I_{\Omega}^{\alpha} \varphi(x)|^q dx \right\}^{1/q} \leq c \int_B [1 + |\varphi(x)|] [\log(1 + |\varphi(x)|)]^{1-\alpha/n} dx,$$

где B —шар в R^n конечного радиуса. Другое доказательство в случаях $p = n/\alpha$ и $p = 1$ при $\Omega \equiv 1$ см. в работе Л. И. Hedberg [1], где получено также мультипликативное неравенство

$$\|I^{\theta\alpha}\varphi\|_r \leq c \|\varphi\|_p^{1-\theta} \|I^{\alpha}\varphi\|_q^{\theta}, \quad \varphi(x) \geq 0,$$

где $0 < \alpha < n$, $0 < \theta < 1$, $1/p < \alpha < \infty$, $p_1 < q \leq \infty$, $1/r = (1-\theta)/p + \theta/q$.

Вопросам обращения операторов I_{Ω}^{α} посвящены работы С. Г. Самко [21, 28] в эллиптическом случае и [19] в одном специальном неэллиптическом случае.

25.11. Действие оператора I^{α} в пространствах Орлича $L_M^*(R^n)$ исследовал Р. О'Нейл [2]. Сформулированная в § 9, п. 2°, 5.9 теорема О'Нейла для одномерного случая верна для $n \geq 1$ при замене α на α/n в условиях на $M(u)$. В работах В. М. Кокилашвили, М. Крбеца [1—3] (см. также монографию В. М. Кокилашвили [2, с. 78—82]) теорема 25.4 о весовых оценках для потенциала Рисса I^{α} перенесена с пространств L_p на пространства Орлича; при этом в работе В. М. Кокилашвили, М. Крбеца [3] даны приложения к теоремам вложения для весовых пространств Соболева—Орлича. В работе В. М. Кокилашвили [4] теорема 25.4 перенесена на кратные дробные интегралы, действующие в весовых пространствах Орлича.

Р. О'Нейл [1] установил аналог теоремы Соболева для пространств Лоренца $L_{p,q}$. Случай пространств Лоренца с весом см. в работах В. М. Кокилашвили [2, с. 64—71; 3]. В пространствах Морри действие потенциала Рисса рассматривал D. R. Adams [1].

25.12. Пространства Соболева—Орлича $L_M^{(\alpha)}(R^n)$ и $E_M^{(\alpha)}(R^n)$ дробного порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, обобщающие лиувиллевские пространства $L_p^{(\alpha)}(R^n)$ и состоящие из функций $f \in L_M(E_M)$, частные лиувиллевские производные которых по каждой переменной порядка α_j принадлежат $L_M(E_M)$ соответственно, исследованы А. Ф. Чувенковым [1].

25.13. Связь пространств Бесова (о которых см. в книгах С. М. Никольского [4], О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1]) с дробным дифференцированием была вскрыта П. И. Лизоркиным [4] (см. также работу [9]), показавшим, что бesselовое дробное интегродифференцирование G^{α} (см. (27.8)) осуществляет изоморфизм между пространствами Бесова: $G^{\alpha}(B_{p,\theta}^r) = B_{p,\theta}^{\alpha+r}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq r < \infty$. С. S. Herz [1, с. 315] показал, что при надлежащей модификации пространства Бесова аналогичное утверждение справедливо по отношению к риссову дробному интегрированию: $I^{\alpha}(\Lambda_{p,\theta}^r) = \Lambda_{p,\theta}^{\alpha+r}$, где $\Lambda_{p,\theta}^r$ понимается как замыкание по норме пространства Бесова бесконечно дифференцируемых функций, преобразования Фурье которых имеют компактный носитель вне начала координат (явная связь с пространством Ф. П. И. Лизоркина).

25.14. Потенциал Рисса естественным образом возникает в теории преобразования Радона, см. об этом в книге С. Хелгасона [1, с. 20, 29 и др.].

Отметим также работу А. Brédimas [6], в которой одномерное дробное дифференцирование используется при обращении сферического преобразования Радона.

25.15. В работе Б. С. Рубина [20] рассмотрена модификация односторонних потенциалов Рисса (25.71), приспособленная к случаю полупространства:

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi = \frac{c_n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_n} \int_{R^{n-1}} \frac{(x_n - y_n)^{\alpha}}{|x - y|^n} \varphi(y) dy, \quad x \in R_+^n,$$

и совпадающая при $n = 1$ с интегралом Римана—Лиувилля (5.1). Для них выяснено, в частности, когда риссов потенциал $I^{\alpha}\varphi$, $\varphi \in L_p(R^n)$, в полупространстве $x_n > 0$ совпадает с односторонним потенциалом $I_{0+}^{\alpha}\varphi$, где также $\varphi \in L_p$. При $\alpha < 1/p$ это всегда так, причем можно указать в явном виде ограниченный в $L_p(R_+^n)$ оператор A такой, что $(I^{\alpha}\varphi)(x) = (I_{0+}^{\alpha}A\varphi)(x)$, $x_n > 0$. При $\alpha > 1/p$ для выполнимости подобного равенства необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial^j f(x', 0)}{\partial x_n^j} = 0$, $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $j = 0, 1, \dots$, $[\alpha - 1/p]$ (при корректном понимании следа).

В работах Б. С. Рубина [19, 22] введены также аналогичные модификации односторонних потенциалов Рисса, связанные с шаром в R^n :

$$B_{+}^{\alpha} \varphi = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{|y| < |x|} \frac{(|x|^2 - |y|^2)^{\alpha}}{|x - y|^n} \varphi(y) dy,$$

$$B_{-}^{\alpha} \varphi = \frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{|y| > |x|} \frac{(|y|^2 - |x|^2)^{\alpha}}{|x - y|^n} \varphi(y) dy,$$

и получены следующие результаты: 1) полугрупповое свойство; 2) формулы обращения (для простоты считаем, что $0 < \alpha < 1$):

$$(B_{+}^{\alpha})^{-1} f = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2 - \alpha)} \frac{f(x)}{|x|^{2\alpha}} + \frac{\alpha c_{n-1}}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{|y| < |x|} \frac{f(x) - f(y)}{(|x|^2 - |y|^2)^{\alpha} |x - y|^n} dy,$$

$$(B_{-}^{\alpha})^{-1} f = \frac{\alpha c_{n-1}}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{|y| > |x|} \frac{f(x) - f(y)}{(|y|^2 - |x|^2)^{\alpha} |x - y|^n} dy;$$

3) разложение риссова потенциала $I^{\alpha} \varphi$ в композицию

$$I^{\alpha} \varphi = 2^{-\alpha} B_{\pm}^{\alpha/2} |y|^{-\alpha} B_{\mp}^{\alpha/2} \varphi$$

(ср. с (25.76)).

26.1. В связи с теоремой 26.3 отметим, что усеченная риссова производная $D_{\varepsilon}^{\alpha} f$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ на функциях $f \in L_p(R^n)$, $1 < p < n/\alpha$, не только по норме $L_p(R^n)$, но и почти всюду. Это можно вывести из (26.40) с помощью известного приема сравнения аппроксимации единицы с максимальной функцией (И. Стейн [1, с. 77–78]). Можно, однако, получить непосредственными преобразованиями из (26.40) следующую оценку (см. С. Г. Самко [20] или [31, с. 78]):

$$|(D_{\varepsilon}^{\alpha} f)(x) - \varphi(x)| \leq c_1 \sup_{0 < t < \varepsilon} \Phi_t(x) + c_2 \Psi_{\varepsilon}(x) + \varepsilon^{l^* - \alpha} (c_3 |\varphi(x)| + c_4 \|\varphi\|_p), \quad f = I^{\alpha} \varphi,$$

из которой следует сходимость почти всюду. Здесь l^* — то же, что в (26.39), $\Phi_t(x) = t^{-n} \int_{|y| < t} |\varphi(x - y) - \varphi(x)| dy$, $\Psi_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{l^* - \alpha} \int_{\varepsilon}^1 t^{\alpha - l^* - 1} \Phi_t(x) dt$, c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — явно подсчитываемые абсолютные постоянные. О сходимости почти всюду более общих гиперсингулярных интегралов $D_{\Omega}^{\alpha} f$ с характеристикой $\Omega(y)$ (не обязательно однородной) см. в работе В. А. Ногина [7].

26.2. Гиперсингулярный интеграл $(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x)$ с однородной характеристикой $\Omega(y/|y|)$ от достаточно гладких и убывающих функций f допускает при $|x| \rightarrow \infty$ следующие оценки. Пусть $f(x) \in C^l(R^n)$, $l > \alpha$, и $|f(x)| \leq c(1 + |x|)^{-N_1}$, $|(D^l f)(x)| \leq c(1 + |x|)^{-N_2}$ для $|j| = l$, где $N_1 > \alpha$, $N_2 > n$. Тогда

$$|(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x)| \leq c(1 + |x|)^{-\min(\alpha + N_1, N_2, 1 + \alpha)},$$

если $\Omega(\sigma) \in L_1(S_{n-1})$, и

$$|(D_{\Omega}^{\alpha} f)(x)| \leq c(1 + |x|)^{-\min(\alpha + N_1, N_2, n + \alpha)},$$

если $\Omega(\sigma)$ ограничена (С. Г. Самко [26; 31, с. 89]).

26.3. Модуль непрерывности (вообще говоря, дробного порядка) $\omega_{\gamma}(f, \delta) = \sup_{|h| < \delta} \|\Delta^{\gamma} f\|_X$, $X = L_p(R^n)$, $1 \leq p < \infty$, или $X = BC(R^n)$, гиперсингулярного интеграла $D_{\Omega}^{\alpha} f$ оценивается следующим образом:

$$\omega_{\gamma}(D_{\Omega}^{\alpha} f, \delta) \leq cb(\delta) \frac{\omega_{\gamma}(f, \delta)}{\delta^{\alpha}} + c \int_0^{\delta} \frac{\omega_{\lambda}(f, t)}{t^{1+\alpha}} a(t) dt,$$

где $a(t) = \int_{S_{n-1}} \Omega(t\sigma) d\sigma$, $t > 0$, $b(\delta) = \int_1^{\infty} t^{-1-\alpha} a(\delta t) dt$, $\gamma > 0$, $0 < \alpha < \lambda \leq l$ (где

l — порядок разности, определяющей $D_{\Omega}^{\alpha} f$). В случае $\Omega \equiv \text{const}$ можно взять $a(t)$, $b(\delta) = \text{const}$, а λ — любым таким, что $\lambda > \alpha$ (С. Г. Самко, А. Я. Якубов [4]; случай целых γ , λ и $X = C$ см. в работе тех же авторов [2]).

26.4. В случае, когда характеристика $\Omega(y')$ есть сферическая гармоника $Y_m(y')$, гиперсингулярный интеграл $D_{\Omega}^{\alpha}f$ просто выражается через $D^{\alpha-m}f$:

$$D_{Y_m}^{\alpha}f = \lambda Y_m(\mathcal{D}) D^{\alpha-m}f \text{ при } \alpha \geq m,$$

$$D_{Y_m}^{\alpha}f = \lambda Y_m(\mathcal{D}) I^{m-\alpha}f \text{ при } \alpha \leq m,$$

где λ постоянная, зависящая от α , n , m и от типа гиперсингулярного интеграла (см. С. Г. Самко [26; 31, с. 90]), ср. эти формулы в случае $\alpha = m$ с представлением (26.83).

26.5. Имеется R. J. Bagby [3] описание пространств $I^{\alpha}(L_p)$, $1 < p < n/\alpha$, не в терминах $D^{\alpha}f$, как в теоремах 26.8 и 26.9, а в терминах так называемых конструкций

Стрихарца $\int_0^{\infty} t^{-2\alpha-1} \left(\int_{|y|<1} |(\Delta_{ty}^{\hbar} f)(x)| dy \right)^2 dt$. Это описание дано в более общем

контексте пространств Лоренца $L_{p,q}$.

26.6. Если в описании пространства $I^{\alpha}(L_p)$ (см. теоремы 26.8 или 26.9) отказаться от условия $f \in L_q(R^n)$, то $f(x)$ может «содержать» многочлен, поскольку мы оказываемся в ситуации, когда $f(x)$ определяется только заданием полунормы $\|D^{\alpha}f\|_p$. Обстоятельное исследование о характере выхода функции $f(x)$ на бесконечности на полином в зависимости от определяющей ее полунормы проведено П. И. Лизоркиным [10, 11]. В связи с этим отметим, что пространство $I^{\alpha}(L_p)$ при $1 < p < \infty$, $p \geq n/\alpha$, можно трактовать как подпространство фактор-пространства $S'/p\alpha - n/p$, где S' — пространство Шварца обобщенных функций медленного роста, а $p\alpha - n/p$ — подпространство в S' , состоящее из полиномов степени не выше $\alpha - n/p$, см. работу A. J. Pryde [1] в случае $p=2$ и работы А. А. Давтяна [1, 2] в случае $1 < p < \infty$ (А. А. Давтяном рассмотрен более общий случай не изотропных риссовых потенциалов). Это утверждение было известно для изотропных риссовых потенциалов и раньше, однако авторы затрудняются дать более ранние ссылки.

26.7. В работе С. Г. Самко [20] рассмотрены гиперсингулярные интегралы не с однородной, как в (26.47), а со стабилизирующей при $y \rightarrow 0$ и $y \rightarrow \infty$ характеристикой $\Omega(y)$. Выяснено влияние такой характеристики на сходимость гиперсингулярного интеграла (вопрос б) из § 26, п. 4°). Как и в § 26, это сделано в $L_{p,r}^{\alpha}$ -постановке, т. е. $f \in L_r$, а сходимость $D^{\alpha}f$ рассматривается в L_p . Тот же вопрос б) с более общими характеристиками, охватывающими и однородные, и стабилизирующиеся характеристики, рассмотрен В. А. Ногиним [1]. Последнее исследование обобщает результаты Р. Видена (R. L. Wheeden [5]), относящиеся к случаю $r=p$, однако у Р. Видена предполагаются более слабые условия на характеристику.

26.8. Функции $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$, $1 < p < n/\alpha$, имеют все слабые (обобщенные) производные целых порядков $|\beta| \leq \alpha$, причем $\|\mathcal{D}^{\beta}f\|_r \leq c_1 \|D^{|\beta|}f\|_r \leq c_2 \|D^{\alpha}f\|_p$, где $1/r = 1/p - (\alpha - |\beta|)/n$ (С. Г. Самко [17; 31, с. 109]).

26.9. В случае целых α пространство $L_{p,r}^{\alpha}(R^n)$, рассмотренное в § 26, п. 7°, совпадает с пространством $W_{p,r}^{\alpha}$ соболевского типа, состоящим из функций $f \in L_r$ таких, что $\mathcal{D}^j f \in L_p(R^n)$, $|j| = \alpha$ (С. Г. Самко, С. М. Умархаджиев [1, 2], С. Г. Самко [31, с. 112]). Отсюда в качестве следствия можно отметить, что

$$I^{\alpha}(L_p) = \{f : f \in L_q, \mathcal{D}^j f \in L_p, |j| = \alpha\},$$

$$1 < p < n/\alpha, q = np/(n - \alpha p), \alpha = 1, 2, \dots, n-1.$$

В этих же работах дано описание $I^{\alpha}(L_p)$, $0 < \alpha < n/p$, в терминах старших производных: для того чтобы $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f \in L_q, \mathcal{D}^j f \in L_r, |j| = \alpha, D^{\alpha-[\alpha]} \mathcal{D}^j f \in L_p,$$

где $1/q = 1/p - \alpha/n$, $1/r = 1/p - (\alpha - [\alpha])/n$.

26.10. Известно следующее покоординатное описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$, содержащее информацию о поведении функций $f(x) \in I^{\alpha}(L_p)$ по каждой переменной x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (В. А. Ногин, Б. С. Рубин [3]). Пусть

$$(I_i^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \int_{R^1} \frac{\varphi(x - te_i)}{|t|^{1-\alpha}} dt, e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{i-1},$$

— частные риссовы потенциалы по переменной x_i и

$$I_i^\alpha(L_p) = \{f : f = I_i^\alpha \varphi, \varphi \in L_p(R^n)\}, \|f\|_{I_i^\alpha(L_p)} = \|\varphi\|_p, i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 29.2. Пусть $1 < p < \infty, 0 < \alpha < 1/p$. Тогда $I^\alpha(L_p) = \bigcap_{i=1}^n I_i^\alpha(L_p)$, причём

нормы $\|f\|_{I^\alpha(L_p)}$ и $\sum_{i=1}^n \|f\|_{I_i^\alpha(L_p)}$ эквивалентны.

26.11. Описание весового пространства $I^\alpha[L_p(R^n; \rho)]$ дробных интегралов с весом $\rho(x)$, удовлетворяющим условию Макенхоупта — Видена (25.43), дано в работе В. А. Ногина, С. Г. Самко [4] и имеет вид $f(x) \in I^\alpha[L_p(R^n; \rho)]$, $1 < p < n/\alpha$, тогда и только тогда, когда $f(x) \in L_q(\rho^{q/p})$, $1/q = 1/p - \alpha/n$, и либо существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^\alpha f$ по норме $L_p(R^n; \rho)$, либо $\|D_\varepsilon^\alpha f\|_{L_p(R^n; \rho)} \leq c$. В случае $n = 1$ это утверждение было получено ранее в работе К. Ф. Andersen [1].

26.12. Справедлива следующая теорема об одновременной аппроксимации функций и их риссовых производных: всякая функция $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_r + \|D^\alpha f\|_p \quad (29.8)$$

может быть при $1 < p < \infty, 1 < r < \infty, \alpha > 0$ аппроксимирована по этой норме функциями класса $C_0^\infty(R^n)$ (С. Г. Самко [17, § 5] при $1 < p < n/\alpha$, В. А. Ногин, С. Г. Самко [2] при $1/p - \alpha/n \leq 1/r \leq 1/p$ и В. А. Ногин [5, с. 28] в указанном случае).

26.13. Функция $\mu(x)$ называется мультипликатором в пространстве X , если $\mu f \in X$ и $\|\mu f\|_X \leq c \|f\|_X$ для всех $f \in X$. Для того чтобы ограниченная функция $\mu(x)$ была мультипликатором в пространстве $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов, $1 < p < n/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы порожденный ею интегральный оператор

$$N_\varepsilon \varphi = \int_{R^n} N_\varepsilon(x, y) \varphi(y) dy,$$

$$N_\varepsilon(x, y) = \sum_{v=1}^l \binom{l}{v} \int_{|t|>\varepsilon} |t|^{-n-\alpha} (\Delta_t^v \mu)(x) \Delta_{t-v, \alpha}(x-y-vt, t) dt, l > \alpha,$$

$\Delta_{m, \alpha}(x, h)$ — ядро (26.32), был равномерно по ε ограничен в $L_p(R^n)$. Достаточное условие для этого состоит в том, чтобы 1) $\int_{R^n} |t|^{-n-\alpha} \|\Delta_t^l \mu\|_{n/\alpha} dt < \infty$, 2) для каждого $i = 1, \dots, l-1$ существуют числа $\alpha_i, 0 < \alpha_i < \min(\alpha, l-i)$, такие, что $\int_{R^n} |t|^{-n-\alpha+\alpha_i} \|\Delta_t^i \mu\|_{n/(n-\alpha_i)} dt < \infty$. В частности, функции $\mu(x) \in C^\lambda(\dot{R}^n)$, $\lambda > \alpha$, являются мультипликаторами в $I^\alpha(L_p)$ (С. Г. Самко [24]).

Разрывная функция $\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$ будет мультипликатором в $I^\alpha(L_p)$, когда Ω — полупространство или шар, при $1 < p < 1/\alpha, 0 < \alpha < 1$. Случай, когда Ω — область, удовлетворяющая так называемому условию Стрихарца, см. в работе R. S. Strichartz [1] применительно к потенциалам Бесселя и в работе В. А. Ногина, Б. С. Рубина [3] применительно к потенциалам Рисса.

26.14. Оператор умножения на функции вида $c(x)(1+|x|^2)^{-\nu/2}$, $\nu > 0$, является вполне непрерывным оператором из пространства $I^\alpha(L_p)$ в пространство $I^{\alpha-\varepsilon}(L_p)$ при любом $0 < \varepsilon < \alpha$, если $\nu > \varepsilon, c(x) \in C^\lambda(\dot{R}^n)$, $\lambda > \alpha - \varepsilon$ (С. М. Умархаджиев [1]).

27.1. Справедливо следующее неравенство типа Бернштейна для бesselова дифференцирования $(E - \Delta)^{\alpha/2} g = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} \mathcal{F} g$:

$$\|(E - \Delta)^{\alpha/2} g\|_p \leq c(1 + \sigma^2)^{\alpha/2} \|g\|_p$$

для функций $g \in L_p(R^n)$, преобразования Фурье которых сосредоточены в кубе $|\xi_j| \leq \sigma, j = 1, \dots, n$, и верно неравенство типа Бора — Фавара для бesselова интегрирования $G^\alpha = (E - \Delta)^{\alpha/2}$:

$$\|(E - \Delta)^{-\alpha/2} g\|_p \leq c(1 + \sigma^2)^{-\alpha/2} \|g\|_p$$

для функций $g \in L_p(R^n)$, преобразования Фурье которых обращаются в нуль в таком же кубе. Здесь постоянная c не зависит от $g(x)$ (П. И. Лизоркин [5]).

27.2. Анизотропным бesselевым потенциалом называется интеграл

$$G^\alpha \varphi = \int_{R^n} G_\alpha(x-y) \varphi(y) dy, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где $G_\alpha(x)$ — ядро, имеющее своим образом Фурье функцию

$$\widehat{G}_\alpha(x) = [1 + \rho^2(x)]^{-\alpha_*/2}, \quad \frac{1}{\alpha_*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j},$$

$\rho(x)$ — положительное решение уравнения $\sum_{j=1}^n x_j^2 \rho^{-2\alpha_j}(x) = 1$, $\alpha_j = \alpha_*/\alpha_j$. Пространство

$G^\alpha(L_p)$ функций, представимых анизотропными бesselевыми потенциалами $G^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(R^n)$, совпадает с соболевским пространством $L_p^{(\alpha)}(R^n)$, состоящим из функций $f \in L_p(R^n)$, частные ливиллевские дробные производные $\partial^{\alpha_j} f / \partial x_j^{\alpha_j}$ которых также принадлежат $L_p(R^n)$, и, кроме того, $G^\alpha(L_p)$ описывается с помощью соответствующих анизотропных гиперсингулярных интегралов (П. И. Лизоркин [6]). Случай $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$ отражен в § 27, п. 3°.

27.3. Укажем на интегральные операторы, близкие по природе к бesselевым потенциалам и имеющие односторонний характер подобно потенциалам (25.71). Обозначим

$$G_\pm^\alpha \varphi = g_\pm^\alpha * \varphi, \quad g_\pm^\alpha(x) = \frac{d_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(x_n)_\pm^\alpha K_{n/2}(|x|)}{|x|^{n/2}} \in L_1(R^n),$$

где $d_{n-1} = 2^{1-n/2} \pi^{-n/2}$, $\alpha > 0$ (односторонние бesselевы потенциалы), $\widehat{g_\pm^\alpha}(\xi) = (V1 + |\xi|^2 - \xi_n^2 \mp i\xi_n)^{-\alpha}$. Подобно (27.22) справедливо равенство

$$G_\pm^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y_n^{\alpha-1} (M_{y_n} \varphi(\cdot, x_n \mp y_n))(x') dy_n,$$

а подобно (25.76) — представление $G^\alpha = G_\pm^{\alpha/2} G_\mp^{\alpha/2}$. Здесь

$$(M_{y_n} \varphi(\cdot, x_n - y_n))(x') = d_n y_n \int_{R^{n-1}} \frac{K_{n/2}(\sqrt{|y'|^2 + y_n^2})}{(|y'|^2 + y_n^2)^{n/4}} \varphi(x' - y', x_n - y_n) dy.$$

Обратные к $G_\pm^\alpha$ операторы реализуются в виде гиперсингулярных интегралов со взвешенными разностями (см. § 27, конец п. 4°):

$$(G_\pm^\alpha)^{-1} f = \frac{d_n}{\kappa(\alpha, l)} \int_{R_+^n} \frac{y_n^{-\alpha}}{|y|^n} (\tilde{\Delta}_{\pm y}^l f)(x) dy, \quad l > \alpha,$$

где

$$(\tilde{\Delta}_y^l f)(x) = f(x) e^{y_n |y|^{n/2} K_{n/2}(|y|)} + \sum_{k=1}^l \binom{l}{k} (-1)^k (k|y|)^{n/2} K_{n/2}(k|y|) f(x - ky).$$

Теорема 29.3. Если $\alpha > 0$ и $1 < p < \infty$, то $G_\pm^\alpha(L_p) = L_p^\alpha$, причем нормы $\|G_\pm^\alpha \varphi\|_{L_p^\alpha}$ и $\|\varphi\|_p$ эквивалентны. Пусть

$$\varphi_\varepsilon^\pm = \int_\varepsilon^\infty \int_{R^n} |y|^{-n} y_n^{-\alpha} (\tilde{\Delta}_{\pm y}^l f)(x) dy, \quad l > \alpha.$$

Для того чтобы $f \in G_\pm^\alpha(L_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon^\pm \in L_p(R^n)$. Если $f \in G_\pm^\alpha(L_p)$, $1 < p \leq \infty$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon^\pm$ существует и почти всюду.

Наряду с операторами $G_\pm^\alpha$ можно рассматривать односторонние потенциалы вида

$$\frac{c_{n-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_{R^n} \frac{(y_n)_{\pm}^{\alpha} e^{-|y_n|}}{|y|^n} \varphi(x-y) dy, \quad c_{n-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}}, \quad (29.9)$$

действие которых в образах Фурье сводится к умножению на $(1 + |\xi'| \mp i\xi_n)^{-\alpha}$ (ср. с (25.75), где следует взять $\varepsilon = 1$). При $n = 1$ эти потенциалы совпадают с $G_{\pm}^{\alpha}\varphi$ и тем самым с рассмотренными в § 18, п. 4° операторами $(E \pm \mathcal{D})^{-\alpha}$.

Операторы $G_{\pm}^{\alpha}$ в образах Фурье встречались в монографии Х. Трибеля [1, с. 282], где для них доказано, что $G_{\pm}^{\alpha}: L_p^{\alpha} \rightarrow L_p^{\alpha+\beta}$. В явном виде потенциалы $G_{\pm}^{\alpha}\varphi$ приведены в работах Б. С. Рубина [20, 24], где, в частности, получено обращение операторов $G_{\pm}^{\alpha}$ и доказана теорема 29.3. Потенциалы (29.9) приведены в монографии Г. И. Эскива [1].

27.4. Отметим описание пространства $G^{\alpha}(L_p)$ бесселевых потенциалов в терминах «усеченных» интегралов (27.46), (27.54), (27.55).

Теорема 29.4. Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 2, 4, 6, \dots$. Тогда $f(x) \in G^{\alpha}(L_p)$, если и только если $\mathcal{D}^{\alpha}f \in L_p$, $|f| \leq [\alpha]$, и выполнено одно из следующих условий:

- 1) последовательность $D_{\lambda_{\alpha}, \varepsilon}^{\alpha} f$ интегралов (27.46) сходится по L_p -норме;
- 2) $\sup_{\varepsilon > 0} \|D_{\lambda_{\alpha}, \varepsilon}^{\alpha} f\|_p < \infty$.

Заметим, что некоторое достоинство гиперсингулярных интегралов $D_{\lambda_{\alpha}}^{\alpha} f$ по сравнению с используемыми в теореме 27.3 риссовыми производными $D^{\alpha}f$ состоит в том, что они содержат характеристику $\lambda_{\alpha}(|y|)$, экспоненциально убывающую на бесконечности.

Теорема 29.5. Пространство $G^{\alpha}(L_p)$, $\alpha > 0$, $1 \leq p < \infty$, состоит из тех и только тех функций $f(x) \in L_p$, для которых сходится по L_p -норме последовательность $D_{\varepsilon}^{\alpha} f$, где $D_{\varepsilon}^{\alpha} f$ — один из интегралов (27.54), (27.55) (или усеченный интеграл (27.56)).

Первая из этих теорем установлена В. А. Ногиним [8], вторая — Б. С. Рубиним [23, 25].

27.5. Изложение теории бесселевых потенциалов с точки зрения дробных степеней операторов можно найти в работах М. J. Fisher [3—6].

28.1. Для функций φ , зависящих только от лоренцева расстояния $\rho(\xi) = \sqrt{\xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_n^2}$ (называемых лоренц-инвариантными функциями), имеется формула преобразования Фурье — Лапласа, подобная формуле Бохнера (25.11):

$$\int_{R^n} e^{i\xi \cdot z} \varphi[\rho(\xi)] d\xi = \frac{(2\pi)^{(n-2)/2}}{[\rho(z)]^{(n-2)/2}} \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{(n-2)/4} K_{(n-2)/2}(\sqrt{t}\rho(z)) dt,$$

где функция $\varphi[\rho(\xi)]$ сосредоточена в световом конусе будущего $K_+^{\dagger} = \{\xi : \rho^2(\xi) > 0, \xi_1 > 0\}$, $z = x + iy$, $x \in R^n$, $y \in K_+^{\dagger} = \{y : \rho^2(y) > 0, y_1 < 0\}$, $K_{\nu}(z)$ — функция Макдональда и предполагается, что интеграл слева сходится абсолютно (А. G. Domingues, S. E. Trione [1]), см. по этому поводу также книгу Ж. Лере [1], где имеется формула для преобразования Фурье — Лапласа лоренц-инвариантных функций в виде композиции одномерного преобразования Фурье — Лапласа с дробным интегрированием (подобная формуле (25.14)).

28.2. В. А. Ногиним и Б. С. Рубиним [1, 5] были введены и исследованы пространства

$$\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha} = \mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}(R^{n+1}) = \{f : \|f\|_r + \|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2 + it)^{\alpha/2} \mathcal{F}f\|_p < \infty\},$$

$$\alpha > 0, 1 \leq p < \infty, 1 \leq r < \infty,$$

(ср. с классами $L_{p,r}^{\alpha} = \{f : \|f\|_r + \|\mathcal{F}^{-1}|\xi|^{\alpha} \mathcal{F}f\|_p < \infty\}$, см. (26.91)), являющиеся обобщением пространств $H^{\alpha}(L_p)$ и $\mathcal{H}^{\alpha}(L_p)$ и совпадающие с первыми при $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1 + n/2$, $r = (n+2)p/(n+2-\alpha p)$ и со вторыми при $\alpha > 0$, $1 < p = r < \infty$. Классы $\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha}$ состоят из функций $f_i \in L_r(R^{n+1})$, представимых потенциалом $H^{\alpha}\varphi$, $\varphi \in L_p(R^{n+1})$:

$$\mathcal{L}_{p,r}^{\alpha} = L_r \cap H^{\alpha}(L_p), 1 \leq p, r < \infty, \alpha > 0;$$

они описываются в следующих терминах:

$$\mathcal{L}_{p,r}^\alpha = \{f: f \in L_r, T^\alpha f \in L_p\}, \quad 1 \leq p, r < \infty, \alpha > 0,$$

$$\mathcal{L}_{p,r}^\alpha = \{f: f \in L_r, \sup_{\varepsilon > 0} \|T_\varepsilon^\alpha f\|_p < \infty\}, \quad 1 < p < \infty, 1 \leq r < \infty, \alpha > 0,$$

где T^α — оператор (28.52), а $T_\varepsilon^\alpha f$ — усеченный интеграл в (28.52). Для пространств $\mathcal{L}_{p,p}^\alpha = \mathcal{H}^\alpha(L_p)$ справедливо аналогичное описание в терминах гиперсингулярного интеграла (28.54).

При $0 < \alpha < 2$ описание пространств $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$ в терминах гиперсингулярных интегралов (с разностями первого порядка) получено также В. А. Ногиним [5], S. Chanillo [1]. R. J. Bagby [1] при $0 < \alpha < 1$ использовал для тех же целей иные средства — конструкции типа Стрихарца. Имеется также описание пространства $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$ при $\alpha \geq 1$ в неконструктивных терминах — с помощью редукции, см. работу V. R. Gopala Rao [1, 2].

В. А. Ногин, Б. С. Рубин [1, 5] получили «покомпонентное» описание пространств $\mathcal{L}_{p,r}^\alpha$, характеризующее разное поведение функций $f(x, t) \in \mathcal{L}_{p,r}^\alpha$ по пространственной компоненте x и по временной переменной t :

$$\mathcal{L}_{p,r}^\alpha = \{f: f \in L_r, D_x^\alpha f \in L_p, D_t^{\alpha/2} f \in L_p\},$$

где $1 < p < \infty, 1 \leq r < \infty, \alpha > 0$ и

$$D_x^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int_{|y| > \varepsilon} \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} f(x - ky, t) |y|^{-n-\alpha} dy$$

есть частная риссова производная по переменной x , $D_t^{\alpha/2} f$ — частная риссова производная по переменной t , определяемая аналогично. Вместо «сцепленной» производной $D_x^\alpha f$ можно рассматривать покоординатные производные $D_{x_i}^\alpha f$, $i = 1, 2, \dots, n$, и дать соответствующее покоординатное описание пространств $\mathcal{L}_{p,r}^\alpha$. С помощью такого покомпонентного и покоординатного описания В. А. Ногин, Б. С. Рубин [1, 5] исследовали мультипликаторы в $\mathcal{L}_{p,r}^\alpha$ и установили связь пространства $\mathcal{L}_{p,r}^\alpha$ с соболевскими классами при целых α . В этих работах указаны достаточные признаки для мультипликаторов в терминах классов $C^\lambda(\mathbb{R}^n)$. Указан также широкий класс областей в $\mathbb{R}^{n+1}$, содержащий, в частности, так называемые области Стрихарца, характеристические функции которых являются мультипликаторами в $\mathcal{L}_{p,r}^\alpha$. Мультипликаторы в $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$ изучались R. J. Bagby [1]. S. Chanillo [1] установил, что функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ являются мультипликаторами в $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$.

Наконец, В. А. Ногин, Б. С. Рубин [1, 5] показали, что при четных $\alpha = 2m$, $m = 1, 2, \dots$, пространство $\mathcal{L}_{p,r}^{2m}$ состоит из функций $f(x, t) \in L_p$, имеющих в $L_p(\mathbb{R}^{n+1})$ покоординатные производные $\partial^{2m} f / \partial x_j^{2m}$, $j = 1, \dots, n$, и $\partial^{2m} f / \partial t^m$. В случае нечетных $\alpha = 2m - 1$, $m = 1, 2, \dots$, получено аналогичное утверждение с той разницей, что порядок гладкости по t , равный $m - 1/2$, является дробным. В качестве дробной производной при этом берется частная риссова производная $D_t^{m-1/2}$. В случае $r = p$ близкие утверждения были получены V. R. Gopala Rao [1], однако приведенные им утверждения содержат в достаточной части избыточную информацию о смешанных производных, от которой в указанных работах В. А. Ногина, Б. С. Рубина [1, 5] удалось избавиться.

Отметим также, что в работе R. J. Bagby [1] получены интерполяционные теоремы для пространств $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$.

Относительно пространств $\mathcal{H}^\alpha(L_p)$ заметим, что они совпадают с точностью до эквивалентности норм с анизотропными классами функций из L_p , имеющих в L_p обобщенные ливиллевские производные порядка α по переменным x_j , $j = 1, \dots, n$, и порядка $\alpha/2$ по t , что легко проверяется с помощью L_p -мультипликаторов. Эти анизотропные классы являются частными случаями анизотропных пространств, исследованных в общем виде П. И. Лизоркиным [5, 6, 8].

28.3. Как показано В. А. Ногиним, Б. С. Рубиним [2], гиперсингулярные интегралы $T^\alpha f$, $\mathcal{I}^\alpha f$, см. (28.52), (28.54), обращающие потенциалы $f = H^\alpha \phi$, $f = \mathcal{H}^\alpha \phi$, $\phi \in L_p$, можно понимать как пределы почти всюду соответствующих «усеченных» интегралов.

28.4. Дробные степени гиперболического оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{v}{y} \frac{\partial}{\partial y}$ исследовались в работах I. G. Sprinkhuizen-Kuypers [1, 2].

28.5. Еще один из возможных вариантов дробного интегрирования вводится равенством

$$\mathcal{F}(T_t^\alpha f) = e^{-\frac{t}{2}|x|^\alpha} \hat{f}(x), \quad \alpha > 0, \quad t > 0,$$

в образах Фурье. Такой вариант исследовал К. Такано [2], показавший, что операторы T_t^α при любом $\alpha > 0$ образуют полугруппу класса (C_0) в пространстве $L_p(R^n; \rho)$ с весом $\rho(x)$, удовлетворяющим условию Макенхоупта. Производящий оператор этой полугруппы есть гиперсингулярный интеграл $D^\alpha f$ (понимаемый у К. Такано как замыкание в $L_p(R^n; \rho)$ оператора $\mathcal{F}^{-1}|x|^\alpha \mathcal{F}$). Случай $\rho(x) = (1 + |x|^2)^{-m/2}$, $m > n$, см. в работе К. Такано [1].

28.6. В связи с различными формами дробного интегродифференцирования функций многих переменных упомянем случай функций, заданных на единичной сфере в R^n . Имеется большое число работ, посвященных дробным степеням оператора Бельтрами—Лапласа на сфере, их обобщениям и аналогам. Ограничимся ссылкой на обзор С. Г. Самко [30], где можно найти литературные указания, и на работы С. Г. Самко [22], П. М. Павлова, С. Г. Самко [1], в которых введены сферические аналоги риссова дробного интегродифференцирования, в том числе и сферические гиперсингулярные интегралы. О дробном интегрировании функций на сфере см. также в работе L. Colzani [1].

28.7. Обобщение операции дробного интегродифференцирования на случай нескольких переменных, при котором интегрирование по полуоси $(-\infty, x)$ (в одномерном случае) заменяется интегрированием по конусу с вершиной в точке $x \in R^n$, дано в монографии В. С. Владимирова, Ю. Н. Дрожжинова, Б. И. Завьялова [1]. Приведем определение этого обобщения. Пусть Γ — замкнутый выпуклый острый телесный конус в R^n ; $\Gamma^* = \{\xi \in R^n : \xi \cdot x \leq 0, \forall x \in \Gamma\}$ — конус, сопряженный к Γ ; $C = \text{int } \Gamma^*$ — множество внутренних точек Γ^* ; S_Γ — сверточная алгебра обобщенных функций медленного роста с носителем в Γ ; $H(C)$ — алгебра функций, голоморфных в трубчатой области $T^C = \{z = x + iy : x \in R^n, y \in C\}$, являющихся преобразованиями Лапласа $L[g] = (g(\xi), e^{iz \cdot \xi})$ обобщенных функций $g \in S_\Gamma$. Функция $\mathcal{H}_C(z) = \int_\Gamma e^{iz \cdot \xi} d\xi$ называется *ядром Коши трубчатой области T^C* . Открытый выпуклый острый конус C называется *регулярным*, если $[\mathcal{H}_C(z)]^{-1} \in H(C)$.

Операция дробного интегродифференцирования вводится следующим образом. Пусть $C = \text{int } \Gamma^*$ — регулярный конус. Тогда $\mathcal{H}_C^\alpha(z) = [\mathcal{H}_C(z)]^\alpha \in H(C)$ для любого $\alpha \in R^1$.

Обозначим через $\theta_\Gamma^\alpha(\xi) = L^{-1}[\mathcal{H}_C^\alpha(z)](\xi)$ прообраз Лапласа степени $\mathcal{H}_C^\alpha(z)$ (при $\alpha = 0$ это есть характеристическая функция конуса Γ). Оператор дробного интегродифференцирования определяется как свертка с обобщенной функцией $\theta_\Gamma^\alpha(\xi)$. Введенные операторы, очевидно, образуют абелеву группу по α .

Нетрудно убедиться в том, что тензорное произведение одномерных ливиллевских дробных интегралов (одинакового порядка) и потенциалы Рисса с лоренцевой метрикой являются частными случаями введенных таким образом операторов.

28.8. Другой подход к построению дробного интегродифференцирования, связанного с конусами в R^n , был ранее развит С. Г. Гиндикиным [1, 2] (см. также Б. Р. Вайнберг, С. Г. Гиндикин [1]). В отличие от п. 28.7 порядок дробного интеграла здесь является «многомерным». Пусть V — выпуклый конус в R^n , не содержащий прямых, для которого существует группа $G(V)$ линейных преобразований, сохраняющих V , обладающих свойством: для любых точек $x, y \in V$ существует единственное преобразование $\psi \in G(V)$, такое, что $\psi(x) = y$. Если зафиксировать некоторую точку $e \in V$, то на V можно перенести мультипликативную структуру группы $G(V) : xy = g(x)y$, где $g(x)e = x$, $g(x) \in G(V)$. Сложными степенными функциями называются функции, удовлетворяющие условию $f(xy) = f(x)f(y)$. Всякая сложная степенная функция f , нормированная условием $f(e) = 1$,

имеет вид $f(x) = \prod_{k=1}^l [\chi_k(x)]^{\rho_k} \stackrel{\text{def}}{=} x^\rho$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in C^l$. Число l называется рангом конуса V ; $\chi_k(x)$ — некоторые дробно-рациональные функции от координат точки x . Конус V задается неравенствами $\chi_k(x) > 0$, $k = 1, \dots, l$. Пусть d_μ — мера, инвариантная относительно группы $G(V)$ (она связана с евклидовым соотношением $d_\mu = x^d dx$, где $d = (d_1, \dots, d_l) \in R^l$; $\Gamma_V(\rho)$ — интеграл Энгеля второго рода (или Γ -функция конуса V , ее можно записать в виде произведения обычных Γ -функций). Оператор Римана — Ливилля порядка $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l) \in C^l$ определяется в виде интеграла

$$(\mathcal{P}_V \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_V(\rho)} \int_x^\infty \varphi(y) (y - x)^{\rho + d} dy,$$

где интегрирование производится по конусу (x, ∞) , состоящему из точек y , для которых $y - x \in V$.

В указанной работе С. Г. Гиндикина [1] проведено детальное исследование операторов $\mathcal{P}_v$, даны их приложения к построению фундаментальных решений некоторых дифференциальных уравнений, а также к решению ряда задач интегральной геометрии. Рассмотрено уравнение Абеля $\mathcal{P}_v \varphi = f$.

Близкие в идейном плане построения были проведены ранее L. Garding [1] для случая конусов симметричных и эрмитовых матриц.

Операторам Римана—Лиувилля, связанным с однородными конусами, посвящена также работа Т. Watanabe [1].

Отметим, что операторы Римана—Лиувилля $\mathcal{P}_v$ были использованы В. С. Рабиновичем [1] при исследовании многомерных интегральных уравнений типа свертки, символ которых имеет особенности на бесконечности (типа сложной степенной функции некоторого конуса). В терминах операторов $\mathcal{P}_v$ в указанной работе построены аналоги функциональных пространств Соболева—Слободецкого и в терминах последних исследована нетеровость уравнений типа свертки.

28.9. Пусть $A_c(b)$ — пирамида (28.60), $x \in R^n$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ — вектор-функция. Введем обозначение $k(x) = k_1(x_1) \dots k_n(x_n)$. Рассмотрим более общее, чем уравнение типа Абеля (28.65), уравнение

$$\int_{A_c(x)} k(A \cdot (x - t)) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in A_c(b). \quad (29.10)$$

Пусть для ядра $k(x)$ существует вектор-функция $l(x)$ такая, что

$$\int_{\sigma(x, \tau)} l(A \cdot (x - t)) k(A \cdot (t - \tau)) dt = 1, \quad (29.11)$$

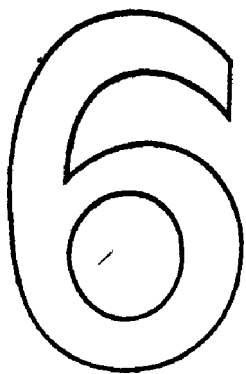
где $\sigma(x, \tau)$ — область (28.64). Тогда для уравнения (29.10) проходит тот же метод, которым решалось уравнение (28.65). При этом единственное решение уравнения (29.10) имеет вид

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ji}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \int_{A_c(x)} l(A \cdot (x - t)) f(t) dt.$$

Уравнение (29.10) является пирамидальным аналогом уравнения (4.1), а условие (29.11) — пирамидальным аналогом условия Сонинна (4.2").

ГЛАВА

Приложения к интегральным уравнениям первого рода со степенными и степенно- логарифмическими ядрами



В этой главе дадим приложения дробных интегралов и производных к интегральным уравнениям первого рода

$$M\varphi \equiv \int_{\Omega} k(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in \Omega,$$

ядра $k(x, t)$ которых имеют особенность типа $|x - t|^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, или, более общо, $|x - t|^{\alpha-1} \ln^m \frac{\gamma}{|x - t|}$. В первом слу-

чае естественным образом возникают дробные интегралы Римана—Лиувилля, во втором случае—их обобщения, рассмотренные в § 21. Ядра $k(x, t)$ предполагаются для простоты вещественнозначными.

В случае $k(x, t) = c(x, t)|x - t|^{\alpha-1}$ исследование и решение рассматриваемого уравнения первого рода основано на выделении в явном виде оператора дробного интегрирования. Именно уравнение $M\varphi = f$ можно, вообще говоря, представить в виде $I^{\alpha} N\varphi = f$, $N = \mathcal{D}^{\alpha} M$, где I^{α} , $\mathcal{D}^{\alpha}$ —те или иные формы дробного интегриродифференцирования. Уравнение $N\varphi = g$, $g = \mathcal{D}^{\alpha} f$, получаемое после обращения уравнения Абеля, оказывается при широких предположениях относительно функции $c(x, t)$ уравнением второго рода. В случае, когда $c(x, t)$ непрерывна при $t = x$, это будет уравнение Фредгольма второго рода. Если же $c(x, t)$ может претерпевать разрыв первого рода при $t = x$ (а именно этот случай особенно интересен и часто встречается в приложениях), ситуация оказывается сложнее и содержательнее: возникающее уравнение второго рода будет сингулярным. Теория таких уравнений хорошо известна, мы будем предполагать знакомство читателя с основами этой теории, прекрасное изложение которой можно найти в известных книгах Ф. Д. Гахова [1], Н. И. Мусхелишвили [1]. Основные результаты этой теории, нужные для данной главы, мы предварительно приводим в п. 1° § 1. В простейших случаях (см., например, § 30, п. 3°) обойдемся минимальными сведениями о сингулярных интегралах, приведенными в § 11.

Некоторые типы сингулярных уравнений (в частности, характеристические) решаются в замкнутой форме. Это обстоятельство для одного класса рассматриваемых уравнений первого рода позволит получить решение в явном виде — в замкнутой форме, т. е. в квадратурах. В самом же общем случае будут получены качественные результаты, характеризующие разрешимость уравнения:

нормальная разрешимость, формула для индекса (см. об этих понятиях в § 31, п. 1°).

Обратим внимание на одну деликатность, связанную с представлением оператора M в виде $M = I^\alpha N$, за которой будем следить при исследовании уравнений. Это представление, очевидно, предполагает выполнение тождества $M = I^\alpha \mathcal{D}^\alpha M$, но, вообще говоря, $I^\alpha \mathcal{D}^\alpha f \neq f$, см., например, (2.60). Обеспечить равенство $I^\alpha \mathcal{D}^\alpha f = f$ можно, см. (2.59), взяв функции f , представимые дробным интегралом порядка α . Следовательно, нам нужно будет следить за тем, чтобы образ оператора M был вложен в образ оператора I^α дробного интегрирования.

Что же касается уравнений первого рода с ядром, имеющим степенно-логарифмическую особенность, то для них схема исследования та же, но вместо операторов дробного интегрирования будем использовать операторы $I^{\alpha, m}$, рассмотренные в § 21, а вместо дробного дифференцирования — обратные к $I^{\alpha, m}$ операторы, записываемые с помощью свертки с функцией Вольтерра.

§ 30. ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ

Начнем с рассмотрения уравнения, получившего название обобщенного интегрального уравнения Абеля. Более простым будет случай уравнения по всей прямой. На конечном отрезке существенно влияние границы (концов отрезка). Предварительно в п. 1° приведем для удобства читателей необходимые сведения о решении сингулярных интегральных уравнений.

1°. О характеристическом сингулярном уравнении. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение по всей прямой имеет вид

$$a_1(x) \varphi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = f(x). \quad (30.1)$$

Коэффициенты $a_1(x)$, $a_2(x)$ у нас будут вещественнозначными. Пусть

$$a_1(x), a_2(x) \in H^\lambda(\dot{R}^1), \quad 0 < \lambda \leq 1; \quad a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0, \quad x \in \dot{R}^1. \quad (30.2)$$

Обозначим

$$G(x) = \frac{a_1(x) - ia_2(x)}{a_1(x) + ia_2(x)} = e^{i\theta(x)}, \quad \theta(x) = \arg G(x). \quad (30.3)$$

Величина

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg G(x) \quad (30.4)$$

называется *индексом уравнения* (30.1). Уравнение (30.1) решается в квадратурах и его разрешимость характеризуется следующей теоремой.

Теорема 30.1. Пусть выполнено (30.2). Если $\kappa \geq 0$, то уравнение (30.1) безусловно разрешимо в $L_p(R^1)$ при любой правой части $f(x) \in L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$, и его общее решение дается формулой

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \frac{a_2(x) Z(x)}{(x+i)^k} + \frac{a_1(x)}{A(x)} f(x) - \frac{a_2(x) Z(x)}{A(x) \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{Z(t)(t-x)}, \quad (30.5)$$

где c_k — произвольные постоянные (сумма опускается в случае $\kappa = 0$),
 $A(x) = a_1^2(x) + a_2^2(x)$, а

$$Z(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{-\kappa/2} \sqrt{A(x)} e^{\gamma(x)}, \quad \gamma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \left[\left(\frac{t-i}{t+i} \right)^{\kappa} G(t) \right]}{t-x} dt.$$

Если $\kappa < 0$, для разрешимости уравнения (30.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{Z(x)(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, \dots, |\kappa|. \quad (30.6)$$

Отметим, что

$$Z(x), \quad \frac{1}{Z(x)} \in H^{\lambda}(\dot{R}^1), \quad (30.7)$$

если $a_1(x), a_2(x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1)$, $0 < \lambda < 1$.

Сингулярное уравнение вида

$$a_1(x) \psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2(t) \psi(t)}{t-x} dt = g(x) \quad (30.8)$$

также решается в квадратурах, при $\kappa \geq 0$ разрешимо безусловно, имея общее решение

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\kappa} \frac{c_k Z(x)}{(x+i)^k} + \frac{a_1(x)}{A(x)} g'(x) - \frac{Z(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2(t) g(t) dt}{Z(t) A(t) (t-x)}, \quad (30.9)$$

где $A(x), Z(x)$ — то же, что в (30.5). Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (30.8) при $\kappa < 0$ состоит в том, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2(x) g(x)}{Z(x)(x+i)^k} dx = 0, \quad k = 1, \dots, |\kappa|.$$

Характеристическое сингулярное уравнение на конечном отрезке

$$a_1(x) \varphi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = f(x), \quad a < x < b, \quad [(30.10)]$$

имеет более сложную природу. Пусть по-прежнему

$$a_1(x), a_2(x) \in H^{\lambda}([a, b]); \quad a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0, \quad x \in [a, b]. \quad (30.11)$$

Решения уравнения (30.10) можно разыскивать в классе $H^* = H^*(a, b)$ гельдеровских функций с интегрируемыми особенностями на концах отрезка (см. определение 13.1). Это связано с тем, что решения уравнения (30.10) имеют, вообще говоря, особенности в точках a, b . Иногда нужно найти решения, ограниченные на одном или обоих концах отрезка. Обозначим

$$H = H([a, b]) = \bigcup_{\mu > 0} H^{\mu}([a, b]) = H^* \cap C([a, b]), \quad (30.12)$$

$$H_a^* = H^* \cap C([a, b)), \quad H_b^* = H^* \cap C((a, b]) \quad (30.13)$$

и в качестве класса решений для уравнения (30.10) будем брать один из классов H^*, H_a^*, H_b^*, H .

Индекс уравнения (30.10) в отличие от случая всей прямой зависит от того, в каком классе разыскиваются решения. Пусть $G(x) = e^{i\theta(x)}$ — функция (30.3). Выберем значение $\arg G'(x)$ так, чтобы

$$0 \leq \theta(a) < 2\pi. \quad (30.14)$$

Пусть

$$n_a = \begin{cases} 0, & \text{если ищется решение, ограниченное при } x \rightarrow a, \\ 1, & \text{если ищется решение, неограниченное при } x \rightarrow a, \end{cases}$$

и аналогично вводится n_b . Через X обозначаем одно из пространств H^* , H_a^* , H_b^* , H . Положим

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_X = \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} \right] + n_a + n_b - 1 = \\ &= \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} \right] + \begin{cases} 1 & \text{в случае класса } H^*, \\ 0 & \text{в случае класса } H_a^* \text{ или } H_b^*, \\ -1 & \text{в случае класса } H \end{cases} \end{aligned} \quad (30.15)$$

и

$$\mu_a = 1 - n_a - \frac{\theta(a)}{2\pi}, \quad \mu_b = \frac{\theta(b)}{2\pi} - \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} \right] - n_b.$$

Здесь $[\theta(b)/2\pi]$ означает целую часть числа. Подчеркнем, что $\mu_a = \mu_a(X)$, $\mu_b = \mu_b(X)$ и что $-1 < \mu_a < 1$, $-1 < \mu_b < 1$.

Теорема 30.2. Пусть выполнены условия (30.11), (30.14) и

$$f(x) = \frac{f_*(x)}{(x-a)^{1-\nu_a}(b-x)^{1-\nu_b}}, \quad f_*(x) \in H.$$

Уравнение (30.10) безусловно разрешимо в классе X , если $\nu_a > \mu_a$, $\nu_b > \mu_b$ и $\kappa \geq 0$, и его общее решение дается формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{a_2(x)Z_0(x)}{A(x)} (x-a)^{\mu_a} (b-x)^{\mu_b} P_{\kappa-1}(x) + \frac{a_1(x)f(x)}{A(x)} - \\ &- \frac{a_2(x)Z_0(x)}{\pi A(x)} \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\mu_a} \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{\mu_b} \frac{f(t)dt}{Z_0(t)(t-x)}, \end{aligned} \quad (30.16)$$

где $A(x)$ — то же, что в (30.5), $P_{\kappa-1}(x)$ — многочлен степени $\kappa-1$ с произвольными коэффициентами ($P_{\kappa-1}(x) \equiv 0$ при $\kappa=0$),

$$Z_0(x) = \exp \frac{1}{2\pi} \left[\int_a^b \frac{\theta(t)dt}{t-x} + \theta(a) \ln(x-a) - \theta(b) \ln(b-x) \right] \in H. \quad (30.16')$$

Если $\kappa < 0$, то для разрешимости уравнения (30.10) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b \frac{f(x)(x-a)^{\kappa-1}dx}{Z_0(x)(x-a)^{\mu_a}(b-x)^{\mu_b}} = 0, \quad \kappa = 1, \dots, |\kappa|.$$

При выполнении этого условия единственное решение уравнения (30.10) дается формулой (30.16) с $P_{\kappa-1} \equiv 0$.

2°. **Обобщенное интегральное уравнение Абеля на оси.** В этом пункте, используя лиувиллевское дробное интегрирование $I_{\pm}^{\alpha}$, дадим эффективное (в замкнутой форме) решение уравнений первого рода

$$M^{\alpha} \varphi \equiv u(x) \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(x) \int_x^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \quad (30.17)$$

$$\bar{M}^{\alpha} \psi \equiv \int_{-\infty}^x \frac{u(t) \psi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_x^{\infty} \frac{v(t) \psi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = g(x). \quad (30.18)$$

Уравнение (30.17) будем называть *обобщенным уравнением Абеля с внешними коэффициентами*, а (30.18) — *обобщенным уравнением Абеля с внутренними коэффициентами*. Эти уравнения можно записать также в виде

$$M^{\alpha} \varphi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1(x) + c_2(x) \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad (30.17')$$

$$\bar{M}^{\alpha} \psi \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1(t) + c_2(t) \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \psi(t) dt = g(x), \quad (30.18')$$

где

$$c_1(x) = \frac{u(x) + v(x)}{2}, \quad c_2(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2}. \quad (30.19)$$

Уравнения (30.17), (30.18) переписываются также очевидным образом в терминах операторов дробного интегрирования

$$M^{\alpha} \varphi \equiv u(x) \Gamma(\alpha) I_{+}^{\alpha} \varphi + v(x) \Gamma(\alpha) I_{-}^{\alpha} \varphi = f(x), \quad (30.20)$$

$$\bar{M}^{\alpha} \psi \equiv \Gamma(\alpha) I_{+}^{\alpha} (u\psi) + \Gamma(\alpha) I_{-}^{\alpha} (v\psi) = g(x), \quad (30.21)$$

где $I_{\pm}^{\alpha}$ — операторы дробного интегрирования (5.2), (5.3).

Решение уравнений (30.17), (30.18) будем разыскивать в пространстве $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$. Принципиальный вопрос, как и для всякого интегрального уравнения первого рода, состоит в том, как описать допустимые правые части $f(x)$, $g(x)$ уравнений (30.17), (30.18) при заданном классе решений, в данном случае $L_p(R^1)$. Увидим, что области значений $M^{\alpha}(L_p)$, $\bar{M}^{\alpha}(L_p)$ совпадают с пространством $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов, подробно изученным нами в § 6 (или, может быть, отличаются от $I^{\alpha}(L_p)$ на конечномерное подпространство).

Относительно коэффициентов $u(x)$, $v(x)$ будем предполагать, что

$$u(x), v(x) \in H^{\lambda}(\dot{R}^1), \quad \lambda > \alpha, \quad (30.22)$$

в случае уравнения (30.17) и

$$u(x), v(x) \in H_{\mathbb{E}}^{\lambda}(\dot{R}^1), \quad \lambda > 0, \quad (30.23)$$

в случае уравнения (30.18). Здесь $\dot{R}^1$ — прямая, пополненная одной бесконечно удаленной точкой, $H^{\lambda}(\dot{R}^1)$ — гильдеровский класс функций, определяемый условием (1.6). Поясняя условие (30.22), отметим, что оно продиктовано требованием, чтобы умножение на $u(x)$, $v(x)$ не выводило из класса функций, представимых интегралом дробного порядка α (см. теорему 6.7).

Будем считать, что коэффициенты $u(x)$, $v(x)$ не обращаются в нуль одновременно:

$$u^2(x) + v^2(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (30.24)$$

Ключевым моментом при решении уравнений (30.17), (30.18) является установленная в § 11 связь между операторами $I_{\pm}^{\alpha}$ дробного интегрирования и сингулярным оператором S .

А. Решение обобщенного уравнения Абеля с внешними коэффициентами. Применяя в уравнении (30.20) тождество (11.10), имеем

$$M^{\alpha}\Phi \equiv \Gamma(\alpha) [(u + v \cos \alpha\pi) I_{+}^{\alpha}\Phi + v \sin \alpha\pi S I_{+}^{\alpha}\Phi] = f,$$

т. е. получаем представление оператора M^{α} в виде композиции:

$$M^{\alpha}\Phi \equiv N_0 I_{+}^{\alpha}\Phi = f, \quad (30.25)$$

где

$$N_0\Phi = a_1\Phi + a_2S\Phi = a_1(x)\Phi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(t) dt}{t-x}. \quad (30.26)$$

$$a_1(x) = \Gamma(\alpha) [u(x) + v(x) \cos \alpha\pi], \quad a_2(x) = \Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi v(x). \quad (30.27)$$

Из (30.25) уже ясно, что решения уравнения (30.15) находятся в замкнутой форме: нужно последовательно решить по известным формулам сингулярное уравнение

$$N_0\Phi = f \quad (30.28)$$

вида (30.1), а затем обратить уравнение Абеля. При решении этих уравнений в такой последовательности нам нужно обеспечить разрешимость уравнения Абеля $I_{+}^{\alpha}\Phi = \Phi$. Именно мы ищем решения $\Phi \in L_p$ и предполагаем, что $f \in I^{\alpha}(L_p)$, но при обращении уравнения Абеля $I_{+}^{\alpha}\Phi = \Phi$ мы не знаем, вообще говоря, что $\Phi \in I^{\alpha}(L_p)$. Поэтому нам нужно будет убедиться в том, что решения $\Phi(x)$ характеристического сингулярного уравнения (30.28) представимы дробным интегралом порядка α , если правая часть $f(x)$ обладает этим свойством. Это будет установлено в следующей ниже лемме 30.1.

Решим уравнение (30.28) по формуле (30.5) решения характеристического сингулярного уравнения. Фактически нужно в свете сказанного выше исследовать это уравнение в специальном пространстве $I^{\alpha}(L_p)$. Найдем все решения этого уравнения в пространстве L_q , $q = p/(1-\alpha p)$, с учетом того, что $I^{\alpha}(L_p) \subset L_q$ по теореме 5.3, и затем покажем, что такие решения принадлежат $I^{\alpha}(L_p)$, если $f \in I^{\alpha}(L_p)$. Из условий (30.24), (30.22) вытекает, что условия (30.2) выполнены. Индекс κ уравнения (30.28) (см. (30.4)) в обозначениях (30.19) имеет вид

$$\kappa = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg \left[c_1(x) + i c_2(x) \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \right]. \quad (30.29)$$

Число κ принимает целые значения: $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

При $\kappa \geq 0$ общее решение сингулярного уравнения (30.28) дается, согласно (30.5), формулой

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \sum_{k=1}^{\kappa} c_k \frac{v(x) Z(x)}{(x+i)^k} + \frac{u(x) + v(x) \cos \alpha\pi}{\Gamma(\alpha) A(x)} f(x) - \\ & - \frac{v(x) Z(x)}{A(x)} \frac{\sin \alpha\pi}{\pi \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{Z(t)(t-x)}, \end{aligned} \quad (30.30)$$

где c_k — произвольные (комплексные) постоянные,

$$A(x) = u^2(x) + 2u(x)v(x)\cos\alpha\pi + v^2(x), \quad (30.31)$$

а функция $Z(x)$ вычисляется по формуле

$$Z(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{-\kappa/2} \sqrt{A(x)} e^{\gamma(x)}, \quad (30.32)$$

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i} \right)^{-\kappa} \frac{u(\tau) + e^{-i\alpha\pi}v(\tau)}{u(\tau) + e^{i\alpha\pi}v(\tau)} \right]}{\tau-x} d\tau.$$

В случае $\kappa < 0$ возникают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (30.26), состоящие, согласно (30.6), в том, что правая часть ортогональна конечному числу линейно независимых функций.

Лемма 30.1. Пусть $a_1(x), a_2(x) \in H^\lambda(\mathbb{R}^1)$, $\lambda > \alpha$. Если $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, то и все решения $\Phi \in L_q$, $q = p/(1-\alpha p)$, уравнения $a_1\psi + a_2S\psi = f$ также принадлежат $I^\alpha(L_p)$.

Доказательство. Так как $f \in L_q(\mathbb{R}^1)$, то все решения из $L_q(\mathbb{R}^1)$ даются формулой (30.5). Тогда с учетом (30.7) и в силу теоремы 6.7 и следствия 1 из теоремы 11.4 второе и третье слагаемые в (30.5) принадлежат $I^\alpha(L_p)$. Далее, в силу формулы (5.28) имеем $(x+i)^{-k} = I_+^\alpha \Phi_k$, где $\Phi_k(x) = \text{const} (x+i)^{-k-\alpha} \in L_p(\mathbb{R}^1)$ при любом $p \geq 1$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому $(x+i)^{-k} \in I^\alpha(L_p)$, а тогда и $Z(x)v(x)(x+i)^{-k} \in I^\alpha(L_p)$ в силу теоремы 6.7. Лемма доказана.

В силу леммы 30.1 решения $\varphi(x)$ исходного уравнения (30.17), (30.25) находятся по формуле

$$\varphi(x) = D_+^\alpha \Phi, \quad D_+^\alpha \Phi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\Phi(x) - \Phi(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (30.33)$$

где $\Phi(x)$ — функции (30.30). (Решение $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^1)$ уравнения Абеля находим в соответствии с теоремой 6.1.)

Итак, с учетом леммы 30.1 исходное уравнение (30.25) разрешимо при $\kappa \geq 0$ для любой правой части $f \in I^\alpha(L_p)$. Это означает, что $I^\alpha(L_p) \subseteq M^\alpha(L_p)$ при $\kappa \geq 0$. С другой стороны, непосредственно из (30.17) вытекает, что $M^\alpha(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$ (с учетом равенства (6.1) и теоремы 6.7). Поэтому

$$M^\alpha(L_p) = I^\alpha(L_p) \quad \text{при } \kappa \geq 0. \quad (30.34)$$

В случае же $\kappa < 0$ равенство (30.34) выполняется «с точностью до конечномерного подпространства», что обусловлено наличием конечного числа линейно независимых условий разрешимости (30.6).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 30.3. Пусть выполнены условия (30.22), (30.24) и пусть κ — индекс (30.29). Уравнение (30.17) безусловно разрешимо в $L_p(\mathbb{R}^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, при любой правой части $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, если $\kappa \geq 0$, и его общее решение дается формулами (30.33), (30.30). Если же $\kappa < 0$, то уравнение (30.17) разрешимо для правых частей $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, удовлетворяющих условиям ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{Z(x)(x+i)^k} = 0, \quad k = 1, \dots, |\kappa|, \quad (30.35)$$

и только для них и при выполнении этих условий решение единственно и дается формулами (30.33), (30.30) при выборе $c_k = 0$.

Б. Решение обобщенного уравнения Абеля с внутренними коэффициентами. Применяя в уравнении (30.21) тождество (11.10), получаем с учетом коммутации (11.12):

$$\bar{M}^\alpha \varphi \equiv \Gamma(\alpha) I_+^\alpha [(u + v \cos \alpha \pi) \varphi + \sin \alpha \pi S(v \varphi)] = g,$$

т. е. получаем представление оператора $\bar{M}^\alpha$ в виде композиции

$$\bar{M}^\alpha \varphi \equiv I_+^\alpha \bar{N}_0 \varphi = g, \quad (30.36)$$

где

$$\bar{N}_0 \varphi = a_1 \varphi + S(a_2 \varphi) = a_1(x) \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_2(t) \varphi(t) dt}{t-x}, \quad (30.37)$$

$a_1(x)$, $a_2(x)$ — коэффициенты (30.27). Теперь нужно последовательно решить интегральное уравнение Абеля и сингулярное интегральное уравнение

$$\bar{N}_0 \varphi = D_+^\alpha g \quad (30.38)$$

вида (30.8). Здесь

$$D_+^\alpha g = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{g(x) - g(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt \in L_p$$

для $g \in I^\alpha(L_p)$ (воспользовались теоремой 6.1). Остается решить в пространстве L_p уравнение (30.38). В отличие от предыдущего случая внешних коэффициентов, когда вначале нужно решать сингулярное уравнение, а затем уравнение Абеля, здесь это делается в обратном порядке, и поэтому при решении сингулярного уравнения не возникает необходимости в том, чтобы решения были представимы дробным интегралом.

Решая уравнение (30.38) по формуле (30.9), получаем при $\kappa \geq 0$ (где κ — то же, что в (30.29)):

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k Z(x)}{(x+i)^k} + \frac{u(x) + i v(x) \cos \alpha \pi}{\Gamma(\alpha) A(x)} (D_+^\alpha g)(x) - \\ & - \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \Gamma(\alpha)} Z(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t) (D_+^\alpha g)(t)}{Z(t) A(t) (t-x)} dt, \end{aligned} \quad (30.39)$$

где $A(x)$, $Z(x)$ — те же, что в (30.31), (30.32).

В случае $\kappa < 0$ возникают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (30.38):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{Z(x)} \frac{(D_+^\alpha g)(x)}{(x+i)^k} dx = 0, \quad k = 1, \dots, |\kappa|.$$

В силу формул дробного интегрирования по частям (5.16), (5.17) этим условиям ортогональности можно придать вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \psi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, |\kappa|, \quad (30.40)$$

где

$$\psi_k(x) = \int_x^\infty \frac{(t+i)^{-k} dt}{(t-x)^{1-\alpha} Z(t)}.$$

Для обоснования применимости формулы (5.17) нужно показать, что $v(t)(t+i)^{-k}/Z(t) \in I^\alpha(L_p)$; это установлено при доказательстве леммы 30.1.

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 30.4. Пусть выполнены условия (30.23), (30.24). Уравнение (30.18) безусловно разрешимо в $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, при любой правой части $g(x) \in I^\alpha(L_p)$, если $\kappa \geq 0$, и его общее решение дается формулой (30.39). Если же $\kappa < 0$, то уравнение (30.18) разрешимо для тех и только тех правых частей $g(x) \in I^\alpha(L_p)$, которые удовлетворяют условиям ортогональности (30.40), и в этом случае единственное решение дается формулой (30.39) при выборе $c_k = 0$.

3°. Обобщенное интегральное уравнение Абеля на отрезке. Уравнения, исследованные в п. 2° на всей прямой, рассмотрим теперь в случае отрезка:

$$u(x) \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(x) \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \quad a < x < b, \quad (30.41)$$

$$\int_a^x \frac{u(t) \varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_x^b \frac{v(t) \varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = g(x), \quad a < x < b, \quad (30.42)$$

где $0 < \alpha < 1$. Этот случай представляет особый интерес в связи с разнообразными приложениями, в которых возникают такие уравнения (см. об этом в литературных ссылках в § 34). В отличие от п. 1° здесь большее влияние на существование решений, их число и характер особенностей оказывает поведение коэффициентов на концах отрезка.

Дадим полное решение уравнений (30.41), (30.42) в замкнутой форме и выясним картину влияния концов отрезка на решения уравнений.

Решения уравнений (30.41), (30.42) будем разыскивать в классе H^* гельдеровских функций с интегрируемыми особенностями на концах (см. определение 13.1). Напомним, что он состоит из функций вида

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\varepsilon_2}}, \quad (30.43)$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $f^*(x)$ гельдерова на $[a, b]$. Относительно правых частей $f(x)$ и $g(x)$ предполагаем, что

$$f(x), g(x) \in H_\alpha^*, \quad (30.44)$$

где H_α^* — класс (13.53), (13.59). Основанием для этого служит теорема 13.14 о том, что дробное интегрирование порядка α устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами H^* и H_α^* .

Сравнивая постановку вопроса со случаем всей оси в п. 1°, отметим, что различие в классах решений связано с существом дела. Именно гельдеровские классы не совсем удобны на прямой из-за специфики, связанной с бесконечно удаленной точкой (хотя и могут быть использованы), а пространства L_p на отрезке $[a, b]$ оказываются менее удобными, чем H^* , из-за непростого характера особенностей у решений на концах отрезка.

Относительно коэффициентов $u(x)$, $v(x)$ предполагаем, что

$$u(x), v(x) \in H^\lambda([a, b]), \quad \lambda > \alpha; \quad u^2(x) + v^2(x) \neq 0, \quad x \in [a, b]. \quad (30.45)$$

Как и в п. 1°, решение уравнений будет основано на связи дробного интегрирования с сингулярным интегралом. В данном случае будем использовать связи (11.16) — (11.19).

А. Решение обобщенного уравнения Абеля с внешними коэффициентами. Запишем уравнение (30.41) в терминах дробного интегрирования (2.17), (2.18):

$$u(x) I_{a+}^{\alpha} \varphi + v(x) I_{b-}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f(x). \quad (30.46)$$

Можно «исключить» отсюда $I_{b-}^{\alpha} \varphi$ или $I_{a+}^{\alpha} \varphi$ с помощью связи (11.18) или (11.19). Оба способа равносильны и дают решения, отличающиеся по форме. Подставляя в (30.46) дробный интеграл $I_{b-}^{\alpha} \varphi$ из связи (11.18), получаем сингулярное уравнение

$$a_1(x) \Phi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi(t)}{t-x} dt = \frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}}, \quad (30.47)$$

где обозначено

$$a_1(x) = u(x) + v(x) \cos \alpha\pi, \quad a_2(x) = v(x) \sin \alpha\pi \quad (30.48)$$

и

$$\Phi(x) = \frac{1}{(b-x)^{\alpha}} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (30.49)$$

Нужно, таким образом, решить характеристическое сингулярное уравнение (30.47) и затем обратить уравнение Абеля (30.49). При этом мы должны найти такие решения Φ уравнения (30.47), при которых уравнение (30.49) будет разрешимо.

Используем известные (Ф. Д. Гахов [1], Н. И. Muskhelishvili [1]) сведения из теории сингулярных уравнений на конечном отрезке. Пусть в соответствии с п. 1°

$$G(x) = \frac{a_1(x) - ia_2(x)}{a_1(x) + ia_2(x)} = \frac{u(x) + e^{-\alpha\pi i} v(x)}{u(x) + e^{\alpha\pi i} v(x)} = e^{i\theta(x)}, \quad (30.50)$$

где выбрано главное значение $\theta(x)$ условием

$$0 \leq \theta(a) < 2\pi, \quad (30.51)$$

и пусть κ — целое число (30.15).

Решаем уравнение (30.47) на основании теоремы 30.2 с учетом того, что правая часть в (30.47) принадлежит H^* , если $f \in H_{\alpha}^*$. Получим при $\kappa \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} &= \frac{a_2(x) Z_0(x)}{A(x)} (x-a)^{\mu_a} (b-x)^{\alpha+\mu_b} P_{\kappa-1}(x) + \\ &+ \frac{a_1(x)}{A(x)} f(x) - \frac{a_2(x) Z_0(x)}{\pi A(x)} \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\mu_a} \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{\alpha+\mu_b} \frac{f(t) dt}{Z_0(t)(t-x)}, \end{aligned} \quad (30.52)$$

где $A(x)$ — функция (30.31), $Z_0(x)$ — функция (30.16'),

$$\mu_a = 1 - n_a - \frac{\theta(a)}{2\pi}, \quad \mu_b = \frac{\theta(b)}{2\pi} - \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} \right] - n_b \quad (30.53)$$

и $P_{\kappa-1}(x)$ — многочлен степени $\kappa-1$ с произвольными коэффициентами ($P_{\kappa-1}(x) \equiv 0$ в случае $\kappa=0$).

Остается обратить (30.52) как уравнение Абеля относительно $\varphi(t)$.

Основной момент, подлежащий исследованию, состоит в том, чтобы выяснить, является ли правая часть в (30.52) такой, что это уравнение разрешимо. Ищем любые решения $f \in H^*$, так что, согласно теореме 13.14, нужно выяснить, принадлежит ли правая часть классу H_α^* , если $f(x) \in H_\alpha^*$. Начнем со следующей леммы.

Л е м м а 30.2. *Весовой сингулярный оператор*

$$S_{\mu_a, \mu_b} f = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^{\mu_a} \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{\mu_b} \frac{f(t)}{t-x} dt$$

сохраняет при $\alpha - 1 < \mu_a \leq \alpha$, $\alpha - 1 < \mu_b \leq \alpha$ класс H_α^* .

Доказательство. Пусть $H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — класс (13.51). В силу теоремы 11.1 оператор S_{μ_a, μ_b} оставляет инвариантным $H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, если

$$\mu_a < \lambda + \varepsilon_1 < 1 + \mu_a, \quad \mu_b < \lambda + \varepsilon_2 < 1 + \mu_b.$$

Так как H_α^* есть объединение (13.53) классов $H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то оператор S_{μ_a, μ_b} оставит инвариантным это объединение, если $\mu_a \leq \alpha < 1 + \mu_a$, $\mu_b \leq \alpha < 1 + \mu_b$, что совпадает с условиями леммы 30.2. Лемма доказана.

Обратимся к правой части в (30.52). В ней $f(t) \in H_\alpha^*$. В силу теоремы 11.1 $Z_0(x) \in H_0^\lambda([a, b])$. Так как умножение на функции из $H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, не выводит из H_α^* , то правая часть в (30.52) будет, согласно лемме 30.2, принадлежать H_α^* , если

$$\alpha - 1 < \mu_a \leq \alpha, \quad \alpha - 1 < \mu_b \leq \alpha. \quad (30.54)$$

Согласно (30.53), для выполнения второго из этих условий нужно взять

$$n_b = 1. \quad (30.55)$$

Удовлетворяя же первому условию в (30.54), получаем

$$\begin{aligned} n_a &= 1, \quad \text{если } \theta(a)/2\pi < 1 - \alpha, \\ n_a &= 0, \quad \text{если } \theta(a)/2\pi \geq 1 - \alpha, \end{aligned} \quad (30.56)$$

и тогда индекс (30.15) принимает вид

$$\kappa = \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} \right] + \begin{cases} 1, & \text{если } \theta(a) < (1 - \alpha) 2\pi, \\ 0, & \text{если } \theta(a) \geq (1 - \alpha) 2\pi \end{cases} \quad (30.57)$$

(напомним, что $0 \leq \theta(a) < 2\pi$).

Замечание 30.1. Равенство $\theta(a) = (1 - \alpha) 2\pi$ отвечает равенству $u(a) = 0$.

Итак, при выборе чисел n_a, n_b по правилу (30.55), (30.56) правая часть в (30.52) принадлежит H_α^* , и, следовательно, уравнение (30.52) разрешимо относительно f согласно теореме 13.14. Решая это уравнение Абеля, получаем при $\kappa \geq 0$ общее решение обобщенного уравнения (30.41) в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{u(t) + v(t) \cos \alpha \pi}{A(t)} \times \\ &\times \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \right)^2 \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{v(t) Z_0(t)}{A(t) (x-t)^\alpha} dt \times \\ &\times \int_a^b \left(\frac{t-a}{s-a} \right)^{\mu_a} \left(\frac{b-t}{b-s} \right)^{\mu_b + \alpha} \frac{f(s) ds}{Z_0(s) (s-t)}, \end{aligned} \quad (30.58)$$

где c_k — произвольные постоянные, $\varphi_k(x)$ — решения соответствующего однородного уравнения (отсутствующие при $k = 0$):

$$\varphi_k(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{v(t) Z_0(t) (t-a)^{\mu_a+k-1} (b-t)^{\mu_b+\alpha}}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (30.59)$$

$Z_0(t)$, $A(t)$ — функции (30.16'), (30.31), а

$$\mu_a = \begin{cases} -\theta(a)/2\pi, & \text{если } 0 \leq \theta(a)/2\pi < 1-\alpha, \\ 1-\theta(a)/2\pi, & \text{если } 1-\alpha \leq \theta(a)/2\pi < 1, \end{cases} \quad \mu_b = \theta(b)/2\pi - [\theta(b)/2\pi] - 1. \quad (30.60)$$

Формуле (30.58) после перестановки порядка интегрирования можно придать вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^b \mathcal{K}(x, t) f(t) dt, \quad (30.61)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, t) = & \frac{u(t) + v(t) \cos \alpha \pi}{A(t)} (x-t)_+^{-\alpha} + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi Z_0(t)} \times \\ & \times \int_a^x \left(\frac{\xi-a}{t-a} \right)^{\mu_a} \left(\frac{b-\xi}{b-t} \right)^{\alpha+\mu_b} \frac{Z_0(\xi) v(\xi) d\xi}{A(\xi) (\xi-t)(x-\xi)^\alpha}. \end{aligned}$$

Формуле (30.58) можно придать и другой вид, в котором не используются интегралы в смысле главного значения. В силу тождества (11.16) имеем

$$\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^b \left(\frac{s-a}{t-a} \right)^\alpha \frac{\varphi(s) ds}{s-t} = -\cos \alpha \pi \varphi(x) + \mathcal{D}_{a+}^\alpha I_{b-}^\alpha \varphi.$$

Поменяв здесь α на $1-\alpha$, получаем представление сингулярного интеграла в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(s) ds}{s-t} = & \cos \alpha \pi \varphi(t) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \times \\ & \times \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha}} \int_\xi^b \left(\frac{t-a}{\tau-a} \right)^{1-\alpha} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-\xi)^\alpha}. \end{aligned} \quad (30.62)$$

Применяя это представление к сингулярному интегралу в последнем слагаемом формулы (30.58), приводим ее к виду

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{u(t) f(t)}{A(t) (x-t)^\alpha} dt - \\ & - \left(\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \right)^2 \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{v(t) Z(t) dt}{A(t) (x-t)^\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_\tau^b \frac{\varphi(s) ds}{Z(s) (s-\tau)^\alpha}, \end{aligned} \quad (30.63)$$

где

$$Z(t) = (t-a)^{1-\alpha+\mu_a} (b-t)^{\alpha+\mu_b} Z_0(t).$$

Если же $\kappa < 0$, то, согласно теореме 30.2, для разрешимости сингулярного уравнения (30.47) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b \frac{f(x)(x-a)^{k-1} dx}{Z_0(x)(x-a)^{\mu_a}(b-x)^{\alpha+\mu_b}} = 0, \quad k = 1, \dots, |\kappa|. \quad (30.64)$$

При выполнении этих условий единственное решение уравнения (30.47) получается по той же формуле (30.52), если опустить в ней слагаемое с $P_{\kappa-1}(x)$.

Сформулируем окончательный результат исследования в виде следующей теоремы.

Теорема 30.5. Пусть выполнены условия (30.45), пусть

$$\theta(x) = \arg \frac{u(x) + e^{-\alpha\pi i} v(x)}{u(x) + e^{\alpha\pi i} v(x)}, \quad 0 \leq \theta(a) < 2\pi,$$

и κ — число (30.57). Обобщенное уравнение Абеля (30.41) безусловно разрешимо в классе H^* для любой правой части $f(x) \in H_\alpha^*$, если $\kappa \geq 0$ (в частности, если $\theta(b) \geq 0$). Его общее решение дается формулами (30.58), (30.63). Если $\kappa < 0$, для разрешимости уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (30.64), и тогда оно имеет единственное решение, предоставляемое формулами (30.58), (30.63) при выборе $c_k = 0$.

Б. Решение обобщенного уравнения Абеля с внутренними коэффициентами. Так же как и в случае всей прямой, уравнение с внутренними коэффициентами проще из-за того, что здесь сначала нужно решать уравнение Абеля, а затем сингулярное уравнение.

Уравнение (30.42), т. е. уравнение

$$I_{a+}^\alpha(u\varphi) + I_{b-}^\alpha(v\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g(x),$$

с помощью связи (11.16) приводится к виду

$$I_{a+}^\alpha [(u + v \cos \alpha\pi) \varphi + \sin \alpha\pi r_a^{-\alpha} S(r_a^\alpha v\varphi)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} g(x).$$

Обращая уравнение Абеля относительно квадратной скобки, получаем сингулярное уравнение

$$a_1(x) \psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{a_2(t) \psi(t)}{t-x} dt = g_1(x), \quad (30.65)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ — то же, что в (30.48),

$$\psi(x) = (x-a)^\alpha \varphi(x), \quad (30.66)$$

$$g_1(x) = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\mathcal{D}_{a+}^\alpha g)(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} (x-a)^\alpha \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Остается решить подобно предыдущему сингулярное уравнение (30.65). Его разрешимость определяется тем же числом κ , что и выше, формулы

решения известны, см. Ф. Д. Гахов [1], Н. И. Мусхелишвили [1]. Получение окончательного результата предоставляется читателю.

4°. Случай постоянных коэффициентов. Рассмотрим особо обобщенные уравнения Абеля (30.17), (30.18) и (30.41), (30.42) в случае, когда коэффициенты u и v постоянны.

А. Уравнения на всей прямой. Для уравнения (30.17) с постоянными коэффициентами u, v решение получается без привлечения общей теории сингулярных интегральных уравнений с переменными коэффициентами (но на том же пути, используя связь с сингулярным интегралом). Рассмотрим эти уравнения в форме (30.17'):

$$M^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in R^1, \quad (30.67)$$

где $0 < \alpha < 1$, c_1 и c_2 постоянные, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (множитель $1/\Gamma(\alpha)$ взят для достижения симметрии с обратным оператором).

Заметим, что интеграл $M^\alpha \varphi$ есть феллеровский потенциал, рассмотренный в § 12. Следующая теорема дает явное выражение для обратного оператора $(M^\alpha)^{-1}$. Подчеркнем, что интегралы в (30.68) понимаются как условно сходящиеся по норме пространства $L_p(R^1)$; они также сходятся условно почти всюду.

Теорема 30.6. Уравнение (30.67) разрешимо в $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, для любой правой части $f(x) \in I^\alpha(L_p)$ и имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\alpha}{A\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1+\alpha}} [f(x) - f(t)] dt = \\ &= \frac{\alpha}{A\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{2c_1 f(x) - (c_1 + c_2) f(x-t) - (c_1 - c_2) f(x+t)}{t^{1+\alpha}} dt, \end{aligned} \quad (30.68)$$

где $A = 4[c_1^2 \cos^2(\alpha\pi/2) + c_2^2 \sin^2(\alpha\pi/2)]$.

Доказательство. Имеем

$$M^\alpha \varphi = uI_+^\alpha \varphi + vI_-^\alpha \varphi, \quad u = c_1 + c_2, \quad v = c_1 - c_2$$

(см. (12.10)). Поэтому связь (11.10) дробного интегрирования $I_\pm^\alpha$ с сингулярным оператором дает

$$M^\alpha \varphi \equiv I_+^\alpha N\varphi = f, \quad N\varphi = a_1\varphi + a_2 S\varphi, \quad (30.69)$$

где $a_1 = u + v \cos \alpha\pi$, $a_2 = v \sin \alpha\pi$. В силу свойства $S^2\varphi \equiv -\varphi$, см. (11.2), сингулярный оператор N с постоянными коэффициентами обратим и

$$N^{-1}\varphi = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} \varphi - \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} S\varphi.$$

Обращая в (30.69) уравнение Абеля $I_+^\alpha \psi = f$ согласно теореме 6.1, а затем сингулярный оператор, получаем

$$\varphi = N^{-1}D_+^\alpha f = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} (a_1 D_+^\alpha f - a_2 S D_+^\alpha f), \quad (30.70)$$

где $D_+^\alpha f$ — дробная производная Маршо (5.57), (5.60). Подставляя $S D_+^\alpha f$ из (11.11') в (30.70), получаем

$$\varphi(x) = \frac{1}{A} [(c_1 + c_2) D_+^\alpha f + (c_1 - c_2) D_-^\alpha f], \quad (30.71)$$

что и дает (30.68). Теорема доказана.

Отметим важные частные случаи уравнения (30.67):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \psi(t) dt = g(x), \quad (30.72)$$

где $\varphi(t), \psi(t) \in L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$; $f(x), g(x) \in I^\alpha(L_p)$. Эти уравнения обращаются, согласно (30.68), по формулам

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(t)}{|x-t|^{1+\alpha}} dt, \quad (30.73)$$

$$\psi(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) - g(t)}{|x-t|^{1+\alpha}} \operatorname{sign}(x-t) dt. \quad (30.74)$$

Тем самым получено обращение потенциалов I^α, H^α , см. (12.1), (12.2), (12.1'), (12.2'). На достаточно хороших функциях $f(x), g(x)$ (например, дифференцируемых и таких, что $|f(x)| \leq c(1+|x|)^{-\nu}$, $\nu > 1-\alpha$) эти формулы могут быть записаны также в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\alpha} f(t) dt, \quad (30.75)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\alpha\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t) dt}{|x-t|^\alpha}. \quad (30.76)$$

Заметим еще, что простое достаточное условие на правую часть $f(x)$, обеспечивающее разрешимость уравнения (30.67), состоит в том, что

$$f(x) = \frac{f_*(x)}{(1+|x|)^\nu}, \quad f_*(x) \in H^\lambda(\dot{R}^1), \quad \lambda > \alpha, \quad \nu > \alpha. \quad (30.77)$$

Согласно теореме 6.6, тогда $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$, и потому уравнение (30.67) разрешимо (в L_p). Для функций $f(x)$ вида (30.77) формулу обращения (30.68) можно записать также в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_2 + c_1 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\alpha} f(t) dt. \quad (30.78)$$

Б. Уравнение на отрезке. Для уравнения

$$u \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \quad a < x < b, \quad (30.79)$$

где $0 < \alpha < 1$, u и v — постоянные, решение получим из общей формулы (30.58). Функция $\theta(x)$ (из (30.50)) теперь постоянна:

$$0(x) \equiv \theta = \arg \frac{u + e^{-\alpha\pi i} v}{u + e^{\alpha\pi i} v}, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (30.80)$$

(очевидно, $\theta = 0$ только тогда, когда $v = 0$).

Лемма 30.3. Неравенства $0 < \theta < (1-\alpha)2\pi$, $(1-\alpha)2\pi < \theta < 2\pi$ равносильны неравенствам $uv < 0$, $uv > 0$ соответственно.

Доказательство. Из (30.80) имеем $\frac{u}{v} = \frac{1 - e^{(\theta+2\pi\alpha)i}}{e^{i\theta} - 1} e^{-\alpha\pi i}$. Так как $1 - e^{iz} = -2ie^{iz/2} \sin(z/2)$, то

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin([\theta - (1 - \alpha)2\pi]/2)}{\sin(\theta/2)},$$

откуда и следует, что u, v — одного знака при $\theta > (1 - \alpha)2\pi$ и разного при $\theta < (1 - \alpha)2\pi$.

Из леммы 30.3 получаем, что индекс κ (см. (30.57)) уравнения (30.79) равен 1, если коэффициенты u, v разных знаков, и равен 0, если они одного знака.

Из формулы (30.58) следует, что обобщенное уравнение Абеля (30.79) с коэффициентами u, v разных знаков имеет в случае $f(x) \equiv 0$ нетривиальное решение:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (t-a)^{-\theta/2\pi} (b-t)^{\alpha-1+\theta/2\pi} dt = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^1 s^{-\alpha} (1-s)^{-\theta/2\pi} \left(s + \frac{b-x}{x-a}\right)^{\alpha-1+\theta/2\pi} ds = \\ &= \frac{(b-a)(1-\alpha-\theta/2\pi)}{(x-a)^2} \int_0^1 s^{-\alpha} (1-s)^{-\theta/2\pi} \left(s + \frac{b-x}{x-a}\right)^{\alpha-2+\theta/2\pi} ds. \end{aligned}$$

Применяя формулу (13.18), получаем

$$\varphi_0(x) = \frac{\text{const}}{(x-a)^{\alpha+\theta/2\pi} (b-x)^{1-\theta/2\pi}}, \quad 0 < \theta < (1-\alpha)2\pi. \quad (30.81)$$

Учитывая формулы (30.63), (30.81), из теоремы 30.5 делаем окончательный вывод в виде следующей теоремы.

Теорема 30.7. Уравнение (30.79) разрешимо в классе H^* при любой правой части $f(x) \in H^*$. В случае $uv > 0$ решение единственно, а в случае $uv < 0$ общее решение содержит одну произвольную постоянную. Все решения даются формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{c}{(x-a)^{\alpha+\theta/2\pi} (b-x)^{1-\theta/2\pi}} + \frac{u}{A^{\frac{1}{2\pi}}} \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - \\ &- \frac{v}{A} \left(\frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\right)^2 \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{Z(t) dt}{(x-t)^\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_\tau^b \frac{f(s) ds}{Z(s)(s-\tau)^\alpha}, \end{aligned} \quad (30.82)$$

где $c = 0$ в случае $uv > 0$ и c произвольна в случае $uv < 0$, $A = u^2 + 2uv \cos \alpha\pi + v^2$; $Z(t) = (t-a)^{2-\alpha-\theta/2\pi} (b-t)^{\alpha-1+\theta/2\pi}$, если $uv > 0$, и $Z(t) = [(t-a)/(b-t)]^{1-\alpha-\theta/2\pi}$, если $uv < 0$.

Рассмотрим важные частные случаи. Уравнение Карлемана

$$\int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x), \quad (30.83)$$

привлекавшее внимание многих авторов (см. литературные ссылки в § 34, п. 1°), содержится в (30.79) при $u=v=1$. Формула (30.82) дает его единственное решение при выборе $c=0$ и

$$A = 4 \cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}, \quad Z(t) = \left(\frac{b-t}{t-a} \right)^{\alpha/2}.$$

Нетрудно вычислить, что уравнение (30.83) с правыми частями

$$f(x) = (x-a)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \text{ и } f(x) = [(x-a)(b-x)]^{(\alpha-1)/2}$$

имеет соответственно решения:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{n!}{\pi} (b-a)^n \sin \frac{\alpha\pi}{2} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n-\alpha/2}{n-k} \left(\frac{b-x}{a-b} \right)^k}{[(x-a)(b-x)]^{\alpha/2}}, \\ \varphi(x) &= \frac{(b-a)^\alpha}{2B\left(\alpha, \frac{1-\alpha}{2}\right)} [(x-a)(b-x)]^{-(1+\alpha)/2}. \end{aligned}$$

Для уравнения Карлемана (30.83) можно получить и другую формулу обращения:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha\pi/2)}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_a^b \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\alpha} f(t) dt + \\ &+ \frac{\sin^2(\alpha\pi/2)}{2\pi^2} \frac{d}{dx} \int_a^b M(x, t) [(t-a)(b-t)]^{-\alpha/2} f(t) dt, \end{aligned} \quad (30.84)$$

где

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \int_a^b \frac{V(t-a)(b-t) - V(y-a)(b-y)}{t-y} \times \\ &\times \frac{dy}{|x-y|^\alpha [(y-a)(b-y)]^{(1-\alpha)/2}} \end{aligned}$$

(ср. с формулой обращения (30.75)). Докажем эту формулу. Равенство (30.52) применительно к рассматриваемому частному случаю (30.83) имеет вид

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \times \\ &\times \int_a^b \left[\frac{(x-a)(b-x)}{(t-a)(b-t)} \right]^{\alpha/2} \frac{f(t) dt}{t-x}. \end{aligned} \quad (30.85)$$

С другой стороны, так как $\varphi(t)$ — решение уравнения (30.83), то в силу (30.85)

$$\begin{aligned} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \times \\ &\times \int_a^b \left[\frac{(x-a)(b-x)}{(t-a)(b-t)} \right]^{\alpha/2} \frac{f(t) dt}{t-x}. \end{aligned} \quad (30.86)$$

Обращая равенства (30.85), (30.86) как уравнение Абеля относительно $\varphi(t)$ и складывая, получаем

$$2\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \frac{d}{dx} \left(\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2} B^{1-\alpha} f - \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2} A^{1-\alpha} S_{-\alpha/2} f \right),$$

где для краткости использованы обозначения (12.44), (12.45), (12.48). Второе слагаемое приводится к виду

$$A^{1-\alpha} S_{-\alpha/2} f = A^{1-\alpha} S_{(1-\alpha)/2} f + \frac{1}{2\pi\Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \times \\ \times \int_a^b \frac{dt}{|t-x|^\alpha} \int_a^b \left(\left[\frac{r(t)}{r(\tau)} \right]^{\alpha/2} - \left[\frac{r(\tau)}{r(t)} \right]^{(1-\alpha)/2} \right) \frac{f(\tau) d\tau}{\tau-t},$$

где $r(t) = (t-a)(b-t)$. Здесь к первому слагаемому применяем связь (12.47), после чего (30.84) получается простыми преобразованиями.

Для другого частного случая

$$\int_a^b \frac{\text{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \psi(t) dt = g(x), \quad (30.87)$$

в отличие от (30.83) однородное уравнение имеет нетривиальное решение, и из формулы (30.82) получаем общее решение уравнения (30.87):

$$\psi(x) = \frac{c}{(x-a)^{(1+\alpha)/2} (b-x)^{(1+\alpha)/2}} + \frac{1}{2\pi} \text{ctg} \frac{\alpha\pi}{2} \times \\ \times \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^\alpha} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_a^x \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{(1-\alpha)/2} \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \times \\ \times \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_\tau^b \left(\frac{b-s}{s-a} \right)^{(1-\alpha)/2} \frac{g(s) ds}{(s-\tau)^\alpha}. \quad (30.88)$$

Справедлива также формула

$$\psi(x) = \frac{c}{(x-a)^{(1+\alpha)/2} (b-x)^{(1+\alpha)/2}} + \frac{1}{2\pi} \text{ctg} \frac{\alpha\pi}{2} \frac{d}{dx} \int_a^b \frac{g(t) dt}{|x-t|^\alpha} - \\ - \frac{\cos^2 \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2} \frac{d}{dx} \int_a^b N(x, t) (t-a)^{(1-\alpha)/2} (b-t)^{(1-\alpha)/2} g(t) dt, \quad (30.89)$$

где

$$N(x, t) = \int_a^b \frac{V(t-a)(b-t) - V(y-a)(b-y)}{t-y} \times \\ \times \frac{\text{sign}(x-y) dy}{|x-y|^\alpha [(y-a)(b-y)]^{1-\alpha/2}}.$$

Она получается подобно (30.84).

**§ 31. НЕТЕРОВОСТЬ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА
СО СТЕПЕННЫМИ ЯДРАМИ**

В этом параграфе для уравнений первого рода

$$M\varphi \equiv \int_{\Omega} \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \Omega = [a, b], \quad -\infty \leq a < b \leq \infty, \quad (31.1)$$

частными случаями которых являются обобщенные уравнения Абеля, рассмотренные в § 30, будет исследован вопрос о нормальной разрешимости (нетеровости) в соответствующей корректной постановке. При этом уравнение (31.1) будет сведено к эквивалентному интегральному уравнению второго рода, являющемуся, вообще говоря, сингулярным. Предварительно приведем необходимые сведения из теории нормально разрешимых (нетеровых) операторов и из теории сингулярных интегральных уравнений. Затем будет рассмотрен случай всей прямой: $\Omega = R^1$, а в заключение — случай конечного отрезка $\Omega = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$.

1°. Сведения о нетеровых операторах. Приведем здесь минимальные сведения о нетеровых операторах, необходимые для изложения вопросов разрешимости уравнений (31.1) в пп. 2 и 3°. Формулируемые ниже теоремы о нетеровости операторов в абстрактных банаховых пространствах известны как теоремы С. М. Никольского — Ф. В. Аткинсона — И. Ц. Гохберга. Более подробно ознакомиться с теорией нетеровых операторов можно по книгам И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4], С. Г. Крейна [1], см. также литературные ссылки в § 34, п. 1°.

Пусть X, Y — банаховы пространства. Кольцо всех линейных ограниченных операторов из X в Y будем обозначать через $[X \rightarrow Y]$.

О п р е д е л е н и е 31.1. *Ядром оператора $A \in [X \rightarrow Y]$ называется множество всех нулей оператора A в пространстве X :*

$$Z_X(A) = \{\varphi : A\varphi = 0, \varphi \in X\}.$$

Для сопряженного оператора $A^* \in [Y^* \rightarrow X^*]$ обозначим аналогично

$$Z_{Y^*}(A^*) = \{\psi : A^*\psi = 0, \psi \in Y^*\}.$$

Это подпространство в Y^* называется *коядром оператора A* .

О п р е д е л е н и е 31.2. *Оператор $A \in [X \rightarrow Y]$ называется нормально разрешимым в X , если его область значений $A(X)$ состоит из элементов, ортогональных коядру: $f = A\varphi, \varphi \in X, \iff (f, \psi) = 0, \psi \in Z_{Y^*}(A^*)$.*

Т е о р е м а 31.1. *Нормальная разрешимость оператора $A \in [X \rightarrow Y]$ равносильна условию замкнутости образа $A(X)$ в пространстве Y .*

Введем еще обозначение для размерностей ядра и коядра:

$$n = n_A = \dim Z_X(A), \quad m = m_A = \dim Z_{Y^*}(A^*).$$

Число m_A называют *дефектным числом оператора A* . Иногда оба числа m_A, n_A называют его *дефектными числами*.

О п р е д е л е н и е 31.3. *Оператор $A \in [X \rightarrow Y]$ называется оператором Нетера или нетеровым оператором, если он нормально разрешим в X и его ядро и коядро конечномерны: $n < \infty, m < \infty$.*

Упорядоченная пара чисел (n, m) называется *d -характеристикой оператора A* . Разность $\kappa = n - m$ называется *индексом оператора*. Будем использовать обозначение $\kappa = \kappa_{X \rightarrow Y}(A)$ и писать $\kappa_X(A)$ в случае $X = Y$. Известно, что индекс оператора устойчив по отношению к малым возмущениям.

Для операторов Нетера справедливы следующие утверждения.

Теорема 31.2. Если $A \in [X \rightarrow Y]$ и $B \in [Y \rightarrow Z]$ — операторы Нетера, то и оператор $BA \in [X \rightarrow Z]$ нетеров, причем

$$\kappa_{X \rightarrow Z}(BA) = \kappa_{X \rightarrow Y}(A) + \kappa_{Y \rightarrow Z}(B).$$

Теорема 31.3. Если оператор $A \in [X \rightarrow Y]$ нетеров и T — вполне непрерывный оператор из X в Y , то и оператор $A + T$ также нетеров и $\kappa_{X \rightarrow Y}(A + T) = \kappa_{X \rightarrow Y}(A)$.

Теорема 31.4. Для того чтобы оператор $A \in [X \rightarrow Y]$ был оператором Нетера, необходимо и достаточно, чтобы он имел левый и правый регуляризаторы $R_{\pi} \in [Y \rightarrow X]$ и $R_{\pi} \in [Y \rightarrow X]: R_{\pi}A = E + T_1$, $AR_{\pi} = E + T_2$, где T_1 и T_2 — операторы, вполне непрерывные в X и Y соответственно.

Классическими примерами нетеровых операторов служат сингулярные интегральные операторы (30.1), (30.8), (30.10). Приведем нужные нам сведения о нетеровости этих операторов.

Теорема 31.5. Сингулярный интегральный оператор

$$N_0 \varphi \equiv a_1(x) \varphi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = f(x), \quad (31.2)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x) \in C(\dot{R}^1)$ и вещественнозначны, нетеров в пространстве $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда $a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0$, $x \in \dot{R}^1$. Оператор N_0 имеет d -характеристику $(\kappa, 0)$ при $\kappa \geq 0$ и $(0, |\kappa|)$ при $\kappa \leq 0$, где κ — число (30.4).

Аналогичный оператор на конечном отрезке запишем с «регулярной» частью:

$$N\varphi \equiv a_1(x) \varphi(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \varphi(t) dt. \quad (31.3)$$

В случае отрезка условия нормальной разрешимости и формула для вычисления индекса κ уже зависят от класса решений. Приведем два известных утверждения. Первое будет относиться к «классической» постановке вопроса о нормальной разрешимости, когда рассматривается ортогональность решениям однородного транспонированного уравнения

$$a_1(x) \psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{a_2(t) \psi(t)}{t-x} dt + \int_a^b \mathcal{K}(t, x) \psi(t) dt = 0 \quad (31.4)$$

(вместо сопряженного уравнения $N^* \psi = 0$) и решения уравнений (31.3), (31.4) разыскиваются в классах гильбертовских в (a, b) функций с нефиксированными порядками интегрируемых особенностей на концах отрезка. Второе утверждение будет относиться к случаю, когда нетеровость понимается в смысле определения 31.3 и оператор (31.3) рассматривается в пространстве $L_p(\rho)$ с весом $\rho(x) = (x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$.

Предполагаем, что коэффициенты $a_1(x)$, $a_2(x)$ в (31.3), (31.4) вещественнозначны и непрерывны на $[a, b]$. Относительно ядра $\mathcal{K}(x, t)$ предполагаем, что

$$\mathcal{K}(x, t) = \frac{A(x, t) + B(x, t) \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

где $A(x, t)$, $B(x, t)$ — функции, гильбертовские по обоим переменным.

Пусть H^* , H_a^* , H_b^* , H — классы функций, рассматривавшиеся раньше (см. § 30, п. 1°). Ниже $G(x)$ означает, как и в § 30, п. 1°, функцию

$$G(x) = \frac{a_1(x) - ia_2(x)}{a_1(x) + ia_2(x)}.$$

Так как функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ вещественнозначны, то $G(x) = e^{i\theta(x)}$. Будем считать значение $\theta(x) = \arg G(x)$ выбранным так, что $0 \leq \theta(a) < 2\pi$, а в остальных точках $x \in (a, b)$ значение $\theta(x)$ продолжено по непрерывности.

Теорема 31.6. Пусть $a_1(x)$, $a_2(x) \in H$, $a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$ и $\theta(a) \neq 0$, $\theta(b) \neq 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для того чтобы уравнение (31.3) с правой частью $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 30.2, было разрешимо в классах H^* , H_a^* , H_b^* , H , необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b f(x) \psi_j(x) dx = 0, \quad (31.5)$$

где $\{\psi_j\}$ — полная система решений однородного уравнения (31.4) из класса H , H_b^* , H_a^* , H^* соответственно. Разность чисел линейно независимых решений однородного уравнения (31.3) и условий разрешимости (31.5) равна числу κ , вычисляемому по формуле (30.15).

Теорема 31.7. Пусть $a_1(x)$, $a_2(x) \in C([a, b])$. Оператор (31.3) нетеров в пространстве $L_p(\rho)$, $1 < p < \infty$, $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, $-1 < \mu < p-1$, $-1 < \nu < p-1$, тогда и только тогда, когда

- 1) $a_1^2(x) + a_2^2(x) \neq 0$, $a \leq x \leq b$;
- 2) $\theta(a) \neq 2\pi \frac{1+\mu}{p}$, $\theta(b) \neq -2\pi \frac{1+\nu}{p} \pmod{2\pi}$.

При выполнении этих условий индекс оператора (31.3) вычисляется по формуле

$$\kappa = \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} + \frac{1+\nu}{p} \right] + \left[\frac{1+\mu}{p} - \frac{\theta(a)}{2\pi} \right]$$

(ср. с (30.15)). В случае $\mathcal{K}(x, t) \equiv 0$ оператор (31.3) имеет d -характеристику $(\kappa, 0)$ при $\kappa \geq 0$ и $(0, |\kappa|)$ при $\kappa \leq 0$.

В следующих пунктах рассмотрим вопрос о нетеровости оператора (31.1). Уравнение (31.1) как уравнение первого рода не является, вообще говоря, нормально разрешимым, так что его нетеровость требует соответствующей постановки. Оператор M не будет, вообще говоря, оператором Нетера, действующим из какого-нибудь пространства X в то же пространство X . В случае $X = L_p(R^1)$ он не является даже ограниченным из X в X (см. теорему Харди—Литтлвуда 5.3). Если же $\text{mes } \Omega < \infty$, то оператор M ограничен из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, однако M не может быть нетеровым оператором, действующим из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Действительно, если $M \in [L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)]$ нетеров, то в силу теоремы 31.4 существует ограниченный оператор R , такой, что $RM = E + T$, где T вполне непрерывен. Так как M является вполне непрерывным в $X = L_p(\Omega)$, $\text{mes } \Omega < \infty$, при достаточно широких предположениях о $c(x, t)$, то отсюда следует, что единичный оператор $E = RM - T$ вполне непрерывен в X , что невозможно.

Возникает естественный вопрос: можно ли для оператора M , не являющегося нетеровым из X в X , построить такое пространство Y , чтобы оператор M был оператором Нетера, если его рассматривать действующим из X в Y ? (Построение такого пространства в целях «нетеризации» оператора называют иногда *нормализацией оператора*.)

В силу теоремы Харди—Литтлвуда 5.3 оператор M с ограниченной функцией $c(x, t)$ действует ограниченно из $L_p(\Omega)$, $1 < p < 1/\alpha$, в $L_q(\Omega)$, $q = p/(1-\alpha p)$. Однако он не является оператором Нетера из L_p в L_q . Докажем это, например, для $c(x, t) \equiv 1$. В соответствии с теоремой 31.1 покажем, что образ $M(L_p)$ не замкнут в L_q . При $c(x, t) \equiv 1$, согласно (30.34), имеем $M(L_p) = I^\alpha(L_p) \subset L_q$, где $I^\alpha(L_p)$ — пространство дробных интегралов. Напомним, что $I^\alpha(L_p) \neq L_q$ (см. (6.5)). Так как бесконечно

дифференцируемые финитные функции принадлежат $I^\alpha(L_p)$ (например, согласно теореме 6.5), то $I^\alpha(L_p)$ плотно в L_q и, следовательно, не замкнуто в L_q .

В общем случае при весьма широких предположениях относительно $c(x, t)$ будет показано, что $M(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$, и окажется, что образ $M(L_p)$ будет замкнут в $I^\alpha(L_p)$. Другими словами, будем говорить в дальнейшем о нетеровости M как оператора из L_p в $I^\alpha(L_p)$ (естественно, $I^\alpha(L_p)$ рассматривается как банахово пространство относительно нормы (6.17)).

2°. Уравнения на прямой. Рассматриваемые уравнения имеют вид

$$(M\varphi)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (31.6)$$

Допускается ситуация, когда $c(x, t)$ может быть разрывной на диагонали $t = x$:

$$c(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t < x, \\ v(x, t), & t > x, \end{cases} \quad (31.7)$$

так что

$$(M\varphi)(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{u(x, t) \varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_x^{\infty} \frac{v(x, t) \varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x). \quad (31.6')$$

В случае «склеивания» на диагонали ($u(x, x-0) = v(x, x+0)$) оператор M будет всегда фредгольмова типа (т. е. будет иметь нулевой индекс) в допускаемой для него корректной постановке нетеровости. Он будет также фредгольмова типа, если, например, $v(x, t) \equiv 0$.

Определим класс допускаемых функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ в (31.6). Пусть R_+^2 — полуплоскость $\{(t, x) : t < x\}$, а $R_-^2 = \{(t, x) : t > x\}$.

Определение 31.4. Заданная в полуплоскости $\bar{R}_+^2$ функция $u(x, t)$ принадлежит классу $H_x^\lambda(\bar{R}_+^2)$, если 1) $u(x, x) \in C(\bar{R}_+^1)$; 2) $u(x, t)$ гельдерова по x порядка λ (равномерно по t):

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq A \frac{|x_1 - x_2|^\lambda}{(1 + |x_1|)^\lambda (1 + |x_2|)^\lambda}, \quad (x_1, t), (x_2, t) \in \bar{R}_+^2. \quad (31.8)$$

Аналогично определяется класс $H_x^\lambda(\bar{R}_-^2)$. Запись $c(x, t) \in H_x^\lambda(\bar{R}_\pm^2)$ будет означать, что $u(x, t) \in H_x^\lambda(\bar{R}_+^2)$, $v(x, t) \in H_x^\lambda(\bar{R}_-^2)$.

Заметим, что функции классов $H_x^\lambda(\bar{R}_\pm^2)$ ограничены, но не обязательно непрерывны по t . Так, например, $u(x, t) = x(1+x^2)^{-1} \operatorname{sign} t \in H_x^\lambda(\bar{R}_+^2)$, $\lambda = 1$.

А. Вложение $M(L_p) \subset I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$. Оператор M представим в виде

$$M\varphi = \int_{-\infty}^x \frac{u(t, t) \varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \int_x^{\infty} \frac{v(t, t) \varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt + K_u^+ \varphi + K_v^- \varphi, \quad (31.9)$$

где

$$K_u^+ \varphi = \int_{-\infty}^x \frac{u(x, t) - u(t, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad K_v^- \varphi = \int_x^{\infty} \frac{v(x, t) - v(t, t)}{(t-x)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt. \quad (31.10)$$

С помощью связи (11.10) получаем

$$M\varphi = \Gamma(\alpha) I_+^\alpha N_0 \varphi + K_u^+ \varphi + K_v^- \varphi, \quad (31.11)$$

где

$$N_0 \varphi = [u(x, x) + v(x, x) \cos \alpha \pi] \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t, t) \varphi(t) dt}{t - x}. \quad (31.12)$$

Теорема 31.8. Если $c(x, t) \in H_x^\lambda(\bar{R}_\pm^2)$, где $\lambda > \alpha$, то $M(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$, причем

$$\|M^\alpha \varphi\|_{I^\alpha(L_p)} \leq c \|\varphi\|_p, \quad 1 < p < 1/\alpha. \quad (31.13)$$

Доказательство. В силу (31.11) и ограниченности в $L_p(R^1)$ сингулярного оператора (см. теорему 11.2) достаточно доказать утверждение теоремы для $K_u^+ \varphi$ и $K_v^- \varphi$. Применим теорему 6.2. Так как $u(x, t)$ ограничена, то $K_u^+ \varphi \in L_q$ в силу теоремы Харди—Литтлвуда. Для проверки условия (6.19) воспользуемся равенством

$$(K_u^+ \varphi)(x) - (K_u^+ \varphi)(x - t) = \int_0^\infty \frac{u(x, x - t - s) - u(x - t, x - t - s)}{s^{1-\alpha}} \varphi(x - t - s) ds + t^\alpha \int_0^\infty [u(x, x - ts) - u(x - ts, x - ts)] k(s) \varphi(x - ts) ds, \quad (31.14)$$

где $k(s)$ — функция (6.10). Докажем (31.14). Для $f(x) = K_u^+ \varphi$ имеем $f(x) - f(x - t) = \int_0^\infty [u(x, x - s) - u(x - s, x - s)] s^{\alpha-1} \varphi(x - s) ds$ и тогда

$$\begin{aligned} f(x) - f(x - t) &= t^\alpha \int_{-1}^\infty [u(x, x - t - st) - u(x - t - st, x - t - st)] \times \\ &\times (s + 1)^{\alpha-1} \varphi(x - t - st) ds - t^\alpha \int_0^\infty [u(x - t, x - t - st) - \\ &- u(x - t - st, x - t - st)] s^{\alpha-1} \varphi(x - t - st) ds = \int_0^\infty [u(x, x - t - s) - \\ &- u(x - t, x - t - s)] s^{\alpha-1} \varphi(x - t - s) ds + t^\alpha \int_{-1}^\infty k(s + 1) \times \\ &\times [u(x, x - t - ts) - u(x - t - ts, x - t - ts)] \varphi(x - t - ts) ds, \end{aligned}$$

что и дает равенство (31.14). В силу этого равенства

$$\begin{aligned} D_{+,e}^\alpha K_u^+ \varphi &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_e^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^\infty \frac{u(x, x - t - s) - u(x - t, x - t - s)}{s^{1-\alpha}} \times \\ &\times \varphi(x - t - s) ds + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_e^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty [u(x, x - ts) - \\ &- u(x - ts, x - ts)] k(s) \varphi(x - ts) ds = A_e(x) + B_e(x). \end{aligned} \quad (31.15)$$

Согласно (31.8),

$$|A_e(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|)^\lambda} \int_0^\infty \frac{g(x - t) dt}{t^{1+\alpha-\lambda} (1 + |x - t|)^\lambda}, \quad (31.16)$$

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{|\varphi(x-s)| ds}{s^{1-\alpha}}. \quad (31.16)$$

В силу теоремы 5.3 $g(x) \in L_q(R^1)$, $q = p/(1 - \alpha p)$, так что

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon\|_p &\leq c \int_0^\infty t^{\lambda-\alpha-1} dt \left(\int_{-\infty}^\infty (1+|x|)^{-\lambda p} (1+|x-t|)^{-\lambda p} |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c \|g\|_q \int_0^\infty t^{\lambda-\alpha-1} dt \left(\int_{-\infty}^\infty (1+|x|)^{-\lambda/\alpha} (1+|x-t|)^{-\lambda/\alpha} dx \right)^\alpha. \end{aligned} \quad (31.17)$$

Согласно (6.32), внутренний интеграл оценивается величиной $c(1+t)^{-\lambda/\alpha}$, так что $\|A_\varepsilon\|_p \leq c \|\varphi\|_p \int_0^\infty (1+t)^{-\lambda} t^{\lambda-\alpha-1} dt = c_1 \|\varphi\|_p$.

Для $B_\varepsilon(x)$ имеем

$$B_\varepsilon(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty k(s) ds \int_{\varepsilon s}^\infty \frac{u(x, x-t) - u(x-t, x-t)}{t} \varphi(x-t) dt$$

или в силу (6.11)

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) &= -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty k(s) ds \int_0^{\varepsilon s} \frac{u(x, x-t) - u(x-t, x-t)}{t} \varphi(x-t) dt = \\ &= -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t} \int_0^\infty k(s) [u(x, x-ts) - u(x-ts, x-ts)] \varphi(x-ts) ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|B_\varepsilon(x)| \leq c \int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^{1-\lambda}} \int_0^\infty \frac{s^\lambda |k(s) \varphi(x-ts)| ds}{(1+|x|)^\lambda (1+|x-ts|)^\lambda},$$

и тогда (применяя неравенство Минковского) получаем

$$\|B_\varepsilon\|_p \leq c \int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^{1-\lambda}} \int_0^\infty s^\lambda |k(s)| ds \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{|\varphi(x)|^p dx}{(1+|x|)^{\lambda p} (1+|x-ts|)^{\lambda p}} \right\}^{1/p}. \quad (31.18)$$

Справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|\psi(x)| dx}{(1+|x|)^a (1+|x-h|)^a} \leq \frac{1+2^a}{(1+|h|)^a} \|\psi\|_1, \quad a > 0. \quad (31.19)$$

Действительно, пусть $h > 0$ (случай $h < 0$ сводится к предыдущему заменой $x = -y$), тогда, обозначив левую часть в (31.19) через $J(h)$, имеем

$$\begin{aligned} J(h) &\leq \int_0^\infty \frac{|\psi(-x)| dx}{(1+x)^a (1+x+h)^a} + \left(\int_0^{h/2} + \int_{h/2}^\infty \right) \frac{|\psi(x)| dx}{(1+x)^a (1+|x-h|)^a} \leq \\ &\leq (1+h)^{-a} \|\psi\|_1 + \int_0^{h/2} (1+h-x)^{-a} |\psi(x)| dx + \\ &+ \int_{h/2}^\infty (1+x)^{-a} |\psi(x)| dx \leq (1+h)^{-a} \|\psi\|_1 + \left(1 + \frac{h}{2}\right)^{-a} \|\psi\|_1, \end{aligned}$$

что и дает (31.19). В силу неравенства (31.19) из (31.18) получаем

$$\|B_\varepsilon\|_p \leq c \|\varphi\|_p \int_0^\varepsilon t^{\lambda-1} dt \int_0^\infty s^\lambda |k(s)| (1+ts)^{-\lambda} ds.$$

Внутренний интеграл оценивается следующим образом:

$$\bar{J}(t) = \int_0^\infty s^\lambda |k(s)| (1+ts)^{-\lambda} ds \leq ct^{-\alpha} \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (31.20)$$

В самом деле, так как $|k(s)| \leq cs^{\alpha-2}$ при $s \geq 1$, то $\bar{J}(t) \leq c + c \int_1^\infty s^{\lambda+\alpha-2} \times$
 $\times (1+ts)^{-\lambda} ds = c + c \int_0^1 \xi^{-\alpha} (\xi+t)^{-\lambda} d\xi = c + ct^{1-\lambda-\alpha} \int_0^{1/t} \xi^{-\alpha} (1+\xi)^{-\lambda} d\xi \leq$
 $\leq ct^{-\alpha}.$

В силу оценки (31.20)

$$\|B_\varepsilon\|_p \leq c\varepsilon^{\lambda-\alpha} \|\varphi\|_p, \quad (31.21)$$

и тогда, согласно (31.15), и $\|D_{+,e}^\alpha K_u^+ \varphi\|_p \leq c \|\varphi\|_p.$

Так как $(K_v^- \varphi)(x) = (K_v^+ \varphi^*)(-x)$, где $v^*(x, t) = v(-x, -t)$, $\varphi^*(t) = \varphi(-t)$, то такая же оценка справедлива и для $D_{+,e}^\alpha K_v^-$. В соответствии с теоремой 6.2 утверждение теоремы доказано.

Б. Представление оператора типа потенциала M в виде композиции $M = I_+^\alpha N$. Теорема 6.1 представляет возможность обращать дробное интегрирование справа дробным дифференцированием на образе $I^\alpha(L_p)$: $I_+^\alpha D_+^\alpha f \equiv f$, $f \in I^\alpha(L_p)$. Поэтому доказанное в теореме 31.8 вложение $M(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$ позволяет записать

$$M\varphi \equiv I_+^\alpha N\varphi, \quad N = D_+^\alpha M, \quad \varphi \in L_p, \quad 1 < p < 1/\alpha. \quad (31.22)$$

В следующей лемме получено явное выражение для оператора N .

Лемма 31.1. Оператор $N = D_+^\alpha M$, где M — оператор (31.6), имеет в предположениях теоремы 31.5 вид

$$N = \Gamma(\alpha) N_0 + T, \quad (31.23)$$

где N_0 — сингулярный оператор (31.12), а

$$T\varphi = T_u^+ \varphi + \cos \alpha \pi T_v^- \varphi + \sin \alpha \pi S T_v^- \varphi, \quad (31.24)$$

где

$$T_u^+ \varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^\infty \frac{u(x, x-t-s) - u(x-t, x-t-s)}{s^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \varphi(x-t-s) ds, \quad (31.25)$$

$$T_v^- \varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^\infty \frac{v(x, x+t+s) - v(x+t, x+t+s)}{s^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \varphi(x+t+s) ds. \quad (31.26)$$

Операторы T_u^+ , T_v^- можно представить также в виде

$$T_u^+ \varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x T_u^+(x, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \\ T_v^- \varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} T_v^-(x, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (31.27)$$

где

$$T_u^+(x, \tau) = \int_{\tau}^x \frac{u(x, \tau) - u(t, \tau)}{(x-t)^{1+\alpha} (t-\tau)^{1-\alpha}} dt = \\ = \frac{1}{x-\tau} \int_0^1 \frac{u(x, \tau) - u[\tau + s(x-\tau), \tau]}{s^{1-\alpha} (1-s)^{1+\alpha}} ds, \quad (31.28)$$

$$T_v^-(x, \tau) = \int_x^{\tau} \frac{v(x, \tau) - v(x, t)}{(t-x)^{1+\alpha} (\tau-t)^{1-\alpha}} dt = \\ = \frac{1}{\tau-x} \int_0^1 \frac{v(x, \tau) - v[x, x + s(\tau-x)]}{s^{1+\alpha} (1-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Доказательство. Из (31.11) имеем $D_+^{\alpha} M\varphi = \Gamma(\alpha) N_0\varphi + D_+^{\alpha} K_u^+ \varphi + D_+^{\alpha} K_v^- \varphi$, так что $T = D_+^{\alpha} K_u^+ + D_+^{\alpha} K_v^-$. Из (11.10) заключаем, что

$$D_+^{\alpha} f = \cos \alpha \pi D_-^{\alpha} f + \sin \alpha \pi S D_-^{\alpha} f \quad (31.29)$$

для $f \in I^{\alpha}(L_p)$. Так как $K_v^- \varphi \in I^{\alpha}(L_p)$ в силу теоремы 31.8, то на основании (31.29) и получается (31.24).

Далее, из представления (31.15) после предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем с учетом (31.21):

$$D_+^{\alpha} K_u^+ \varphi = \\ = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{u(x, x-t-s) - u(x-t, x-t-s)}{s^{1-\alpha}} \varphi(x-t-s) ds + \\ + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} k(s) ds \int_0^{\infty} \frac{u(x, x-t) - u(x-t, x-t)}{t} \varphi(x-t) dt. \quad (31.30)$$

Здесь предельный переход был обоснован, если его понимать по норме L_p . Нетрудно показать, что интегралы в (31.23) существуют не только в смысле сходимости по норме L_p , но и в обычном смысле (почти при всех x).

В (31.30) второе слагаемое исчезает ввиду (6.11), и мы получаем (31.25). Равенство (31.26) можно вывести из очевидных соображений симметрии. Представления (31.27), (31.28) получаются из (31.25), (31.26) простыми преобразованиями. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 31.1. Из теоремы 31.8 следует, что оператор T в (31.23) ограничен в $L_p(R^1)$ (по крайней мере, при $1 < p < 1/\alpha$). Ниже будет показано, что он вполне непрерывен в $L_p(R^1)$. Заметим, что ядра (31.28) допускают оценки:

$$|T_u^+(x, \tau)| \leq \frac{c(x-\tau)^{\lambda-1}}{(1+|x|)^{\lambda}}, \quad |T_v^-(x, \tau)| \leq \frac{c(\tau-x)^{\lambda-1}}{(1+|\tau|)^{\lambda}},$$

что вытекает из (31.28) в силу (31.8).

В. Нетеровость оператора M . Предыдущие построения подготовили результат о нетеровости уравнения (31.6). Пусть $c(x, t)$ имеет вид (31.7). Справедлива

Теорема 31.9. Пусть $c(x, t) \in H_x^\lambda(\bar{R}_\pm^2)$, где $\lambda > \alpha$. Для того чтобы оператор M был нетеровым оператором из пространства $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, в пространство $I^\alpha(L_p)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$u^2(x, x) + v^2(x, x) \neq 0, \quad x \in \bar{R}^1. \quad (31.31)$$

При выполнении этого условия индекс оператора M равен

$$\kappa_{L_p \rightarrow I^\alpha(L_p)}(M) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d \arg \left\{ c_1(x) + i c_2(x) \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2} \right\}, \quad (31.32)$$

где $c_1(x) = u(x, x) + v(x, x)$, $c_2(x) = u(x, x) - v(x, x)$.

Доказательство. При $\lambda > \alpha$ справедливо вложение $M(L_p) \subseteq I^\alpha(L_p)$, и потому имеет место представление (31.22). Элементарными рассуждениями устанавливается, что нетеровость оператора M из L_p в $I^\alpha(L_p)$ равносильна нетеровости оператора N из L_p в L_p . Условие (31.31) в силу теоремы 31.5 необходимо и достаточно для нетеровости оператора N_0 , и при выполнении этого условия индекс оператора N_0 равен числу (31.25). Поэтому в соответствии с теоремой 31.3 достаточно показать, что оператор T вполне непрерывен в $L_p(R^1)$. Так как композиция ограниченного оператора и вполне непрерывного является вполне непрерывным оператором, то ввиду (31.24), а также ввиду равноправия операторов T_u^+ и T_v^- остается доказать полную непрерывность только оператора T_u^+ . Выделим это утверждение в виде отдельной леммы.

Лемма 31.2. Если $u(x, t) \in H_x^\lambda(\bar{R}_+^2)$, $\lambda > \alpha$, то оператор T_u^+ вполне непрерывен в $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$.

Доказательство. Проверяем выполнение критерия Рисса

$$\|(T_u^+ \varphi)(x + \delta) - (T_u^+ \varphi)(x)\|_p \leq \xi(\delta) \|\varphi\|_p, \quad \xi(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \quad (31.33)$$

$$\left(\int_{|x| > N} |(T_u^+ \varphi)(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \eta(N) \|\varphi\|_p, \quad \eta(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (31.34)$$

обеспечивающего (см. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1, с. 324]) полную непрерывность оператора T_u^+ . При проверке условия (31.33) оказывается «работающим» представление (31.27), (31.28) оператора T_u^+ , а при проверке условия (31.34) — представление (31.25).

Обозначим $F(x) = (T_u^+ \varphi)(x)$. Имеем, согласно (31.27),

$$F(x + \delta) - F(x) = \int_x^{x+\delta} T_u^+(x + \delta, \tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^x [T_u^+(x + \delta, \tau) - T_u^+(x, \tau)] \varphi(\tau) d\tau = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Оценка для Δ_1 проста в силу (31.8):

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\|_p &\leq \int_0^\delta d\tau \left\{ \int_{-\infty}^\infty |T_u^+(x - \tau + \delta, x) \varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq c \int_0^\delta (\delta - \tau)^{\lambda-1} d\tau \|\varphi\|_p = \frac{c}{\lambda} \delta^\lambda \|\varphi\|_p. \end{aligned} \quad (31.35)$$

Далее,

$$\|\Delta_2\|_p \leq \int_0^\infty d\tau \left\{ \int_{-\infty}^\infty |T_u^+(x+\tau+\delta, x) - T_u^+(x+\tau, x)|^p |\varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Представим $T_u^+(x+\tau+\delta, x) - T_u^+(x+\tau, x)$ в виде $A_1 + A_2 + A_3$, где

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_x^{x+\tau} \frac{u(x+\tau+\delta, x) - u(x+\tau, x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha} (t-x)^{1-\alpha}} dt, \\ A_2 &= \int_{x+\tau}^{x+\tau+\delta} \frac{u(x+\tau+\delta, x) - u(t, x)}{(x+\tau+\delta-t)^{1+\alpha} (t-x)^{1-\alpha}} dt, \\ A_3 &= \int_x^{x+\tau} [(x+\tau+\delta-t)^{-1-\alpha} - (x+\tau-t)^{-1-\alpha}] \frac{u(x+\tau, x) - u(t, x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt. \end{aligned}$$

Оценим A_1 :

$$|A_1| \leq \frac{c\delta^\lambda \tau^\lambda}{(1+|x+\tau|)^\lambda} \int_0^1 \frac{ds}{s^{1-\alpha} [\delta+\tau(1-s)]^{1+\alpha}} = c_1 \frac{\delta^{\lambda-\alpha} \tau^\alpha}{(1+|x+\tau|)^\lambda (\delta+\tau)}$$

(в последнем равенстве использована формула (13.18)), так что

$$|A_1| \leq c_1 \frac{\delta^{\lambda-\alpha}}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{1-\alpha}}. \quad (31.36)$$

Оценка для A_2 получается аналогично и совпадает с (31.36). Далее, применяя в A_3 теорему о среднем, получаем

$$|A_3| \leq \frac{c\delta}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{2-\lambda}} \int_0^1 \frac{(1-s-\xi)^\alpha ds}{s^{1-\alpha} (1-s)^{1+\alpha-\lambda} (1-s+\delta/\tau)^{1+\alpha}},$$

где $0 < \xi < \delta/\tau$, так что

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq \frac{c\delta}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{2-\lambda}} \int_0^1 \frac{s^{\alpha-1} (1-s)^{\lambda-1-\alpha} ds}{(1-s+\delta/\tau)^{1-\varepsilon} (1-s+\delta/\tau)^\varepsilon} \leq \\ &\leq \frac{c_1 \delta^\varepsilon}{(1+|x+\tau|)^\lambda \tau^{1-\lambda+\varepsilon}}, \end{aligned}$$

где $c_1 = c_1(\varepsilon)$ и $0 < \varepsilon < \lambda - \alpha$. В силу оценок для A_1, A_2, A_3 имеем

$$\|\Delta_2\|_p \leq c\delta^\varepsilon \int_0^\infty \frac{a(\tau) d\tau}{\tau^{1-\lambda+\varepsilon}} + c\delta^{\lambda-\alpha} \int_0^\infty \frac{a(\tau) d\tau}{\tau^{1-\alpha}}, \quad (31.37)$$

где обозначено $a(\tau) = \left\{ \int_{-\infty}^\infty (1+|x+\tau|)^{-\lambda p} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p}$. Очевидно, $0 \leq a(\tau) \leq \|\varphi\|_p$, и легко получается, что $\|a\|_q \leq k \|\varphi\|_p$ при $q > \max(p, 1/\lambda)$, где $k = k(q)$. Применение неравенства Гельдера при $\tau > 1$ показывает, что интегралы в (31.37) конечны и допускают оценку $\int_0^\infty \tau^{-\nu} a(\tau) d\tau \leq c \|\varphi\|_p$

при $\nu = 1 - \lambda + \varepsilon$ или $\nu = 1 - \alpha$, $c = c(\lambda, \varepsilon, \alpha, q)$, если порядок суммируемости q для функции $a(\tau)$ выбрать в пределах $\max(p, 1/\lambda) < q < 1/(\lambda - \varepsilon)$, что приводит к следующему (всегда возможному) выбору ε :

$\max(0, \lambda - 1/p) < \varepsilon < \lambda - \alpha$. Таким образом, в силу оценок (31.35) и (31.37) $\|F(x + \delta) - F(x)\|_p \leq c\delta^\varepsilon \|\varphi\|_p$, так что условие (31.33) выполнено.

Переходим к проверке условия (31.34). Воспользовавшись представлением (31.25), получаем

$$|(T_u^+ \varphi)(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|)^\lambda} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda} (1 + |x-t|)^\lambda} \int_0^\infty \frac{|\varphi(x-t-s)|}{s^{1-\alpha}} ds.$$

Пусть $g(x)$ — то же, что в (31.16). Поступая точно так же, как при оценках в (31.16), (31.17), получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_{|x|>N} |T_u^+ \varphi|^p dx \right)^{1/p} &\leq c \|g\|_q \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left(\int_{|x|>N} \frac{dx}{[(1+|x|)(1+|x-t|)]^{\lambda/\alpha}} \right)^\alpha \leq \\ &\leq c_1 \|\varphi\|_p \frac{1}{(N+1)^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left(\int_{|x|>N} \frac{dx}{(1+|x|)^{(\lambda-\varepsilon)/\alpha} (1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon > 0$; выберем $\varepsilon < \alpha$ и $\varepsilon < \lambda - \alpha$; тогда внутренний интеграл оценивается согласно (6.32), так что

$$\left(\int_{|x|>N} |T_u^+ \varphi|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{c_1 \|\varphi\|_p}{(N+1)^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-\alpha-1} dt}{(1+t)^{\lambda-\varepsilon}} = \frac{c_2}{(N+1)^\varepsilon} \|\varphi\|_p,$$

что и завершает доказательство леммы и вместе с этим теоремы 31.9.

Итак, в силу представления (31.22) уравнение (31.6) сведено к уравнению второго рода

$$\begin{aligned} N\varphi &\equiv \Gamma(\alpha) [u(x, x) + v(x, x) \cos \alpha\pi] \varphi(x) + \\ &+ \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{v(t, t)}{t-x} \varphi(t) dt + T\varphi = D_+^\alpha f, \end{aligned} \quad (31.38)$$

где T — вполне непрерывный оператор. Из теоремы 31.6 вытекает

Следствие. Пусть $u^2(x, x) + v^2(x, x) \neq 0$, $x \in \dot{R}^1$. Для того чтобы уравнение (31.6) с правой частью $f(x)$ из $I^\alpha(L_p)$ было разрешимо в L_p , $1 < p < 1/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^\infty \psi_j(x) (D_+^\alpha f)(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\psi_j(x)$ — полная система линейно независимых решений однородного сингулярного уравнения $N^*\psi = 0$, сопряженного с (31.38).

Г. Регуляризация оператора типа потенциала. Рассмотрим в заключение этого пункта вопрос о регуляризации уравнения (31.6), т. е. о сведении его не к сингулярному интегральному уравнению, а к уравнению Фредгольма. Наша цель будет состоять в построении в явном виде регуляризатора оператора M (в соответствии с теоремой 31.4). Таким регуляризатором оказывается оператор

$$Rf = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi A(x)} \int_{-\infty}^\infty \frac{c_0(x, t)}{|x-t|^{1+\alpha}} [f(x) - f(t)] dt, \quad (31.39)$$

где

$$A(x) = u^2(x, x) + 2u(x, x)v(x, x)\cos\alpha\pi + v^2(x, x),$$

$$c_0(x, t) = \begin{cases} u(x, x), & t < x, \\ v(x, x), & t > x. \end{cases}$$

Теорема 31.10. Пусть $c(x, t) \in H_x^\lambda(\bar{R}_\pm^2)$ и пусть $u(x, x), v(x, x) \in H^\lambda(\bar{R}^1)$, $\lambda > \alpha$. Если $u^2(x, x) + v^2(x, x) \neq 0$, $x \in \bar{R}^1$, то оператор (31.39) является регуляризатором оператора (31.6):

$$RM\varphi = \varphi + T'\varphi, \quad MRf = f + T''f, \quad (31.40)$$

где T', T'' — операторы, вполне непрерывные в L_p и в $I^\alpha(L_p)$ соответственно.

Доказательство. Прежде всего замечаем, что оператор R ограничен из $I^\alpha(L_p)$ в L_p . Для этого запишем оператор R в терминах дробного дифференцирования:

$$Rf = \frac{u(x, x)}{\Gamma(\alpha)A(x)} (D_+^\alpha f)(x) + \frac{v(x, x)}{\Gamma(\alpha)A(x)} (D_-^\alpha f)(x),$$

после чего оценка $\|Rf\|_p \leq c\|f\|_{I^\alpha(L_p)}$ вытекает из теоремы 6.1 и неравенства (11.11').

Из леммы 31.2 вытекает, что оператор

$$(uI_+^\alpha - I_+^\alpha u)\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{u(x, x) - u(t, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt$$

вполне непрерывен из L_p в $I^\alpha(L_p)$, если $u(x) \in H^\lambda(\bar{R}^1)$, $\lambda > \alpha$. Поэтому ниже при составлении композиций RM, MR можно переставлять операцию умножения на гильбертовскую функцию с операторами I_+^α, I_-^α . Согласно (31.9), имеем $M = M_0 + T_1$, где $M_0\varphi = \Gamma(\alpha)I_+^\alpha(u\varphi) + \Gamma(\alpha)I_-^\alpha(v\varphi)$, а T_1 — оператор, вполне непрерывный из L_p в $I^\alpha(L_p)$ (см. лемму 31.2). Поэтому

$$\begin{aligned} RM\varphi &= \frac{1}{A} (uD_+^\alpha + vD_-^\alpha)(uI_+^\alpha + vI_-^\alpha)\varphi + T_2\varphi = \\ &= \frac{1}{A} [(u^2 + v^2)\varphi + uD_+^\alpha I_-^\alpha v\varphi + vD_-^\alpha I_+^\alpha u\varphi] + T_3\varphi, \end{aligned}$$

где T_2, T_3 — вполне непрерывные в $L_p(R^1)$ операторы. Так как $D_+^\alpha I_-^\alpha \varphi = \cos\alpha\pi\varphi + \sin\alpha\pi S\varphi$, $D_-^\alpha I_+^\alpha \varphi = \cos\alpha\pi\varphi - \sin\alpha\pi S\varphi$ согласно (11.10), (11.11), то

$$RM\varphi = \frac{1}{A} [(u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha\pi)\varphi + \sin\alpha\pi(uSv - vSu)\varphi] + T_3\varphi.$$

Оператор $uSv - vSu$ вполне непрерывен в $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$, в силу полной непрерывности в $L_p(R^1)$ оператора $Su - uS$ (см., например, монографию И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4, с. 33]). Поэтому $RM\varphi = \varphi + T'\varphi$, где T' вполне непрерывен в L_p .

Аналогично проверяется справедливость второго из равенств (31.40). Теорема доказана.

3°. Уравнения на конечном отрезке. Рассмотрим операторы типа потенциала в виде

$$M\varphi \equiv u(x) \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + v(x) \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} + \int_a^b T(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (31.41)$$

и исследуем их с точки зрения корректной постановки нормальной разрешимости. В конце этого пункта получим утверждение о нетеровости оператора M из L_p в $I^\alpha(L_p) = I^\alpha[L_p(a, b)]$. При такой постановке сопряженный оператор M^* понимается как действующий из $I^\alpha(L_p)^* = D_{a+}^\alpha(L_p)$ в $L_{p'}$. Нас будет интересовать ввиду обширных приложений уравнений на конечном отрезке и «классическая» постановка вопроса, когда вместо M^* берется транспонированный оператор

$$M^T \psi = \int_a^x \frac{v(t) \psi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_x^b \frac{u(t) \psi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} + \int_a^b T(t, x) \psi(t) dt = g(x), \quad (31.42)$$

а классы, в которых ищутся решения φ, ψ , описываются в простых терминах (но образуют не банаховы пространства, а, вообще говоря, топологические).

А. Приведение к уравнениям с ядром Коши. Применяя тождества (11.18) и (11.16) соответственно к (31.41) и (31.42), после простых преобразований приводим их к уравнениям с ядром Коши:

$$a_1(x) \Phi(x) + \frac{a_2(x)(b-x)^\alpha}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi(t) dt}{(b-t)^\alpha (t-x)} + K\Phi = f(x), \quad (31.43)$$

$$a_1(x) \psi(x) - \frac{1}{\pi(b-x)^\alpha} \int_a^b \frac{a_2(t)(b-t)^\alpha \psi(t) dt}{t-x} + K^* \psi = g(x), \quad (31.44)$$

где $a_1(x), a_2(x)$ — функции (30.48), а

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad g_1(x) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \frac{d}{dx} \int_x^b g(t) (t-x)^{\alpha-1} dt, \quad (31.45)$$

$$K\Phi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} T D_{a+}^\alpha f, \quad K^* \psi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D_{b-}^\alpha T^T \psi, \quad (31.46)$$

где T — интегральный оператор с ядром $T(x, t)$, T^T — транспонированный с ним оператор. Здесь важно отметить, что использованное при переходе к (31.44) «правое» представление $T^T = I_{b-}^\alpha D_{b-}^\alpha T^T$ справедливо на рассматриваемых ниже функциях ψ , так как для них функция $T^T \psi$ будет представима дробным интегралом порядка α .

Б. Класс допустимых возмущений T . Естественным считать, что возмущающий оператор T имеет ядро $T(x, t)$ с особенностью более слабого порядка, чем $1-\alpha$, чтобы получаемый в (31.43) оператор K имел слабую особенность. С помощью формулы дробного интегрирования по частям находим, что для этого достаточно, чтобы дробная производная от $T(x, t)$ по t порядка α

$$T_t^{(\alpha)}(x, t) = - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b T(x, s) (s-t)^{-\alpha} ds \quad (31.47)$$

имела слабую особенность. Следующая лемма дает простое достаточное условие для допустимых ядер $T(x, t)$.

Л е м м а 31.3. Пусть

$$T(x, t) = \begin{cases} c_1(x, t) (x-t)^{\beta_1-1}, & t < x, \\ c_2(x, t) (t-x)^{\beta_2-1}, & t > x, \end{cases} \quad (31.48)$$

где $\alpha < \beta_i \leq 1$, а $c_i(x, t)$ — ограниченные в основном квадрате $[a, b] \times [a, b]$ функции, дифференцируемые по t при $t \neq x$ и такие, что $|\partial c_i / \partial t| \leq A_i |x - t|^{-1}$, $i = 1, 2$. Тогда ядро $T_i^{(\alpha)}(x, t)$ представимо в виде суммы вольтерровского вырожденного ядра и ядра со слабой особенностью:

$$T_i^{(\alpha)}(x, t) = T_0(x, t) + \begin{cases} \frac{c_2(x, b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{\beta_2-1} (b-t)^{-\alpha}, & t > x, \\ 0, & t < x, \end{cases} \quad (31.49)$$

$$|T_0(x, t)| \leq c |x - t|^{\min(\beta_1, \beta_2) - \alpha - 1}. \quad (31.50)$$

Доказательство. Пусть вначале $t < x$. Имеем

$$T_i^{(\alpha)}(x, t) = - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left\{ \int_t^x \frac{c_1(x, s) ds}{(s-t)^\alpha (x-s)^{1-\beta_1}} + \int_x^b \frac{c_2(x, s) ds}{(s-t)^\alpha (s-x)^{1-\beta_2}} \right\}.$$

В первом интеграле сделаем замену $s = t + \omega(x-t)$, после чего продифференцируем под знаком интеграла, а во втором сначала продифференцируем, а затем сделаем замену $s = x + \omega(x-t)$:

$$\begin{aligned} -\Gamma(1-\alpha) T_i^{(\alpha)}(x, t) &= \frac{\beta_1 - \alpha}{(x-t)^{1+\alpha-\beta_1}} \int_0^1 \frac{c_1(x, t + \omega(x-t))}{\omega^\alpha (1-\omega)^{1-\beta_1}} d\omega + \\ &+ (x-t)^{\beta_1-\alpha} \int_0^1 \frac{\partial c_1(x, s)}{\partial s} \frac{(1-\omega)^{\beta_1} d\omega}{\omega^\alpha} + \frac{\alpha}{(x-t)^{1+\alpha-\beta_2}} \times \\ &\times \int_0^{(b-t)/(x-a)} \frac{c_2(x, x + \omega(x-t)) d\omega}{\omega^{1-\beta_2} (1+\omega)^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Интегралы в первом и третьем слагаемых ограничены в силу ограниченности функций $c_i(x, t)$, а для второго имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\partial c_1(x, s)}{\partial s} \frac{(1-\omega)^{\beta_1}}{\omega^\alpha} d\omega \right| &\leq A_1 \int_0^1 \frac{d\omega}{(x-t) \omega^\alpha (1-\omega)^{1-\beta_1}} = \\ &= (x-t)^{-1} A_1 B(1-\alpha, \beta_1). \end{aligned}$$

Пусть $t > x$. Интегрируя в (31.47) по частям, а затем дифференцируя по t под знаком интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(1-\alpha) T_i^{(\alpha)}(x, t) &= \frac{c_2(x, b)}{(b-x)^{1-\beta_2} (b-t)^\alpha} - \\ &- \int_t^b \frac{\partial c_2(x, s)}{\partial s} \frac{ds}{(s-x)^{1-\beta_2} (s-t)^\alpha} + (1-\beta_2) \int_t^b \frac{c_2(x, s) ds}{(s-x)^{2-\beta_2} (s-t)^\alpha}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое — вырожденное ядро, а для остальных справедливы оценки

$$\left| \int_t^b \frac{\partial c_2(x, s)}{\partial s} \frac{ds}{(s-x)^{1-\beta_2} (s-t)^\alpha} \right| \leq A_2 \int_t^b \frac{ds}{(s-x)^{2-\beta_2} (s-t)^\alpha} \leq \\ \leq \frac{c}{(t-x)^{1+\alpha-\beta_2}}; \left| \int_t^b \frac{c_2(x, s) ds}{(s-x)^{2-\beta_2} (s-t)^\alpha} \right| \leq \frac{c}{(t-x)^{1+\alpha-\beta_2}}.$$

Собирая все оценки, получаем (31.49), (31.50).

В. Теоремы Нетера в «классическом» варианте. Так как уравнения (31.41), (31.42) сведены к полным сингулярным уравнениям (31.43), (31.44), мы можем воспользоваться теорией Нетера для последних. Основным моментом здесь является правильный выбор классов для решений φ и ψ в том случае, когда мы говорим о «классическом» подходе, основанном на теореме 31.6. При рассмотрении же нетеровости оператора (31.41) из $L_p(a, b)$ в $l^\alpha[L_p(a, b)]$ в смысле определения 31.3 этот вопрос не возникает.

В следующих ниже теоремах значение

$$\theta(a) = \arg \frac{u(a) + v(a) e^{-\alpha\pi i}}{u(a) + v(a) e^{\alpha\pi i}} \quad (31.51)$$

выбрано в пределах $0 \leq \theta(a) < 2\pi$.

Теорема 31.11. Пусть $u(x), v(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, $f(x) \in H_\alpha^*$, ядро $T(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 31.3 и пусть $u^2(x) + v^2(x) \neq 0$, $\theta(a) \neq 0$, $\theta(a) \neq (1-\alpha)2\pi$, $\theta(b) = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \dots$. Уравнение (31.41) разрешимо в классе H^* тогда и только тогда, когда $\int_a^b f(x) \psi_j(x) dx = 0$,

где $\{\psi_j\}$ — полная система решений соответствующего (31.42) однородного уравнения из класса функций вида $\psi(x) = (x-a)^{-\alpha} (b-x)^{-\alpha} \psi_*(x)$, где $\psi_*(x)$ гельдерова на $[a, b]$. Разность чисел решений однородных уравнений (31.41), (31.42) вычисляется по формуле (30.57).

Доказательство этой теоремы фактически подготовлено сведением к сингулярным уравнениям (31.43), (31.44) и будет вытекать из известных фактов теории таких уравнений. Запишем уравнение (31.43) и однородное уравнение (31.44) в виде

$$a_1(x) \Phi_b(x) + \frac{a_2(x)}{\pi} \int_a^b \frac{\Phi_b(t)}{t-x} dt + K_b \Phi_b = f_b(x), \quad (31.52)$$

$$a_1(x) \psi_b(x) - \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{a_2(t) \psi_b(t)}{t-x} dt + K_b^* \psi_b = 0. \quad (31.53)$$

Здесь $\Phi_b(x) = (b-x)^{-\alpha} \Phi(x)$, $f_b(x) = (b-x)^{-\alpha} f(x)$, $\psi_b(x) = (b-x)^\alpha \psi(x)$, $K_b = (b-x)^{-\alpha} K (b-t)^\alpha$, $K_b^* = (K_b)^*$. Уравнения (31.52), (31.53) являются сингулярными интегральными уравнениями, нетеровская теория которых приведена в теоремах 31.6 и 31.7.

Вопрос состоит в том, что если решения $\varphi(x)$ разыскиваются в классе H^* , то какой класс решений $\psi(x)$ следует выбрать для того, чтобы были согласованы классы решений сингулярных уравнений (31.52), (31.53) так, как это диктуется теоремой 31.6. Так как решения уравнений (31.41), (31.42) связаны с решениями уравнений (31.52), (31.53) тождествами

$$\Phi_b(x) = (b-x)^{-\alpha} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \psi_b(x) = (b-x)^\alpha \psi(x),$$

то требуемый выбор определяется теоремами 31.6 и 13.14. В силу теоремы 13.14 $\Phi(x) \in H_\alpha^*$, так что $\Phi_b(x) \in H^*$. В соответствии с теоремами 30.2 и 31.6 случаи $0 < \theta(a) < 2\pi(1-\alpha)$, $2\pi(1-\alpha) < \theta(a) < 2\pi$ отвечают тому, что решения $\Phi_b(x)$ ограничены, соответственно не ограничены, в точке $x=a$. Пусть для определенности $\theta(a) > 2\pi(1-\alpha)$. Тогда решения $\psi_b(x)$ уравнения (31.52) разыскиваются, согласно теореме 31.6, в классе функций, ограниченных на обоих концах, т. е. в классе H . Но тогда $\psi(x)$ следует брать из класса функций вида

$$\psi(x) = \psi_b(x)/(b-x)^\alpha, \quad \psi_b(x) \in H. \quad (31.54)$$

Это будет равносильно тому, чтобы брать $\psi(x)$ из класса функций вида (13.51). Проще всего это объяснить следующим образом. Уравнения (31.41), (31.42) можно привести к сингулярным уравнениям вида (31.43), (31.44) или (31.52), (31.53), связанным с весом $(x-a)^\alpha$ вместо $(b-x)^\alpha$. Для этого нужно вместо тождеств (11.18), (11.16) применить тождества (11.17), (11.19). При этом придем к уравнению типа (31.52) с правой частью $(x-a)^{-\alpha}f(x)$ и к уравнению типа (31.53) с решением $\psi_a(x) = (x-a)^\alpha\psi(x)$. Рассуждая, как и выше, установим, что выбор того же класса для решений $\psi(x)$ должен быть такой: $\psi(x) = \psi_a(x)/(x-a)^\alpha$, $\psi_a(x) \in H$, что в сопоставлении с (31.54) приводит к (13.51).

Применяя теорему 31.6 к уравнению (31.52), видим, что уравнение (31.43) разрешимо в H^* тогда и только тогда, когда $\int_a^b f(x) \psi_j(x) dx = 0$,

где $\{\psi_j\}$ — полная система решений однородного уравнения (31.44) в классе (13.51). Из разрешимости уравнения (31.43) в классе H^* вытекает в случае $f(x) \in H_\alpha^*$ ($\subset H^*$), что и все его решения $\Phi(x)$ также принадлежат подклассу H_α^* . Опустим доказательство этого утверждения, лишь пояснив его. Для сингулярного уравнения (31.52) известно в случае ядра $\mathcal{K}(x, t)$, гильбертовского по обоим переменным, что если правая часть имеет на концах интегрируемые особенности (допустимые согласно теореме 31.2; подчеркнем, что в нашем случае $\mu_b < 0$) порядка не выше заданного, а гильбертовость имеет порядок не ниже заданного, то таково же и решение уравнения (априорно разыскиваемое в H^*). Это достигается с помощью регуляризации по Карлеману — Векуа (см. Ф. Д. Гахов [1]), состоящей в обращении характеристической части сингулярного уравнения. После этого нужная информация о решениях извлекается из теории уравнений Фредгольма. В нашем случае, т. е. при наших предположениях о ядре $T(x, t)$, показывается, что на этом пути получается уравнение Фредгольма с интегральным оператором, ядро которого имеет слабую особенность (см. ниже замечание 31.3). Это требует тщательных оценок, которые приводить не станем.

Коль скоро уравнение (31.43) разрешимо и его решения принадлежат классу H_α^* , то и уравнение (31.41) разрешимо в H^* . Наконец, последнее утверждение теоремы вытекает из его справедливости для сингулярных уравнений (31.52), (31.53). Теорема доказана.

Замечание 31.2. Выбор (13.51) есть выбор класса, «союзного» по отношению к классу H^* для решений уравнений (31.41), (31.42) (следуем терминологии в книге Ф. Д. Гахова [1]). При таком выборе союзных классов гильбертовских функций для уравнения первого рода (31.41) справедливы утверждения типа теорем Нетера — теорема 31.11. Подчеркнем, что основная мысль, лежащая в выборе союзных классов весовых гильбертовских

функций, здесь состоит в том, чтобы $\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\alpha |\varphi(x) \psi(x)| dx < \infty$ (в теории же сингулярных интегральных уравнений правило выбора союз-

ных классов диктуется условием $\int_a^b |\varphi(x) \psi(x)| dx < \infty$.

Замечание 31.3. Можно изучить вид регуляризаторов (в смысле теоремы 31.4), явно их построить и показать, что ядро регуляризованного уравнения—уравнения Фредгольма—при $u(x), v(x) \in H^\lambda$, $\lambda > \alpha$, и ядре $T(x, t)$, удовлетворяющем условиям леммы 31.3, мажорируется слабой особенностью $|x - t|^{\mu-1}$, $\mu = \min(\lambda, \beta_1, \beta_2) - \alpha$.

Г. Нетеровость операторов типа потенциала из L_p в $I^\alpha(L_p)$. Рассмотрим уравнение типа (31.41) в виде

$$M\varphi \equiv \int_a^x \frac{u(x, t) \varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_x^b \frac{v(x, t) \varphi(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x). \quad (31.55)$$

Относительно функций $u(x, t), v(x, t)$ будем предполагать, что они

1) гельдеровы по x порядка $\lambda > \alpha$ равномерно по t :

$$|u(x_1, t) - u(x_2, t)| \leq A |x_1 - x_2|^\lambda, \quad \lambda > \alpha, \quad (31.56)$$

$$|v(x_1, t) - v(x_2, t)| \leq \tilde{A} |x_1 - x_2|^\lambda, \quad \lambda > \alpha,$$

где $x_1 \geq t, x_2 \geq t$ и $x_1 \leq t, x_2 \leq t$ соответственно и $A, \tilde{A}$ не зависят от t ;

2) $u(x, x) = u(x, x-0) \in C([a, b])$, $v(x, x) = v(x, x+0) \in C([a, b])$.

Действуя подобно п. 1° (см. (31.9)–(31.12)), приводим уравнение (31.55) с помощью тождества (11.16) к виду

$$M\varphi = \Gamma(\alpha) I_{a+}^\alpha N_\alpha \varphi + T_1 \varphi + T_2 \varphi = f(x), \quad (31.57)$$

где

$$N_\alpha \varphi = a_1(x) \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{y-a}{x-a} \right)^\alpha \frac{a_2(y)}{y-x} \varphi(y) dy, \quad (31.58)$$

а $a_1(x) = u(x, x) + v(x, x) \cos \alpha\pi$, $a_2(x) = v(x, x) \sin \alpha\pi$,

$$T_1 \varphi = \int_a^x \frac{u(x, y) - u(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \varphi(y) dy, \quad (31.59)$$

$$T_2 \varphi = \int_x^b \frac{v(x, y) - v(y, y)}{(y-x)^{1-\alpha}} \varphi(y) dy. \quad (31.60)$$

Докажем, что операторы T_1, T_2 вполне непрерывны из L_p в $I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$, но предварительно установим, что операторы вида (31.55) действуют ограниченно из L_p в $I^\alpha(L_p)$. Обозначим

$$M_1 \varphi = \int_a^x \frac{u(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad M_2 \varphi = \int_x^b \frac{v(x, t)}{(t-x)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt.$$

Лемма 31.4. Пусть $-\infty < a < b < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \infty$. Оператор M_1 с функцией $u(x, t)$, удовлетворяющей условиям 1) и 2), действует ограниченно из $L_p(a, b)$ в $I_{a+}^\alpha[L_p(a, b)]$. Если $u(x, x) \neq 0$, $a \leq x \leq b$, то $M_1[L_p(a, b)] = I_{a+}^\alpha[L_p(a, b)]$.

Доказательство. Пусть $p > 1$. Имеем

$$M_1 \varphi = \int_a^x \frac{u(t, t) \varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + T_1 \varphi,$$

где T_1 — оператор (31.59). Покажем, что T_1 ограничен из $L_p(a, b)$ в $I_{a+}^\alpha [L_p(a, b)]$. Убедимся в том, что $T_1(L_p) \subset I_{a+}^\alpha [L_p(a, b)]$, с помощью теоремы 13.3. Пусть в соответствии с этой теоремой

$$\tilde{\psi}_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \quad a < x < b,$$

где $f(t) = (T_1\varphi)(t)$, $-\infty < t < b$, и предполагается, что $\varphi(s) \equiv 0$ при $s < a$. Простыми преобразованиями получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\varepsilon(x) = & \int_a^{x-\varepsilon} \varphi(s) ds \int_s^{x-\varepsilon} \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha} (x-t)^{1+\alpha}} dt + \Gamma(\alpha) \int_0^\infty k(s) ds \times \\ & \times \int_a^{x-\varepsilon s} \frac{u(x, t) - u(t, t)}{x-t} \varphi(t) dt, \end{aligned} \quad (31.61)$$

где $k(s)$ — функция (6.10). Отсюда несложными преобразованиями, предоставляемыми читателю, получается, что $\|\tilde{\psi}_\varepsilon\|_p \leq c$, где c не зависит от ε , и потому $T_1\varphi \in I^\alpha(L_p)$ для $\varphi \in L_p$. Следовательно, в силу теоремы 13.3

$$T_1\varphi = I_{a+}^\alpha V_1\varphi, \quad V_1\varphi = D_{a+}^\alpha T_1\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha \tilde{\psi}_\varepsilon(x)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

В силу (31.61) и равенства (6.11) имеем

$$V_1\varphi = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha} (x-t)^{1+\alpha}} dt. \quad (31.62)$$

Ядро этого интегрального оператора мажорируется с учетом (31.56) функцией $\text{const} (x-s)_+^{\lambda-1}$, и потому оператор V_1 ограничен в L_p как оператор со слабой особенностью. Это равносильно ограниченности оператора T_1 из L_p в $I_{a+}^\alpha [L_p(a, b)]$.

Далее, имеем $M_1\varphi = I_{a+}^\alpha [\Gamma(\alpha) u(t, t) \varphi(t) + V_1\varphi]$. Остается заметить, что V_1 — вольтерров оператор со слабой особенностью, и поэтому при $u(t, t) \neq 0$ оператор в квадратных скобках отображает L_p на себя взаимно однозначно.

Остался случай $p=1$. Так как предыдущее равенство выполняется для $\varphi \in L_p$, $p>1$, то, следовательно, оно выполняется на плотном в L_1 множестве. Поскольку операторы M_1 , I_{a+}^α , V_1 ограничены в L_1 , то это равенство по непрерывности распространяется на все пространство L_1 . Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2). Операторы M_1 , M_2 ограничены из $L_p(a, b)$ в $I^\alpha [L_p(a, b)]$, $-\infty < a < b < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$.

Действительно, в силу симметрии справедливо утверждение леммы 31.4 для оператора M_2 о действии из $L_p(a, b)$ в $I_{b-}^\alpha [L_p(a, b)]$, после чего остается сослаться на совпадение образов: $I_{a+}^\alpha [L_p(a, b)] = I_{b-}^\alpha [L_p(a, b)]$ при $1 < p < 1/\alpha$.

Следствие 2. Пусть $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют условию 1). Операторы T_1 , T_2 вполне непрерывны из $L_p(a, b)$ в $I^\alpha [L_p(a, b)]$, $-\infty < a < b < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$.

Действительно, подобно следствию 1 достаточно рассмотреть оператор T_1 . Его полная непрерывность из L_p в $I^\alpha(L_p)$ равносильна полной

непрерывности оператора (31.62) в $L_p(a, b)$. Так как, согласно сказанному выше при доказательстве леммы 31.4, ядро оператора V_1 мажорируется ядром $(x-s)_+^{\lambda-1}$ со слабой особенностью, то оператор V_1 вполне непрерывен в L_p (см., например, книгу М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльника, П. Е. Соболевского [1, с. 97]).

Результат о нетеровости оператора (31.55) дается тогда следующей теоремой, в которой

$$G(x) = \frac{u(x, x) + v(x, x) e^{-i\alpha\pi}}{u(x, x) + v(x, x) e^{i\alpha\pi}} = e^{i\theta(x)}.$$

Теорема 31.12. Пусть функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2). Для того чтобы оператор (31.55) был нетеров из L_p , $1 < p < 1/\alpha$, в $I^\alpha(L_p)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$1) u^2(x, x) + v^2(x, x) \neq 0, a \leq x \leq b; \quad (31.63)$$

$$2) \theta(a) \neq 2\pi \frac{1-\alpha p}{p} \pmod{2\pi}, \theta(b) \neq \frac{2\pi}{p'} \pmod{2\pi}. \quad (31.64)$$

При выполнении этих условий индекс оператора M равен

$$\kappa = \kappa_{L_p \rightarrow I^\alpha(L_p)} = \left[\frac{1}{p} - \alpha - \frac{\theta(a)}{2\pi} \right] + \left[\frac{\theta(b)}{2\pi} + \frac{1}{p} \right]. \quad (31.65)$$

Доказательство. В силу представления (31.57) и теорем 31.2 и 31.3 нетеровость оператора M из L_p в $I^\alpha(L_p)$ равносильна нетеровости оператора N_α из L_p в L_p . Нетеровость же сингулярного оператора N_α в L_p равносильна нетеровости сингулярного оператора

$$a_1(x) \psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{a_2(y)}{y-x} \psi(y) dy \quad (31.66)$$

в пространстве $L_p(\rho)$ с весом $\rho(x) = (x-a)^{-\alpha p}$. Так как сингулярный оператор и оператор умножения на непрерывную функцию коммутируют с точностью до слагаемого, вполне непрерывного в $L_p(\rho)$ (см., например, И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник [3, 4]), то критерий нетеровости оператора (31.66) дан в теореме 31.7. Применяя последнюю, мы и получаем утверждение теоремы 31.12.

Замечание 31.4. Теорема 31.12 распространяется на случай пространства $L_p(\rho)$ с весом $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, $-1 < \mu < p-1$, $-1 < \nu < p-1$. При этом в соответствии с теоремой 31.7 нужно заменить условия (31.64) на условия $\theta(a) \neq 2\pi \left(\frac{1+\mu}{p} - \alpha \right)$, $\theta(b) \neq -2\pi \frac{1+\nu}{p} \times \pmod{2\pi}$ и аналогично изменить (31.65), см. по этому поводу литературные указания в § 34.

Замечание 31.5. Подобно теореме 31.12 имеет место теорема о нетеровости (в смысле определения 31.3) оператора M в рамках весовых гильбертовских пространств $H_0^\lambda(\rho)$, см. литературные указания в § 34.

Замечание 31.6. При $1/p < \alpha < 1$ имеет место подобное теореме 31.12 утверждение о нетеровости оператора M из L_p в специальное пространство; см. об этом далее в § 33.

Остановимся на частном случае уравнения (31.55):

$$\int_a^x \frac{u(x, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.67)$$

В случае $u(x, x) \neq 0$ оно приводится к уравнению Вольтерра второго рода. Действительно, в этом случае уравнение (31.57) принимает вид $\Gamma(\alpha) \times I_{a+}^{\alpha} [u(t, t) \varphi(t)] + T_1 \varphi = f$. Обращая здесь оператор дробного интегрирования I_{a+}^{α} , получаем, согласно (31.62), уравнение

$$u(x, x) \varphi(x) + \frac{\alpha \pi}{\sin \alpha \pi} \int_a^x \mathcal{K}(x, s) \varphi(s) ds = D_{a+}^{\alpha} f, \quad (31.68)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, s) &= \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha} (x-t)^{1+\alpha}} dt = \\ &= \frac{1}{x-s} \int_0^1 \frac{u(x, s) - u(s + \xi(x-s), s)}{\xi^{1-\alpha} (1-\xi)^{1+\alpha}} ds. \end{aligned}$$

Здесь $|\mathcal{K}(x, s)| \leq c(x-s)^{\lambda-1}$ при $\lambda > \alpha$, если $u(x, s)$ удовлетворяет условию (31.56), и тем самым с учетом леммы 31.4 получена следующая

Теорема 31.13. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет условию (31.56), $u(x, x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $u(x, x) \neq 0$, $a \leq x \leq b$. Для $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$, $p \geq 1$, уравнение (31.67) равносильно уравнению Вольтерра второго рода

$$\varphi(x) + \int_a^x A(x, s) \varphi(s) ds = g(x), \quad (31.69)$$

где $g(x) = \frac{1}{u(x, x)} (D_{a+}^{\alpha} f)(x)$, а ядро $A(x, s) = \frac{\alpha \pi \mathcal{K}(x, s)}{\sin \alpha \pi u(x, x)}$ имеет слабую особенность. Поэтому уравнение (31.67) однозначно и безусловно разрешимо в $L_p(a, b)$ для любых $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_p)$.

Аналогично можно рассмотреть и случай $\alpha \geq 1$, если предположить, что $u(x, t)$ дифференцируема по x до порядка $[\alpha]$ и что $(\partial^{[\alpha]} u(x, t))/\partial x^{[\alpha]}$ удовлетворяет условию (31.56).

4°. Об устойчивости решений. Решения интегральных уравнений первого рода, вообще говоря, неустойчивы, и задача обращения таких уравнений относится к некорректным задачам. Простейшее уравнение первого рода — уравнение Абеля

$$\int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a, \quad (31.70)$$

не обладает свойством устойчивости, например, в $C([a, b])$. В самом деле, выберем $f_n(x) = n^{-\alpha} [(x-a)/(b-a)]^n$, так что $\|f_n\|_C = n^{-\alpha} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Решение $\varphi_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f_n$ уравнения (31.70), согласно (2.26), равно

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{n-\alpha} \frac{(b-a)^{\alpha} \Gamma(n+1)}{n^{\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(n+1-\alpha)},$$

так что

$$\|\varphi_n\|_C = \frac{(b-a)^{\alpha} \Gamma(n+1)}{n^{\alpha} \Gamma(\alpha) \Gamma(n+1-\alpha)} \rightarrow \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$$

в силу (1.66). Устойчивость не имеет места и в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, в чем можно убедиться с помощью того же контрпримера, подправив его сле-

дующим образом:

$$f_n(x) = n^{-\alpha+1/p} [(x-a)/(b-a)]^n, \quad (31.71)$$

так что

$$\|f_n\|_p = \frac{(b-a)^{1/p}}{n^{\alpha-1/p} (np+1)^{1/p}} \rightarrow 0, \quad \text{а } \|\varphi_n\|_p \rightarrow \frac{(b-a)^{1/p-\alpha}}{\Gamma(\alpha) p^{1/p}} \neq 0 \quad (31.72)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Неустойчивость решений уравнений первого рода отражает тот простой факт, что оператор, порожденный левой частью уравнения, отображает рассматриваемое пространство решений не на все это пространство, а на его существенно более узкую часть. Поэтому обратный оператор не ограничен. Сказанное означает, что для уравнений первого рода естественно оценивать близость решений и близость правых частей в разных терминах, именно близость правых частей должна оцениваться в более сильной метрике, т. е. нужно рассматривать решения, например, уравнения (31.70) в одном пространстве X , а правые части брать из другого пространства Y так, чтобы обратный оператор был ограничен из Y в X . Такой подход и обеспечит устойчивость уравнения. Пространства $X = L_p$, $Y = L_q$ не подходят для этой цели ни при каких $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty]$, так как обратный оператор не будет ограничен из L_q в L_p . Устойчивости можно добиться, взяв $Y = I_{a+}^\alpha(X)$, т. е. требуя, чтобы класс правых частей состоял из функций, представимых в виде дробного интеграла от функций из заданного пространства. (См. также аналогичные рассуждения в связи с нетеровостью интегральных уравнений первого рода в конце п. 1° этого параграфа.) Другими словами, устойчивость для уравнения, например, (31.67) естественно ставить так, чтобы не $\|f\|_X \rightarrow 0$ влекло $\|\varphi\|_X \rightarrow 0$, а условие $\|\mathcal{D}_{a+}^\alpha f\|_X \rightarrow 0$ влекло $\|\varphi\|_X \rightarrow 0$. Это означает, что при такой постановке вопроса об устойчивости мы заинтересованы в априорной оценке

$$\|\varphi\|_X \leq c \|\mathcal{D}_{a+}^\alpha f\|_X. \quad (31.73)$$

Разумеется, сформулированная мысль тривиальна для простейшего уравнения (31.70), но она оказывается содержательной и полезной для более общих уравнений (31.67), а тем более (31.55) или (31.41). Она эффективна и при выборе, например, $X = L_p$ или $X = H^\lambda$, $X = H^\lambda(\rho)$ ввиду того, что пространства $I_{a+}^\alpha(X)$ хорошо изучены и охарактеризованы при таких X , см. § 13 (напомним, что в § 18, п. 4° показано совпадение пространства $I_{a+}^\alpha(L_p)$ с дробным соболевским пространством $H^{\alpha,p}$).

Ограничимся иллюстрацией сказанного на примере уравнения (31.67), сформулировав следующую теорему.

Теорема 31.14. Пусть $u(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 31.13. Решение уравнения (31.67) в любом из пространств $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|\varphi\|_p \leq c \|\mathcal{D}_{a+}^\alpha f\|_p, \quad (31.74)$$

где c не зависит от $f \in I_{a+}^\alpha(L_p)$.

Доказательство. В силу теоремы 31.13 достаточно доказать оценку (31.74). Она вытекает из справедливости оценки $\|\varphi\|_p \leq c \|g\|_p$ для уравнения Вольтерра (31.69) второго рода с ядром, имеющим слабую особенность. Последнее вытекает из ограниченности в L_p оператора, обращающего такие уравнения (см., например, в книге С. Г. Михлина [1] оценку (6) на с. 44 и следствие на с. 94).

Из теоремы 31.14 с учетом теоремы 13.5 вытекает

Следствие. Если $u(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 31.12, то решение $\varphi(x)$ уравнения (31.67) удовлетворяет оценке

$$\|\varphi\|_p \leq c \left(\|f\|_p + \int_0^{b-a} t^{-1-\alpha} \omega_p(f, t) dt \right), \quad 1 < p < 1/\alpha,$$

где $\omega_p(f, t) = \|f(x_0 + t) - f(x_0)\|_p$. Отсюда, очевидно, вытекает простая оценка $\|f\|_p \leq c \|f\|_{H\lambda}$, $1 < p < 1/\alpha$, $0 < \alpha < \lambda \leq 1$.

Можно получить аналогичные априорные оценки для более общих уравнений (31.55), (31.44). Для этого нужно воспользоваться осуществленным в п. 3° сведением этих уравнений к сингулярным интегральным уравнениям и устойчивостью последних. Останавливаться на этом не станем.

Мы не касаемся здесь вопросов, связанных с регуляризацией (по А. Н. Тихонову) некорректной задачи, какой является задача решения интегрального уравнения первого рода. Этим вопросам посвящена обширная литература. Можно упомянуть, например, относящуюся непосредственно к уравнениям типа Абеля работу В. А. Желудева [1], см. также [2], где приведены основанные на регуляризации по А. Н. Тихонову численные методы решения. Отметим также относящуюся к вопросам устойчивости дробного дифференцирования функций (в том числе и многих переменных) работу Т. И. Савеловой [1].

§ 32. УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В данном параграфе излагается решение интегральных уравнений первого рода со степенно-логарифмическими ядрами и переменным верхним пределом интегрирования

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x c(x-t)(x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \varphi(t) dt = f(x), \quad a < x < b, \quad (32.1)$$

где $[a, b]$ — конечный отрезок вещественной оси, $\alpha > 0$, $-\infty < \beta < \infty$, $\gamma > b-a$. В частности, приводится формула обращения операторов свертки вида

$$(I_{a+}^{\alpha, \beta} \varphi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \varphi(t) dt = f(x), \quad a < x < b. \quad (32.2)$$

Решение последнего уравнения в отличие от рассмотренного в § 2 случая $\beta = 0$ требует привлечения специальных функций типа функций Вольтерра. Это обусловлено по существу следующим. В случае натуральной степени логарифма (при $\beta = m = 1, 2, \dots$) функция $x^{\alpha-1} \ln^m x$ (которую естественно рассматривать вместо функции $x^{\alpha-1} \ln^m(\gamma/x)$) получается обычным m -кратным дифференцированием степенной функции $x^{\alpha-1}$ по α : $x^{\alpha-1} \ln^m x = = d^m x^{\alpha-1} / d\alpha^m$. Поэтому естественно ожидать, что и степенно-логарифмическую функцию $x^{\alpha-1} \ln^\beta(\gamma/x)$ с произвольной действительной степенью логарифма β можно получить из функции $(\gamma/x)^{\alpha-1}$ с помощью дробного интегриродифференцирования по α . Если мы проделаем это, то получим, однако, не саму функцию $x^{\alpha-1} \ln^\beta(\gamma/x)$, а некоторую специальную функцию (функцию Вольтерра), главный член асимптотики которой равен $x^{\alpha-1} \ln^\beta(\gamma/x)$ (см. (32.11) и (32.37) ниже).

В связи с этим сначала приводятся свойства таких специальных функций Вольтерра и устанавливаются некоторые интегральные тождества для них. Затем решаются в замкнутой форме интегральные уравнения вида

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^m A_{mk} \ln^k(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad a < x < b, \quad \alpha > 0, \quad (32.3)$$

с постоянными коэффициентами A_{mk} и целыми неотрицательными степенями логарифмов. В заключение приводится критерий разрешимости уравнений (32.1) и, в частности, уравнений (32.2). Отметим, что здесь в отличие от уравнений (32.3) $\varphi(t)$ выражается через решения некоторых интегральных уравнений Вольтерра. Заметим также, что все полученные ниже результаты переносятся и на соответствующие (32.1) — (32.3) интегральные уравнения с переменным нижним пределом.

1°. Специальные функции Вольтерра и некоторые их свойства. Рассмотрим функцию

$$\mu(x, \sigma, \alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+\tau} \tau^\sigma d\tau}{\Gamma(\alpha + \tau + 1) \Gamma(\sigma + 1)}, \quad (32.4)$$

называемую функцией Вольтерра (см. монографии Г. Бейтмена, А. Эрдейи [3, § 18.3, с. 229] и М. М. Джрбашяна [2, гл. V, § 1.1, с. 261]). Приведем некоторые ее свойства. Функция $\mu(x, \sigma, \alpha)$ определена при $\operatorname{Re} \sigma > -1$, является аналитической функцией от x с точками ветвления $x=0$ и $x=\infty$ и не имеет других особенностей. Она является целой функцией от α . Ее можно доопределить до целой функции от σ с помощью равенств

$$\mu(x, \sigma, \alpha) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\sigma + n - 1)} \int_0^\infty \tau^{\sigma+n} \frac{d^n}{d\tau^n} \left[\frac{x^{\alpha+\tau}}{\Gamma(\alpha + \tau + 1)} \right] d\tau, \quad (32.5)$$

$$\operatorname{Re} \sigma > -n - 1,$$

откуда, в частности,

$$\mu(x, -n, \alpha) = (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}} \left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (32.6)$$

Из (32.4) вытекает формула дифференцирования

$$\frac{d^n}{dx^n} \mu(x, \sigma, \alpha) = \mu(x, \sigma, \alpha - n). \quad (32.7)$$

Асимптотическое разложение функции Вольтерра в нуле выражается формулой

$$\begin{aligned} \mu(x, \sigma, \alpha) = x^\alpha \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-\sigma-1} & \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n (\sigma+1)_n}{n!} \mu(1, -n-1, \alpha) \times \right. \\ & \times \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-n} + O \left(\left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-N} \right) \Big], \quad \operatorname{Re} \sigma > -1, \quad \left| \arg \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right| < \pi, \\ & x \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (32.8)$$

где $(\sigma+1)_n$ — символ Похгаммера (1.45).

В приведенной ниже лемме установим два используемых в дальнейшем интегральных тождества, содержащих некоторые специальные функции. Обозначим для краткости

$$(I_-^\beta g)(\alpha) = \begin{cases} (I_-^\beta g)_t(\alpha), & \text{если } \beta > 0, \\ (\mathcal{D}_-^\beta g)(\alpha), & \text{если } \beta < 0, \end{cases} \quad (32.9)$$

где I_-^β и $\mathcal{D}_-^\beta$ — левосторонний дробный интеграл (5.3) и дробная производная (5.8), рассматриваемые на полуоси $(0, +\infty)$. Символом $I_t^\beta[g(\tau, x)](t)$ будем обозначать применение оператора I_-^β к функции $g(\tau, x)$ по переменной τ в точке t . Введем функции

$$v(x) = \mu(x, 0, 0), \quad v_h(x) = (d/dx) v(xe^h), \quad (32.10)$$

$$\mu_{\alpha, \beta}(x) = I_{\tau}^{\beta} \left[\frac{1}{\Gamma(\tau)} \left(\frac{x}{\gamma} \right)^{\tau-1} \right] (t), \quad -\infty < \beta < \infty, \quad (32.11)$$

которые также будем называть функциями Вольтерра. Справедлива

Лемма 32.1. Для функций Вольтерра (32.10), (32.11) имеют место следующие интегральные тождества:

$$\int_0^x t^{\alpha-1} [\ln t + h - \psi(\alpha)] v_h(x-t) dt = -x^{\alpha-1}, \quad \alpha > 0, \quad (32.12)$$

$$\int_0^x \mu_{\alpha, \beta}(t) \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) dt = \gamma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad -\infty < \beta < \infty. \quad (32.13)$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathbb{R}^1$. Рассмотрим непосредственно проверяемое с помощью (1.68), (1.69) равенство

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha-1} (x-t)^{\sigma-1}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\sigma)} e^{h(\alpha+\sigma-1)} dt = \frac{x^{\alpha+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma)} e^{h(\alpha+\sigma-1)}, \quad \alpha > 0, \quad \sigma > 0. \quad (32.14)$$

Применим к нему сначала оператор интегрирования I_{σ}^1 по переменной σ , а затем оператор дифференцирования I_{α}^{-1} по переменной α . Тогда, учитывая формулу Стирлинга (1.63), получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{h\alpha} \left[\ln t + h - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right] dt \int_{\sigma}^{\infty} \frac{(x-t)^{\tau-1} e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)} d\tau = \\ = - \frac{x^{\alpha+\sigma-1}}{\Gamma(\alpha+\sigma)} e^{h(\alpha+\sigma-1)}. \end{aligned}$$

Полагая здесь в обеих частях $\sigma=1$ и учитывая (1.67), (32.4) и (32.6), приходим к соотношению

$$\int_0^x t^{\alpha-1} [\ln t + h - \psi(\alpha)] v((x-t)e^h) dt = x^{\alpha}/\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (32.15)$$

Продифференцировав его по x и приняв во внимание (32.7), а также оценку $v(x) = O((\ln(1/x))^{-1})$ при $x \rightarrow +0$, вытекающую из (32.8), в результате в силу (32.10) выводим первое доказываемое тождество (32.12).

Пусть теперь $-\infty < \beta < \infty$. По аналогии с предыдущим случаем $\beta=1$, где применялись обычные операторы целого интегрирования и дифференцирования, преобразуем равенство (32.14), применив к нему сначала оператор I_{α}^{β} (по переменной α), а затем оператор $I_{\sigma}^{-\beta}$ (по переменной σ) (см. (32.9)). Положив в полученном соотношении $\sigma=1-\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) и $h=-\ln \gamma$, $\gamma > b-a$, и учтя (32.11), в результате придем ко второму тождеству (32.13). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 32.1. Согласно (32.8), функция $\mu_{\alpha, \beta}(x)$, определяемая формулой (32.11), в нуле имеет асимптотическое поведение вида

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha, \beta}(x) = \left(\frac{x}{\gamma} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{\gamma}{x} \right)^{-\beta} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \beta \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right) \ln^{-1} \frac{\gamma}{x} + \right. \\ \left. + O \left(\ln^{-2} \frac{\gamma}{x} \right) \right], \quad x \rightarrow +0. \quad (32.16) \end{aligned}$$

Поэтому тождество (32.13) можно непрерывно распространить на случаи $\alpha=0, \beta>0$ и $\alpha=1, \beta<0$. Если в (32.16) положить $\alpha=1, \beta=1$, то в силу (32.7) для функции $v_h(x)$, определяемой равенством (32.10), несложно получить в нуле следующую асимптотику:

$$v_h(x) = O(x^{-1} \ln^{-2}(1/x)) \quad \text{при } x \rightarrow +0. \quad (32.17)$$

2°. Решение уравнений с целыми неотрицательными степенями логарифмов. Рассмотрим вначале простейшее уравнение вида (32.3) для случая $m=1$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [\ln(x-t) + A] \varphi(t) dt = f(x), \quad \alpha > 0 \quad (32.18)$$

(без ограничения общности полагаем $A_{11}=1$ и $A_{10}=A$). К обеим частям этого уравнения применим оператор

$$(J_{a+}^h g)(x) = \int_a^x v_h(x-t) g(t) dt, \quad (32.19)$$

где v_h имеет вид (32.10), и положим $h = \psi(\alpha) = A$. Тогда из тождества (32.12) следует, что уравнение (32.18) разрешимо вместе с уравнением

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = - \int_a^x v_h(x-t) f(t) dt. \quad (32.20)$$

Согласно результатам § 2 единственное решение последнего уравнения, а следовательно, и уравнения (32.18) выражается формулой

$$\varphi(x) = -(\mathcal{D}_{a+}^\alpha J_{a+}^h f)(x), \quad (32.21)$$

где $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$ — дробная производная Римана—Лиувилля (2.30).

Рассмотрим теперь уравнение (32.3) при $m=2$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [\ln^2(x-t) + A_{21} \ln(x-t) + A_{20}] \varphi(t) dt = f(x), \quad \alpha > 0 \quad (32.22)$$

(без ограничения общности полагаем $A_{22}=1$). Взяв в формуле (32.12) $h=h_2$, продифференцировав ее по α и прибавив к полученному соотношению равенство (32.12), умноженное на $h_1 - \psi(\alpha)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^x t^{\alpha-1} \{ \ln^2 t + [h_2 + h_1 - 2\psi(\alpha)] \ln t + [h_2 - \psi(\alpha)] [h_1 - \psi(\alpha)] - \\ & - \psi'(\alpha) \} v_{h_2}(x-t) dt = -x^{\alpha-1} [\ln x + h_1 - \psi(\alpha)], \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (32.23)$$

Допустим теперь, что постоянные h_1, h_2 связаны с постоянными A_{21}, A_{20} равенствами

$$h_1 + h_2 - 2\psi(\alpha) = A_{21}, \quad [h_1 - \psi(\alpha)] [h_2 - \psi(\alpha)] - \psi'(\alpha) = A_{20}, \quad (32.24)$$

а $J_{a+}^{h_1}, J_{a+}^{h_2}$ — операторы (32.19) с $h=h_1$ и $h=h_2$ соответственно. Применив к обеим частям уравнения (32.22) сначала оператор $J_{a+}^{h_2}$, а затем оператор $J_{a+}^{h_1}$, найдем согласно (32.23), (32.24), что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = (-1)^2 (J_{a+}^{h_1} J_{a+}^{h_2} f(t))(x). \quad (32.25)$$

Отсюда вытекает, что уравнение (32.22) разрешимо вместе с последним уравнением и его единственное решение имеет вид

$$\varphi(x) = (-1)^2 (\mathcal{D}_{a+}^\alpha J_{a+}^{h_1} J_{a+}^{h_2} f)(x). \quad (32.26)$$

Анализируя решение уравнений (32.18) и (32.22), видим, что основную роль в построении их решений (32.21) и (32.26) играли соотношения (32.12) и (32.23) соответственно. Аналогично этому для решения уравнения (32.3) с произвольным m решающую роль играет обобщающее (32.12) и (32.23) тождество, содержащееся в следующем утверждении.

Лемма 32.2. Пусть $m = 1, 2, \dots$, а постоянные $A_{mj} = A_{mj}(m, \alpha)$ определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} A_{mm}(m, \alpha) &= 1, \quad m \geq 1; \quad A_{10}(1, \alpha) = h_1 - \psi(\alpha), \dots, A_{10}(m, \alpha) = \\ &= h_m - \psi(\alpha); \\ A_{m,m-1}(m, \alpha) &= A_{m-1,m-2}(m, \alpha) + A_{1,0}(1, \alpha), \quad m \geq 2; \\ A_{mj}(m, \alpha) &= A_{m-1,j}(m, \alpha) A_{10}(1, \alpha) + \frac{d}{d\alpha} A_{m-1,j}(m, \alpha) + \\ &+ A_{m-1,j-1}(m, \alpha), \quad j = 1, \dots, m-2, \quad \text{если } m \geq 3; \\ A_{m0}(m, \alpha) &= A_{m-1,0}(m, \alpha) A_{10}(1, \alpha) + \frac{d}{d\alpha} A_{m-1,0}(m, \alpha), \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (32.27)$$

Тогда имеет место тождество

$$\int_0^x t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^m A_{mj}(m, \alpha) \ln^j t \, \psi_{h_m}(x-t) dt = -x^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{m-1} A_{m-1,j}(m-1, \alpha) \ln^j x. \quad (32.28)$$

Доказательство. При $m = 1$ в силу обозначений (32.27) имеем $A_{11}(1, \alpha) = 1$, $A_{10}(1, \alpha) = h_1 - \psi(\alpha)$, а при $m = 2$ имеем, что $A_{22}(2, \alpha) = 1$, а $A_{21}(2, \alpha)$ и $A_{20}(2, \alpha)$ выражаются формулами (32.24). Поэтому равенство (32.28) при $m = 1$ совпадает с (32.12), а при $m = 2$ — с (32.23). Заменяя в (32.23) h_1 на h_2 , h_2 на h_3 , дифференцируя эту формулу по α и прибавляя к полученному соотношению само равенство (32.23) (при $h_1 = h_2$, $h_2 = h_3$), умноженное на $A_{10}(1, \alpha) = h_1 - \psi(\alpha)$, придем к тождеству (32.28) при $m = 3$. Продолжив этот процесс и пользуясь методом индукции, установим, что тождество (32.28) имеет место при любом натуральном m . Лемма доказана.

Пусть теперь постоянные $h_1, \dots, h_m$ связаны с постоянными $A_{m,m-1}, \dots, A_{m0}$ ($A_{mm} = 1$) соотношениями (32.27), а $J_{a+}^{h_1}, \dots, J_{a+}^{h_m}$ — операторы (32.19) с $h = h_1, \dots, h_m$ соответственно. Применяя к обеим частям уравнения (32.3) последовательно операторы $J_{a+}^{h_m}, \dots, J_{a+}^{h_1}$, используя лемму 32.2 и результаты § 2, приходим к следующей теореме.

Теорема 32.1. Пусть постоянные $h_1, \dots, h_m$ связаны с постоянными $A_{mm} = 1, A_{m,m-1}, \dots, A_{m0}$ соотношениями (32.27), а $J_{a+}^{h_1}, \dots, J_{a+}^{h_m}$ — операторы (32.19). Тогда уравнение (32.3) разрешимо вместе с уравнением

$$I_{a+}^\alpha \varphi = (-1)^m J_{a+}^{h_1} \dots J_{a+}^{h_m} f \quad (32.29)$$

и его единственное решение имеет вид

$$\varphi = (-1)^m \mathcal{D}_{a+}^\alpha J_{a+}^{h_1} \dots J_{a+}^{h_m} f, \quad (32.30)$$

где I_{a+}^α — дробный интеграл (2.17), а $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$ — дробная производная (2.30).

В частности, при $\alpha = 1$ единственное решение уравнения (32.3) с чисто логарифмическим ядром имеет вид

$$\varphi(x) = (-1)^m \frac{d}{dx} J_{a+}^{h_1} \dots J_{a+}^{h_m} f. \quad (32.31)$$

Исследуем теперь соотношения (32.27), отражающие связь между постоянными $M_{mm}, M_{m, m-1}, \dots, M_{m0}$, входящими в уравнение (32.3), и постоянными $h_1, \dots, h_m$, содержащимися в его решении (32.30). При $m=2$ формулы (32.27) совпадают с равенствами (32.24), которые равносильны по теореме Виета тому, что числа $h_1 - \psi(\alpha)$ и $h_2 - \psi(\alpha)$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - A_{21}z + A_{20} + \psi'(\alpha) = 0. \quad (32.32)$$

При $m=3$ равенства (32.27) принимают вид

$$\begin{aligned} A_{33}(3, \alpha) &= 1, \quad A_{32}(3, \alpha) = h_1 + h_2 + h_3 - 3\psi(\alpha), \\ A_{31}(3, \alpha) &= [h_1 - \psi(\alpha)][h_2 - \psi(\alpha)] + [h_1 - \psi(\alpha)][h_3 - \psi(\alpha)] + \\ &+ [h_2 - \psi(\alpha)][h_3 - \psi(\alpha)] - 3\psi'(\alpha), \\ A_{30}(3, \alpha) &= [h_1 - \psi(\alpha)][h_2 - \psi(\alpha)][h_3 - \psi(\alpha)] - A_{32}(3, \alpha)\psi'(\alpha) - \psi''(\alpha). \end{aligned}$$

По теореме Виета это равносильно тому, что числа $h_1 - \psi(\alpha)$, $h_2 - \psi(\alpha)$ и $h_3 - \psi(\alpha)$ являются корнями кубического уравнения

$$z^3 - A_{32}z^2 + [A_{31} + 3\psi'(\alpha)]z - [A_{30} + A_{32}\psi'(\alpha) + \psi''(\alpha)] = 0. \quad (32.33)$$

Аналогично этому и в общем случае произвольного натурального m числа $h_1 - \psi(\alpha), \dots, h_m - \psi(\alpha)$ являются корнями некоторого алгебраического уравнения m -й степени

$$z^m - a_{m-1}z^{m-1} + \dots + (-1)^{m-1}a_1z + (-1)^ma_0 = 0, \quad (32.34)$$

у которого коэффициенты $a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$ выражаются определенным образом через постоянные $A_{m, m-1}, \dots, A_{m0}$ ($A_{mm} = 1$), входящие в уравнение (32.3). Например, можно установить, что $a_{m-1} = A_{m, m-1}$.

3°. Решение уравнений с действительными степенями логарифмов. Перейдем к решению уравнения (32.1). Сразу же отметим, что из равенства (32.13) вытекает

Л е м м а 32.3. Разрешимость в $L(a, b)$ уравнения

$$\int_a^x \mu_{\alpha, \beta}(x-t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (32.35)$$

равносильна разрешимости в $L(a, b)$ уравнения

$$\int_a^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt, \quad (32.36)$$

где $\mu_{\alpha, \beta}(x)$ и $\mu_{1-\alpha, -\beta}(x)$ — функции (32.11).

Введем обозначение

$$u_{\alpha, \beta} \equiv u_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \ln^{-\beta} \frac{\gamma}{x}, & \alpha > 0, -\infty < \beta < \infty, \\ \beta \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{-1} \ln^{-\beta-1} \frac{\gamma}{x}, & \alpha = 0, 0 < \beta < \infty, \end{cases} \quad (32.37)$$

и отметим, что $u_{\alpha, \beta}(x)$ является главным членом асимптотики функции Вольтерра (32.11): $\mu_{\alpha, \beta}(x) = u_{\alpha, \beta}(x) [1 + O(1)]$ при $x \rightarrow +0$.

В дальнейшем основную роль играет следующая

Л е м м а 32.4. Пусть функция $c(x)$ абсолютно непрерывна на $(0, b-a]$ и выполняются соотношения

$$c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} {}^r c(x), \quad r(x) = \frac{c(x) u_{\alpha, \beta}(x)}{\mu_{\alpha, \beta}(x)} = c_0. \quad (32.38)$$

Тогда для любой функции $\varphi(x) \in L(a, b)$ имеет место равенство

$$\int_0^x c(x-t) u_{\alpha, \beta}(x-t) \varphi(t) dt = c_0 \int_a^x \mu_{\alpha, \beta}(x-t) \varphi(t) dt + \\ + \int_a^x \mu_{\alpha, \beta}(x-t) dt \int_a^t \psi(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (32.39)$$

где

$$\psi(x) = -\frac{1}{\gamma} \int_0^x r'(y) dy \int_0^y \mu_{\alpha, \beta}(t) \frac{d}{dx} \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) dt \in L(0, b-a). \quad (32.40)$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\psi(x) \in L(0, b-a)$. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, а $[\beta]$ — целая часть β . В силу (32.16) имеем

$$\int_0^{b-a} |\psi(x)| dx \leq c \int_0^{b-a} |r'(y)| dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \int_y^{b-a} \frac{\ln^{-\beta} \frac{\gamma}{t} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1+\alpha}} dx = \\ = c \int_0^{b-a} |r'(y)| dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \int_y^{b-a} \left[\ln \frac{t}{x-t} + \ln \frac{\gamma}{t} \right]^{[\beta]} \left[\left(\ln^{\beta-[\beta]} \frac{\gamma}{x-t} - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln^{\beta-[\beta]} \frac{\gamma}{t} \right) + \ln^{\beta-[\beta]} \frac{\gamma}{t} \right] \ln^{-\beta} \frac{\gamma}{t} (x-t)^{-1-\alpha} dx.$$

Применяя формулу бинома Ньютона и осуществляя замену $x = t\tau$, получаем

$$\int_0^{b-a} |\psi(x)| dx \leq c \sum_{i=0}^{[\beta]} \binom{[\beta]}{i} \int_0^{b-a} |r'(y)| dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \int_y^{b-a} \frac{\left| \ln \frac{t}{x-t} \right|^i}{\ln^{\beta-[\beta]+i} \frac{\gamma}{t}} \times \\ \times \frac{\left(\left| \ln \frac{t}{x-t} \right|^{\beta-[\beta]} + \ln^{\beta-[\beta]} \frac{\gamma}{t} \right)}{(x-t)^{1+\alpha}} dx \leq c \sum_{i=0}^{[\beta]} \binom{[\beta]}{i} \int_0^{b-a} |r'(y)| dy \times \\ \times \int_0^y \frac{dt}{t} \int_{y/t}^{(b-a)/t} \frac{\left| \ln \frac{1}{\tau-1} \right|^{\beta-[\beta]+i} + \left| \ln \frac{1}{\tau-1} \right|^i}{(\tau-1)^{1+\alpha}} d\tau \leq c \sum_{i=0}^{[\beta]} \binom{[\beta]}{i} \times \\ \times \int_0^{b-a} |r'(y)| dy \left(\int_1^{(b-a)/y} \ln \tau + \int_{(b-a)/y}^{\infty} \ln \frac{b-a}{y} \right) \times \\ \times \frac{\left| \ln \frac{1}{\tau-1} \right|^{\beta-[\beta]+i} + \left| \ln \frac{1}{\tau-1} \right|^i}{(\tau-1)^{1+\alpha}} d\tau \leq c \sum_{i=0}^{[\beta]} \binom{[\beta]}{i} \int_0^{b-a} |r'(y)| dy \times \\ \times \int_1^{\infty} \frac{\left(\left| \ln \frac{1}{\tau-1} \right|^{\beta-[\beta]+i} + \left| \ln \frac{1}{\tau-1} \right|^i \right) \ln \tau}{(\tau-1)^{1+\alpha}} d\tau < +\infty.$$

Случаи $\alpha = 0, \beta > 0$ и $\alpha > 0, \beta < 0$ рассматриваются аналогично.

Воспользуемся леммой 32.3. Полагая $f(x) = \int_a^x c(x-t) u_{\alpha, \beta}(x-t) \times$
 $\times \varphi(t) dt$ и учитывая (32.38), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt &= \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) dt \int_a^t [c_0 \mu_{\alpha, \beta}(t-\tau) + \\ &+ r(t-\tau) \mu_{\alpha, \beta}(t-\tau)] \varphi(\tau) d\tau = c_0 \int_a^x \varphi(t) dt + \frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) dt \times \\ &\times \int_a^t r(t-\tau) \mu_{\alpha, \beta}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (32.41)$$

Непосредственно можно проверить, что

$$\frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) dt \int_a^t r(t-\tau) \mu_{\alpha, \beta}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \int_a^x \psi(t) dt.$$

Тогда из (32.41) вытекает, что

$$\frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt = c_0 \int_a^x \varphi(t) dt + \int_a^x dt \int_a^t \psi(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Но в силу леммы 32.3 справедливо равенство

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha, \beta}(x-t) \left[c_0 \varphi(t) + \int_a^t \psi(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right] dt,$$

откуда следует (32.39). Лемма доказана.

Рассмотрим далее оператор

$$(T_\psi \varphi)(x) = \int_a^x \psi(x-t) \varphi(t) dt. \quad (32.42)$$

Он вполне непрерывен в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, и имеет нулевой спектральный радиус (см. статью П. П. Забрейко [1]). Поэтому оператор $c_0 E + T_\psi$ обратим в $L_p(a, b)$ и из леммы 32.4 вытекает следующее утверждение, содержащее критерий разрешимости в $L_p(a, b)$ уравнения (32.1).

Т е о р е м а 32.2. Пусть функция $c(x)$, $c(0) \neq 0$, удовлетворяет условиям леммы 32.4, а $u_{\alpha, \beta}(x)$ имеет вид (32.37). Для того чтобы уравнение

$$\int_a^x c(x-t) u_{\alpha, \beta}(x-t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (32.43)$$

было разрешимо в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x)$ был представим в виде

$$f(x) = \int_a^x \mu_{\alpha, \beta}'(x-t) \chi(t) dt, \quad \chi(t) \in L_p(a, b). \quad (32.44)$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и находится по формуле

$$\varphi = (c_0 E + T_\psi)^{-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt \right), \quad (32.45)$$

где $(c_0 E + T_\Psi)^{-1}$ — оператор, обратный к оператору

$$(c_0 E + T_\Psi) \varphi(x) = c_0 \varphi(x) + \int_a^x \psi(x-t) \varphi(t) dt, \quad (32.46)$$

а функция $\psi(x)$ определяется равенствами (32.40), (32.11) и (32.38).

Следствие. Для разрешимости в $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, уравнения (32.2) необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был представим в виде (32.44). При выполнении этого условия решение φ единственно и выражается по формуле

$$\varphi = (E + T_\Psi)^{-1} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\gamma} \int_a^x \mu_{1-\alpha, -\beta}(x-t) f(t) dt \right). \quad (32.47)$$

Описание класса правых частей f уравнения (32.43) в терминах свертки с функцией Вольтерра $\frac{1}{\gamma} \mu_{1-\alpha, -\beta}$ содержится в лемме 32.3, которая является обобщением теоремы 2.1 для уравнений вида (32.44).

Замечание 32.2. Нетрудно показать, что равенство $I_{a+}^{\alpha, \beta} \varphi = c$, $\varphi \in L_p$, в случае $p \geq 1/\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, вообще говоря, невозможно при $c \neq 0$. Именно если $p > 1/\alpha$, $\beta \in R^1$, или $p = 1/\alpha$, $\beta \geq -1 + \alpha$, то $\varphi \equiv c \equiv 0$.

§ 33. НЕТЕРОВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

В настоящем параграфе исследуются на нетеровость уравнения первого рода со степенно-логарифмическими ядрами

$$K\varphi \equiv \int_a^b \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{|x-t|} \varphi(t) dt = f(x), \quad a < x < b, \quad (33.1)$$

где $[a, b]$ — конечный отрезок вещественной оси, $-\infty < \beta < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$ (предполагаем $\beta < -1$ при $\alpha = 0$), $\gamma > b-a$, функция $c(x, t)$ имеет разрыв первого рода на диагонали $x=t$:

$$c(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & t < x, \\ v(x, t), & t > x. \end{cases} \quad (33.2)$$

Рассмотренное в § 31 уравнение (31.1) является частным случаем уравнения (33.1) при $0 < \alpha < 1$, $\beta = 0$. Мы изучим нетеровость оператора K в соответствующей корректной постановке: из пространства $L_p \equiv L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, в специальное банахово пространство X . Покажем, что введение в ядро оператора типа потенциала (31.1) множителя

$\ln^\beta \frac{\gamma}{|x-t|}$, ослабляющего или усиливающего (в зависимости от знака β) особенность ядра на диагонали $x=t$, изменяет только образ оператора K .

Нетеровость же оператора (33.1) остается той же в том смысле, что нетеровость K из L_p в X равносильна нетеровости в L_p некоторого сингулярного интегрального оператора, не зависящего от β .

Схема исследования на нетеровость уравнения (33.1) такая же, какая применялась в § 31 для уравнения (31.1) со степенным ядром. Отметим только, что добавление к степени логарифмического множителя значительно усложняет доказательство играющих важную роль теорем вложения для образов операторов $I_{a+}^{\alpha, \beta}$, $I_{b-}^{\alpha, \beta}$ со степенно-логарифмическими

ядрами (см. (21.1)) и тождеств, дающих связь таких операторов с сингулярным интегральным оператором. Для вывода первых используются полученные в § 32 свойства функции Вольтерра (32.11), а для вывода вторых — метод дифференцирования произвольного порядка по параметру в формулах, выражающих связь дробных интегралов с сингулярным. С помощью полученных результатов исследуется нетеровость операторов (33.1).

1°. Теоремы вложения для образов операторов $I_{a+}^{\alpha, \beta}$, $I_{b-}^{\alpha, \beta}$. Пусть $0 \leq \alpha < 1$, $-\infty < \beta < \infty$. Напомним, что

$$I_{a+}^{\alpha, \beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad I_{b-}^{\alpha, \beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{t-x}}{(t-x)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt. \quad (33.3)$$

При $\beta = 0$, $0 < \alpha < 1$, будем использовать запись $I_{a+}^\alpha \varphi$, $I_{b-}^\alpha \varphi$, так как интегралы (33.3) в этом случае совпадают с дробными интегралами (2.17), (2.18). В случае $\alpha = 0$ множитель $1/\Gamma(\alpha)$ в (33.3) будем опускать и полагать $\beta < -1$.

Введем банаховы пространства функций, представимых операторами со степенно-логарифмическими ядрами (33.3) с плотностью $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$:

$$I_{a+}^{\alpha, \beta}(L_p) = \{f : f = I_{a+}^{\alpha, \beta} \varphi, \varphi \in L_p(a, b); \|f\|_{I_{a+}^{\alpha, \beta}(L_p)} = \|\varphi\|_{L_p}\}, \quad (33.4)$$

$$I_{b-}^{\alpha, \beta}(L_p) = \{f : f = I_{b-}^{\alpha, \beta} \varphi, \varphi \in L_p(a, b); \|f\|_{I_{b-}^{\alpha, \beta}(L_p)} = \|\varphi\|_{L_p}\}. \quad (33.5)$$

Теоремы вложения для таких пространств получим как следствие более общего утверждения. Введем более общее, чем (33.4) и (33.5), банахово пространство

$$I_{a+}^g(L_p) = \{f : f(x) = \int_a^x g(x-t) \varphi(t) dt, \varphi \in L_p(a, b); \|f\|_{I_{a+}^g(L_p)} = \|\varphi\|_{L_p}\}, \quad g(x) \in L(0, b-a), \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (33.6)$$

Из результатов предыдущего параграфа вытекает следующая

Теорема 33.1. Пусть $\mu_{\alpha, \beta}(x)$ — функция Вольтерра (32.11), $u_{\alpha, \beta}(x)$ — ее главная часть (32.37) вблизи нуля, а $c(x)$ — функция, абсолютно непрерывная на $(0, b-a]$, причем $c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} c(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $c_0 \neq 0$, то

$$I_{a+}^{cu_{\alpha, \beta}}(L_p) = I_{a+}^{\mu_{\alpha, \beta}}(L_p). \quad (33.7)$$

2) Если $c_0 = 0$, то имеет место вложение

$$I_{a+}^{cu_{\alpha, \beta}}(L_p) \rightarrow I_{a+}^{\mu_{\alpha, \beta}}(L_p) = I_{a+}^{u_{\alpha, \beta}}(L_p), \quad (33.8)$$

причем оператор вложения вполне непрерывен.

Доказательство. Утверждения теоремы вытекают из леммы 32.4 предыдущего параграфа: первое в силу ограниченности в $L_p(a, b)$ оператора (32.46), второе в силу полной непрерывности в $L_p(a, b)$ оператора Вольтерра (32.42).

Следствие. Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \delta_1^* < \alpha$ при $\alpha > 0$, $-\infty < \beta_1 < \beta_2 < \infty$. Тогда имеют место вложения

$$I_{a+}^{\alpha, \beta_1}(L_p) \rightarrow I_{a+}^{\alpha, \beta_2}(L_p), \text{ если } \alpha \geq 0 \ (\beta_2 < -1 \text{ при } \alpha = 0), \quad (33.9)$$

$$I_{a+}^{\alpha, \beta_1}(L_p) \rightarrow I_{a+}^{\alpha, \beta_2}(L_p) \rightarrow I_{a+}^{\alpha-\delta}(L_p), \text{ если } \alpha > 0, \beta_1 > 0, \quad (33.10)$$

причем операторы этих вложений вполне непрерывны.

2°. Связь операторов со степенно-логарифмическими ядрами с сингулярным оператором. Ранее в § 11 были найдены соотношения (11.16), (11.17), связывающие операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля I_{a+}^{α} , I_{b-}^{α} с сингулярным оператором S , которые играли важную роль при исследовании на нетеровость операторов типа потенциала (31.55) со степенным ядром на конечном отрезке $[a, b]$. Естественно ожидать, что для операторов типа потенциала (33.1) со степенно-логарифмическим ядром аналогичную роль должны выполнять соотношения между операторами со степенно-логарифмическими ядрами $I_{a+}^{\alpha, \beta}$, $I_{b-}^{\alpha, \beta}$ и сингулярным оператором S . Мы их найдем, исходя из равенств (11.16), (11.17) и применяя к ним метод дифференцирования произвольного порядка по параметру α . Это позволит нам при дифференцировании целого порядка выделить натуральную степень логарифма, а при некотором видоизмененном дифференцировании произвольного порядка — любую степень логарифма.

Введем сингулярные интегралы со степенно-логарифмическими ядрами

$$\begin{aligned} (S_{a, \alpha, m} \varphi)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\alpha} \frac{\ln^m \frac{t-a}{x-a}}{t-x} \varphi(t) dt, \\ (S_{b, \alpha, m} \varphi)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-t}{b-x} \right)^{\alpha} \frac{\ln^m \frac{b-t}{b-x}}{t-x} \varphi(t) dt, \end{aligned} \quad (33.11)$$

$$S_{a, \alpha} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} S_{a, \alpha, 0} \varphi, \quad S_{b, \alpha} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} S_{b, \alpha, 0} \varphi.$$

Лемма 33.1. Если $m = 0, 1, 2, \dots$ и

$$1 < p < \infty, \quad -1 + 1/p < \alpha < 1/p, \quad (33.12)$$

то операторы $S_{a, \alpha, m}$ и $S_{b, \alpha, m}$ ограничены в пространстве $L_p(a, b)$.

Доказательство. При $m=0$ утверждение леммы вытекает из теоремы 11.3, а при $m=1, 2, \dots$ — из теоремы 1.5.

З а м е ч а н и е 33.1. В работе И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [5] показано, что условия (33.12) являются не только достаточными, но и необходимыми для ограниченности операторов $S_{a, \alpha}$ и $S_{b, \alpha}$ в пространстве $L_p(a, b)$.

З а м е ч а н и е 33.2. Пусть $\|S_{a, \alpha, m}\| = \max_{\|\varphi\|_{L_p}=1} \|S_{a, \alpha, m} \varphi\|_{L_p}$ — норма оператора $S_{a, \alpha, m}$. Тогда из теоремы 1.5 вытекает оценка

$$\|S_{a, \alpha, m}\| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1/p} \frac{|\ln^m t|}{|t-1|} dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (33.13)$$

Аналогичная оценка имеет место и для оператора $S_{b, \alpha, m}$.

Перепишем теперь равенства (11.16), (11.17) в виде

$$I_{b-}^{\alpha} \varphi = I_{a+}^{\alpha} [\cos(\alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{a, \alpha} \varphi], \quad \varphi \in L_p(a, b), \quad 0 \leq \alpha < 1/p, \quad (33.14)$$

$$I_{a+}^{\alpha} \varphi = I_{b-}^{\alpha} [\cos(\alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{b, \alpha} \varphi], \quad \varphi \in L_p(a, b), \quad 0 \leq \alpha < 1/p, \quad (33.15)$$

понимая их при $\alpha = 0$ в предельном случае: $\varphi = \varphi$. Аналогичные тождества будут справедливы и для операторов $I_{a+}^{\alpha, \beta}$, $I_{b-}^{\alpha, \beta}$ со степенно-логарифмическими ядрами. Именно верна следующая

Теорема 33.2. Пусть $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p$, $-\infty < \beta < \infty$. Тогда справедливы равенства

$$I_{b-}^{\alpha, \beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \beta} [\cos(\alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{a, \alpha} \varphi + T_1 \varphi], \quad (33.16)$$

$$I_{a+}^{\alpha, \beta} \varphi = I_{b-}^{\alpha, \beta} [\cos(\alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{b, \alpha} \varphi + T_2 \varphi], \quad (33.17)$$

где T_1, T_2 — вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ операторы.

Доказательство. Установим формулу (33.16). При $\beta = 0$ она совпадает с (33.14). Если $\beta \neq 0$, для ее получения, как уже указывалось выше, будем применять дифференцирование порядка β по параметру α к равенству (33.14). Начнем со случая натурального $\beta = 1, 2, \dots$. Умножая (33.14) на $\Gamma(\alpha)$, дифференцируя полученное соотношение β раз по α и деля на $\Gamma(\alpha)$, будем иметь

$$I_{b-}^{\alpha, \beta} \varphi = \sum_{j=0}^{\beta} \binom{\beta}{j} I_{a+}^{\alpha, \beta-j} N_j^{\alpha} \quad (\beta = 1, 2, \dots), \quad (33.18)$$

где

$$N_j^{\alpha} = \frac{d^j (\cos \alpha\pi)}{d\alpha^j} E + \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^{j-i} \sin(\alpha\pi)}{\partial \alpha^{j-i}} S_{a, \alpha, i}.$$

Отсюда, согласно следствию из теоремы 33.1 и лемме 33.1, получаем формулу (33.16) для натуральных β .

Пусть теперь β — произвольное действительное число. Естественно предположить, что к тождеству (33.14) нужно применить операцию дифференцирования (или интегрирования) произвольного порядка β . Однако использовать операторы Лиувилевского дробного интегродифференцирования мы не можем, так как при $1/p < \alpha < 1$ оператор $S_{a, \alpha}$ вида (33.11) выводит из $L_p(a, b)$, а при $\alpha \geq 1$ формула (33.14) неверна. Оказывается, в такой ситуации удобен урезанный оператор

$$(\tilde{I}_+^{\beta} f)(\alpha) = c_{\alpha} \gamma^{\alpha} I_{-}^{\beta} \left(\frac{\Gamma(t)}{\gamma^t} (P_{\alpha, \varepsilon}^{+} f)(t) \right) (\alpha), \quad c_{\alpha} = \begin{cases} 1/\Gamma(\alpha), & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \end{cases} \quad (33.19)$$

где $P_{\alpha, \varepsilon}^{+}$ — проектор:

$$(P_{\alpha, \varepsilon}^{+} f)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [\alpha, \alpha + \varepsilon], \\ 0, & t \notin [\alpha, \alpha + \varepsilon], \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \alpha + \varepsilon < 1/p. \quad (33.20)$$

Заменим в соотношении (33.14) α на t и применим к нему оператор (33.19) по t .

А. Вначале преобразуем левую часть полученного равенства. Для $\beta > 0$ (при $\alpha = 0$ берем $\beta > 1$), согласно (33.19), имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{I}_+^{\beta} I_{b-}^{\alpha} \varphi)(x) &= c_{\alpha} \gamma^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\alpha}^{\alpha+\varepsilon} \frac{\Gamma(t) dt}{\gamma^t (t-\alpha)^{1-\beta}} \frac{1}{\Gamma(t)} \int_x^b \frac{\varphi(y) dy}{(y-x)^{1-t}} = \\ &= c_{\alpha} \int_x^b \frac{\varphi(y) dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \int_0^{\varepsilon} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{y-x}{\gamma} \right)^{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Используя формулу

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{x}{\gamma} \right)^{\tau} d\tau = \left(\ln \frac{\gamma}{x} \right)^{-\beta} \left[1 - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}}^{\infty} \tau^{\beta-1} e^{-\tau} d\tau \right] \quad (\beta > 0), \quad (33.21)$$

находим

$$(\tilde{I}_+^\beta I_{b-}^t \varphi)(x) = (I_{b-}^{\alpha, -\beta} \varphi)(x) - c_\alpha \int_x^b \frac{\lambda_\beta(t-x)}{(t-x)^{1-\alpha-\varepsilon}} \varphi(t) dt. \quad (33.22)$$

Здесь

$$\lambda_\beta(x) = \frac{x^{-\varepsilon}}{\Gamma(\beta)} \ln^{-\beta} \frac{\gamma}{x} \int_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}}^\infty e^{-\tau} \tau^{\beta-1} d\tau = O\left(\ln^{-1} \frac{\gamma}{x}\right) \text{ при } x \rightarrow 0 \quad (33.23)$$

согласно формуле

$$\int_u^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = u^{\alpha-1} e^{-u} \left[1 + O\left(\frac{1}{|u|}\right) \right] \text{ при } |u| \rightarrow \infty \quad (33.24)$$

(см., например, справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 6.9.2(21), 6.13.1(1)]).

В силу теоремы 33.1

$$c_\alpha \int_x^b \frac{\lambda_\beta(t-x)}{(t-x)^{1-\alpha-\varepsilon}} \varphi(t) dt = I_{b-}^{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi,$$

где V_1 — вполне непрерывный оператор Вольтерра в $L_p(a, b)$, всюду в дальнейшем будем обозначать через $V_2, V_3, \dots$ вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ вольтерровские операторы. Отсюда, согласно (33.14) и следствию из теоремы 33.1, имеем

$$c_\alpha \int_x^b \frac{\lambda_\beta(t-x)}{(t-x)^{1-\alpha-\varepsilon}} \varphi(t) dt = I_{a+}^{\alpha+\varepsilon} N_{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi = I_{a+}^{\alpha, -\beta} V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi,$$

где $N_t \varphi = \cos(t\pi) \varphi + \sin(t\pi) S_{\alpha, t} \varphi$. Подставляя это выражение в (33.22), получаем равенство

$$\tilde{I}_+^\beta I_{b-}^t \varphi = I_{b-}^{\alpha, -\beta} \varphi - I_{a+}^{\alpha, -\beta} V_3 \varphi, \quad (33.25)$$

где $V_3 = V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1$.

Пусть теперь $\beta < 0, \alpha > 0$. Тогда, используя обозначения (33.18) — (33.20), (33.23) и формулы (33.21), (33.23), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_+^\beta I_{b-}^t \varphi &= c_\alpha \gamma^\alpha (-1)^{[-\beta]+1} \frac{d^{[-\beta]+1}}{d\alpha^{[-\beta]+1}} I_t^{1+\beta+[-\beta]} \frac{\Gamma(t)}{\gamma^t} P_{\alpha, \varepsilon}^+ I_{b-}^t \varphi = \\ &= c_\alpha \gamma^\alpha (-1)^{[-\beta]+1} \frac{d^{[-\beta]+1}}{d\alpha^{[-\beta]+1}} \int_x^b \left(\frac{\tau-x}{\gamma} \right)^\alpha \left[\frac{\ln^{-1-\beta-[-\beta]} \frac{\gamma}{\tau-x}}{\tau-x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_{1+\beta+[-\beta]}(\tau-x)}{(\tau-x)^{1-\varepsilon}} \right] \varphi(\tau) d\tau = I_{b-}^{\alpha, -\beta} \varphi - c_\alpha \int_x^b \left(\frac{\tau-x}{\gamma} \right)^\alpha \times \\ &\quad \times \frac{\ln^{[-\beta]+1} \frac{\gamma}{\tau-x}}{(\tau-x)^{1-\varepsilon}} \lambda_{1+\beta+[-\beta]}(\tau-x) \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (33.26)$$

Учитывая асимптотику (33.23), в силу теоремы 33.1 и равенства (33.14) находим

$$c_\alpha \int_x^b \left(\frac{\tau-x}{\gamma} \right)^\alpha \frac{\ln^{[-\beta]+1} \frac{\gamma}{\tau-x}}{(\tau-x)^{1-\alpha}} \lambda_{1+\beta+[-\beta]}(\tau-x) \varphi(\tau) d\tau =$$

$$= I_{b-}^\alpha V_4 \varphi = I_{a+}^\alpha N_\alpha V_4 \varphi = I_{a+}^{\alpha, -\beta} V_5 N_\alpha V_4 \varphi.$$

Тогда из (33.26) получаем формулу (33.25), где $V_3 = V_5 N_\alpha V_4$.

Б. Преобразуем теперь выражение $\tilde{I}_+^\beta \cos(t\pi) I_{a+}^t \varphi$. При $\beta > 0$ в силу (33.18)–(33.20) имеем

$$\tilde{I}_+^\beta \cos(t\pi) I_{a+}^t \varphi = c_\alpha \gamma^\alpha \int_a^x \frac{\varphi(y) dy}{x-y} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} \frac{\cos(t\pi)}{(t-\alpha)^{1-\beta}} \left(\frac{x-y}{\gamma} \right)^t dt. \quad (33.27)$$

Интегрируя по частям внутренний интеграл и учитывая равенство (33.21), получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} \frac{\cos(t\pi)}{(t-\alpha)^{1-\beta}} \left(\frac{x-y}{\gamma} \right)^t dt = \left(\frac{x-y}{\gamma} \right)^\alpha \ln^{-\beta} \frac{\gamma}{x-y} [\cos(\alpha\pi) - \tilde{\lambda}(x-y)],$$

где

$$\tilde{\lambda}(u) = \int_{\ln \frac{\gamma}{u}}^{\infty} e^{-\tau} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau + \int_0^\varepsilon \sin(s+\alpha)\pi ds \int_{s \ln \frac{\gamma}{u}}^{\infty} e^{-\tau} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau \rightarrow 0 \text{ при } u \rightarrow 0.$$

Отсюда в силу теоремы 33.1 формула (33.27) принимает вид

$$\tilde{I}_+^\beta \cos(t\pi) I_{a+}^t \varphi = I_{a+}^{\alpha, -\beta} [\cos(\alpha\pi) \varphi + V_4 \varphi]. \quad (33.28)$$

Для $\beta < 0$ аналогичное равенство находится так же, как и в случае А.

В. Рассмотрим, наконец, выражение $\tilde{I}_+^\beta I_{a+}^t \sin(t\pi) S_{a,t} \varphi$. Пусть $\beta > 0$. Производя, как и в случае Б, интегрирование по частям, согласно (33.11), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_+^\beta I_{a+}^t \sin(t\pi) S_{a,t} \varphi &= c_\alpha \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \left(\int_0^\varepsilon \sin(\alpha+s)\pi \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{x-y}{\gamma} \right)^s \frac{s^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} ds \right) (S_{a,\alpha} \varphi)(y) dy + \\ &\quad + \int_0^\varepsilon \left[\int_a^x \frac{\ln^{-\beta} \frac{\gamma}{x-y}}{(x-y)^{1-\alpha}} \lambda(x-y, \tau) (S_{\tau+\alpha, 1} \varphi) dy \right] d\tau, \end{aligned} \quad (33.29)$$

где

$$\lambda(u, \tau) = \frac{c_\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_{\tau \ln \frac{\gamma}{u}}^{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{u}} e^{-s} s^{\beta-1} \sin\left(\alpha + s \ln^{-1} \frac{\gamma}{u}\right) \pi ds \rightarrow 0 \text{ при } u \rightarrow 0.$$

Выражение, аналогичное первому члену в правой части (33.29) (с заменой синуса на косинус), рассматривалось в пункте Б. Поэтому, исполь-

зуя теорему 33.1, формулу (33.29) приводим к виду

$$\tilde{I}_+^\beta I_{a+}^t \sin(t\pi) S_{a,\alpha} \varphi = I_{a+}^{\alpha,-\beta} \left[\sin(\alpha\pi) S_{a,\alpha} \varphi + V_\tau + \int_0^\varepsilon V_\tau (S_{\tau+\alpha,1} \varphi) d\tau \right]. \quad (33.30)$$

Здесь оператор-функция V_t вполне непрерывна в $L_p(a, b)$ при $\tau > 0$, если же $\tau = 0$, на основании первого утверждения теоремы 33.1 полная непрерывность не имеет места.

Если вернуться к доказательству леммы 32.4 предыдущего параграфа, можно убедиться, что оператор-функция V_τ непрерывна по τ в операторной топологии на $(0, \varepsilon]$ и ограничена равномерно по τ на $[0, \varepsilon]$. Кроме того, в силу неравенства (33.13) имеем

$$\|S_{\tau+\alpha,1}\| \leq c = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha+\tau-1/p} |t-1|^{-1} |\ln t| dt.$$

Поэтому оператор $\int_0^\varepsilon V_\tau S_{\tau+\alpha,1} d\tau$ вполне непрерывен в $L_p(a, b)$, и тогда из (33.30) получаем равенство

$$\tilde{I}_+^\beta I_{a+}^t \sin(t\pi) S_{a,\alpha} \varphi = I_{a+}^{\alpha,-\beta} [\sin(\alpha\pi) S_{a,\alpha} \varphi + V_\varepsilon \varphi]. \quad (33.31)$$

В случае $\beta < 0$ аналогичное равенство находится выкладками, подобными проведенным выше.

Объединяя результаты (33.25), (33.28) и (33.31), полученные в пунктах А—В, приходим к соотношению (33.16). Формула (33.17) выводится из (33.16), если к последнему применить слева и справа оператор $A: f(x) \rightarrow f(a+b-x)$. Теорема доказана.

Из соотношений (33.16), (33.17) вытекает совпадение пространств (33.4), (33.5). Именно верно следующее

Следствие. При $0 \leq \alpha < 1/p$ банаховы пространства $I_{a+}^{\alpha,\beta}(L_p)$ и $I_{b-}^{\alpha,\beta}(L_p)$ совпадают с точностью до эквивалентности норм:

$$I_{a+}^{\alpha,\beta}(L_p) = I_{b-}^{\alpha,\beta}(L_p) \stackrel{\text{def}}{=} I^{\alpha,\beta}(L_p). \quad (33.32)$$

3°. Нетеровость уравнений. Рассмотрим уравнение (33.1), принимающее, согласно предположению (33.2), вид

$$K\varphi \equiv \int_a^x \frac{u(x,t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \varphi(t) dt + \int_x^b \frac{v(x,t)}{(t-x)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{t-x} \varphi(t) dt, \quad (33.33)$$

где $-\infty < \beta < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$ ($\beta < -1$ при $\alpha = 0$).

Будем предполагать, что функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют следующим условиям (аналогичным при $0 < \alpha < 1$ условиям 1) и 2) для уравнения (31.55)):

- 1) $u(x, x) = u(x, x-0) \in C([a, b])$, $v(x, x) = v(x, x+0) \in C([a, b])$;
- 2) при $\alpha < 1$ функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ гельдеровы по x порядка $\lambda > \alpha$ равномерно по t ;
- 3) при $\alpha = 1$ функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ дифференцируемы по x , причем справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \leq \frac{c_1}{(x-t)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \leq \frac{c_2}{(t-x)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1 > 0,$$

$$|u(x, t) - u(t, t)| \leq c_3 (x-t)^{\varepsilon_2}, \quad |v(x, t) - v(t, t)| \leq c_4 (t-x)^{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_2 > 0,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые положительные постоянные.

Рассмотрим случай $0 \leq \alpha < 1/p$ ($\beta < -1$ при $\alpha = 0$). В силу следствия из теоремы 33.2 действие оператора K будем изучать из пространства $L_p(a, b) \equiv L_p$, $1 < p < \infty$, в пространство $I^{\alpha, \beta}(L_p)$, определяемое (33.32). Представим оператор (33.33) в виде

$$K = K^{\alpha, \beta} + T_1^{\alpha, \beta} + T_2^{\alpha, \beta}, \quad (33.34)$$

где

$$K^{\alpha, \beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \beta} u \varphi + I_{b-}^{\alpha, \beta} v \varphi, \quad (33.35)$$

$$(T_1^{\alpha, \beta} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(x, t) - u(t, t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \varphi(t) dt, \quad (33.36)$$

$$(T_2^{\alpha, \beta} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{v(x, t) - v(t, t)}{(t-x)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{t-x} \varphi(t) dt.$$

Лемма 33.2. Если $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p$ и функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ гельдеровы по x порядка $\lambda > \alpha$ равномерно по t , то операторы $T_1^{\alpha, \beta}$ и $T_2^{\alpha, \beta}$ вполне непрерывны из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha, \beta}(L_p)$, при этом

$$T_1^{\alpha, \beta} = I_{a+}^{\alpha, \beta} \tilde{V}_1, \quad T_2^{\alpha, \beta} = I_{b-}^{\alpha, \beta} \tilde{V}_2, \quad (33.37)$$

где операторы $\tilde{V}_1$ и $\tilde{V}_2$ вполне непрерывны в $L_p(a, b)$.

Доказательство. При $0 < \alpha < 1$, $\beta = 0$ утверждение леммы совпадает с утверждением леммы 31.4, причем

$$T_1^{\alpha, 0} = I_{a+}^{\alpha} V_1, \quad T_2^{\alpha, 0} = I_{b-}^{\alpha} V_2, \quad (33.38)$$

где

$$V_1 \varphi = \frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha} (x-t)^{1+\alpha}} dt, \quad (33.39)$$

$$V_2 \varphi = \frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \int_x^b \varphi(s) ds \int_x^s \frac{v(x, s) - v(t, s)}{(s-t)^{1-\alpha} (t-x)^{1+\alpha}} dt \quad (33.40)$$

— вполне непрерывные операторы в $L_p(a, b)$.

Преобразуем равенства (33.38) с помощью оператора (33.19) аналогично тому, как это делалось в доказательстве теоремы 33.2 с равенствами (33.14), (33.15). После некоторых вычислений, аналогичных проведенным выше, с учетом теорем 33.1 и 33.2 приходим к значениям

$$T_1^{\alpha, \beta} = I_{a+}^{\alpha, \beta} [\sin(\alpha \pi) V_1 + T_3], \quad T_2^{\alpha, \beta} = I_{b-}^{\alpha, \beta} [\sin(\alpha \pi) V_2 + T_4] \quad (0 \leq \alpha < 1/p),$$

где операторы T_3 и T_4 вполне непрерывны в $L_p(a, b)$. Отсюда в силу полной непрерывности в $L_p(a, b)$ операторов V_1 и V_2 вытекает утверждение леммы.

Из (33.37) следует, что нетеровость оператора (33.33) равносильна нетеровости модельного оператора (33.35). Последний, согласно теореме 33.2, представим в виде

$$K^{\alpha, \beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \beta} [N_\alpha \varphi + T_5 \varphi], \quad (33.41)$$

где N_α — сингулярный интегральный оператор (31.58), а T_5 — вполне непрерывный оператор в $L_p(a, b)$.

Из (33.41) вытекает, что нетеровость оператора K из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha, \beta}(L_p)$ равносильна нетеровости сингулярного интегрального оператора

$$N_{\alpha}\varphi = [u(x, x) + v(x, x) \cos(\alpha\pi)] \varphi(x) + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_a^b \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha} \frac{v(t, t) \varphi(t) dt}{t-x} \quad (33.42)$$

в $L_p(a, b)$. Применяя здесь теорему 31.7 о нетеровости оператора N_{α} , приходим к следующему утверждению, аналогичному утверждению теоремы 31.12.

Теорема 33.3. Пусть $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < 1/p$, $-\infty < \beta < \infty$ при $\alpha > 0$ и $\beta < -1$ при $\alpha = 0$, а функции $u(x, t)$, $v(x, t)$ удовлетворяют условиям 1) и 2), указанным выше. Для того чтобы оператор (33.33) был нетеров из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha, \beta}(L_p)$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$1) u^2(x, x) + 2u(x, x)v(x, x) \cos \alpha\pi + v^2(x, x) \neq 0, \quad a \leq x \leq b; \quad (33.43)$$

$$2) \theta(a) \neq 2\pi(-\alpha + 1/p), \quad \theta(b) \neq 2\pi/p' \pmod{2\pi}, \quad (33.44)$$

где

$$e^{i\theta(x)} = \frac{u(x, x) + v(x, x) e^{-i\alpha\pi}}{u(x, x) + v(x, x) e^{i\alpha\pi}}, \quad 0 < \theta(a) < 2\pi. \quad (33.45)$$

При выполнении этих условий индекс оператора K равен

$$\kappa = \kappa_{L_p \rightarrow I^{\alpha, \beta}(L_p)} = \begin{cases} k, & \text{если } 0 \leq \theta(a) < 2\pi(-\alpha + 1/p), \\ k - 1, & \text{если } 2\pi(-\alpha + 1/p) < \theta(a) < 2\pi, \end{cases} \quad (33.46)$$

где k — целое число, определяемое условием

$$\theta(b) - 2\pi k \in (-2\pi/p, 2\pi/p'). \quad (33.47)$$

В частности, при $\alpha = 0$, $\beta < -1$ необходимые и достаточные условия нетеровости имеют вид

$$u(x, x) + v(x, x) \neq 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (33.48)$$

а индекс принимает значение $\kappa = \kappa_{L_p \rightarrow I^{0, \beta}(L_p)} = 0$.

Сравнивая утверждение теоремы 31.12 с утверждением теоремы 33.3, приходим к интересному факту.

Теорема 33.4. Введение в ядро оператора типа потенциала

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{c(x, t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt$$

множителя $\ln^{\beta} \frac{\gamma}{|x-t|}$, ослабляющего или усиливающего (в зависимости от знака β) особенность ядра на диагонали $x = t$, изменяя образ оператора, не влияет на его нетеровость в том смысле, что при $0 < \alpha < 1/p$ нетеровость оператора K из $L_p(a, b)$ в $I^{\alpha, \beta}(L_p)$ равносильна нетеровости в L_p сингулярного интегрального оператора (33.42).

Замечание 33.3. Теорема 33.3 распространяется на случай пространства $L_p([a, b]; \rho)$ с общим степенным весом $\rho(x) = \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}$.

Имеет место также теорема о нетеровости оператора K из весового гильбертова пространства $H_0^{\lambda}(\rho)$ в обобщенное весовое гильбертовское пространство $H_0^{\lambda+\alpha, \beta}(\rho)$ (см. литературные указания в § 34, п. 2°, 33.1 и 33.2).

З а м е ч а н и е 33.4. Теорема 33.3 устанавливает нетеровость оператора (33.33) в случае $0 \leq \alpha < 1/p$. Имеет место подобное утверждение и для случая $1/p < \alpha \leq 1$ (см. литературные указания в § 34, п. 2°, 33.3). В частности, при $\alpha = 1$, $\beta > 0$ имеет место нетеровость операторов (33.1) с чисто логарифмическими ядрами. Имеются более общие исследования нетеровости операторов с такими ядрами (см. по этому поводу литературные указания в § 34, п. 2°, 33.4).

§ 34. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 6

1°. Исторические сведения. К § 30, п. 1°. Здесь мы ограничились случаем уравнений по прямой и по отрезку прямой. Более подробно с теорией сингулярных интегральных уравнений можно познакомиться по книгам Ф. Д. Гахова [1] и Н. И. Мусхелишвили [1] (см. также И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник [4]), где эти уравнения рассматриваются на кривых в комплексной плоскости.

К § 30, пп. 2, 3°. Впервые обобщенное уравнение Абеля (и в случае внешних, и в случае внутренних коэффициентов) на конечном отрезке, а также на полуоси появляется в работе N. Zeilon [1], 1924 г. По поводу этой работы, неизвестной исследователям, имевшим дело с обобщенными интегральными уравнениями Абеля в 1960—1970-е гг., см. также в § 17 (к §11). В ней указан формализм сведения обобщенного уравнения Абеля к характеристическому сингулярному уравнению или к связанной с ним краевой задаче Гильберта для аналитических функций. Эта работа содержит также первую попытку рассмотрения систем обобщенных интегральных уравнений Абеля (с постоянными коэффициентами). N. Zeilon предложил удивительно оригинальный для 1924 г. прием сведения к сингулярному уравнению и констатировал факт, что решение обобщенного уравнения Абеля сводится к последовательному решению сингулярного уравнения и обычного уравнения Абеля, не дав ни правильного решения сингулярного уравнения, ни вообще исследования его разрешимости (такое решение было получено, как известно, значительно позже в работах Н. И. Мусхелишвили [1] и Ф. Д. Гахова [1]). Впервые решение обобщенного уравнения Абеля на этом пути вместе с достаточно полным исследованием разрешимости было дано в случае конечного отрезка К. Д. Сакалюком [1], 1960 г., и [4], 1965 г., не зная работ N. Zeilon [1]. К. Д. Сакалюк использовал метод Карлемана аналитического продолжения. Ограничительные предположения, сделанные в этих работах, были сняты Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [2], 1965 г.) и С. Г. Самко [1], 1967 г., и [5], 1968 г. В работах С. Г. Самко решение было основано на другом способе, изложенном в § 30. Он основан на связи с сингулярным оператором. Это позволило не только сделать более ясным вопрос о допустимых решениях и правых частях для обобщенного уравнения Абеля, но и в общем случае исследовать уравнения 1-го рода со степенным ядром.

В случае всей прямой обобщенные уравнения Абеля (30.17), (30.18) были решены С. Г. Самко [4], 1968 г., [7], 1969 г., и [9], 1970 г. Изложено в пп. 2, 3° следует работе С. Г. Самко [27, § 3 и 9], 1978 г., см. также обзор С. Г. Самко [32].

К § 30, п. 4°. Решение уравнения (30.67) в явном виде (30.68) дано С. Г. Самко [10], 1970 г., и [14], 1973 г. (см. также [13], 1971 г., где решение этого уравнения дано в форме (30.63)); случаи (30.72) отмечены в работе С. Г. Самко [5], 1968 г. Эти случаи были известны, вообще говоря, раньше, см. формулу (30.73) в работе Е. М. Stein, A. Zygmund [2], 1965 г., для функций $f \in L_2(R^1)$, имеющих компактный носитель, и формулу (30.74) в работе Р. Neuwold [1], 1967 г. В работе Р. Neuwold [2], 1971 г., показывалось, что интегралы (30.73), (30.74) являются условно сходящимися почти для всех x , если $f(x) \in l^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$. Решение уравнения (30.72) в некоторых классах обобщенных функций исследовалось в работе D. S. Jones [2], 1970 г.

Обобщенное уравнение Абеля (30.79) с постоянными коэффициентами на конечном отрезке особо рассматривалось Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [3], 1969 г.), давшим его решение в терминах интегралов с гипергеометрическим ядром. В форме (30.82) решение дано С. Г. Самко [27, § 9], 1978 г. (см. также книгу Ф. Д. Гахова [1], 1977 г., где приведено это решение). Утверждение леммы 30.3 отмечено Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [3], 1969 г.) и повторено Р. М. Ганевым [1], 1979 г., и [2], 1982 г. В последней работе также дано решение обобщенного уравнения Абеля с постоянными коэффициентами на конечном отрезке с использованием гипергеометрической функции в форме, отличной от L. von Wolfersdorf [3].

Решение уравнения (30.83) впервые было дано Т. Карлеманом (T. Carleman [1], 1922 г.), см. о его решении ниже в п. 2°. Другую форму этого решения получили Н. И. Ахиезер, В. А. Шербина [1], 1957 г., также см. п. 2°. К той же формуле пришел У. Уильямс (W.E. Williams [1], 1963 г.), рассмотревший уравнение (30.67) в связи с задачами электростатики. М. Г. Крейн [1], 1955 г., в исследованиях, связанных

с обратной задачей Штурма—Лиувилля, пришел к некоторому методу решения интегральных уравнений, откуда, в частности, получил решение уравнения Карлемана (30.83) (см. в связи с этим также работу С. М. Мхитаряна [1], 1968 г.).

Форма (30.81) решения уравнения Карлемана указана С. Г. Самко в работе [3], 1968 г., там же получена формула (30.89).

К § 31, п. 1°. Теоремы 31.1—31.4 — известные теоремы теории нетеровых операторов. В абстрактных банаховых пространствах они впервые были получены в работе С. М. Никольского [2], 1943 г., в фредгольмовом случае, когда индекс равен нулю, а на случай ненулевого индекса они были распространены в работах Ф. В. Аткинсона [1] и И. Ц. Гохберга [1], 1951 г. Для более подробного ознакомления с теорией нетеровых операторов в банаховых пространствах кроме книг, указанных в начале § 31, п. 1°, можно иметь в виду также работы И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна [1], 1957 г., и Т. Като (T. Kato [1], 1958 г.).

Теоремы типа 31.5—31.7 хорошо известны в более общей ситуации произвольных гладких кривых в комплексной плоскости. Мы ограничились формулировкой для нужного нам случая прямой или ее отрезка. Этот случай особо рассматривался в работе Г. Уайдома (H. Widom [1], 1960 г.). Теорема 31.5 общеизвестна (см., например, И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник [4]). Теорема 31.6 представляет собой классический вариант утверждения о справедливости теорем Нетера для сингулярных интегральных уравнений на разомкнутом контуре (Ф. Д. Гахов [1], Н. И. Мусхелишвили [1]; в этих монографиях сделаны менее общие предположения о ядре $\mathcal{K}(x, t)$). Теорема 31.7 в более общем виде получена в работах И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [1—3], 1968—1971 гг. (при записи формулы для индекса в явном виде мы воспользовались формулой пересчета индекса из работы Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко [2], 1975 г.).

К § 31, п. 2°. Развитая здесь корректная постановка нетеровости для уравнений 1-го рода со степенным ядром предложена С. Г. Самко [6], 1968 г.; уравнения (31.6) исследованы им на нетеровость в такой постановке в работах [12], 1971 г., и [14], 1973 г. Изложение в п. 2° следует в основном последней работе. Теорема 31.10 установлена Б. С. Рубиным [2], 1972 г.

К § 31, п. 3°. Приведенные в этом пункте результаты получены в работах С. Г. Самко [1], 1967 г., [6], 1968 г., и [27], 1978 г., за исключением теоремы 31.12, относящейся к нетеровости в L_p на конечном отрезке, которая была получена Б. С. Рубиным [3], 1973 г. Результат для $L_p(\rho)$, отмеченный в замечании 31.4, получен Б. С. Рубиным [1], 1972 г. (включая и случай $a = -\infty$ или $b = \infty$). Нетеровость в $L_p(\rho)$ в более общей весовой ситуации исследована Б. С. Рубиным в [2], 1972 г., [8], 1975 г.

Критерий нетеровости оператора (31.55) из $H_0^\lambda(\rho)$ в $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, упомянутый в замечании 31.5, получен Б. С. Рубиным [7], 1974 г. Отметим, что решающую роль здесь играет теорема 13.13 о гомеоморфизме пространств $H_0^\lambda(\rho)$ и $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ относительно операторов дробного интегрирования Римана—Лиувилля (2.17), (2.18), позволяющая описать класс правых частей f уравнения (31.55) в таких же простых терминах, что и само решение φ уравнения.

Случай $v(x, t) \equiv 0$ в (31.55), т. е. случай уравнения (31.67), был известен давно и исследован еще в работах В. Вольтерра (V. Volterra [1], 1896 г., см. также книгу В. Вольтерра [1], с. 100—101) при более жестком, чем в § 31, предположении о функции $u(x, t)$ (в § 31 удалось ослабить предположения об $u(x, t)$ за счет использования конструкции Маршо дробного дифференцирования).

К § 31, п. 4°. Изложенные в п. 4° соображения об устойчивости следует считать давно известными. Использование пространства $I^\alpha(L_p)$ ($\equiv H^{\alpha, p}$) в качестве класса правых частей для интегральных уравнений 1-го рода со слабой особенностью было предложено в работах С. Г. Самко [5], 1968 г., и [9], 1970 г. Теорему 31.13 следует считать вытекающей из рассуждений В. Вольтерра (V. Volterra [1], 1896 г.) с учетом полученного позже результата об ограниченности в L_p резольвентного оператора интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со слабой особенностью.

К § 32, п. 1°. Идея применения интегрирования и дифференцирования равенства (32.14) по параметру α , приводящая к соотношению (32.12), была предложена В. Вольтерра (V. Volterra [2], 1916 г.), идея применения лиувиллевского дробного интегрирования по параметру α , приводящая к тождеству (32.13), предложена Б. С. Рубиным [4], 1973 г., [9], 1976 г., и [10], 1977 г.

К § 32, п. 2°. Впервые вопросы разрешимости в замкнутой форме интегральных уравнений со степенно-логарифмическими ядрами (32.3) с переменным верхним пределом рассматривались В. Вольтерра (V. Volterra [2], 1916 г.), изложение этих результатов содержится также в работах V. Volterra, J. Peres [1], 1924 г., и [2, гл. 7, с. 166—181], 1936 г. В. Вольтерра дано решение простейшего уравнения (32.18) и указан метод решения общего уравнения (32.3), основанный на обобщающем равенстве (32.15) тождестве:

$$\int_0^x t^{\alpha-1} \sum_{k=0}^m B_{mk} \ln^k t \, v[(x-t)e^h] dt = -\frac{x^\alpha}{\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-1,k} \ln^k x, \quad \alpha > 0, \quad (34.1)$$

где $v(x)$ имеет вид (32.10) (ср. с соотношением (32.28)). Заметим также, что решение простейшего уравнения (32.18) содержится в монографиях М. М. Джрбашяна [2, гл. V, § 1.1, с. 264] и В. Вольтерра [1, с. 102].

Лемма 32.2 и теорема 32.1, полученные А. А. Килбасом, ранее, по-видимому, не отмечались, так же как и равносильность условий (32.27) в лемме 32.2 тому, что числа $h_1, h_2, \dots, h_m$, через которые выражается решение (32.30) уравнения (32.3), связаны с корнями алгебраического уравнения (32.34).

К § 32, п. 3°. Изложенные в этом пункте результаты получены в работе Б. С. Рубина [10], 1977 г.

К § 33, п. 1°. Теорема 33.1 доказана Б. С. Рубиным [10], 1977 г. Ранее им получены вложения (33.10) для натуральных и неотрицательных действительных показателей степеней логарифма [4], 1973 г., и [9], 1976 г., в пространствах $L_p(a, b)$.

К § 33, п. 2°. Приведенные в этом пункте результаты установлены Б. С. Рубиным в работах [4], 1973 г., и [10], 1977 г.

К § 33, п. 3°. Нетеровость операторов типа потенциала (33.1) со степенно-логарифмическими ядрами из пространства $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, исследована Б. С. Рубиным для натуральных и неотрицательных действительных показателей логарифма ([4], 1973 г., и [9], 1976 г.) и для произвольных показателей логарифма ([10], 1977 г.).

2°. Обзор других результатов. 30.1. Т. Carleman [1] получил решение уравнения

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (34.2)$$

в терминах контурного интегрирования:

$$\varphi(x) = \frac{i \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2} \frac{d}{dx} \int_{\Gamma_x} \frac{dt}{(t-x)^\alpha} \int_0^1 \left[\frac{t(t-1)}{s(s-1)} \right]^{\alpha/2} \frac{f(s) ds}{s-t}, \quad (34.3)$$

где Γ_x — произвольный замкнутый контур, пересекающий положительную полуось R_+^1 только в точке x .

30.2. Решение уравнения типа Карлемана

$$\int_0^a \frac{\varphi(y) dy}{|x^2 - y^2|^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 < x < a,$$

сводящегося к (34.2) заменами переменных, известно в форме, отличной от той, что получается из (30.82) или (30.84):

$$\varphi(x) = - \frac{2\Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi \left[\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) \right]^2} \frac{1}{x^\alpha} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{t^{2\alpha} dt}{(t^2 - x^2)^{\alpha/2}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s) s^{1-\alpha} ds}{(t^2 - s^2)^{\alpha/2}}$$

(Н. И. Ахиезер, В. А. Щербина [1]). Позже к подобной формуле для уравнения (34.2) пришел W. E. Williams [1].

30.3. Интегральное уравнение первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (34.4)$$

с разностным ядром, где $c(x) = \begin{cases} u(x), & x > 0, \\ v(x), & x < 0, \end{cases}$ $u(x), v(-x) \in H^\lambda(\dot{R}_+^1)$, $\lambda > \alpha$, приводится к интегральному уравнению второго рода с разностным сингулярным ядром:

$$N\varphi \equiv a_1 \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(-|t-x|)}{t-x} \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} T(x-t) \varphi(t) dt = g(x),$$

где $a_1 = u(0) + v(0) \cos \alpha\pi$, $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D_+^\alpha f$, ядро $T(x)$ явно вычисляется по $u(x)$,

$u(x)$, является непрерывной функцией всюду, кроме начала координат, и допускает оценки $|T(x)| \leq c|x|^{\alpha-1}$ при $x \rightarrow 0$, $|T(x)| \leq c(1+|x|)^{-\alpha-1}$ при $x \rightarrow \infty$. Оператор N имеет структуру $N\varphi = \lambda\varphi + \mu S\varphi + h_1 * \varphi + S(h_2 * \varphi)$, где λ, μ постоянные, $h_1(x), h_2(x) \in L_1(\mathbb{R}^1)$. В случае обратимости оператора N оператор N^{-1} имеет такую же структуру (С. Г. Самко [16; 27, § 5]).

30.4. Обобщенное уравнение Абеля (30.79) с постоянными коэффициентами на конечном отрезке решено в статье L. von Wolfersdorf [3] в виде ($a=0, b=1$):

$$\varphi(x) = \frac{c}{(x-a)^{\alpha+\theta/(2\pi)}(1-x)^{1-\theta/(2\pi)}} + \\ + \frac{\sin \alpha\pi}{A\pi} \frac{d}{dx} \left\{ u \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - v \int_x^1 \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha} \right\} - \lambda \int_0^1 P(x, t) f(t) dt,$$

где $c=0$ при $uv > 0$, c произвольна при $uv < 0$, $A = u^2 + 2uv \cos \alpha\pi + v^2$, $\lambda = -\frac{v \sin^2 \alpha\pi}{A\pi^2} \frac{\Gamma(2-\theta/(2\pi))\Gamma(1-\alpha)}{(\alpha+1)\Gamma(1-\alpha-\theta/(2\pi))}$ при $uv > 0$, $\lambda = \frac{v \sin^2 \alpha\pi}{A\pi^2} \times$
 $\times \frac{\Gamma(1-\theta/(2\pi))\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-\theta/(2\pi))}$ при $uv < 0$, $P(x, t) = [x(1-x)]^{-1-\alpha} {}_2F_1\left(2-\frac{\theta}{2\pi}, 1+\alpha; 2+\alpha; \frac{x-t}{x(1-t)}\right)$ при $uv > 0$, $P(x, t) = \frac{d}{dx} \left\{ [x(1-x)]^{-\alpha} {}_2F_1\left(1-\frac{\theta}{2\pi}, \alpha; 1+\alpha; \frac{x-t}{x(1-t)}\right) \right\}$ при $uv < 0$, где θ см. в (30.80) (ср. с формулами (30.84), (30.89) в случаях $u=v, u=-v$). Другая форма решения, также в терминах гипергеометрических функций, дана Р. М. Ганевым [2].

30.5. Обобщенное уравнение Абеля (30.41) решается в замкнутой форме и в том случае, когда оно рассматривается на гладкой дуге в комплексной плоскости. Эта ситуация была исследована К. Д. Сакалюком [3] и А. S. Peters [2]. В последней работе решено также и обобщенное уравнение Абеля (30.42) на гладкой дуге и уравнение

$$\int_{C_{az}} \frac{\varphi(t) dt}{(z-t)^{1-\alpha}} + k \int_{C_{za}} \frac{\varphi(t) dt}{(t-z)^{1-\alpha}} = f(z), \quad z \in C, \quad (34.5)$$

в случае замкнутого контура C , где C_{az}, C_{za} —две его составляющие дуги. Здесь $k \neq 1$ и $k \neq e^{2\pi i \alpha}$. Случаи $k=1, k=e^{2\pi i \alpha}$, отвечающие вырожденным случаям соответствующей краевой задачи Римана, рассмотрены Ф. В. Чумаковым, И. Л. Васильевым [1]. Отметим, что сведением к уравнению (34.5) на замкнутом контуре А. S. Peters [2] решено, например, уравнение

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|\sin(x-t)|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Модификация уравнения (30.41), отвечающая случаю системы отрезков, рассмотрена Ф. В. Чумаковым [2].

30.6. Исключительные случаи для обобщенного уравнения Абеля (30.41), когда $u(x), v(x)$ одновременно обращаются в нуль в конечном числе точек отрезка $[a, b]$, исследовал И. Л. Васильев [2, 5].

Решение уравнения (30.41) в случае, когда $u(x), v(x)$ могут обращаться в бесконечность в точках a и b , дано в работе М. Orton [1] в некоторых классах обобщенных функций.

30.7. Алгоритм решения уравнения более общего, чем (30.41):

$$u(x) \int_a^x \frac{P(x-t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt + v(x) \int_x^b \frac{P(x-t)}{(t-x)^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x),$$

где $P(x)$ — многочлен, указал К. Д. Сакалюк [2]. А. S. Peters [2] рассмотрел такое уравнение в случае разомкнутой гладкой дуги. Случай $v(x) \equiv 0, f(x) \equiv 1$ см. также в работе Н. Neunzert, J. Wick [1].

Заметим также, что некоторые обобщения уравнения (30.41) с гипергеометрической функцией Гаусса (1.72) в ядре на конечном отрезке и замкнутом контуре рассмотрены в работах Ф. В. Чумакова [1] и А. И. Песчанского [1] соответственно.

30.8. Обобщенное уравнение Абеля (30.41) на конечном отрезке имеет большой круг приложений. Отметим некоторые из них. Прежде всего это краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа, см., например, работу L. von Wolfersdorf [2]. Отметим также работу Х. Г. Бжихатлова [1], в которой уравнение, близкое к обобщенному уравнению Абеля (30.41), получено при решении краевой задачи для уравнений вырождающегося типа. L. von Wolfersdorf [4] дал приложения обобщенных уравнений Абеля к задачам теории игр. Приложение частных случаев (когда $u \equiv v \equiv 1$ или $u \equiv -v \equiv 1$) к задачам магнитогидродинамики указано в работе T. Lundgren, D. Chiang, [1]. Приложения уравнения (30.41) с постоянными коэффициентами к контактным задачам теории ползучести и пластичности содержатся в работах Н. Х. Арутюняна [1, 2] и Н. Х. Арутюняна, М. М. Манукяна [1]. Аналогичные приложения в более общем случае переменного коэффициента трения даны Б. С. Рубиным [15].

30.9. Хотя первая попытка решения систем обобщенных интегральных уравнений Абеля содержится еще в работе N. Zeilon [1], настоящее их исследование началось сравнительно недавно. Более серьезные шаги были предприняты в работах M. Lowengrub, J. Walton [1] и J. R. Walton [3]. В первой из них система двух уравнений вида (30.41) (взятая не в общем виде) приводится методом аналитического продолжения к задаче Римана для двух пар функций. Однако содержащееся в этой работе решение задачи Римана ошибочно. Во второй работе дано сведение к полному сингулярному уравнению системы двух несколько более общих уравнений вида (30.41). Исследования в указанных работах велись в связи с приложениями к смешанным задачам теории упругости, см. по этому поводу также работу M. Lowengrub [1].

Интересные результаты для систем обобщенных уравнений Абеля получены И. Л. Васильевым [1, 3, 4], который, построив по системе некоторые эрмитовы формы, получил критерий единственности решения и безусловной разрешимости системы в терминах знакоопределенности данных форм. В ряде случаев через ранг и сигнатуру этих форм выражены числа решений и условий разрешимости системы.

В частности, И. Л. Васильев [4] свел системы обобщенных уравнений Абеля $UI_{a+}^{\alpha}\varphi + VI_{b-}^{\alpha}\varphi = f$, где φ, f — вектор-функции, а U, V — матрицы-функции, к системе сингулярных интегральных уравнений; аналогичное исследование проведено им для систем вида $I_{a+}^{\alpha}(U\varphi) + I_{b-}^{\alpha}(V\varphi) = f$. В случае постоянных коэффициентов, когда U, V — числовые матрицы, даны окончательные утверждения о разрешимости систем в терминах метода эрмитовых форм. В случае систем вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_1 + C_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in R^1,$$

где C_1, C_2 — числовые матрицы, И. Л. Васильевым [1, 3] получена явная формула обращения типа (30.68).

В работе И. Л. Васильева [6] рассмотрены системы обобщенных уравнений Абеля по всей прямой, содержащие вместе с вектор-функцией $\varphi(x)$ и вектор-функцию $\varphi(-x)$.

Отметим также работу F. Penzel [1], в которой системы обобщенных уравнений Абеля изучались на полуоси R_+^1 в пространствах $L_p(R_+^1; \rho)$ с весом $\rho = x^\nu$.

30.10. В задачах приближения функций (при применении вариационного метода к аппроксимации функций линейными положительно определенными операторами) встретилось (Х. М. Коган [1, 2]) интегродифференциальное уравнение

$$\lambda \varphi(x) = \int_0^1 \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{\alpha}} \varphi'(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обращением правой части это уравнение приведено в указанных работах к однородному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с положительно определенным оператором.

30.11. Некоторые результаты о разрешимости нелинейного интегродифференциального уравнения

$$\int_0^x F(x, t, \varphi(t), \varphi'(t))(x-t)^{\alpha-1} dt = f(x), \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

содержатся в работе D. Sadowska [1].

31.1. Обобщенное уравнение Абеля (30.41), т. е. уравнение $M\varphi = u(x)I_{a+}^{\alpha}\varphi + v(x)I_{b-}^{\alpha}\varphi = f$, решено в § 30 при $0 < \alpha < 1$. Его можно рассматривать и в случае $\alpha \notin (0, 1)$. При $\alpha < 0$ это соотношение можно трактовать как дифференциальное уравнение дробного порядка. Обстоятельное исследование $M\varphi = f$ при произвольных $\alpha \in R^1$

проведено Б. С. Рубиным в работе [11], где, в частности, на основе пространств $L_p(a, b)$ построены пары банаховых пространств X и Y (для каждого α) так, что оператор M нетеров из X в Y .

31.2. Нетеровость интегральных уравнений первого рода $M\varphi \equiv \int_{\Omega} c(x, y) |x - y|^{\alpha-1} \varphi(y) dy = f(x)$, $x \in \Omega$, где функция $c(x, y)$ разрывна при $x = y$, исследована и в случае, когда Ω — совокупность отрезков вещественной оси, а оператор M рассматривается действующим из $L_p(\Omega; \rho)$ в $I^{\alpha}[L_p(\Omega; \rho)]$ (Б. С. Рубин [2, 5]). В другой работе Б. С. Рубина [6] исследована нетеровость оператора M в случае, когда Ω — замкнутая достаточно гладкая кривая в комплексной плоскости.

31.3. Б. С. Рубиным [8, 13] исследована нетеровость оператора M типа потенциала (31.1) в более общей ситуации, когда $c(x, t)$ может иметь разрывы не только при $t = x$, но и при $t = a_k$, $k = 1, \dots, m$, $x = b_j$, $j = 1, \dots, n$ (особенно содержателен случай, когда допускается $a_k = b_j$). Это обобщение интересно, в частности, тем, что позволяет рассмотреть уравнения «с конечным числом ядер типа потенциала»:

$$\sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{a_{k+1}} c_k(x, t) |x - t|^{\alpha-1} \varphi(t) dt = f(x).$$

31.4. Нетеровость оператора типа потенциала, указанная в теореме 31.9, может быть получена при более слабых требованиях о поведении $u(x, t)$, $v(x, t)$ на бесконечности, если ограничиться вырожденными функциями $u(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(t)$, $v(x, t) =$

$= \sum_{k=1}^m c_k(x) d_k(t)$ и нетеровость рассматривать не из L_p в $I^{\alpha}(L_p)$, а из L_2^s в $L_2^{s+\alpha}$, где $L_2^s = L_2^s(R^1)$ — пространство Соболева дробной гладкости, оператор типа потенциала рассматривается при этом как замкнутый (А. В. Скориков [1]).

31.5. Нетеровость более общего, чем (34.4), уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(x, x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt = f(x)$$

с «почти-разностным» ядром рассмотрена А. В. Скориковым [4], получившим критерий нетеровости и формулу для индекса, когда $m(x, y)$ терпит разрыв первого рода по y при $y=0$. Исследование основано на сведениях к некоторому сингулярному уравнению в свертках.

31.6. В работе С. Г. Самко, И. Л. Васильева [1] выделены классы уравнений (31.1) более общих, чем обобщенное уравнение Абеля, которые приводятся к полным сингулярным уравнениям с мероморфным ядром и тем самым решаются в замкнутой форме.

31.7. Вопросам подобия в $L_p(0, a)$ оператора $I_{0+}^{\alpha} \varphi + \int_0^x k(x, t) \varphi(t) dt$ оператору дробного интегрирования I_{0+}^{α} посвящены работы Г. Калиша (G. K. Kalisch [2]), М. М. Маламуда [1] (операторы A и B называются подобными в пространстве X , если существует линейный оператор C в X , обратимый в X , такой, что $AC = CB$).

31.8. В работе К. Е. Atkinson [1] рассмотрено уравнение

$$\int_0^x \frac{u(x, t)}{(x^p - t^p)^{\alpha}} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < x < b, \quad 0 < \alpha < 1,$$

совпадающее при $p = 1$ с уравнением (31.67). Показано, что при дополнительных условиях гладкости на ядро и свободный член $u(x, t) \in C^{n+2} \{(x, t) \in R^2: 0 \leq t \leq x \leq b\}$, $f(x) = x^{\beta} g(x)$, $g(x) \in C^{n+1}[0, b]$ и выполнении неравенства $p\alpha + \beta > 0$ единственное решение φ уравнения имеет гладкость вида $\varphi(x) = x^{p\alpha-1+\beta} \psi(x)$, $\psi(x) \in C^n[0, b]$. Метод исследования, как и для уравнения (31.67), основан на сведениях к уравнению Вольтерра 2-го рода и применении к последнему метода последовательных приближений в специальном пространстве функций.

32.1. В работах Б. С. Рубина, Г. Ф. Володарской [1] и Б. С. Рубина [13, 14] исследовались более общие, чем (32.1), уравнения вида

$$\int_0^x c(x-t) k(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad x \in (a, b). \quad (34.6)$$

Здесь функция $c(x)$ удовлетворяет условиям типа абсолютной непрерывности на $[0, b-a]$, а ядро $k(x)$ имеет вид

$$k(x) = x^{\alpha-1} g\left(\ln \frac{\gamma}{x}\right), \quad \alpha \geq 0, \quad \gamma > b-a, \quad (34.7)$$

где множитель $g\left(\ln \frac{\gamma}{x}\right)$ вносит в ядро особенность (или нуль) более слабую, чем степенная функция. Например, $g(x)$ может иметь вид $g(x) = \prod_{k=1}^n \ln_k^{\beta_k} \frac{\gamma}{x}$, $\ln_k = \underbrace{\ln \dots \ln}_k$, $-\infty < \beta_k < \infty$.

В указанных работах ослабление или усиление особенности ядра достигается применением по α операции свертки с некоторой, вообще говоря, обобщенной функцией.

32.2. В работе Б. С. Рубина [12] получено описание и обращение сверток $I_{a+}^{\alpha,1} \varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$ (см. § 32, п. 2°) в терминах разностных конструкций типа производной Маршо. Обозначим

$$\mu(x) = - \int_0^\infty \frac{x^{t-\alpha}}{\Gamma(t-\alpha+1)} \exp\left(t \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right) dt.$$

Тогда справедлива

Теорема 34.1. Для того чтобы функция $f \in L_p(a, b)$ была представима в виде $f = I_{a+}^{\alpha,1} \varphi$, где $0 < \alpha < 1$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, необходимо, а при $1 \leq p < \infty$ и достаточно, чтобы в $L_p(a, b)$ существовал предел

$$(Bf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{x-\varepsilon} [f(x) - f(y)] \mu'(x-y) dy$$

(вне отрезка $[a, b]$ полагаем $f(x) \equiv 0$). При этом

$$\varphi(x) = f(x) \mu(x-a) - (Bf)(x)$$

(ср. с аналогичной теоремой 13.2 для дробных интегралов в § 13).

32.3. В работе А. И. Линкер, Б. С. Рубина [1] исследованы вопросы о сужении, продолжении и «склеивании» классов функций, представимых свертками (32.2) с плотностью $\varphi \in L_p(a, b)$. Аналогичные результаты для дробных интегралов приведены в § 13, п. 3°.

32.4. Знание асимптотических разложений интегралов со степенно-логарифмическими ядрами позволяет находить асимптотическое решение (см. § 16, п. 5°) соответствующих уравнений (см. работу А. А. Килбаса [8] и литературные указания к § 21 в § 23).

32.5. В работе V. Volterra, J. Peres [1] рассмотрено более общее, чем (32.3), уравнение

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\sum_{k=0}^m A_{mk} \ln^k(x-t) + (x-t)^\alpha a(x, t) \right] \varphi(t) dt = f(x), \quad \alpha > 0, \quad (34.8)$$

где $a(x, t)$ — некоторая известная функция. Это уравнение с помощью соотношения (34.1) приведено к более простому уравнению Вольтерра 1-го рода, в котором отсутствуют логарифмические множители. В частности, при $\alpha=1$, $m=1$ уравнение (34.8) сведено к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода при некоторых предположениях о гладкости $a(x, t)$ по x .

32.6. Формула обращения простейшего интегрального уравнения вида (32.2) на оси

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} \ln(x-t) \varphi(t) dt = f(x)$$

в некотором пространстве обобщенных функций, инвариантных относительно дробного лиувиллевого интегрирования, дана в работе В. К. Вебера [4]. Интересно, что здесь в отличие от случая конечного отрезка однородное уравнение ($f \equiv 0$) имеет нетривиальное решение $\varphi(t) = c \exp(e^{\Psi(\alpha)} t)$ (в рассматриваемом пространстве обобщенных функций).

32.7. Поведение оператора типа свертки (32.19) со специальной функцией Вольтерра (32.10) при $h = \Psi(\alpha)$ в обычных $H_0^\lambda(\rho)$ и обобщенных $H_0^{\lambda, k}(\rho)$ весовых гильбертовых пространствах исследовано в работе А. А. Килбаса [4]. Установлены ограниченность указанного оператора в $H_0^{\lambda, k}(\rho)$ ($k = 1, 2, \dots$) и его полная непрерывность в $H_0^\lambda(\rho)$.

33.1. Теорема 33.3 в случае натуральных показателей степени логарифма перенесена в работе Б. С. Рубина [4] на весовые пространства $L_p([a, b]; \rho)$, где

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}, \quad a = x_1 < \dots < x_n = b. \quad (34.9)$$

В работе Б. С. Рубина [9] указано на справедливость этого результата и для действительных неотрицательных степеней логарифма.

33.2. В работе А. А. Килбаса [6] операторы (33.1) со степенно-логарифмическими ядрами с натуральными степенями логарифма исследованы на нетеровость из весового гильбертового пространства $H_0^\lambda(\rho)$ в обобщенное весовое гильбертовское пространство $H_0^{\lambda+\alpha, \beta}(\rho)$, где $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda + \alpha < 1$, $\beta = 1, 2, \dots$, ρ — вес (34.9). Отметим, что основную роль здесь играет теорема о гомеоморфизме пространств $H_0^\lambda(\rho)$ и $H_0^{\lambda+\alpha, \beta}(\rho)$ относительно операторов $I_{a+}^{\alpha, \beta}$, $I_{b-}^{\alpha, \beta}$ со степенно-логарифмическими ядрами (при натуральных β). При ее доказательстве наряду с результатами § 21 использованы свойства оператора свертки (32.19) со специальной функцией Вольтерра (см. п. 32.7).

33.3. В случае $\varphi \in L_p \equiv L_p(a, b)$, $1/p < \alpha < 1$, имеют место подобные (33.16), (33.17) соотношения

$$I_{b-}^{\alpha, \beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \beta} [\cos(\alpha\pi) \varphi + \sin(\alpha\pi) S_{a, \alpha-1} \varphi + T_3 \varphi] + c_1(\varphi), \quad (34.10)$$

$$I_{a+}^{\alpha, \beta} \varphi = I_{b-}^{\alpha, \beta} [\cos(\alpha\pi) \varphi - \sin(\alpha\pi) S_{b, \alpha-1} \varphi + T_4 \varphi] + c_2(\varphi), \quad (34.11)$$

где T_3 , T_4 — вполне непрерывные в L_p операторы, $c_1(\varphi)$ и $c_2(\varphi)$ — некоторые функционалы. Эти равенства были установлены Б. С. Рубиным [10] и использованы им для исследования нетеровости операторов (33.1) из L_p в $I_{a+}^{\alpha, \beta}(L_p) \oplus R$ при $1/p < \alpha < 1$ (см. замечание 32.2 в § 32), при этом были доказаны аналогичные теоремам 33.3 — 33.4 утверждения.

В исключительном случае $\alpha = 1/p$ такой метод исследования не применим, так как входящие в соотношения (32.16), (32.17) операторы $S_{a, \alpha}$ и $S_{b, \alpha}$ ограничены при $1/p - 1 < \alpha < 1/p$, а входящие в (34.10), (34.11) операторы $S_{a, \alpha-1}$ и $S_{b, \alpha-1}$ — при $1/p < \alpha < 1 + 1/p$. Поэтому вопрос исследования нетеровости оператора (33.1) при $\alpha = 1/p$ остается открытым.

33.4. Нетеровость операторов типа потенциала (33.1) с чисто логарифмическими ядрами ($\alpha = 1$, $\beta > 0$) из пространства L_p исследована для логарифма первой степени Б. С. Рубиным [4], для натуральных и действительных положительных показателей степени логарифма — А. А. Килбасом [2, 5].

В работах А. А. Килбаса [3, 5, 7] исследована нетеровость из $L_p([a, b]; \rho)$, $1 < p < \infty$, где ρ — вес (34.9), более общих, чем операторы (33.1) с чисто логарифмическими ядрами ($\alpha = 1$, $\beta > 0$), операторов вида

$$K\varphi \equiv \sum_{j=1}^m \int_a^b K_j(x, t) \ln^{\beta_j} \frac{\gamma}{|x-t|} \varphi(t) dt = f(x), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Здесь $\beta_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$), $\gamma > b - a$, а среди функций $K_j(x, t)$ могут быть как непрерывные, так и кусочно-непрерывные с разрывом первого рода на диагонали $x = t$. Другие результаты, связанные с такими уравнениями, см. в работах А. А. Килбаса [10, 11].

33.5. Б. С. Рубин, Г. Ф. Володарская [1] и Б. С. Рубин [13] исследовали вложение образов операторов свертки из (34.6) более общих, чем в (33.10). В основе этих работ лежит введение так называемых обобщенных функций Вольтерра и изучение их асимптотики с помощью свойств преобразования Лапласа.

33.6. Нетеровость операторов типа потенциала с более общим характером особенности (34.7) рассматривалась Б. С. Рубиным, Г. Ф. Володарской [1] и Б. С. Рубиным [14].