С.Г.Самко/А.А.Килбас/О.И.Маричев

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1987

УДК 517.3

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.** Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Книга посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложениям теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты указанной теории. В конце каждой главы приводятся исторические сведения и обзоры работ по тематике главы. Книга носит энциклопедический характер, охватывает самые разнообразные известные формы дробного интегрирования и дифференцирования и огромное число публикаций в этой области вплоть до 1986 г.

Включение в книгу необходимых предварительных сведений и подробное изложение доказательств делают ее доступной студентам физико-математических факультетов, а также технических вузов.

Предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим анализом и его приложениями.

Табл. 11. Ил. 6. Библиогр.: 1421 назв.

Редактор
академик АН СССР С. М. Никольский

Рецензенты:
П. И. Лизоркин, д-р физ.-мат. наук,
М. М. Смирнов, д-р физ.-мат. наук,
А. П. Прудников, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. Брычков, канд. физ.-мат. наук

С $\dfrac{1702050000-088}{\text{М316(03)}-87}$ 55—87

© Издательство «Наука и техника», 1987.

ГЛАВА 4

Другие формы дробных интегралов и производных

Настоящая глава завершает изложение теории одномерного дробного интегродифференцирования. В ней изучаются различные типы дробных интегралов и производных функций вещественного и комплексного переменных. Одни из них являются модификациями или непосредственными обобщениями рассмотренных в предыдущих главах дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля. Другие основаны на совершенно иных подходах. Однако, несмотря на это, имеет место совпадение ряда форм дробного интегродифференцирования друг с другом на определенных классах функций, а в ряде случаев совпадают даже области определения различных форм дробного дифференцирования, что и показывается в данной главе. Обратим особое внимание на интересный подход через разности дробного порядка, восходящий к А. Грюнвальду и А. В. Летникову. Он рассмотрен в § 20 и в периодическом и непериодическом случаях. Отдельный параграф посвящен изложению дробного интегрирования и дифференцирования в комплексной области.

В заключение главы в § 23, п. 3° собраны данные в книге ответы на некоторые вопросы, поставленные в 1974 г. на первой конференции по дробному исчислению в г. Нью-Хейвене, США.

§ 18. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЕ МОДИФИКАЦИИ И ОБОБЩЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

В теории и приложениях весьма широко используются различные модификации и обобщения классических операторов дробного интегродифференцирования. К таким модификациям относятся рассматриваемые в этом параграфе операторы типа Эрдейи—Кобера, дробные интегралы от функции по функции, дробные интегралы и производные по Адамару, операторы бесселева дробного интегродифференцирования, дробные интегралы Чженя и обобщенный интеграл Джрбашяна.

1°. Операторы типа Эрдейи—Кобера. При исследовании парных интегральных уравнений (см. § 38) и в других приложениях широко применяются следующие модификации интегралов и производных Римана — Лиувилля:

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=\frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x^\sigma-t^\sigma)^{\alpha-1}t^{\sigma\eta+\sigma-1}f(t)\,dt,\quad \alpha>0,\tag{18.1}$$

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=x^{-\sigma(\alpha+\eta)}\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^n x^{\sigma(\alpha+n+\eta)}I^{\alpha+n}_{a+;\sigma,\eta}f(x),\quad \alpha>-n,\tag{18.2}$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=\frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t^\sigma-x^\sigma)^{\alpha-1}t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1}f(t)\,dt,\quad \alpha>0,\tag{18.3}$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=x^{\sigma\eta}\left(-\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^n x^{\sigma(n-\eta)}I^{\alpha+n}_{b-;\sigma,\eta-n}f(x),\quad \alpha>-n,\tag{18.4}$$

где $0\leqslant a<x<b\leqslant\infty$ при произвольных действительных σ или $-\infty\leqslant a<x<b\leqslant\infty$ при целых σ. В частности, при $a=0$, $b=+\infty$ и $\sigma=1$ интегралы (18.1) и (18.3) принимают вид

$$I^{+}_{\eta,\alpha}f(x)=I^{\alpha}_{0+;1,\eta}f(x)=\frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{\eta}f(t)\,dt,\quad \alpha>0,\tag{18.5}$$

$$K^{-}_{\eta,\alpha}f(x)=I^{\alpha}_{\infty-;1,\eta}f(x)=$$
$$=\frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}t^{-\eta-\alpha}f(t)\,dt,\quad \alpha>0.\tag{18.6}$$

Операторы (18.1) и (18.3) при $a=0$, $b=+\infty$ называют *операторами Эрдейи*, а (18.5) и (18.6) — *операторами Кобера (или Кобера—Эрдейи)*. В связи с этим операторы (18.1) — (18.4) естественно назвать *операторами типа Эрдейи—Кобера*.

Будем использовать также следующие обозначения: при $a=-\infty$, $b=+\infty$

$$I^{\alpha}_{-\infty+;\sigma,\eta}=I^{\alpha}_{+,\sigma,\eta},\quad I^{\alpha}_{+\infty-;\sigma,\eta}=I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta},\tag{18.7}$$

а при $\sigma=2$

$$I^{\alpha}_{0+;2,\eta}=I_{\eta,\alpha},\quad I^{\alpha}_{-;2,\eta}=K_{\eta,\alpha}.\tag{18.8}$$

Операторы (18.8) часто называют *операторами Эрдейи—Кобера*.

Операторы (18.1), (18.3) (в частности, операторы (18.5), (18.6)) являются операторами с однородными ядрами степени -1. Поэтому из теоремы 1.5 следует их ограниченность в пространстве $L_p(a,b)$, $1\leqslant p<\infty$, при $a>0$ и $b<+\infty$. При $a=0$, $b=+\infty$ оператор (18.1) ограничен в $L_p(0,\infty)$, $1\leqslant p<\infty$, при условии $\eta>-1+1/(p\sigma)$, а оператор (18.3) — при условии $\eta>-1/(p\sigma)$. В частности, оператор (18.5) ограничен в $L_p(0,\infty)$, $1\leqslant p<\infty$, при $\eta>-1/p'$, а оператор (18.6) — при $\eta>-1/p$.

После замены $x^\sigma=y$, $t^\sigma=\tau$ формулы (18.1) — (18.4) сводятся к обычным определениям интегралов и производных Римана—Лиувилля (см. § 2):

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=y^{-\alpha-\eta}(I^{\alpha}_{a^\sigma+}\varphi)(y),\quad \varphi(y)=y^{\eta}f(x),\quad x^\sigma=y,\tag{18.9}$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=y^{\eta}(I^{\alpha}_{b^\sigma-}\psi)(y),\quad \psi(y)=y^{-\alpha-\eta}f(x),\quad x^\sigma=y,\tag{18.10}$$

поэтому полагают при $\alpha=0$

$$I^{0}_{a+;\sigma,\eta}f(x)=f(x),\quad I^{0}_{b-;\sigma,\eta}f(x)=f(x).\tag{18.11}$$

Отметим, что свойство

$$\left(\frac{d}{\sigma x^{\sigma-1}dx}\right)^n=x^{1-\sigma}\left(\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^n x^{\sigma-1}\tag{18.12}$$

дает возможность равенства (18.2), (18.4) переписать в эквивалентном виде:

$$I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta} f(x) = x^{1-\sigma(1+\alpha+\eta)} \left(\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^n x^{\sigma(1+\alpha+n+\eta)-1} I^{\alpha+n}_{a+;\sigma,\eta} f(x), \quad (18.13)$$

$$\alpha > -n,$$

$$I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta} f(x) = x^{1+\sigma(\eta-1)} \left(-\frac{d}{\sigma dx x^{\sigma-1}}\right)^n x^{\sigma(n-\eta+1)-1} I^{\alpha+n}_{b-;\sigma,\eta-n} f(x), \quad (18.14)$$

$$\alpha > -n.$$

Соотношения (18.9), (18.10) позволяют известные свойства интегралов Римана—Лиувилля I^{α}_{a+}, I^{α}_{b-} перенести на операторы типа Эрдейи—Кобера. Перечислим основные из таких свойств, имея в виду их использование в § 38 при решении парных интегральных уравнений:

а) *формулы сдвига:*

$$\left.\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta} x^{\sigma\beta} f(x) &= x^{\sigma\beta} I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta+\beta} f(x), \\ I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta} x^{\sigma\beta} f(x) &= x^{\sigma\beta} I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta-\beta} f(x); \end{aligned}\right. \quad (18.15)$$

б) *формулы композиции:*

$$\left.\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta} I^{\beta}_{a+;\sigma,\eta+\alpha} f(x) &= I^{\alpha+\beta}_{a+;\sigma,\eta} f(x); \\ I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta} I^{\beta}_{b-;\sigma,\eta+\alpha} f(x) &= I^{\alpha+\beta}_{b-;\sigma,\eta} f(x); \end{aligned}\right. \quad (18.16)$$

которые имеют место при $\beta>0$, $\alpha+\beta\geqslant 0$ или $\beta<0$, $\alpha>0$ или же $\alpha<0$, $\alpha+\beta\leqslant 0$ на соответствующих классах функций f (см. теорему 2.5);

в) *формулы разложения на композиции:*

$$\left.\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta} f(x) &= n^{-\alpha} \prod_{k=1}^{n} I^{\alpha/n}_{a+;n\sigma,(\eta+k)/n-1} f(x), \\ I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta} f(x) &= n^{-\alpha} \prod_{k=1}^{n} I^{\alpha/n}_{b-;n\sigma,(\eta+k-1)/n} f(x). \end{aligned}\right. \quad (18.16')$$

г) *значения обратных операторов:*

$$\left.\begin{aligned} (I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta})^{-1} f(x) &= I^{-\alpha}_{a+;\sigma,\eta+\alpha} f(x), \\ (I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta})^{-1} f(x) &= I^{-\alpha}_{b-;\sigma,\eta+\alpha} f(x); \end{aligned}\right. \quad (18.17)$$

д) *формула дробного интегрирования по частям:*

$$\int_a^b x^{\sigma-1} f(x)\, I^{\alpha}_{a+;\sigma,\eta} g(x)\, dx = \int_a^b x^{\sigma-1} g(x)\, I^{\alpha}_{b-;\sigma,\eta} f(x)\, dx. \quad (18.18)$$

Пусть $J_\nu(z)$ — функция Бесселя (1.83). Определим с помощью формулы (при $\sigma>0$)

$$S_{\eta,\alpha;\sigma} f(x) = \sigma^{\alpha} x^{\alpha\sigma/2} \int_0^\infty t^{-\alpha\sigma/2+\sigma-1} J_{2\eta+\alpha}\left(\frac{2}{\sigma}(xt)^{\sigma/2}\right) f(t)\, dt \quad (18.19)$$

оператор модифицированного преобразования Ханкеля $S_{\eta,\alpha,\sigma}$. После соответствующих замен переменных и функций оператор (18.19) приводится к форме обычного двойственного себе преобразования Ханкеля (см., например, Г. Бейтмен, А. Эрдейи [4, с. 12]), откуда обратными заменами легко получить следующее представление для обратного к (18.19) оператора:

$$S^{-1}_{\eta,\alpha;\sigma}f(x)=S_{\eta+\alpha,-\alpha;\sigma}f(x),\quad \operatorname{Re}(2\eta+\alpha)\geqslant -1/2. \tag{18.20}$$

Для оператора (18.19) имеют место следующие *формулы композиций:*

$$\begin{gathered} I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta+\beta}S_{\eta,\beta;\sigma}f(x)=S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x),\\ I^{\alpha}_{-;\sigma,\eta}S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}f(x)=S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x); \end{gathered} \tag{18.21}$$

$$\begin{gathered} S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}S_{\eta,\alpha;\sigma}f(x)=I^{\alpha+\beta}_{0+;\sigma,\eta}f(x),\\ S_{\eta,\alpha;\sigma}S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}f(x)=I^{\alpha+\beta}_{-;\sigma,\eta}f(x); \end{gathered} \tag{18.22}$$

$$\begin{gathered} S_{\eta+\alpha,\beta;\sigma}I^{\alpha}_{0+;\sigma,\eta}f(x)=S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x),\\ S_{\eta,\alpha;\sigma}I^{\beta}_{-;\sigma,\eta+\alpha}f(x)=S_{\eta,\alpha+\beta;\sigma}f(x). \end{gathered} \tag{18.23}$$

Все они устанавливаются с помощью определений входящих в них операторов, последующего изменения порядка интегрирования и вычисления внутренних интегралов при некоторых условиях их сходимости типа $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta>0$. При этом удобно пользоваться равенствами 2.12.4.6, 2.12.4.17, 2.12.31.1 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2]. На остальные значения параметров α, β, η эти соотношения могут быть распространены с помощью аналитического продолжения, но в более узких классах функций, где определены соответствующие операторы.

2°. Дробный интеграл от функции по другой функции. В интегралах типа Эрдейи—Кобера использовалась степень $(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{\alpha-1}$ вместо $(x-t)^{\alpha-1}$. Развивая эту идею, можно ввести дробное интегрирование вида

$$I^{\alpha}_{a+;g}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)}{[g(x)-g(t)]^{1-\alpha}}\,g'(t)\,dt, \tag{18.24}$$

$$\alpha>0,\quad -\infty\leqslant a<b\leqslant\infty,$$

определенное для любой функции $\varphi(t)\in L_1(a,b)$ и монотонной функции $g(t)$, имеющей непрерывную производную. Интеграл (18.24) называют иногда *дробным интегралом функции $\varphi(x)$ по функции $g(x)$ порядка α.*

Если

$$g'(x)\neq 0,\quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{18.25}$$

то оператор $I^{\alpha}_{a+;g}$ легко записывается через обычный оператор дробного интегрирования Римана—Лиувилля после соответствующих замен переменных:

$$I^{\alpha}_{a+;g}\varphi=QI^{\alpha}_{c+}Q^{-1}\varphi,\quad c=g(a), \tag{18.26}$$

где Q — оператор подстановки: $(Qf)(x)=f[g(x)]$. Поэтому многие свойства дробного интеграла (18.24), в частности полугрупповое свойство

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}I^{\beta}_{a+;\,g}\varphi=I^{\alpha+\beta}_{a+;\,g}\varphi, \tag{18.27}$$

немедленно следуют при условии (18.25) из соответствующих свойств дробного интеграла Римана—Лиувилля I^{α}_{c+}. Из (18.26) и формулы (2.44) следует также, что для функции $g_{\beta}(x)=[g(x)-g(a)]^{\beta-1}$ имеет место равенство

$$(I^{\alpha}_{a+;\,g}g_{\beta})(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}g_{\alpha+\beta}(x),\quad \alpha,\ \beta>0. \tag{18.28}$$

Ввиду связи (18.26) можно ввести соответствующее дробное дифференцирование $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+;\,g} f$ такое, чтобы $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+;\,g} f = Q\mathcal{D}^{\alpha}_{c+} Q^{-1} f$. После простых преобразований это приводит к равенству

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+;\,g} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{g'(x)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{[g(x)-g(t)]^{\alpha}} g'(t)\, dt, \quad 0<\alpha<1. \tag{18.29}$$

Выражение (18.29) будем называть *дробной производной Римана—Лиувилля функции $f(x)$ по функции $g(x)$ порядка α* $(0<\alpha<1)$. Производные более высоких порядков определяются формулой, аналогичной первому из равенств (2.30).

В форме Маршо (13.2) производной (18.29) легко придать вид

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+;\,g} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{[g(x)-g(a)]^{\alpha}} +$$

$$+ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(x)-f(t)}{[g(x)-g(t)]^{1+\alpha}} g'(t)\, dt, \quad 0<\alpha<1. \tag{18.30}$$

Для этого достаточно к оператору $\mathbf{D}^{\alpha}_{c+}$, $c=g(a)$, определенному равенством (13.2), применить операторы Q, Q^{-1} справа и слева соответственно.

Следуя А. Эрдейи (A. Erdelyi [9]), покажем, что имеет место

Теорема 18.1. *Класс функций, представимых дробным интегралом $I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi$, $0<\alpha<1$, от функции из $\varphi\in L_p(a, b)$, $1\leqslant p<\infty$, $-\infty<a<b<\infty$, не зависит от выбора функции $g(x)$:*

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}(L_p) = I^{\alpha}_{a+}(L_p),$$

если $g(x)\in C^1([a, b])$, $g'(x)\in H^{\lambda}([a, b])$ и имеет место (18.25). При этом

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi = I^{\alpha}_{a+}\psi, \quad \psi(x) = [g'(x)]^{\alpha}\varphi(x) + \int\limits_a^x \frac{\partial\Phi(x, s)}{\partial x} \varphi(s)\, ds \in L_p, \tag{18.31}$$

где $\Phi(x, s) = \dfrac{\sin\alpha\pi}{\pi} g'(s) \int\limits_s^x (x-u)^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1} h(s, u)\, du,$

$$h(s, u) = \left[\frac{u-s}{g(u)-g(s)}\right]^{1-\alpha} = \left[\int\limits_0^1 g'(u+(s-u)\xi)\, d\xi\right]^{\alpha-1}.$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}(L_p) \subseteq I^{\alpha}_{a+}(L_1). \tag{18.32}$$

Пусть $f(x) = I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi$, $\varphi\in L_p$. В соответствии с теоремой 2.3 покажем, что

$$f_{1-\alpha} \overset{\text{def}}{=} I^{1-\alpha}_{a+} f = I^{1-\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+;\,g}\varphi \in AC([a, b]), \quad f_{1-\alpha}(a) = 0. \tag{18.33}$$

Имеем

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{du}{(x-u)^{\alpha}} \int\limits_a^u \frac{g'(s)\varphi(s)\, ds}{[g(u)-g(s)]^{1-\alpha}} =$$

$$= \int\limits_a^x \Phi(x, s)\varphi(s)\, ds. \tag{18.34}$$

Так как

$$\Phi(x,\ s)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}g'(s)\int\limits_0^1\xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{-\alpha}h(s,\ s+(x-s)\xi)\,d\xi, \quad (18.35)$$

то $\Phi(s,\ s)=[g'(s)]^{\alpha}$ и поэтому $\Phi(x,\ s)=[g'(s)]^{\alpha}+\int\limits_s^x\frac{\partial\Phi(u,\ s)}{\partial u}du$. Подставив это в (18.34), после перестановки порядка интегрирования приходим к равенству

$$f_{1-\alpha}(x)=\int\limits_a^x\psi(t)\,dt, \quad (18.36)$$

где $\psi(t)$—функция (18.31). Из условий, которым удовлетворяет $g(t)$, легко выводится, что $\left|\frac{\partial h(s,\ u)}{\partial u}\right|\leqslant c(u-s)^{\lambda-1}$, тогда из (18.35) видим, что и $\left|\frac{\partial\Phi(x,\ s)}{\partial x}\right|\leqslant c(x-s)^{\lambda-1}$. Следовательно, $\psi(t)\in L_p(a,\ b)$, а тогда ввиду (18.36) оба условия (18.33) выполняются. Тем самым доказано вложение (18.32), а также

$$I^{\alpha}_{a+;\,g}(L_p)\subseteq I^{\alpha}_{a+}(L_p), \quad (18.37)$$

поскольку $\psi\in L_p$.

Равенство (18.31) является уравнением Вольтерра относительно функции $\varphi(t)$. Ввиду (18.25) оно разрешимо в L_p при любой функции $\psi(x)\in\in L_p$ (см., например, книгу А. Н. Колмогорова, С. В. Фомина [1, с. 461] для $p=2$ и работу П. П. Забрейко [1] для произвольного $p>1$). Это означает, что из (18.37) следует, что $I^{\alpha}_{a+;g}(L_p)=I^{\alpha}_{a+}(L_p)$. Теорема доказана.

Выделим особо случай $g(x)=x^{\sigma}$ (как в операторах типа Эрдейи—Кобера) при $b=\infty$. Будем обозначать

$$I^{\alpha}_{-;x^{\sigma}}\varphi=\frac{\sigma}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^{\infty}\frac{t^{\sigma-1}\varphi(t)\,dt}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{1-\alpha}},\quad \operatorname{Re}\alpha>0, \quad (18.38)$$

так что в терминах (18.3), (18.5) можно записать, что

$$I^{\alpha}_{-;x^{\sigma}}\varphi=x^{\sigma\alpha}I^{\alpha}_{-;\sigma,-\alpha}\varphi(x). \quad (18.39)$$

Обратный к (18.38) оператор дробного дифференцирования имеет вид

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{-;x^{\sigma}}f=x^{\sigma\alpha}I^{-\alpha}_{-;\sigma,\alpha}f(x)=\frac{\sigma^{1-n}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{x^{\sigma-1}dx}\right)^{n}\times$$

$$\times\int\limits_x^{\infty}\frac{t^{\sigma-1}f(t)\,dt}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{\alpha-n+1}},\quad n=[\operatorname{Re}\alpha]+1. \quad (18.40)$$

Аналогично на основе формул (18.1)—(18.5) определяются операторы

$$I^{\alpha}_{+;x^{\sigma}},\ I^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}},\ I^{\alpha}_{b-;x^{\sigma}},\ \mathcal{D}^{\alpha}_{+;x^{\sigma}},\ \mathcal{D}^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}},\ \mathcal{D}^{\alpha}_{b-;x^{\sigma}}. \quad (18.41)$$

Укажем для них аналоги формул (18.16′):

$$\begin{aligned}&I^{\alpha}_{a+;x^{\sigma}}f(x)=n^{-\alpha}x^{\sigma\alpha+\sigma n}(x^{-\sigma\alpha-\sigma}I^{\alpha/n}_{a+;x^{\sigma n}})^{n}f(x),\\&I^{\alpha}_{b-;x^{\sigma}}f(x)=n^{-\alpha}x^{\sigma\alpha+\sigma n}(x^{-\sigma\alpha-\sigma}I^{\alpha/n}_{a+;x^{\sigma n}})^{n}f(x).\end{aligned} \quad (18.41')$$

3°. **Дробное интегродифференцирование по Адамару.** Дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля является формально дробной степенью $(d/dx)^\alpha$ оператора дифференцирования d/dx и обладает свойством инвариантности относительно сдвига (если иметь в виду случай всей прямой).

Ж. Адамар (J. Hadamard [1]) предложил конструкцию дробного интегродифференцирования, являющуюся дробной степенью типа $\left(x\frac{d}{dx}\right)^\alpha$. Эта конструкция приспособлена к полуоси и инвариантна относительно растяжения. Именно Ж. Адамар ввел дробные интегралы вида

$$\mathfrak{J}_+^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{t\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}, \quad x>0,\ \alpha>0. \tag{18.42}$$

Аналогично можно ввести

$$\mathfrak{J}_-^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{t\left(\ln\frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}}, \quad x>0,\ \alpha>0. \tag{18.43}$$

Операторы $\mathfrak{J}_\pm^\alpha\varphi$ удобно представлять в виде (см. обозначения (5.5))

$$\mathfrak{J}_\pm^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)_\pm^{\alpha-1}\varphi(xt)\,dt. \tag{18.44}$$

Выражения (18.42)—(18.44) будем называть *дробными интегралами Адамара*. Если $\Pi_\delta f = f(\delta x)$, $\delta>0$, — оператор растяжения, то, очевидно,

$$\Pi_\delta\mathfrak{J}_\pm^\alpha = \mathfrak{J}_\pm^\alpha\Pi_\delta. \tag{18.45}$$

Ясно, что оператор (18.42) является дробным интегралом вида (18.24) с функцией $g(t)=\ln t$, так что дробное интегрирование Адамара (18.42) есть «дробный интеграл функции φ по функции $g(t)=\ln t$». Однако здесь не выполняется условие существования непрерывной производной $g'(t)$. Поэтому интегралы (18.42), (18.43) нуждаются в особом рассмотрении (условие непрерывности $g'(t)$ было бы выполнено, если в (18.42) взять нижний предел интегрирования равным $a>0$, но тогда нарушится свойство инвариантности интеграла относительно растяжения).

Нетрудно видеть, что операторы $\mathfrak{J}_\pm^\alpha$ связаны с хорошо знакомыми нам операторами Римана—Лиувилля $I_\pm^\alpha$ заменами переменных: $(\mathfrak{J}_+^\alpha\varphi)(e^x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x \frac{\varphi(e^t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$ и аналогично для $\mathfrak{J}_-^\alpha\varphi$. Таким образом, справедливо соотношение

$$\mathfrak{J}_\pm^\alpha\varphi = A^{-1}I_\pm^\alpha A\varphi, \quad (A\varphi)(x) = \varphi(e^x). \tag{18.46}$$

Связь (18.46) позволяет переносить на операторы $\mathfrak{J}_\pm^\alpha$ различные свойства операторов $I_\pm^\alpha$. Так, например, замечая, что

$$\|A\varphi\|_{L_p(R^1)} = \|\varphi\|_{\mathscr{L}_p(R_+^1)}, \tag{18.47}$$

где

$$\mathscr{L}_p(R_+^1) = \left\{\varphi(t): \int_0^\infty |\varphi(t)|^p\frac{dt}{t}<\infty\right\}, \tag{18.48}$$

из (18.46) и теоремы Харди—Литтлвуда 5.3 заключаем, что операторы $\mathfrak{I}^\alpha_\pm$ ограниченно действуют из $\mathscr{L}_p(R^1_+)$ в $\mathscr{L}_q(R^1_+)$, $q = p/(1-\alpha p)$, при $1 < p < 1/\alpha$.

Из связи (18.46) видим также, что операторы $\mathfrak{I}^\alpha_\pm$ обладают полугрупповым свойством:

$$\mathfrak{I}^\alpha_\pm \mathfrak{I}^\beta_\pm \varphi = \mathfrak{I}^{\alpha+\beta}_\pm \varphi \tag{18.49}$$

при соответствующих предположениях о функциях φ и показателях α, β.

Рассмотрим также *адамаровские дробные интегралы* вида

$$\mathfrak{I}^\alpha_{a+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, \quad x > a \geqslant 0, \tag{18.50}$$

$$\mathfrak{I}^\alpha_{b-}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{t}{x}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, \quad 0 < x < b, \tag{18.51}$$

так что $\mathfrak{I}^\alpha_{0+} = \mathfrak{I}^\alpha_+$, $\mathfrak{I}^\alpha_{\infty-} = \mathfrak{I}^\alpha_-$. Подобно (18.46) имеем

$$\mathfrak{I}^\alpha_{a+}\varphi = A^{-1} I^\alpha_{a_1+} A\varphi, \qquad \mathfrak{I}^\alpha_{b-}\varphi = A^{-1} I^\alpha_{b_1-} A\varphi, \tag{18.52}$$

где $a_1 = \ln a$, $b_1 = \ln b$.

Непосредственным вычислением проверяются свойства

$$x \frac{d}{dx} \mathfrak{I}^{\alpha+1}_{a+} = \mathfrak{I}^\alpha_{a+}, \qquad -x \frac{d}{dx} \mathfrak{I}^{\alpha+1}_{b-} = \mathfrak{I}^\alpha_{b-}, \qquad \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{18.53}$$

Дробная производная по Адамару, вводимая подобно дробной производной Римана—Лиувилля, имеет в соответствии с (18.53) вид

$$\mathfrak{D}^\alpha_+ f \overset{\text{def}}{=} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} \mathfrak{I}^{1-\{\alpha\}}_+ f = \mathfrak{I}^{1-\{\alpha\}}_+ \left(x \frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} f, \quad \alpha > 0, \tag{18.54}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α, а $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$ (аналогично выписываются дробные производные $\mathfrak{D}^\alpha_- f$, $\mathfrak{D}^\alpha_{a+} f$, $\mathfrak{D}^\alpha_{b-} f$). В частности, при $0 < \alpha < 1$

$$\mathfrak{D}^\alpha_+ f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^\alpha} \frac{dt}{t}. \tag{18.55}$$

Производную (18.55) нетрудно привести к виду, аналогичному дробной производной Маршо (5.57). Именно, действуя подобно (5.56) или пользуясь связью (18.46), соотношение (18.55)′ приводим к форме

$$\mathfrak{D}^\alpha_+ f = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{f(x) - f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{f(x) - f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}, \tag{18.56}$$

считая $f(x)$ достаточно хорошей функцией. Дробному интегралу (18.43) отвечает дробное дифференцирование

$$\mathfrak{D}_{-}^{\alpha} f=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln \frac{t}{x}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}; \tag{18.56'}$$

При $\alpha \geqslant 1$ аналогом дробной производной Маршо (5.80) будет служить выражение

$$\mathfrak{D}_{+}^{\alpha} f=\frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_{0}^{1} \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k}\binom{l}{k} f\left(t^{k} x\right) \frac{dt}{|\ln t|^{1+\alpha} t}, \quad l>\alpha. \tag{18.57}$$

Для дробных производных $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f$, $a>0$, в случае $0<\alpha<1$ вместо (18.56) будем иметь

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \tag{18.58}$$

(ср. с (13.2)).

В заключение пункта отметим, как действует дробное интегродифференцирование по Адамару на степенных функциях:

$$\mathfrak{J}_{+}^{\alpha}\left(x^{\mu}\right)=\mu^{-\alpha} x^{\mu}, \quad \mu>0, \tag{18.59}$$

$$\mathfrak{J}_{-}^{\alpha}\left(x^{\mu}\right)=|\mu|^{-\alpha} x^{\mu}, \quad \mu<0, \tag{18.60}$$

где $-\infty<\alpha<\infty$ ($\mathfrak{J}_{\pm}^{\alpha}$ при $\alpha<0$ понимается как $\mathfrak{D}_{\pm}^{\alpha}$). Последние соотношения получаются простыми вычислениями.

4°. **Одномерная модификация бесселева дробного интегродифференцирования и пространства** $H^{s,p}=L_{p}^{s}$. Операторы дробного интегрирования Римана—Лиувилля, действующие на всей оси, обладают, как мы знаем, тем недостатком, что они не сохраняют, например, классов $L_p(R^1)$ и в рамках $L_p(R^1)$ определены не при всех значениях α. В ряде вопросов, например при построении соболевских классов дифференцируемых функций дробной гладкости, удобно было бы иметь дело с операторами дробного интегрирования, определенными в $L_p(R^1)$ при всех $\alpha>0$ и при всех $1\leqslant p\leqslant\infty$ и сохраняющими $L_p(R^1)$. Способ введения таких операторов подсказывается картиной в образах Фурье. Именно пусть

$$G^{\alpha} \varphi=\int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha}(x-t) \varphi(t)\, dt \tag{18.61}$$

есть оператор свертки, действие которого в образах Фурье дается равенством

$$\widehat{G^{\alpha} \varphi}=\frac{1}{\left(1+|x|^{2}\right)^{\alpha / 2}} \hat{\varphi}(x), \quad \operatorname{Re} \alpha>0 \tag{18.62}$$

(см. (7.1) и (12.23), (12.24)). Функция $G_\alpha(x)$, преобразование Фурье которой есть $(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$, вычисляется в терминах бесселевых функций. Поэтому оператор (18.61) называют *оператором бесселева дробного интегрирования* (или еще *бесселевым потенциалом*). Подробнее о таком операторе см. в § 27. Подобный оператор играет существенную роль в теории дробного дифференцирования функций многих переменных. Его можно использовать и в случае функций одного переменного, однако специфика одномерного случая позволяет ввести аналогичные дробные интегралы более простой природы. Именно введем *модификации* *бесселева потенциала* (18.61), (18.62), определяемые вместо (18.62) равенством

$$\widehat{G_{\pm}^{\alpha}\varphi}=\frac{1}{(1\mp ix)^{\alpha}}\hat{\varphi}(x),\quad \operatorname{Re}\alpha>0, \tag{18.63}$$

выбрав ветвь степенной функции по формуле (5.27) (ср. с (18.62) и (12.23)). В силу формулы (7.9) получаем, что операторы $G_{\pm}^{\alpha}$ могут быть записаны как свертки с элементарными функциями

$$G_{\pm}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}e^{\mp x}x_{\pm}^{\alpha-1}*\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-t}\varphi(x\mp t)}{t^{1-\alpha}}dt, \tag{18.64}$$

так что

$$G_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^{-(x-t)}\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,$$

$$G_{-}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{\infty}\frac{e^{x-t}\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt. \tag{18.65}$$

Операторы (18.65) определены при $\operatorname{Re}\alpha>0$ на функциях $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, в силу теоремы 1.4.

Отметим, что из (18.62), (18.63) следует соотношение

$$G_{+}^{\alpha/2}G_{-}^{\alpha/2}=G^{\alpha}. \tag{18.66}$$

Для дробных интегралов $G_{\pm}^{\alpha}$ имеют место простые формулы дифференцирования вида

$$\pm\frac{d}{dx}G_{\pm}^{\alpha}=G_{\pm}^{\alpha-1}-G_{\pm}^{\alpha},\quad \operatorname{Re}\alpha>1, \tag{18.67}$$

которые обобщаются на

$$\left(E\pm\frac{d}{dx}\right)^{n}G_{\pm}^{\alpha}=G_{\pm}^{\alpha-n},\quad \operatorname{Re}\alpha>n, \tag{18.68}$$

где E—единичный оператор. Справедливость последних формул легко просматривается в образах Фурье, их можно также установить непосредственным дифференцированием интегралов (18.65).

В силу представлений

$$G_{\pm}^{\alpha}=e^{\mp x}I_{\pm}^{\alpha}e^{\pm x} \tag{18.69}$$

из (5.15) вытекает

$$G_{\pm}^{\alpha}G_{\pm}^{\beta}\varphi=G_{\pm}^{\alpha+\beta}\varphi,\quad \varphi\in L_p(R^1),\quad 1\leqslant p\leqslant\infty, \tag{18.70}$$

где $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$, так что каждое из семейств операторов $\{G_{+}^{\alpha}\}_{\alpha>0}$, $\{G_{-}^{\alpha}\}_{\alpha>0}$ образует полугруппу в $L_p(R^1)$. Она является непрерывной, что устанавливается подобно теореме 2.6.

Введем соответствующие дробные производные как операции, обратные к (18.65), т. е. к бесселевому дробному интегрированию. Так как $(G_{\pm}^{\alpha})^{-1}=$ $=e^{\mp x}(I_{\pm}^{\alpha})^{-1}e^{\pm x}$ в силу (18.69), то построение операторов $(G_{\pm}^{\alpha})^{-1}$ очевидно. Пусть $0<\alpha<1$. Поскольку для оператора $(I_{\pm}^{\alpha})^{-1}$ можно допускать две формы—лиувиллевскую (5.6) и Маршо (5.57), то мы введем соответственно

$$(E+\mathscr{D})^\alpha f \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{-x}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t \varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(E + \frac{d}{dx} \right) \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^{-(x-t)} \varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt \tag{18.71}$$

и аналогично для $(E-\mathscr{D})^\alpha f$, а также

$$(E \pm \mathbf{D})^\alpha f \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x) - e^{-t} f(x \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{18.72}$$

Обозначения в левых частях (18.71) и (18.72) навязаны, очевидно, формулой (18.68). Дробные производные $(E \pm \mathscr{D})^\alpha f$ и $(E \pm \mathbf{D})^\alpha f$ совпадают (при одинаковом выборе знаков) на «достаточно хороших» функциях $f(x)$.

Нетрудно видеть, что «бесселева» дробная производная (18.72) связана с производной Маршо $\mathbf{D}_{\pm}^\alpha f$ равенством

$$(E \pm \mathbf{D})^\alpha f = \mathbf{D}_{\pm}^\alpha f + a_{\pm} * f, \tag{18.73}$$

где $a_{\pm}(x) = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{1-e^{\mp x}}{x_{\pm}^{1+\alpha}} \in L_1(R^1)$.

Рассмотрим теперь пространства

$$G^\alpha(L_p), \quad G_+^\alpha(L_p), \quad G_-^\alpha(L_p), \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

состоящие из функций, представимых интегралами соответственно (18.62), (18.65) от функций $\varphi \in L_p(R^1)$. Они совпадают:

$$G^\alpha(L_p) = G_+^\alpha(L_p) = G_-^\alpha(L_p), \quad 1 < p < \infty,$$

согласно следствию из теоремы 1.6. Для пространства $G^\alpha(L_p)$ приняты в литературе и другие обозначения, например $H^{\alpha,p}$ или L_p^α, которыми мы также будем пользоваться, так что

$$L_p^\alpha(R^1) = H^{\alpha,p}(R^1) = G^\alpha(L_p), \quad 1 < p < \infty.$$

Они известны под названием *пространств бесселевых потенциалов*. Позже, в § 27 мы подробнее познакомимся с этими пространствами в более общем случае функций многих переменных. Такие пространства представляют собой один из наиболее распространенных вариантов пространств дифференцируемых функций дробной гладкости. Им посвящена обширная литература (см. книги С. М. Никольского [4], О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [1] и имеющиеся там ссылки и литературные указания к § 27 в § 29). В этом параграфе отметим простое описание пространства $L_p^\alpha(R^1)$ в одномерном случае, предоставляемое следующей теоремой, и важное следствие из этого описания.

Теорема 18.2. *Для того чтобы $f(x) \in L_p^\alpha(\boldsymbol{R}^1)$, $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in L_p(R^1)$, $(E+\mathbf{D})^\alpha f \in L_p(R^1)$, где «бесселева» дробная производная понимается как условно сходящийся интеграл по норме пространства L_p:*

$$(E+\mathbf{D})^\alpha f = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{f(x) - e^{-t} f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{18.74}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теорем 6.1, 6.2 с соответствующими упрощениями благодаря экспоненциально убывающему множителю в ядре; отметим, например, что вместо представления (6.6) получается представление

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - e^{-t} f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon t} \mathscr{K}(t) \varphi(x - \varepsilon t) dt, \quad f = G_{+}^{\alpha} \varphi, \tag{18.75}$$

где $\mathscr{K}(t)$—ядро (6.7).

Следствие. *Сопоставляя теорему 18.2 с теоремой 6.2 и учитывая связь (18.73) бесселева дифференцирования и дифференцирования Маршо, получаем*

$$L_p \cap I^{\alpha}(L_p) = H^{\alpha, p}(R^1), \quad 1 < p < 1/\alpha. \tag{18.76}$$

Отметим, что теорема 18.2 распространяется на все значения $\alpha > 0$, если $(E + \mathbf{D})^{\alpha}$ реализовать в виде

$$(E + \mathbf{D})^{\alpha} f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{-kt} f(x - kt) \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \tag{18.77}$$

в соответствии с формулой (5.80) и равенством $(E + \mathbf{D})^{\alpha} = e^{-x} \mathbf{D}_{+}^{\alpha} e^{x}$.

В литературе иногда рассматривают пространство $H^{s,p}([a, b])$, определяемое как пространство сужений функций из $H^{s,p}(R^1)$ на отрезок $[a, b]$ с нормой $\|f\|_{H^{s,p}([a,b])} = \inf \|g\|_{H^{s,p}(R^1)}$, где инфинум берется по всем функциям $g \in H^{s,p}(R^1)$, совпадающим с $f(x)$ на $[a, b]$. В данной книге важно отметить, что пространства $H^{s,p}([a, b])$ совпадают, вообще говоря, с изученными в § 13 пространствами $I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ дробных интегралов от функций из $L_p(a, b)$. Именно справедлива следующая

Теорема 18.3. *Пусть* $0 < \alpha < 1/p$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$H^{\alpha, p}([a, b]) = I^{\alpha}[L_p(a, b)] \tag{18.78}$$

с точностью до эквивалентности норм, $-\infty < a < b < \infty$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in H^{\alpha,p}([a, b])$. Тогда существует $g(x) \in H^{\alpha,p}(R^1)$, $g(x) = f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Ввиду (18.76) $g(x) \in I^{\alpha}(L_p)$. Но тогда $f(x) \in I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ согласно теореме 13.9. Обратно, пусть $f(x) \in I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ и $f^*(x)$ — ее продолжение нулем за пределы отрезка $[a, b]$, см. (13.29). В силу теоремы 13.10 $f^*(x) \in I^{\alpha}(L_p(R^1))$. Так как, очевидно, $f^*(x) \in L_p(R^1)$, то ввиду (18.76) $f^*(x) \in H^{\alpha,p}(R^1)$, что и требовалось.

Замечание 18.1. Анализ доказательства теоремы 18.3 показывает, что в случае $1/p < \alpha < 1/p + 1$ справедливо равенство

$$H_0^{\alpha, p}([a, b]) = I_{a+}^{\alpha}[L_p(a, b)], \tag{18.79}$$

где $H_0^{\alpha,p}([a, b])$ состоит из функций $f(x) \in H^{\alpha,p}([a, b])$ таких, что $f(a) = 0$. Можно показать, что в граничном случае $\alpha = 1/p$ не выполняется не только равенство (18.78), но и пространство $H^{\alpha,p}([a, b])$ не вложено в $I_{a+}^{\alpha}[L_p(a, b)]$ (причина этого—неограниченность оператора (13.27) в L_p при $\alpha = 1/p$). В случае произвольного $\alpha > 1/p$, $\alpha - 1/p \neq 1, 2, \ldots$, равенство (18.78) выполняется при условии, что в определении класса $H_0^{\alpha,p}([a, b])$ добавлено предположение $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, [\alpha - 1/p]$.

5°. Дробный интеграл Чженя. При рассмотрении дробного интегрирования Римана—Лиувилля $I_{\pm}^{\alpha} \varphi$ на всей прямой точки $+\infty$ и $-\infty$ не равноправны. Это проявляется, например, в том, что дробный интеграл $I^{\alpha}_{\pm}\varphi$ сохраняет, вообще говоря, характер убывания функции $\varphi(x)$ на $\mp\infty$ и не сохраняет его на $\pm\infty$ (см. (7.8)). В этом пункте мы рассмотрим, следуя Ю. Чженю (Y. W. Chen [2]), модификацию дробного интегрирования Римана—Лиувилля, для которой левая и правая бесконечно удаленные точки равноправны.

Зафиксируем произвольную точку $c \in R^1$ и положим

$$(I^{\alpha}_{c}\varphi)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_c^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, & x > c, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^c \varphi(t)(t-x)^{\alpha-1}dt, & x < c, \end{cases} \tag{18.80}$$

где $\alpha > 0$. Выражение (18.80) будем называть *дробным интегралом Чженя*. Конструкция (18.80) имеет очевидное преимущество в сравнении с $I^{\alpha}_{+}\varphi$ или $I^{\alpha}_{-}\varphi$: она применима к функции с любым поведением на бесконечности (ее можно рассматривать и на конечном отрезке $[a, b]$, $a < c < b$, при полном равноправии концов a и b).

Введя функции

$$P_{c+}\varphi = \varphi_{c+}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > c, \\ 0, & x < c, \end{cases} \quad P_{c-}\varphi = \varphi_{c-}(x) = \begin{cases} 0, & x > c, \\ \varphi(x), & x < c, \end{cases} \tag{18.81}$$

можно записать дробный интеграл (18.80) в виде

$$(I^{\alpha}_{c}\varphi)(x) = (I^{\alpha}_{+}\varphi_{c+})(x) + (I^{\alpha}_{-}\varphi_{c-})(x) \tag{18.82}$$

или в операторной форме

$$I^{\alpha}_{c} = I^{\alpha}_{+}P_{c+} + I^{\alpha}_{-}P_{c-} = P_{c+}I^{\alpha}_{+}P_{c+} + P_{c-}I^{\alpha}_{-}P_{c-}. \tag{18.83}$$

Из (18.82) в силу формул (2.44), (2.45) получаем

$$I^{\alpha}_{c}(|x-c|^{\beta-1}) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}|x-c|^{\alpha+\beta-1}. \tag{18.84}$$

Для функций $\varphi(t)$ с «достаточно хорошим» поведением на бесконечности, например для $\varphi(t) \in L_p(R^1)$, $1 \leqslant p < 1/\alpha$, интеграл $I^{\alpha}_{c}\varphi$ можно представить в виде

$$I^{\alpha}_{c}\varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}}\varphi(t)\operatorname{sign}(t-c)\,dt. \tag{18.85}$$

Из (18.83) нетрудно заключить, что операторы I^{α}_{c} обладают полугрупповым свойством:

$$I^{\alpha}_{c} I^{\beta}_{c}\varphi = I^{\alpha+\beta}_{c}\varphi \tag{18.86}$$

(для любой локально интегрируемой функции $\varphi(t)$ и $\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Рассмотрим вопрос об операторе, обратном к I^{α}_{c}, т. е. о соответствующей дробной производной. Формально имеем

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{c}f)(x) \overset{\text{def}}{=} (I^{\alpha}_{c})^{-1}f = \begin{cases} (\mathcal{D}^{\alpha}_{c+}f)(x), & x > c, \\ (\mathcal{D}^{\alpha}_{c-}f)(x), & x < c. \end{cases} \tag{18.87}$$

В частности,

$$(\mathcal{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_c^x f(t)(x-t)^{-\alpha}\,dt, & x>c,\\ -\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^c f(t)(t-x)^{-\alpha}\,dt, & x<c,\end{cases}\tag{18.88}$$

если $0<\alpha<1$. В случае $\alpha\geqslant 1$ следует воспользоваться равенствами (2.30), (2.31). Очевидно,

$$(\mathcal{D}_c^n f)(x)=[\operatorname{sign}(x-c)]^n f^{(n)}(x),\quad n=0,1,2,\ldots\tag{18.89}$$

Обоснование обращения, т. е. равенство $\mathcal{D}_c^\alpha I_c^\alpha\varphi\equiv\varphi(x)$, $\alpha>0$, для $\varphi(x)\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^1)$ немедленно следует из теоремы 2.4.

Вспоминая выражение для дробных производных в форме Маршо, см. (13.2) и (13.5), из (18.88) получаем при $0<\alpha<1$:

$$(\mathcal{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)|x-c|^\alpha}+$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\min(x,\,c)}^{\max(x,c)}\frac{f(x)-f(t)}{|x-t|^{1+\alpha}}\,dt.\tag{18.90}$$

Переход от (18.88) к (18.90) возможен на «достаточно хороших» функциях (см. § 13, п. 1°). Обозначим через $(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)$ правую часть в формуле (18.90). Тогда на «достаточно хороших» функциях имеем

$$(\mathcal{D}_c^\alpha f)(x)=(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x).\tag{18.91}$$

Правой части $(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)$ можно придать также вид

$$(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x)-f_{c+}(x-t)-f_{c-}(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt=$$

$$=\mathbf{D}_+^\alpha P_{c+}f+\mathbf{D}_-^\alpha P_{c-}f,\tag{18.92}$$

где $\mathbf{D}_\pm^\alpha$—дробное дифференцирование Маршо (5.57), (5.58) и использованы обозначения (18.81). В форме (18.92) производную $(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)$ можно записать и при $\alpha\geqslant 1$, используя конструкцию (5.80) дробных производных Маршо, приводящую к представлению

$$(\mathbf{D}_c^\alpha f)(x)=\frac{1}{\varkappa(\alpha,\,l)}\int_0^\infty\frac{(\Delta_t^l f_{c+})(x)+(\Delta_{-t}^l f_{c-})(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\tag{18.93}$$

где $l>\alpha$ и $\varkappa(\alpha,\,l)$—нормировочный множитель (5.81).

Зададимся далее естественным вопросом о том, как влияет на дробное интегрирование Чженя разный выбор точки c. Различаются ли операции $I_c^\alpha\varphi$ и $I_d^\alpha\varphi$ своими функциональными свойствами? Более конкретно, если функция $f(x)$ представима дробным интегралом $f(x)=I_c^\alpha\varphi$ от функции φ из некоторого класса, например L_p, то представима ли она в виде $f(x)=I_d^\alpha\psi$, где $\psi\in L_p$? Ответ на этот вопрос дается ниже в теореме 18.3. Предварительно же в следующей лемме выясним возможность представления $I_c^\alpha\varphi$ в виде $I_c^\alpha\varphi=I_+^\alpha\psi$.

Лемма 18.1. *Пусть $f(x)$ представима в виде $f(x)=(I_c^\alpha\varphi)(x)$, где $\varphi(x)\in L_p(-\infty, b)$, $1<p<1/\alpha$, при какой-нибудь b. Тогда*

$$f(x)=I_+^\alpha\psi_c,\quad \psi_c(x)=N_c\varphi=\nu_c(x)\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{c}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt,$$

$$-\infty<x<b, \tag{18.94}$$

где $\nu_c(x)=1$ при $x>c$ и $\nu_c(x)=\cos\alpha\pi$ при $x<c$, а $\psi_c(x)\in L_p(-\infty, b)$. Если $\varphi\in L_p(R^1)$, то и $\psi_c(x)\in L_p(R^1)$.

Доказательство. В равенстве (18.82) заменим I_-^α по формуле (11.10) с учетом (11.12) на I_+^α. Тогда получим $I_c^\alpha\varphi=I_+^\alpha(P_{c+}\varphi+\cos\alpha\pi P_{c-}\varphi+\sin\alpha\pi SP_{c-}\varphi)$, что совпадает с (18.94). Оператор $N_c=P_{c+}+\cos\alpha\pi\, P_{c-}+\sin\alpha\pi SP_{c-}$ ограничен в $L_p(R^1)$ согласно теореме 11.3. Лемма доказана.

Лемма 18.2. *Оператор*

$$N_c=P_{c+}+\cos\alpha\pi\, P_{c-}+\sin\alpha\pi SP_{c-} \tag{18.95}$$

обратим в $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, при этом

$$N_c^{-1}=P_{c+}+\cos\alpha\pi\, P_{c-}-\sin\alpha\pi\, S_\alpha^c P_{c-}, \tag{18.96}$$

где S_α^c—сингулярный оператор типа (11.39):

$$S_\alpha^c\varphi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{t-c}{x-c}\right|^\alpha\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x}. \tag{18.97}$$

Доказательство. Для простоты будем считать, что $c=0$, и запишем $P_{c\pm}=P_\pm$, $S_\alpha^c=S_\alpha$. Операторы (18.95), (18.96) имеют вид $N_0=P_+ + AP_-$, $N_0^{-1}=P_+ + BP_-$, где $A\varphi=\cos\alpha\pi\varphi+\sin\alpha\pi S\varphi$, $B\varphi=\cos\alpha\pi\varphi-\sin\alpha\pi S_\alpha\varphi$. Нужно показать, что

$$(P_+ + AP_-)(P_+ + BP_-)\varphi=(P_+ + BP_-)(P_+ + AP_-)\varphi=\varphi \tag{18.98}$$

для $\varphi(t)\in L_p(R^1)$. Между тем лемма 11.1 утверждает, что операторы A и B взаимно обратны в L_p на полуоси:

$$P_-AP_-BP_-\varphi=P_-BP_-AP_-\varphi=P_-\varphi,\quad \varphi\in L_p(R^1),\ 1<p<1/\alpha. \tag{18.99}$$

После перемножения в (18.98) с учетом (18.99) видим, что (18.98) сводится к выполнению равенств $P_+BP_-+P_+AP_-BP_-=0$, $P_+AP_-+P_+BP_-AP_-=0$. Подставляя сюда выражения операторов A и B, эти равенства приводим к виду

$$\sin\alpha\pi\, P_+SP_-S_\alpha P_-=\cos\alpha\pi P_+SP_- - P_+S_\alpha P_-, \tag{18.100}$$

$$\sin\alpha\pi\, P_+S_\alpha P_-SP_-=P_+SP_- - \cos\alpha\pi P_+S_\alpha P_-. \tag{18.101}$$

Выполнимость их проверяется непосредственным вычислением левых частей с помощью формулы Пуанкаре—Бертрана (11.9) (собственно говоря, формула (18.101) уже была получена нами ранее, см. равенство (11.47); можно заметить также, что (18.100) следует из (18.101), так как $r_\alpha P_+SP_-S_\alpha P_-=(P_+S_{-\alpha}P_-SP_-)r_\alpha$, где $r_\alpha\varphi=|x|^\alpha\varphi(x)$). Лемма доказана.

Теорема 18.4. *Пусть $f(x)$ представима в виде $f(x)=(I_c^\alpha\varphi)(x)$, $c\in R^1$, где $\varphi(x)\in L_p^{\mathrm{loc}}(R^1)$, $p>1$, $p\neq 1/\alpha$, $0<\alpha<1$. Тогда $f(x)$ представима в виде*

$$f(x)=(I_d^\alpha\psi)(x),\quad 1<p<1/\alpha, \tag{18.102}$$

$$f(x)=f(d)+(I_d^\alpha\psi)(x),\quad p>1/\alpha, \tag{18.103}$$

при любом выборе точки d, *где* $\psi(x)\in L_p^{\mathrm{loc}}(R^1)$ (*если* $\varphi\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, *то* $\psi\in L_p(R^1)$), *при этом* $\psi(x)$ *вычисляются по формулам*

$$\psi(x)=N_{cd}\varphi\overset{\mathrm{def}}{=}\nu_{cd}(x)\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_c^d\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^\alpha\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,\quad 1<p<1/\alpha,\tag{18.104}$$

$$\psi(x)=\tilde N_{cd}\varphi\overset{\mathrm{def}}{=}\nu_{cd}(x)\varphi(x)+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\mu_{cd}(x)\int\limits_c^d\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^{\alpha-1}\times$$

$$\times\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt,\quad p>1/\alpha,\tag{18.105}$$

где

$$\nu_{cd}(x)=\begin{cases}\cos\alpha\pi, & x\in(c,\ d),\\ 1, & x\notin(c,\ d),\end{cases}\qquad \mu_{cd}(x)=\operatorname{sign}[(x-c)(c-d)].$$

Доказательство. Пусть вначале $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — две произвольные функции из $L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$. Согласно лемме 18.1, имеем $I_c^\alpha\varphi=I_+^\alpha N_c\varphi$, $I_d^\alpha\psi=I_+^\alpha N_d\psi$, где операторы N_c, N_d строятся в виде (18.94) или, что то же самое, (18.95). Следовательно, требуемое равенство $I_c^\alpha\varphi=I_d^\alpha\psi$ будет достигнуто, если $N_c\varphi=N_d\psi$. Так как оператор N_d обратим в $L_p(R^1)$ при $1<p<1/\alpha$ согласно лемме 18.2, то $\psi=N_d^{-1}N_c\varphi$. Вычислим композицию $N_d^{-1}N_c$:

$$N_d^{-1}N_c\varphi=\varphi+N_d^{-1}(N_c-N_d)\varphi.\tag{18.106}$$

Очевидно, что $N_c-N_d=(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}+\sin\alpha\pi SP_{cd}$, где

$$P_{cd}\varphi=\begin{cases}\varphi(x), & x\in(d,\ c),\\ 0, & x\notin(d,\ c)\end{cases}$$

для определенности считаем, что $d<c$). Поэтому

$$N_d^{-1}(N_c-N_d)=(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}+\sin\alpha\pi P_{d+}SP_{cd}+$$
$$+\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi P_{d-}SP_{cd}-\sin^2\alpha\pi S_\alpha^dP_{d-}SP_{cd}.\tag{18.107}$$

Вычисление композиции $S_\alpha^dP_{d-}SP_{cd}$ по формуле Пуанкаре — Бертрана (11.9) с учетом формулы (11.46) дает после простых преобразований

$$\sin\alpha\pi S_\alpha^dP_{d-}SP_{cd}=P_{d+}SP_{cd}+\cos\alpha\pi P_{d-}SP_{cd}-S_\alpha^dP_{cd},$$

что после подстановки в (18.107) приводит к выражению $N_d^{-1}(N_c-N_d)=(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}+\sin\alpha\pi\, S_\alpha^dP_{cd}$. Тогда из (18.101) имеем

$$\psi=N_d^{-1}N_c\varphi=\varphi+(\cos\alpha\pi-1)P_{cd}\varphi+\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int\limits_d^c\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^\alpha\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x},$$

что совпадает с (18.104).

Итак, доказано тождество

$$I_c^\alpha\varphi=I_d^\alpha N_{cd}\varphi,\tag{18.108}$$

т. е. тождество (18.102), (18.104) для $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$. Так как операторы I_c^α и I_d^α имеют переменные верхний и нижний пределы интегрирования, а оператор N_{cd} ограничен, согласно теореме 11.3, в L_p

на любом конечном отрезке, тождество (18.103) верно и для $\varphi \in L_p^{\rm loc}$ (функцию $\varphi \in L_p^{\rm loc}$ можно приблизить функциями из $L_p(R^1)$ по норме L_p на любом конечном интервале).

Остается случай $p > 1/\alpha$. Ввиду вложения $L_p^{\rm loc} \subset L_r^{\rm loc}$, $r < 1/\alpha$, представление (18.102) с функцией (18.104) по-прежнему имеет место, однако нельзя утверждать, что $\psi \in L_p$, поскольку оператор N_{cd} не ограничен в L_p при $\alpha > 1/p$. Поэтому функцию (18.104) преобразуем к другому виду. Пусть для определенности $d < c$. Тогда при $t > d$ имеем $\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^\alpha = \operatorname{sign}(x-d)\left|\frac{t-d}{x-d}\right|^{\alpha-1} + \frac{|t-d|^{\alpha-1}}{|x-d|^\alpha}(t-x)$, что проверяется непосредственно. Поэтому $\psi(x) = \tilde{\psi}(x) + \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{1}{|x-d|^\alpha}\int\limits_d^c (t-d)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt$. А так как $\int\limits_d^c (t-d)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt = f(d)\Gamma(\alpha)$ (заметим, что $f(x)$ непрерывна при $p > 1/\alpha$), то отсюда

$$I_d^\alpha \psi = I_d^\alpha \tilde{\psi} + \frac{f(d)}{\Gamma(1-\alpha)} I_d^\alpha(|x-d|^{-\alpha}) = I_d^\alpha \tilde{\psi} + f(d)$$

в силу (18.84). Тем самым из (18.102) получено (18.103). Остается заметить, что оператор (18.105) ограничен в L_p, $p > 1/\alpha$, согласно теореме 11.3. Теорема доказана.

6°. Обобщенный дробный интеграл Джрбашяна. Рассмотрим случай отрезка [0, 1]. Дробный интеграл Римана—Лиувилля можно записать в виде

$$(I_{0+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \varphi(xt)(1-t)^{\alpha-1}dt, \quad x > 0. \tag{18.109}$$

Обобщим конструкцию (18.109), заменив функцию $\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ произвольной (интегрируемой) функцией, отвлекаясь от множителя x^α. Именно, следуя Ж. Адамару (J. Hadamard [1]) и М. М. Джрбашяну [4, 5], введем оператор

$$(L^{(\omega)}\varphi)(x) = -\int\limits_0^1 \varphi(xt)\,\omega'(t)\,dt, \tag{18.110}$$

где функция $\omega(x) \in C([0, 1])$ удовлетворяет условиям:

1) $\omega(x)$ монотонна,
2) $\omega(0) = 1$, $\omega(1) = 0$, $\omega(x) \neq 0$ при $0 < x < 1$,
3) $\omega'(x) \in L_1(0,1)$.

При условии 3) оператор (18.110) определен на ограниченных функциях $\varphi(x)$.

Если $\omega(t) = \frac{(1-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$, то очевидно, $(L^{(\omega)}\varphi)(x) = x^{-\alpha}(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)$.

Заметим, что интегрированием по частям равенство (18.110) приводится к виду $(L^{(\omega)}\varphi)(x) = \varphi(0) + x\int\limits_0^1 \varphi'(xt)\,\omega(t)\,dt$ для непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$.

Конструкция (18.110) хорошо приспособлена к степенным функциям:

$$L^{(\omega)}(x^\mu) = \Delta_\omega(\mu)\,\chi^\mu, \quad \mu > -1, \tag{18.111}$$

где $\Delta_\omega(\mu) = -\int\limits_0^1 t^\mu \omega'(t)\,dt$, а в случае $\mu > 0$

$$\Delta_\omega(\mu) = \mu \int\limits_0^1 t^{\mu-1}\omega(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (18.112)$$

Поэтому на функциях $\varphi(t)$, представимых степенным рядом

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \qquad (18.113)$$

действие оператора $L^{(\omega)}$ дается равенством

$$(L^{(\omega)}\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_\omega(k)\, a_k x^k. \qquad (18.114)$$

Следующая лемма обобщает утверждение леммы 15.4.

Лемма 18.3. *Радиусы сходимости рядов (18.113), (18.114) совпадают.*

Доказательство. Нужно показать, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\Delta_\omega(k)} = 1. \qquad (18.115)$$

Ввиду (18.112) имеем

$$k(1-\varepsilon)^{k-1}\int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \omega(t)\,dt \leqslant \Delta_\omega(k) \leqslant k\int\limits_0^1 \omega(t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

для любого $\varepsilon > 0$. Учитывая условия 1), 2), получаем $1-\varepsilon \leqslant \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\Delta_\omega(k)} \leqslant 1$, откуда ввиду произвола ε следует (18.115). Лемма доказана.

Равенство (18.111) показывает, как должно быть введено обобщенное дифференцирование $M^{(\omega)}$, обратное к $L^{(\omega)}$: $M^{(\omega)}L^{(\omega)}\varphi = L^{(\omega)}M^{(\omega)}\varphi$. Очевидно, $M^{(\omega)}$ должно вводиться так, чтобы $M^{(\omega)}(x^\mu) = \dfrac{1}{\Delta_\omega(\mu)}x^\mu$.

Мы ограничимся утверждением, что в работе М. М. Джрбашяна [5] показано, что для каждой функции $\omega(t)$ существует неубывающая ограниченная функция $\alpha_\omega(x)$, такая, что

$$\int\limits_0^1 x^\mu d\alpha_\omega(x) = \frac{1}{\Delta_\omega(\mu)}, \quad (M^{(\omega)}\varphi)(x) = \int\limits_0^1 \varphi(xt)\,d\alpha_\omega(\mathrm{t}).$$

Замечание 18.2. М. М. Джрбашян [4, 5] рассматривал операторы $L^{(\omega)}\varphi$ в более общем виде

$$L^{(\omega)}\varphi = -\frac{d}{dx}\left\{x\int\limits_0^1 \varphi(xt)\,dp(\mathrm{t})\right\}, \quad p(t) = t\int\limits_t^1 \frac{\omega(x)}{x^2}\,dx,$$

с менее ограничительными предположениями относительно $\omega(t)$, чем указаны в 1)—3). Мы же для простоты ограничились оператором $L^{(\omega)}$ в виде (18.110).

§ 19. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ВЕЙЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Обычная форма I^{α}_{a+} или I^{α}_{b-} дробного интегрирования по Риману—Лиувиллю оказывается неудобной в теории тригонометрических рядов, имеющей дело с периодическими функциями. Естественно, что для периодических функций операция дробного интегродифференцирования должна быть введена так, чтобы она переводила их в периодические (с тем же периодом). Дробное интегродифференцирование по Риману—Лиувиллю этим свойством не обладает. В теории тригонометрических рядов пользуются другим определением дробного интегродифференцирования, предложенным Г. Вейлем. Оно и будет рассмотрено в этом параграфе.

1°. Определения. Связь с рядами Фурье. Пусть $\varphi(x)$ есть 2π-периодическая функция на R^1 и пусть

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}, \quad \varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}\varphi(x)\,dx, \tag{19.1}$$

—ее ряд Фурье. Всюду в этом параграфе будут рассматриваться функции с нулевым средним значением по периоду:

$$2\pi\varphi_0 = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = 0, \tag{19.2}$$

т. е. мы «отсеиваем» постоянные, рассматривая дробные интегралы периодических функций. Напомним, что свертка

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(t)\,\varphi(x-t)\,dt \tag{19.3}$$

двух периодических функций имеет своим рядом Фурье

$$(A\varphi)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\varphi_k e^{ikx}, \tag{19.4}$$

где a_k, φ_k — коэффициенты Фурье функций $a(x)$, $\varphi(x)$. Последовательность $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ называется иногда *мультипликатором Фурье оператора свертки* A.

Так как $\varphi^{(n)}(x) \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^n\varphi_k e^{ikx}$, то определим, следуя Г. Вейлю, дробное интегрирование так, чтобы

$$I^{(\alpha)}_{\pm}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k}{(\pm ik)^{\alpha}} e^{ikx} \tag{19.5}$$

(с учетом (19.2)) и аналогично чтобы для дробного дифференцирования

$$\mathscr{D}^{(\alpha)}_{\pm}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pm ik)^{\alpha}\varphi_k e^{ikx} \tag{19.6}$$

(ср. с формулами (7.1), (7.4)). Тем самым будет соблюдено требование, чтобы дробный интеграл или производная 2π-периодической функции были также 2π-периодическими функциями. Здесь в соответствии с (7.3) $(\pm ik)^{\alpha} = |k|^{\alpha} e^{\pm\frac{\alpha\pi i}{2}\operatorname{sign} k}$. Согласно (19.3), (19.4), определение (19.5) можно истолковать в виде

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x-t)\,\Psi_{\pm}^{\alpha}(t)\,dt, \quad \alpha > 0, \tag{19.7}$$

где

$$\Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{ikt}}{(\pm ik)^{\alpha}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}} \tag{19.8}$$

(штрих означает пропуск слагаемого с номером $k=0$). Конструкцию (19.7) и будем называть *дробным интегралом Вейля порядка* α. Известно (А. Зигмунд [2, с. 201]), что ряд (19.8) сходится при $\alpha>0$ для всех $t\in[0, 2\pi]$. Функция $\Psi_{\pm}^{\alpha}$ может быть выражена через обобщенную дзета-функцию Римана (1.87)

$$\Gamma(\alpha)\,\Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = (2\pi)^{\alpha}\zeta(1-\alpha, \ \pm t/(2\pi)), \quad 0<t<2\pi, \tag{19.9}$$

согласно формуле Гурвица (1.88). В неявном виде равенство (19.9) содержится также в доказываемом ниже равенстве (19.11). При целых $\alpha=1, 2, \ldots$ функция $\Psi_{\pm}^{\alpha}(t)$ может быть записана в силу (1.89) в виде

$$\Psi_{\pm}^{m}(t) = -\frac{(\pm 2\pi)^m}{m!} B_m\left(\frac{t}{2\pi}\right), \quad 0<t<2\pi, \tag{19.10}$$

где $B_m(t)$ — многочлен Бернулли.

Ввиду (19.5) ясно, что $I_{\pm}^{(\alpha)} I_{\pm}^{(\beta)}\varphi = I_{\pm}^{(\alpha+\beta)}\varphi$ при одинаковом выборе знаков. Заметим, что случаи целых $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ отвечают обычному интегрированию (при котором из всех первообразных выбирается та, у которой среднее значение по периоду равно нулю: это позволяет сохранить периодичность при интегрировании), поскольку ряд Фурье допускает почленное интегрирование. Поэтому в дальнейшем достаточно исследовать случай $0<\alpha<1$.

Остановимся подробнее для определенности на «левостороннем» дробном интеграле $I_{+}^{(\alpha)}\varphi$ (заметим, что $\Psi_{-}^{\alpha}(t) = \Psi_{+}^{\alpha}(t)$).

Лемма 19.1. *Функция* $\Psi_{+}^{\alpha}(t)$ *имеет при* $0<\alpha<1$ *вид*

$$\Psi_{+}^{\alpha}(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} t_{+}^{\alpha-1} + r_{\alpha}(t), \quad -2\pi<t\leqslant 2\pi, \tag{19.11}$$

где функция

$$r_{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty}\left[2\pi\sum_{m=1}^{n}(t+2\pi m)^{\alpha-1} - \frac{(2\pi n)^{\alpha}}{\alpha}\right] \tag{19.12}$$

бесконечно дифференцируема при $t\in(-2\pi, 2\pi]$.

Доказательство. Обозначим

$$G(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{m=0}^{n}(t+2\pi m)_{+}^{\alpha-1} - (2\pi)^{\alpha-1}\frac{n^{\alpha}}{\alpha}\right], \tag{19.13}$$

так что нужно доказать, что $G(t)\equiv\Psi_{+}^{\alpha}(t)$ при $-2\pi<t\leqslant 2\pi$. Для этого достаточно показать в соответствии с (19.8), что коэффициенты Фурье функции $G(t)$ совпадают с $(ik)^{-\alpha}$:

$$G_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G(t)\,e^{-ikt}\,dt = (ik)^{-\alpha}. \tag{19.14}$$

Доказательство этого основывается на формуле

$$G(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t+2\pi m), \tag{19.15}$$

где функция $g(t)$ определяется равенством $g(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}\left[t_+^{\alpha-1} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi m}^{2(m+1)\pi} s_+^{\alpha-1}\,ds\right]$ при $2\pi m \leqslant t < 2(m+1)\pi$, $m = 0, \pm 1, \ldots$ Равенство (19.15) проверяется непосредственно с учетом того, что $(2\pi)^{\alpha-1}n^{\alpha}/\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2m\pi} t^{\alpha-1}dt$, и того, что $\int\limits_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} t^{\alpha-1}dt \to 0$ при $n \to \infty$. Функция $g(t)$ абсолютно интегрируема по R^1. Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\left|t^{\alpha-1} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} s^{\alpha-1}\,ds\right| dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\left|\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}[t^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}]\,ds\right| dt.$$

Применяя теорему о среднем (при $m \geqslant 1$), получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt \leqslant$ $\leqslant c_1 + c_2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\xi^{\alpha-2}d\xi \leqslant c_1 + c_3\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-2} < \infty$, поскольку $\xi = \xi_{\text{ср}} \in$ $\in (2m\pi,\ 2m\pi + 2\pi)$. Из абсолютной интегрируемости $g(t)$ и равенства $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}|g(t + 2m\pi)|\,dt = \int\limits_0^{\infty}|g(t)|\,dt$ следует, что ряд (19.15) является абсолютно сходящимся почти для всех t (воспользовались тем, что сходимость ряда $\Sigma\int\limits_a^b |f_m(t)|\,dt$ влечет сходимость почти всюду ряда $\Sigma\,|f_m(t)|$; см. А. Зигмунд [1, с. 49]).

Известно (А. Зигмунд [1, с. 116]), что коэффициенты Фурье суммы $G(t)$ ряда вида (19.15) совпадают с преобразованием Фурье функции $g(t)$ в точках $k = 0, \pm 1, \ldots$, т. е. $G_k = \tilde{g}(k)$, где $\tilde{g}(x)$ — преобразование Фурье (1.104). Следовательно, $G_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ikt}g(t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\left[t^{\alpha-1} - \right.$ $\left. - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{2m\pi}^{2(m+1)\pi} s_+^{\alpha-1}\,ds\right]e^{-ikt}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-ikt}dt$, $k \neq 0$, с учетом того, что интеграл по периоду от e^{-ikt} равен нулю при $k \neq 0$. Используя значение оставшегося интеграла, вычисленное в (7.6), мы и получаем (19.14). Остается добавить, что бесконечная дифференцируемость функции $r_\alpha(t)$ при $-2\pi < t \leqslant 2\pi$ усматривается из (19.12), при этом $r_\alpha^{(j)}(t) =$ $= c_j\sum\limits_{m=1}^{\infty}(t + 2m\pi)^{\alpha-1-j}$, где c_j — постоянная, $j \geqslant 1$.

Следствие. *Функции $\Psi_\pm^\alpha(t)$ и их производные допускают при $|t| \leqslant \pi$ оценку*

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}\Psi_\pm^\alpha(t)\right| \leqslant c\,|t|^{\alpha-1-j},\quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{19.16}$$

В силу леммы 19.1 и следствия из нее определение дробного интеграла Вейля равенством (19.7) корректно в том смысле, что оно применимо к любой интегрируемой функции, интеграл существует почти всюду и дает также интегрируемую функцию (ясно также, что $I_\pm^{(\alpha)}\varphi$—непрерывная функция, если $\varphi(t)$ непрерывна).

Ввиду (19.11) получаем

$$I_{+}^{(\alpha)}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}r_\alpha(x-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad 0<x\leqslant 2\pi.$$

Здесь второе слагаемое бесконечно дифференцируемо при $0<x<2\pi$, так что дробный интеграл Вейля (19.7) отличается от дробного интеграла Римана—Лиувилля $I_{0+}^{\alpha}\varphi$ (первое слагаемое) несущественно с точки зрения дифференциальных свойств, если иметь в виду внутренние точки интервала $(0, 2\pi)$. Поведение второго слагаемого на концах $x=0$, $x=2\pi$, вообще говоря, такое же, как и первого.

Дробную производную по Вейлю естественно определить при $0<\alpha<1$ равенством

$$\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)}f=\pm\frac{d}{dx}I_{\pm}^{(1-\alpha)}f \tag{19.17}$$

в соответствии с (19.6). В периодическом случае удобным является и некоторый другой подход к определению дробной производной—через конечные разности дробного порядка, см. об этом в следующем параграфе.

Дробную производную (19.17) можно назвать *производной Вейля—Лиувилля* в сравнении с выражением

$$\mathbf{D}_{\pm}^{(\alpha)}f=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[f(x-t)-f(x)]\,\frac{d}{dt}\,\Psi_{\pm}^{1-\alpha}(t)\,dt, \tag{19.18}$$

которое можно было бы назвать в этом плане *производной Вейля—Маршо* (ср. с (5.57), (5.58)). Выражение (19.18) получается из (19.17) формальным дифференцированием под знаком интеграла с последующим интегрированием по частям.

Лемма 19.2. *Дробные производные (19.17) и (19.18) совпадают на функциях* $f(x)\in H^{\lambda}([0,\ 2\pi])$, $\lambda>\alpha$: $\mathscr{D}_{\pm}^{(\alpha)}f\equiv\mathbf{D}_{\pm}^{(\alpha)}f$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$. Тогда

$$\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)}f=\frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dx}\int\limits_0^{2\pi}\Psi_{+}^{1-\alpha}(t)\,d\,[F(x)-F(x-t)]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{d}{dx}\left\{\Psi_{+}^{1-\alpha}(t)\,[F(x)-F(x-t)]\Big|_0^{2\pi}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{2\pi}[F(x)-F(x-t)]\,\frac{d}{dt}\,\Psi_{+}^{1-\alpha}(t)\,dt\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}[F'(x)-F'(x-t)]\,\frac{d}{dt}\,\Psi_{+}^{1-\alpha}(t)\,dt=\mathbf{D}_{+}^{(\alpha)}f,$$

где все переходы легко обосновываются для $f(x)\in H^{\lambda}$, $\lambda>\alpha$, с учетом свойства (19.16).

2°. Простейшие свойства дробного интеграла Вейля. Справедлива следующая

Лемма 19.3. *На 2π-периодических функциях $\varphi(t)\in L_1(0,2\pi)$ с нулевым средним значением (19.2) дробный интеграл Вейля совпадает с дробным интегралом Римана—Лиувилля по всей прямой:*

$$I_{+}^{(\alpha)}\varphi=I_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad 0<\alpha<1, \tag{19.19}$$

где интеграл справа понимается как условно сходящийся:

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in Z^{+}}} \int_{x-2n\pi}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{19.20}$$

Справедливо также представление абсолютно сходящимся интегралом:

$$I_{+}^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} \varphi(x-t)\left\{t^{\alpha-1} - \left(2\pi\left[\frac{t}{2\pi}\right]\right)^{\alpha-1}\right\} dt. \tag{19.21}$$

Доказательство. Так как предел в (19.12) равномерен по $t\in[0, 2\pi]$, то из (19.11)

$$I_{+}^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{2\pi} \varphi(x-t)\left[\sum_{k=0}^{n} (t+2\pi k)^{\alpha-1} - \frac{(2\pi)^{\alpha-1} n^{\alpha}}{\alpha}\right] dt.$$

Учитывая (19.2) и периодичность функции $\varphi(t)$, имеем $I_{+}^{(\alpha)}\varphi = = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{2\pi k}^{2(k+1)\pi} \varphi(x-t)t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{2(n+1)\pi} \varphi(x-t)\,t^{\alpha-1}dt,$ что ввиду (19.20) и дает (19.19). Для получения (19.21) достаточно заметить, что $\int_{2\pi k}^{2(k+1)\pi} \varphi(x-t)(2\pi k)^{\alpha-1}\,dt = 0$ для всех $k=[t/2\pi]=0, 1, 2, \ldots$

Следует подчеркнуть, что толкование интеграла в (19.19) в смысле (19.20) вызвано существом дела, а его сходимость связана с обращением в нуль среднего значения по периоду функции $\varphi(t)$.

Между дробными интегралами $I_{+}^{(\alpha)}\varphi$ и $I_{-}^{(\alpha)}\varphi$ существует связь типа (11.10), (11.11). Именно введем сингулярный оператор с ядром Гильберта

$$H\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\,dt \tag{19.22}$$

(понимаемый в смысле главного значения), связывающий, как известно (А. Зигмунд [1, с. 88]), сопряженные тригонометрические ряды:

$$\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx},\quad H\varphi \sim -i \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \operatorname{sign} k\varphi_k e^{ikx}. \tag{19.23}$$

Теорема 19.1. *Для* $\varphi(t)\in L_p(0, 2\pi)$, $1<p<\infty$, *выполняются следующие соотношения:*

$$I_{-}^{(\alpha)}\varphi = \cos\alpha\pi I_{+}^{(\alpha)}\varphi + \sin\alpha\pi\, HI_{+}^{(\alpha)}\varphi, \tag{19.24}$$

$$I_{+}^{(\alpha)}\varphi = \cos\alpha\pi I_{-}^{(\alpha)}\varphi - \sin\alpha\pi HI_{-}^{(\alpha)}\varphi. \tag{19.25}$$

Доказательство. Известно, что сингулярный оператор H ограничен в $L_p(0, 2\pi)$, $1<p<\infty$ (теорема Рисса, см., например, книгу Н. К. Бари [1, с. 566] или А. Зигмунда [1, с. 404]). Операторы $I_{\pm}^{(\alpha)}$ также ограничены в $L_p(0, 2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$ (это вытекает из того, что $\Psi_{\pm}^{\alpha}(t)\in L_1$). Поэтому (19.24), (19.25) достаточно проверить на плотном в $L_p(0, 2\pi)$ множестве бесконечно дифференцируемых функций. На таких функциях дробное интегрирование действует по правилу (19.5), так что вместо (19.24) достаточно с учетом (19.23) доказать равенство $\frac{1}{(-ik)^{\alpha}} = \frac{\cos\alpha\pi}{(ik)^{\alpha}} + + \frac{\sin\alpha\pi(-i\operatorname{sign}k)}{(ik)^{\alpha}}$, которое очевидно. Аналогично проверяется (19.25).

3°. **Другие формы дробного интегрирования периодических функций.** Можно ввести для периодических функций аналог риссова потенциала (12.1). Отправляясь от (12.23), мы должны ввести его так, чтобы

$$I^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi_k}{|k|^\alpha} e^{ikx}. \tag{19.26}$$

Так как $|k|^{-\alpha} = \dfrac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)} [(ik)^\alpha + (-ik)^\alpha]$, то $I^{(\alpha)}\varphi$ можно ввести как свертку:

$$I^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\,\Psi^\alpha(t)\,dt, \tag{19.27}$$

где

$$\Psi^\alpha(t) = \frac{\Psi_+^\alpha(t) + \Psi_-^\alpha(t)}{2\cos(\alpha\pi/2)} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^\alpha}. \tag{19.28}$$

Так же как и дробное интегрирование (19.7) по Вейлю, оператор (19.27) типа потенциала Рисса обладает полугрупповым свойством: $I^{(\alpha)}I^{(\beta)} = I^{(\alpha+\beta)}$, что очевидным образом усматривается из (19.26).

Из связей (19.24), (19.25) вытекает после простых преобразований следующая связь оператора $I^{(\alpha)}$ с дробным интегрированием $I_+^{(\alpha)}$:

$$I^{(\alpha)}\varphi = \cos(\alpha\pi/2)\, I_+^{(\alpha)}\varphi + \sin(\alpha\pi/2)\, I_+^{(\alpha)} H\varphi, \tag{19.29}$$

$$I_+^{(\alpha)}\varphi = \cos(\alpha\pi/2)\, I^{(\alpha)}\varphi - \sin(\alpha\pi/2)\, I^{(\alpha)} H\varphi, \tag{19.30}$$

где $\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $p > 1$.

Можно пойти дальше и называть оператором дробного интегрирования порядка α всякий оператор свертки (19.3), для которого

$$a_k \sim \frac{c}{|k|^\alpha} \text{ при } |k| \to \infty \tag{19.31}$$

(с различными, вообще говоря, значениями постоянной c при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$). Операторы $I_\pm^{(\alpha)}$, $I^{(\alpha)}$ являются примерами таких операторов. Они обладают полугрупповым свойством, но имеют тот «недостаток», что являются свертками с неэлементарными функциями. Можно, наоборот, указать свертки с элементарными функциями со свойством типа (19.31), но без полугруппового свойства. Так, например, для оператора $I_1^{(\alpha)}\varphi = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{[\sin(x-\xi)]_+^{1-\alpha}}$, где $t_+^{\alpha-1}$ понимается как обычно, см. (5.5), имеем с учетом формулы 2.5.12.36 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1]:

$$I_1^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\varphi_k e^{ikx}, \quad a_k = \frac{e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} + (-1)^k e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}}{2^{1+\alpha}\pi} \frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k+1+\alpha}{2}\right)}. \tag{19.32}$$

Здесь условие (19.31) выполнено в силу (1.66). Однако из (19.32) видно, что полугрупповое свойство не выполняется.

Отметим еще двупараметрическое семейство операторов дробного интегрирования

$$I_\mu^{(\alpha)}\varphi = \int_0^{2\pi} K_{\alpha,\mu}(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$K_{\alpha,\mu}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx-\mu\pi/2)}{k^\alpha}$$

(такие операторы широко используются в вопросах приближения периодических функций, см. литературные указания в § 23, пп. 1 и 2°, 19.6). Простыми преобразованиями получается формула

$$K_{\alpha,\mu}(x) = \frac{\sin[(\mu+\alpha)\pi/2]}{\sin\alpha\pi}\Psi_+^{(\alpha)}(x) + \frac{\sin[(\alpha-\mu)\pi/2]}{\sin\alpha\pi}\Psi_-^{(\alpha)}(x),$$

так что оператор $I_\mu^{(\alpha)}$ является линейной комбинацией операторов дробного интегрирования Вейля:

$$I_\mu^{(\alpha)}\varphi = \frac{\sin[(\mu+\alpha)\pi/2]}{\sin\alpha\pi} I_+^{(\alpha)}\varphi + \frac{\sin[(\alpha-\mu)\pi/2]}{\sin\alpha\pi} I_-^{(\alpha)}\varphi$$

(здесь усматривается явная аналогия с потенциалами Феллера, которые мы рассматривали в непериодическом случае в § 12, см. равенства (12.10), (12.13)). Очевидно, что $I_\alpha^{(\alpha)} = I_+^\alpha$, $I_{-\alpha}^{(\alpha)} = I_-^{(\alpha)}$.

4°. Совпадение дробной производной Вейля с дробной производной Маршо. Из леммы 19.3 и определения (19.17) вытекает, что дробная производная Вейля (19.17) совпадает с дробной производной Римана—Лиувилля:

$$\mathscr{D}_+^{(\alpha)}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \tag{19.33}$$

при условии, что $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=0$ и интеграл в (19.33) понимается в смысле (19.20). Таким образом, дробное интегродифференцирование по Вейлю совпадает с дробным интегродифференцированием Римана—Лиувилля от периодически продолженной на всю прямую функции при надлежащем толковании неабсолютно сходящегося интеграла. Покажем, что если пользоваться формой Вейля—Маршо (19.18) дробного дифференцирования, то отпадает необходимость в условной сходимости интеграла на бесконечности. Докажем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x-t)-f(x)]\frac{d}{dt}\Psi_+^{1-\alpha}(t)\,dt \equiv \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt \tag{19.34}$$

для 2π-периодических функций $f(x)$, т. е.

$$\mathbf{D}_+^{(\alpha)}f \equiv \mathbf{D}_+^\alpha f. \tag{19.35}$$

Хотя в (19.34) оба интеграла должны пониматься, вообще говоря, как условно сходящиеся в окрестности $t=0$, для нас важно то, что интеграл в правой части является «хорошим» на бесконечности: он сходится при $t\to\infty$ без требования, чтобы $\int_0^2 f(t)\,dt=0$, и является при $t\to\infty$, вообще говоря, абсолютно сходящимся.

Для точного толкования равенства (19.34) введем соответствующую «усеченную» дробную производную

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi} [f(x-t) - f(x)] \frac{d}{dt} \Psi_{+}^{1-\alpha}(t)\, dt \qquad (19.36)$$

и пусть $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f$ — знакомое нам по (5.59) усечение правой части в (19.34). Отметим, что $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f$ является 2π-периодической функцией, если $f(x)$ такова.

Лемма 19.4. *Пусть $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$. Усеченные дробные производные $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f$ и $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f$ сходятся (почти для всех x или по норме $L_p(0, 2\pi)$) одновременно и*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f. \qquad (19.37)$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{(\alpha)} f \equiv \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f - a_\varepsilon f(x) + \int_0^\infty b_\varepsilon(t) f(x-t)\, dt, \qquad (19.38)$$

где постоянная a_ε есть сумма ряда $a_\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} [(2m\pi)^{-\alpha} - (2\pi m + \varepsilon)^{-\alpha}]$, а функция $b_\varepsilon(t)$ определяется условиями: $b_\varepsilon(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-1-\alpha}$ при $2m\pi \leqslant t < 2\pi m + \varepsilon$, $m = 1, 2, \ldots$, и $b_\varepsilon(t) = 0$ вне этих интервалов. Тождество (19.38) получается из (19.36) непосредственными преобразованиями, сходными с действиями при доказательстве леммы 19.3, с учетом того, что $\frac{d}{dt}\Psi_{+}^{1-\alpha}(t) = -\frac{2\pi\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} (t+2m\pi)^{-\alpha-1}$, $0 < t < 2\pi$, согласно (19.11), (19.12).

Очевидно, $a_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Далее, $b_\varepsilon(t) \in L_1(0, \infty)$ и $\int_0^\infty b_\varepsilon(t)\, dt = a_\varepsilon \to 0$. Поэтому в (19.38) второе и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю (как почти всюду, так и по норме $L_p(0, 2\pi)$), что и доказывает лемму.

Замечание 19.1. Пределы (19.37) заведомо существуют на функциях $f(x) \in H^\lambda$, $\lambda > \alpha$ (или $f(x) \in H_p^\lambda$, $\lambda > \alpha$, см. об этом ниже, в п. 5°). Заметим также, что на таких функциях все три обсуждаемые формы дробной производной совпадают:

$$\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)} f \equiv \mathbf{D}_{+}^{(\alpha)} f \equiv \mathbf{D}_{+}^{\alpha} f. \qquad (19.39)$$

Второе из этих равенств вытекает из леммы 19.4, первое установлено выше, см. лемму 19.2.

5°. Представимость периодических функций дробным интегралом Вейля. Пусть $f(x)$—2π-периодическая функция, $x \in R^1$. Покажем, что сходимость по норме $L_p(0, 2\pi)$ усеченной дробной производной Маршо

$$(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad 0 < x < 2\pi, \qquad (19.40)$$

равносильна представимости функции $f(x)$ дробным интегралом Вейля от функции из $L_p(0, 2\pi)$. Именно справедлива следующая

Теорема 19.2. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Для $f \in X_{2\pi}$, где $X_{2\pi} = L_p(0, 2\pi)$ $1 \leqslant p < \infty$, или $X_{2\pi} = C(0, 2\pi)$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует функция* $\varphi(x) \in X_{2\pi}$ *такая, что* $\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f - \varphi\|_{X_{2\pi}} \underset{\varepsilon\to\infty}{\longrightarrow} 0$;

2) $f(x) = f_0 + I^{(\alpha)}_{+}\varphi$, *где* $\varphi \in X_{2\pi}$ *и* $f_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$. *При* $X_{2\pi} = L_p(0, 2\pi)$ *эти утверждения эквивалентны также следующему:*

3) $\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p \leqslant c$, *где c не зависит от* ε.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $f_0 = 0$. Пусть выполнено 2). Тогда $f(x) = I^{\alpha}_{+}\varphi$ в силу леммы 19.3 с условно сходящимся интегралом $I^{\alpha}_{+}\varphi$. Воспользуемся построениями § 6, где показано, что для разности $f(x)-f(x-t)$ функции $f(x) = I^{\alpha}_{+}\varphi$ справедливо представление (6.9) (уже с абсолютно сходящимся интегралом). В силу этого представления справедлива формула (6.6):

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f)(x) = \int\limits_0^{\infty} \mathscr{K}(t)\,\varphi(x-\varepsilon t)\,dt \tag{19.41}$$

с ядром $\mathscr{K}(t) \in L_1(0, \infty)$ (легко видеть, что хотя эта формула выводилась для $\varphi(x) \in L_1(R^1)$, она верна и для 2π-периодической функции $\varphi(x) \in X_{2\pi}$ в силу того, что $\mathscr{K}(t) \in L_1(R^1)$). Учитывая (6.8), мы и получаем из (19.41) утверждения 1) и 3) теоремы.

Пусть теперь выполнено 1). Воспользуемся представлением (6.23) $A_h\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f = \int\limits_0^{\infty} \mathscr{K}(t)\,[f(x-\varepsilon t) - f(x-h-\varepsilon t)]\,dt$, где A_h — оператор (6.22) (также непосредственным анализом убеждаемся в том, что это представление имеет место в нашем 2π-периодическом случае). Рассуждая, как и в § 6, п. 3° (см. выкладки после равенства (6.23), в которых нужно заменить $L_q(R^1)$-сходимость на сходимость $X_{2\pi}$), получаем $f(x)-f(x-h) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}[(I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon)(x) - (I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon)(x-h)]$, где $\varphi_\varepsilon(x) = \mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f$. Здесь уже интеграл $I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon$ от периодической функции φ_ε существует в смысле (19.20) $\left(\text{мы учитываем, что } \int\limits_0^{2\pi} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 0\right)$. Так как две 2π-периодические функции, имеющие тождественно совпадающие разности, различаются лишь на постоянную, то с учетом того, что $h = 0$,

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} I^{\alpha}_{+}\varphi_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} I^{(\alpha)}_{+}\varphi_\varepsilon = I^{(\alpha)}_{+}(\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon), \tag{19.42}$$

где предел берется по норме $L_p(0, 2\pi)$. Равенство (19.42) и дает утверждение 2).

В случае, если выполнено 3), рассуждения также аналогичны выкладкам, приведенным в § 6, п. 3°. Теорема доказана.

Заметим в заключение, что $I^{(\alpha)}_{+}[L_p(0, 2\pi)] = I^{(\alpha)}_{-}[L_p(0, 2\pi)]$ при всех $1 < p < \infty$ и $\alpha > 0$. Это вытекает из тождеств (19.24), (19.25) в силу того, что оператор H коммутирует с $I^{(\alpha)}_{+}$, $I^{(\alpha)}_{-}$ и ограничен в L_p. Из 19.29), (19.30) вытекает также, что $I^{(\alpha)}_{+}(L_p) = I^{(\alpha)}(L_p)$ при $p > 1$. Поэтому имеем

$$I^{(\alpha)}(L_p) = I^{(\alpha)}_{+}[L_p(0, 2\pi)] = I^{(\alpha)}_{-}[L_p(0, 2\pi)], \quad 1 < p < \infty, \quad \alpha > 0. \tag{19.43}$$

Замечание 19.2. Теорема 19.2 дает описание пространства $I^{(\alpha)}(L_p)$ в терминах левостороннего либо правостороннего усеченного дробного дифференцирования Маршо в случае $0 < \alpha < 1$. Ее можно распространить на случай произвольных $\alpha>0$, если воспользоваться соответствующей конструкцией (5.80) дробной производной Маршо. Именно пусть

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad \alpha > 0, \tag{19.44}$$

где $l>\alpha$ и постоянная $\varkappa(\alpha, l)$ указана в (5.81). Тогда теорема 19.2 справедлива для любого $\alpha>0$, если $\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}$ в ее формулировке означает конструкцию (19.44) с выбором $l>\alpha$. Доказательство этого мы не приводим. Соответствующий непериодический аналог такого утверждения дан нами в случае функций многих переменных в § 27.

Завершим этот пункт следующей простой теоремой.

Теорема 19.3. *Для того чтобы функция* $f(x)\in L_p(0, 2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$ (*или* $C(0, 2\pi)$), *была представима дробным интегралом*

$$f(x) = f_0 + I_+^{(\alpha)}\varphi, \quad \varphi\in L_p(0, 2\pi) \quad (\text{или } C(0, 2\pi)), \tag{19.45}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $g(x)\in$ $\in L_p(0, 2\pi)$ (*или* $C(0, 2\pi)$ *соответственно*), *для которой*

$$(ik)^{\alpha} f_k = g_k, \quad k\in \mathbf{Z}, \tag{19.46}$$

при этом $g(x)\equiv\varphi(x)$. *В случае* $p>1$ *(19.46) эквивалентно условию*

$$|k|^{\alpha} f_k = \psi_k, \quad k\in\mathbf{Z}, \quad \psi(x)\in L_p(0, 2\pi) \tag{19.47}$$

(*но уже* $\psi(x)\neq\varphi(x)$).

Доказательство. Пусть выполнено (19.45). Тогда непосредственное вычисление коэффициентов Фурье в (19.45) дает $f_k = (I_+^{(\alpha)}\varphi)_k = (ik)^{-\alpha}\varphi_k$ согласно (19.5). Обратно, пусть существует $g\in L_p$ или C такая, что имеет место (19.46), т. е. $f_k = g_k/(ik)^{\alpha}$. Согласно (19.5), $f_k = (I_+^{\alpha}\, g)_k$. В силу теоремы единственности для рядов Фурье $f(x) = f_0 + I_+^{(\alpha)}\varphi$.

Для получения (19.47) остается заметить, что при $p>1$ представимость функции $f(x)$ дробным интегралом $I_+^{(\alpha)}\varphi$, $\varphi\in L_p$, эквивалентна представимости потенциалом Рисса (19.26), (19.27), см. (19.43).

6°. Действие дробного интегрирования и дифференцирования Вейля в классах гельдеровских функций. Рассматриваем 2π-периодические функции, непрерывные на всей прямой (так что $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$). Пусть, как обычно, $\omega(\varphi, t) = \sup\limits_{\substack{x\in R^1\\ |h|\leqslant t}} |\varphi(x+h) - \varphi(x)|$ означает модуль непрерывности функции $\varphi(x)$. Следующая теорема, выясняющая характер улучшения оператором $I_+^{(\alpha)}$ свойств гладкости функции $\varphi(x)$, аналогична теореме 13.15.

Теорема 19.4. *Пусть* $f(x) = (I_+^{(\alpha)}\varphi)(x)$, *где* $\varphi(x)$ — *непрерывная* 2π-*периодическая функция и* $0<\alpha<1$. *Справедливы оценки*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant ch \int\limits_h^{\pi} \frac{\omega(\varphi, t)}{t^{2-\alpha}} dt, \tag{19.48}$$

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leqslant ch^2 \int\limits_h^{\pi} \frac{\omega(\varphi, t)}{t^{3-\alpha}} dt. \tag{19.49}$$

Доказательство. Представим разность $f(x+h) - f(x)$ в виде

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x-t) - \varphi(x)]\,[\Psi_+^{\alpha}(t+h) - \Psi_+^{\alpha}(t)]\, dt \tag{19.50}$$

с учетом периодичности функции $\varphi(x)$ и равенства $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_+^\alpha(t)\,dt = 0$. Отсюда $f(x+h) - f(x) = \int\limits_{|t|<2h} + \int\limits_{|t|>2h} = A + B$ (можно считать, что $0 < h < \pi/2$). Для первого слагаемого имеем

$$|A| \leqslant c \int\limits_{-2h}^{2h} \omega(\varphi, |t|)(|\Psi_+^\alpha(t+h)| + |\Psi_+^\alpha(t)|)\,dt.$$

Так как здесь $\omega(\varphi, |t|) \leqslant \omega(\varphi, 2h) \leqslant 2\omega(\varphi, h)$ (см., например, А. Ф. Тиман [3, с. 111]), то с учетом оценки (19.16) (с $j = 0$) имеем

$$|A| \leqslant c\omega(\varphi, h) \int\limits_{-3h}^{3h} |\Psi_+^\alpha(t)|\,dt \leqslant c_1\omega(\varphi, h) \int\limits_0^{3h} t^{\alpha-1}dt \leqslant c_2 h^\alpha \omega(\varphi, h). \quad (19.51)$$

Для B на основании теоремы о среднем и неравенства (19.16) (с $j=0$) получаем $|B| \leqslant ch \int\limits_{2h<|t|<\pi} \omega(\varphi, |t|) \left|\left(\frac{d}{dt}\Psi_+^\alpha\right)(t+\theta h)\right| dt \leqslant c_1 h \int\limits_{2h<|t|<\pi} \omega(\varphi, |t|) \times$ $\times (|t| - h)^{\alpha-2}dt$. Здесь $|t| - h \geqslant |t|/2$, поэтому

$$|B| \leqslant ch \int\limits_{2h}^{\pi} \omega(\varphi, t)\, t^{\alpha-2}dt. \quad (19.52)$$

Так как $h^\alpha \omega(\varphi, h) \leqslant ch \int\limits_{2h}^{\pi} \omega(\varphi, t)\, t^{\alpha-2}dt$, то из (19.51), (19.52) следует оценка (19.48).

Для получения (19.49) подобно (19.50) имеем $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x-t) - \varphi(x)]\,[\Psi_+^\alpha(t+h) - 2\Psi_+^\alpha(t) + \Psi_+^\alpha(t-h)]dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\leqslant 2h} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\geqslant 2h} = A_1 + B_1$. Точно так же, как и выше, получаем

$$|A_1| \leqslant ch^\alpha \omega(\varphi, h). \quad (19.53)$$

Оценим B_1. Из представления (5.75) для конечных разностей и из неравенства (19.16) (при $j=2$) вытекает

$$|\Psi_+^\alpha(t+h) - 2\Psi_+^\alpha(t) + \Psi_+^\alpha(t-h)| \leqslant ch^2 t^{\alpha-3} \quad (19.54)$$

при $|t| \geqslant 2h$ (следует только отметить, что в (5.75) рассматривались нецентрированные разности, а сейчас мы используем центрированную разность; легко, однако, установить, как видоизменяется тождество (5.75) при использовании центрированных разностей). С помощью (19.54) заключаем, что $|B_1|$ мажорируется правой частью из (19.49). Тогда с учетом (19.53) неравенство (19.49) доказано.

Теорема 19.5. *Для непрерывной 2π-периодической функции справедлива оценка*

$$\omega(\mathbf{D}_+^{(\alpha)} f, h) \leqslant c \int\limits_0^h \omega(f, t)\, t^{-1-\alpha}dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (19.55)$$

в предположении, что сходится интеграл в правой части.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = (\mathbf{D}_+^{(\alpha)} f)(x)$. Из (19.18) получаем представление $\varphi(x+h) - \varphi(x) = 1/(2\pi) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Delta(x, h, t)(d/dt)\Psi_+^{1-\alpha}(t)\,dt$, $h > 0$, где обозначено $\Delta(x, h, t)=f(x+h-t)-f(x-h)+f(x)$. Очевидно, $|\Delta(x, h, t)|\leqslant \leqslant \alpha\omega(f, |t|)$, $|\Delta(x, h, t)|\leqslant 2\omega(f, h)$. Поэтому с учетом оценки (19.16) имеем

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant c\left(\int\limits_{|t|\leqslant h}+\int\limits_{h\leqslant|t|\leqslant\pi}\right)\omega(f, |t|)|t|^{-1-\alpha}dt\leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_0^h \omega(f, t)t^{-1-\alpha}dt+\omega(f, h)h^{-\alpha}\right). \qquad (19.56)$$

Так как $\omega(f, h)/h\leqslant 2\omega(f, t)/t$ (см., например, книгу А. Ф. Тимана [3, с 111]), то в (19.56) второе слагаемое мажорируется первым и мы получаем (19.55). Теорема доказана.

В силу леммы 19.4 получаем из теоремы 19.5.

Следствие. *Пусть $f(x)$—непрерывная 2π-периодическая функция и $\varphi(x)=\int\limits_0^\infty [f(x)-f(x-t)]t^{-1-\alpha}dt$, $0<\alpha<1$. Тогда*

$$\omega(\varphi, h)\leqslant c\int\limits_0^h \omega(f, t)t^{-1-\alpha}dt. \qquad (19.57)$$

Рассмотрим теперь обобщенный класс Гельдера $H_0^\omega([0, 2\pi])$, состоящий из непрерывных на всей прямой 2π-периодических функций с нулевым средним значением, для которых $\omega(\varphi, t)\leqslant c\omega(t)$, где $\omega(t)$ — заданная непрерывная функция. Норма в $H_0^\omega([0, 2\pi])$ вводится подобно § 13, п. 6°. Подчеркнем, что теперь нижний нулевой индекс в обозначении класса H_0^ω несет в отличие от непериодического случая, см. § 13, п. 6°, ту информацию, что $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0$.

Через $\Lambda_0^\omega([0, 2\pi])$ обозначим класс непрерывных 2π-периодических функций с нулевым средним значением, для которых

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant c\omega(h), \quad h>0,$$

назовем его *обобщенным классом Зигмунда*. Пусть $\|f\|_{\Lambda_0^\omega}=\|f\|_C+ +\sup\limits_{x,h}|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|/\omega(h)$.

Всюду ниже $\omega(t)$ удовлетворяет условиям

$$\omega(t)\in C([0, 2\pi]), \quad \omega(0)=0, \quad \omega(t_1)\leqslant c\omega(t_2), \quad t_1\leqslant t_2. \qquad (19.58)$$

Непосредственно из теоремы 19.4 вытекает

Теорема 19.6. *Пусть $\omega(t)$ удовлетворяет условиям (19.58). Оператор $I_+^{(\alpha)}$, $0<\alpha<1$, дробного интегрирования Вейля ограниченно действует из $H_0^\omega([0, 2\pi])$ в $H_0^{\omega_\alpha}([0, 2\pi])$, $\omega_\alpha(t)=t^\alpha\omega(t)$, если*

$$\int\limits_h^\pi\left(\frac{h}{t}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\leqslant c\omega(h), \qquad (19.59)$$

и из $H_0^\omega([0, 2\pi])$ в $\Lambda_0^{\omega_\alpha}([0, 2\pi])$ при более слабом предположении

$$\int\limits_h^\pi\left(\frac{h}{t}\right)^{2-\alpha}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\leqslant c\omega(h). \qquad (19.60)$$

Следствие. *Оператор Вейля $I_+^{(\alpha)}$, $0<\alpha<1$, ограниченно действует из $H_0^\lambda([0, 2\pi])$ в $H_0^{\lambda+\alpha}([0, 2\pi])$, $\lambda+\alpha<1$, и из $H_0^\lambda([0, 2\pi])$ в класс Зигмунда*

$$\Lambda_0^{\lambda+\alpha}=\{f(x): |f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant ch^{\lambda+\alpha},\ f_0=0\} \qquad (19.61)$$

при $\lambda+\alpha<2$.

Действительно, для $\omega(t)=t^\lambda$ условие (19.59) выполняется при $\lambda+\alpha<1$, а (19.60) — при $\lambda+\alpha<2$.

Замечание 19.3. Если рассматривать 2π-периодические функции, принадлежащие классу H_0^ω на $[0, 2\pi]$, но не обязательно непрерывные на всей прямой, т. е. такие, для которых не обязательно $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, то для них утверждение теоремы 19.6 видоизменяется так:

$$I_+^{(\alpha)}(\varphi-\varphi_*)\in H^{\omega_\alpha}([0, 2\pi]),$$

где $\varphi_*(x)$ — 2π-периодическая функция, равная $[\varphi(0)-\varphi(2\pi)](\pi-x)/(2\pi)$ на $[0, 2\pi]$.

Замечание 19.4. Утверждение следствия неулучшаемо в том смысле, что $I_\pm^{(\alpha)}\varphi\notin H^1$, вообще говоря, для $\varphi\in H_0^{1-\lambda}$. Соответствующим контрпримером служит функция Вейерштрасса (см. А. Зигмунд [2, с. 207]).

Теорема 19.7. *Пусть* $\omega(t)$ *удовлетворяет условиям* (*19.58*) *и* $\int_0^h t^{-1}\omega(t)\,dt\leqslant c\omega(h)$. *Тогда оператор* $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}$ *дробного дифференцирования Вейля—Маршо* (*и оператор* $\mathbf{D}_+^\alpha$ *дробного дифференцирования Маршо*), $0<\alpha<1$, *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\omega_\alpha}([0, 2\pi])$ *в* $H_0^\omega([0, 2\pi])$.

Эта теорема немедленно следует из оценки (19.55).

Следствие. *Если* $f(x)\in H^\lambda([0, 2\pi])$, $0<\alpha<\lambda\leqslant 1$, *то* $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}f\in H_0^{\lambda-\alpha}([0, 2\pi])$.

При $\lambda=1$ справедливо утверждение несколько более сильное, чем сформулированное в следствии: $\Lambda_0^1 \xrightarrow{\mathbf{D}_\pm^{(\alpha)}} H_0^{1-\alpha}$, где Λ_0^1—класс (19.61) с $\lambda+\alpha=1$. Доказательство этого утверждения мы не приводим, его можно найти в книге А. Зигмунда [2, с. 206].

Наконец, объединяя теоремы 19.6 и 19.7, приходим к следующей теореме, в которой используется класс Φ_β^σ, определенный в (13.68).

Теорема 19.8. *Пусть* $\omega(t)\in\Phi_{1-\alpha}^0$. *Тогда оператор* $I_+^{(\alpha)}$, $0<\alpha<1$, *дробного интегрирования Вейля изоморфно отображает* $H_0^\omega([0, 2\pi])$ *на* $H_0^{\omega_\alpha}([0, 2\pi])$.

Доказательство. Из условий, наложенных на $\omega(t)$, следует, что $I_+^{(\alpha)}$ ограничен из H_0^ω в $H_0^{\omega_\alpha}$ согласно теореме 19.6, а $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}$— из $H_0^{\omega_\alpha}$ в H_0^ω согласно теореме 19.7. Поэтому остается лишь показать, что всякая функция $f(x)\in H^{\omega_\alpha}$ представима дробным интегралом Вейля $f(x)=I_+^{(\alpha)}\varphi$ от функции φ из H_0^ω. Так как $H_0^\omega\subset C([0, 2\pi])$, то в силу теоремы 19.2 функция $f(x)$ будет представима дробным интегралом Вейля (от функции $\varphi\in C$), если $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f$ сходится по норме C. Так как

$$|\mathbf{D}_{+,\varepsilon_1}^\alpha f-\mathbf{D}_{+,\varepsilon_2}^\alpha f|\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{\omega_\alpha(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt=c\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{\omega(t)}{t}\,dt\to 0,$$

то $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f$ сходится в C. Поэтому в силу теоремы 19.2 $f=I_+^{(\alpha)}\varphi$, $\varphi\in C([0, 2\pi])$. Так как $\mathbf{D}_+^{(\alpha)}I_+^{(\alpha)}\varphi\equiv\varphi$, $\varphi\in L_1([0, 2\pi])$, то из теоремы 19.7 следует, что φ не только из $C([0, 2\pi])$, но и из H_0^ω. Теорема 19.8 доказана.

Следствие. *Дробное интегрирование Вейля изоморфно отображает класс Гельдера* $H_0^\lambda([0, 2\pi])$, $0<\lambda<1-\alpha$, *на класс* $H_0^{\lambda+\alpha}([0, 2\pi])$.

Действительно, $\omega(t) = t^{\lambda} \in \Phi^0_{1-\lambda}$ при $0 < \lambda < 1 - \alpha$.

Приведем еще «мультипликаторную» перефразировку теоремы 19.8.

Теорема 19.8′. *Пусть $f(x)$—непрерывная 2π-периодическая функция и $I^{(\alpha)}$ — оператор (19.26), заданный мультипликатором $|k|^{-\alpha}$. Для любой функции $\omega(t) \in \Phi^0_{1-\alpha}$ оператор $I^{(\alpha)}$ изоморфно отображает пространство $H^{\omega}_0([0, 2\pi])$ на $H^{\omega_\alpha}_0([0, 2\pi])$.*

Доказательство. Всспользуемся тождествами (19.29), (19.30). Сингулярный оператор H с ядром Гильберта ограничен в пространстве $H^{\omega}_0([0, 2\pi])$ при указанных условиях на $\omega(t)$, что вытекает из оценки Зигмунда для сингулярного интеграла (см., например, работу Н. К. Бари, С. Б. Стечкина [2] или книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1, с. 160]). Поэтому из тождеств (19.29), (19.30) следует, что $I^{(\alpha)}(H^{\omega}) = I^{(\alpha)}_{+}(H^{\omega})$. В таком случае утверждение теоремы 19.8′ вытекает из теоремы 19.8.

В заключение этого пункта отметим, что теоремы Харди — Литтлвуда 3.5, 3.6 о действии дробных интегралов в пространствах L_p справедливы и в периодическом случае для дробных интегралов Вейля:

$$L_p(0, 2\pi) \xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}} L_q(0, 2\pi), \quad q = p/(1-\alpha p) \text{ при } 0<\alpha<1/p \ (1<p<\infty), \tag{19.62}$$

$$L_p(0, 2\pi) \xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}} H^{\alpha-1/p}([0, 2\pi]) \text{ при } 1/p < \alpha < 1/p + 1 \ (1 \leqslant p < \infty) \tag{19.63}$$

можно заменить $H^{\alpha-1/p}([0, 2\pi])$ на класс $h^{\alpha-1/p}([0, 2\pi])$, ср. со следствием теоремы 3.6). Случаю $\alpha - 1/p = 1$ отвечает утверждение

$$L_p(0, 2\pi) \xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}} \lambda^1_0([0, 2\pi])$$

(ср. с теоремой 3.6), где λ^1_0 — класс функций, определяемый аналогично классу (19.61) с заменой $O(h)$ на $o(h)$ в (19.61).

Доказательство периодических аналогов (19.62), (19.63) теорем 3.5, 3.6 мы не приводим. Его можно найти в книге А. Зигмунда [2]. Очевидно, утверждение (19.62) содержится в теореме 3.5 ввиду оценки (19.16) (с $j=0$).

7°. Дробные интегралы и производные Вейля периодических функций из H^{λ}_p. Приведем здесь теорему Харди — Литтлвуда о дробном интегрировании и дифференцировании периодических функций, удовлетворяющих интегральному условию Гельдера.

Через $H^{\lambda}_p([0, 2\pi])$ обозначаем класс 2π-периодических функций $\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(x) - \varphi(x-\delta)|^p dx \leqslant c\delta^{\lambda} \tag{19.64}$$

(ср. с (14.1), (14.2)), а через $h^{\lambda}_p([0, 2\pi])$—условию

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^{\lambda}} \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - \varphi(x-\delta)|^p dx = 0. \tag{19.65}$$

Теорема 19.9. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda + \alpha < 1$ и пусть $I^{(\alpha)}_{\pm}$, $\mathbf{D}^{(\alpha)}_{\pm}$ — дробное интегродифференцирование (19.7), (19.18) по Вейлю. Тогда*

$$L_p(0, 2\pi) \xrightarrow{I^{(\alpha)}_{\pm}} h^{\alpha}_p([0, 2\pi]), \tag{19.66}$$

$$H_p^\lambda([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{I_\pm^{(\alpha)}} H_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]), \tag{19.67}$$

$$H_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{\mathbf{D}_\pm^{(\alpha)}} H_p^\lambda([0,\ 2\pi]). \tag{19.68}$$

Эта теорема является непосредственным следствием теорем 14.5—14.7 в силу периодичности рассматриваемых функций. Можно показать, что утверждения (19.67), (19.68) справедливы также в o-форме:

$$h_p^\lambda([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{I_\pm^{(\alpha)}} h_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]), \tag{19.69}$$

$$h_p^{\lambda+\alpha}([0,\ 2\pi]) \xrightarrow{\mathbf{D}_\pm^{(\alpha)}} h_p^\lambda([0,\ 2\pi]). \tag{19.70}$$

Из (19.67), (19.68) заключаем, что оператор $I_\pm^{(\alpha)}$ дробного интегрирования Вейля отображает H_p^λ на $H_p^{\lambda+\alpha}$, $\lambda+\alpha<1$, взаимно однозначно (предварительно нужно убедиться в том, что $H_p^{\lambda+\alpha} \subset I^{(\alpha)}(L_p)$). Анализ доказательства теорем 14.6, 14.7 показывает при этом, что отображение

$$I_\pm^{(\alpha)}(H_p^\lambda) = H_p^{\lambda+\alpha} \tag{19.71}$$

является изоморфизмом.

8°. **Неравенство Бернштейна для дробных производных тригонометрических многочленов.** Пусть

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \tag{19.72}$$

— произвольный тригонометрический многочлен. Известны (см., например, книгу С. М. Никольского [4, с. 94]) неравенства С. Н. Бернштейна:

$$\|T_n'\|_C \leqslant n\|T_n\|_C, \quad \|T_n'\|_p \leqslant n\|T_n\|_p, \quad 1 \leqslant p < \infty. \tag{19.73}$$

В следующей теореме доказывается их аналог для дробных производных Вейля (19.6).

Теорема 19.10. *Для тригонометрического многочлена $T_n(x)$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{D}_\pm^{(\alpha)} T_n\|_p \leqslant c(\alpha)\, n^\alpha \|T_n\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{19.74}$$

где $c(\alpha) = 2^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$.

Доказательство. Пусть вначале $p=\infty$. В силу (19.39) дробную производную можно рассматривать в форме Маршо: $\mathcal{D}_\pm^{(\alpha)} T_n = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \times$ $\times \int_0^\infty \frac{T_n(x) - T_n(x \mp t)}{t^{1+\alpha}}\, dt$. Отсюда

$$|\mathcal{D}_\pm^{(\alpha)} T_n| \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{2/n} \frac{|T_n(x) - T_n(x \mp t)|}{t^{1+\alpha}}\, dt + \frac{2\alpha\|T_n\|_C}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{2/n}^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha}}. \tag{19.75}$$

Так как $|T_n(x) - T_n(x \mp t)| \leqslant t\|T_n'\|_C$, то в силу первого из неравенств (19.73) простыми оценками из (19.75) получаем

$$\|\mathcal{D}_\pm^{(\alpha)} T_n\|_C \leqslant \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\, n^\alpha \|T_n\|_C. \tag{19.76}$$

Пусть теперь $1 \leqslant p < \infty$. Введем оператор свертки с многочленом $T_n(x)$: $A_n\varphi = \int\limits_0^{2\pi} T_n(x-t)\varphi(t)\,dt$. Очевидно, $(A_n\varphi)(x)$—тригонометрический многочлен того же порядка n. В силу доказанной оценки (19.76) получаем

$$|(\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} A_n\varphi)(x)| \leqslant c(\alpha)\, n^\alpha \|A_n\varphi\|_C \leqslant c(\alpha)\, n^\alpha \|T_n\|_p \|\varphi\|_{p'} \tag{19.77}$$

с учетом неравенства Гельдера. Кроме того, очевидно, $(\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} A_n\varphi)(x) = \int\limits_0^{2\pi} (\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n)(x-y)\varphi(y)\,dy$, и потому в силу неравенства Гельдера

$$|(\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} A_n\varphi)(x)| \leqslant \|\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n\|_p \|\varphi\|_{p'}. \tag{19.78}$$

Неравенства (19.77), (19.78) выполняются на всех функциях $\varphi \in L_{p'}$, но второе из них точное, так как в нем достигается знак равенства на функции $\varphi(x) = |g(x)|^{p-1} \operatorname{sign} g(x) \in L_{p'}$, $g(x) = \mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n$. Но тогда $\|\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n\|_p \leqslant c(\alpha)\, n^\alpha \|T_n\|_p$, что и требовалось.

Заметим, что неравенство (19.74) для $1 \leqslant p < \infty$ можно получить точно так же, как и для $p = \infty$, осуществляя те же действия (19.75), (19.76) по норме пространства L_p с помощью неравенства Минковского, если использовать второе из неравенств (19.73). Изложенное доказательство теоремы 19.10 использует только первое из неравенств (19.73).

Замечание 19.5. Если T_n — тригонометрический многочлен, то $\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n$ — также тригонометрический многочлен того же порядка. Поэтому из (19.74), (19.73) следует, что оценка вида (19.74) выполняется для любого $\alpha > 0$ с постоянной $c(\alpha) = 2^{1+N-\alpha}/\Gamma(2+N-\alpha)$, где N — наибольшее целое число, меньшее α. Эта постоянная является загрубленной при $\alpha > 1$. Для таких α выполняется неравенство

$$\|\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} T_n\|_p \leqslant n^\alpha \|T_n\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad \alpha \geqslant 1, \tag{19.79}$$

с точной постоянной, равной 1. Доказательство этого дано П. И. Лизоркиным [3] в более общем контексте «тригонометрических интегралов» $T_n(x) = \int\limits_{-n}^{n} e^{ixt} d\sigma(t)$.

Замечание 19.6. Неравенство Бернштейна для дробных производных почти периодических функций вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\lambda_k x} \tag{19.80}$$

выполняется в форме

$$\|\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} f\|_{L_\infty} \leqslant c(\alpha)\, n^\alpha \|f\|_{L_\infty}, \quad n = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\lambda_k|, \tag{19.81}$$

с той же постоянной $c(\alpha) = 2^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha)$ (T. Bang [1, с. 21—22], 1941 г.), $0 < \alpha < 1$.

К неравенству Бернштейна (19.81) примыкает неравенство Фавара для дробных интегралов почти периодических функций (19.80):

$$\|I_{\pm}^{(\alpha)} f\|_{L_\infty} \leqslant \frac{c}{[\min |\lambda_k|]^\alpha} \|f\|_{L_\infty}, \quad \alpha > 0, \tag{19.82}$$

где c зависит от α, но не зависит от $f(x)$ (T. Bang [1]).

§ 20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЧЕРЕЗ РАЗНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА (производная Грюнвальда—Летникова)

Хорошо известно, что для функции $f(x)$, дифференцируемой до порядка n, справедлива формула

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n}, \tag{20.1}$$

где $(\Delta_h^n f)(x)$—конечная разность (5.72) функции $f(x)$. Это равенство можно использовать для определения дробной производной, заменяя в нем n на $\alpha>0$, предварительно истолковав надлежащим образом разность $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ дробного порядка.

Отметим, что излагаемый в этом параграфе подход к дробному дифференцированию и интегрированию через конечные разности сравнительно менее широко употребим в математическом анализе по сравнению с другими (Римана—Лиувилля, Маршо и др.). Однако этот подход, естественный с точки зрения развития математического анализа и предложенный давно А. Грюнвальдом (A. K. Grünwald [1]), А. В. Летниковым [1], в последнее время вновь привлек к себе внимание как с точки зрения теории функций, см., например, работы П. Бутцера, У. Вестфаль (P. L. Butzer, U. Westphal [1]) и Я. С. Бугрова [1], так и с точки зрения удобства в приближенных вычислениях, см., например, работу В. А. Желудева [2]. Отметим, что в п. 2° мы существенно основываемся на указанной работе П. Бутцера, У. Вестфаль.

При рассмотрении конечных разностей дробного порядка функции $f(x)$ естественно предполагать заданными на всей прямой. Если ограничиться только левосторонними или только правосторонними сдвигами, то можно рассмотреть и случай полуоси. О случае конечного отрезка будет особо сказано в п. 4°. Будем отдельно исследовать периодический и непериодический случаи.

Через $X=X(R^1)$ будем обозначать одно из пространств $L_p(R^1)$, $1\leqslant p<\infty$, $C(R^1)$, а в периодическом случае $X_{2\pi}=X(0, 2\pi)$ будет означать одно из подобных пространств на $[0, 2\pi]$.

1°. Разности дробного порядка и их свойства. Для функции $f(x)$, заданной на всей прямой, отправляясь от (5.72), положим

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = (E-\tau_h)^\alpha f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), \quad \alpha>0, \tag{20.2}$$

где $\binom{\alpha}{k}$—биномиальные коэффициенты (1.48). Так как

$$c(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{k}\right| < \infty \tag{20.3}$$

в силу (1.51), то ряд (20.2) сходится абсолютно и равномерно при всех $\alpha>0$ для любой ограниченной функции; если $f(x)\in X(X_{2\pi})$, то он сходится по норме $X(X_{2\pi})$. Заметим, что $c(\alpha)=2^\alpha$ при целом α и $c(\alpha)\leqslant 2^{[\alpha]+1}$ при нецелом α.

Разность (20.2) назовем *левосторонней*, если $h>0$, и *правосторонней*, если $h<0$.

Замечание 20.1. Разность (20.2), вообще говоря, не определена при $\alpha<0$, так как ряд (20.2) может оказаться расходящимся. Это так, например, для $f(x)\equiv 1$, поскольку

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{\alpha}{j}=(-1)^n\binom{\alpha-1}{n}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(n+1-\alpha)}{\Gamma(n+1)}\tag{20.4}$$

(А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев [1, 4.2.1.5]), что расходится при $n\to\infty$, если $\alpha<0$, см. (1.66). Поэтому определение (20.2) заведомо неприемлемо при $\alpha<0$ в периодическом случае. В непериодическом случае ряд (20.2) будет сходиться при $\alpha<0$, если $f(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности: $|f(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-\mu}$, $\mu>|\alpha|$.

Отметим некоторые простые свойства разностей (20.2):

Свойство 1. $(\Delta_h^\alpha(\Delta_h^\beta f))(x)=(\Delta_h^{\alpha+\beta}f)(x)$.

Свойство 2. Если $f\in X(X_{2\pi})$, то $\lim\limits_{h\to 0}\|\Delta_h^\alpha f\|_{X(X_{2\pi})}=0$.

Свойство 3. $\|\Delta_h^{\alpha+\beta}f\|_{X(X_{2\pi})}\leqslant c(\alpha)\|\Delta_h^\beta f\|_{X(X_{2\pi})}$.

Свойство 1 устанавливается непосредственной проверкой, из него в соответствии с (20.3) следует свойство 3. Свойство 2 устанавливается стандартными средствами функционального анализа (ввиду равномерной по h ограниченности оператора Δ_h^α свойство 2 достаточно проверить на плотном в $X(X_{2\pi})$ множестве «хороших» функций).

В непериодическом случае для функции $f(x)$, например из $L_1(R^1)$, преобразование Фурье действует на $\Delta_h^\alpha f$ по формуле

$$\widehat{(\Delta_h^\alpha f)}(x)=(1-e^{ixh})^\alpha\hat{f}(x),\tag{20.5}$$

а в периодическом случае аналогичное свойство выполняется для коэффициентов Фурье:

$$(\Delta_h^\alpha f)_k=(1-e^{-ikh})^\alpha f_k,\quad f_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-ikt}dt.\tag{20.6}$$

Формулы (20.5), (20.6) устанавливаются непосредственной проверкой.

Отправляясь от (20.1), введем функцию

$$f_{\pm}^{\alpha)}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{(\Delta_{\pm h}^\alpha f)(x)}{h^\alpha},\quad \alpha>0,\tag{20.7}$$

где предел может рассматриваться в зависимости от изучаемых вопросов для каждого x, почти для всех x или по норме пространства X (или $X_{2\pi}$). Функцию (20.7) будем называть *дробной производной Грюнвальда—Летникова*. В случае, когда предел в (20.7) понимается по норме пространства $X(X_{2\pi})$, производную (20.7) можно назвать *сильной производной Грюнвальда—Летникова в* $X(X_{2\pi})$.

Ниже в теоремах 20.2, 20.4 мы покажем, что производная Грюнвальда—Летникова совпадает с производной Маршо

$$\mathbf{D}_{\pm}^\alpha f=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt,\quad 0<\alpha<1,\tag{20.8}$$

в случае $\alpha\geqslant 1$ вместо (20.8) нужно вести речь о форме (5.80). Более того, мы увидим, что дробные производные Грюнвальда—Летникова и Маршо имеют, вообще говоря, одинаковые области определения, т. е. сходимость в (20.7) влечет сходимость в (20.8) и наоборот.

Заметим, что можно было бы вместо (20.7) ввести дробное дифференцирование следующим симметричным образом:

$$f^{\alpha)}(x)=\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)+(\Delta_{-h}^\alpha f)(x)}{|h|^\alpha}.\tag{20.7'}$$

В этом случае оно совпадает не с дробной производной Маршо (20.8), а с операцией (12.1′), обратной риссову потенциалу:

$$f^{\alpha)}(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{20.8′}$$

Поэтому дробную производную (20.7′) можно назвать *производной Грюнвальда—Летникова—Рисса.* Мы не станем останавливаться на ее рассмотрении, которое совершенно аналогично изучению производных (20.7) в этом параграфе.

Замечание 20.2. Конструкцию (20.7) можно использовать и для определения дробного интеграла, взяв $\alpha<0$ в (20.7). Согласно замечанию 20.1, такое определение дробного интеграла будет корректно для функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности. Далее в п. 4° мы подробнее остановимся на этом в случае функций, заданных на отрезке.

Заметим, что можно ввести обобщенные разности, порождаемые не степенной функцией $(I-\tau_h)^\alpha$, а произвольной аналитической функцией $a(I-\tau_h)$. Пусть функция $a(\xi)$, $0\leqslant\xi\leqslant 2$, удовлетворяет условиям:

1) она аналитична в окрестности точки $\xi=1$:

$$a(\xi) = \sum_{k=0}^\infty a_k(\xi-1)^k, \quad a_k = a^{(k)}(1)/k!, \tag{20.9}$$

где ряд сходится при $|\xi - 1|\leqslant 1$;

2) сходимость в точках $\xi=0$, $\xi=2$ абсолютная:

$$c(a) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^\infty |a_k| < \infty;$$

3) $a(\xi)$ обращается в нуль при $\xi = 0$:

$$a(0) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k = 0.$$

Положим: $a(I-\tau_h) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k \tau_h^k = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k \tau_{kh}$. Этот оператор порождает обобщенную разность

$$(a - \Delta_h f)(x) \overset{\text{def}}{=} a(I-\tau_h) f = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k a_k f(x-kh),$$

совпадающую, очевидно, с $(\Delta_h^\alpha f)(x)$ в случае $a(\xi)=\xi^\alpha$.

Легко доказывается свойство $a - \Delta_h(b - \Delta_h f) = ab - \Delta_h f$, где $ab - \Delta_h f$ — обобщенная разность, определяемая произведением $a(\xi)b(\xi)$. Это свойство обобщает свойство 1 разностей $\Delta_h^\alpha f$.

Можно, следуя Э. Посту (E. L. Post [2]), ввести обобщенное дифференцирование $a(\mathcal{D})f$, определив его, подобно (20.7), равенством

$$a(\mathcal{D})f = \lim_{h\to 0} a\left(\frac{I-\tau_h}{h}\right) f, \tag{20.10}$$

где

$$a\left(\frac{I-\tau_h}{h}\right) f = \sum_{j=0}^\infty a_j \left(\frac{I-\tau_h}{h} - I\right)^j f. \tag{20.11}$$

Можно было бы дать другое определение:

$$a[\mathcal{D}]f = \lim_{h\to 0} \frac{a - \Delta_h^\alpha f}{a(h)}. \tag{20.12}$$

При этом определение (20.10) имеет тот недостаток по сравнению с (20.12), что оно, вообще говоря, формальное: ряд (20.11) может оказаться расходящимся при малых h, если ряд (20.9) не сходится при больших ξ. Поэтому определению (20.10), (20.11) можно придать смысл (для неаналитических при всех ξ функций $a(\xi)$) лишь ценой особых ограничений на функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость ряда (20.11). Тем не менее определение (20.10) естественнее определения (20.12), ибо именно при определении (20.10) справедлива для периодических функций $f(x)$ формула

$$[a(\mathscr{D})f]_k = a(ik)f_k, \tag{20.13}$$

где f_k — коэффициент Фурье функции f. (Уже равенство (20.13) предполагает задание $a(\xi)$ на всей комплексной плоскости.)

Мы не будем более подробно останавливаться на обобщенном дифференцировании $a(\mathscr{D})$, как и вообще в книге на подобных обобщениях дифференцирования. Отметим только, что, применяя формально равенства (20.10), (20.11), получаем следующее представление на бесконечно дифференцируемых функциях $f(x)$:

$$a(\mathscr{D})f = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a_j (I-\mathscr{D})^j f = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j b_j \mathscr{D}^j f,$$

$$\mathscr{D} = d/dx, \quad b_j = \sum_{\nu=j}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{\nu}{j}a_{\nu}.$$

Подчеркнем, что определения этого пункта имеют смысл и для функций, заданных на полуоси, например R^1_+ (или R^1_-), если ограничиться рассмотрением правосторонних (левосторонних) разностей дробного порядка.

2°. Совпадение дробной производной Грюнвальда—Летникова с производной Маршо. Периодический случай. Прежде всего покажем, что существование у функции $f(x)$ сильной производной Грюнвальда—Летникова (20.7) равносильно представимости функции $f(x)$ дробным интегралом Вейля (с точностью до постоянного слагаемого), см. теорему 20.1. Предварительно установим некоторые вспомогательные утверждения, связанные с интегральным представлением разности $\Delta_h^\alpha f$ дробного порядка для функций $f(x)$, представимых дробным интегралом.

Пусть $\mathrm{k}_\alpha(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x_+^{\alpha-1}$ и

$$\mathrm{p}_\alpha(x) = (\Delta_1^\alpha \mathrm{k}_\alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(x-j)_+^{\alpha-1}. \tag{20.14}$$

Нам понадобится также функция

$$\chi_\alpha(x;\, h) = \frac{2\pi}{h}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{p}_\alpha\left(\frac{x+2\pi j}{h}\right) = \frac{2\pi}{h}\sum_{-\frac{x}{2\pi}<j<\infty}\mathrm{p}_\alpha\left(\frac{x+2\pi j}{h}\right). \tag{20.15}$$

Лемма 20.1. *Функция* $\mathrm{p}_\alpha(x)$, $\alpha>0$, *обладает свойствами:*

1) $\mathrm{p}_\alpha(x) \in L_1(R^1)$, $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{p}_\alpha(x)\,dx = 1$;

2) $\widehat{\mathrm{p}_\alpha}(x) = \left(\dfrac{1-e^{ix}}{-ix}\right)^\alpha$, *где выбрано значение степенной функции, при котором* $\widehat{\mathrm{p}_\alpha}(0) = 1$;

3) $\mathrm{p}_\alpha(x)\equiv 0$ *при* $x>\alpha$ *в случае целого* $\alpha=1,\ 2,\ \ldots$

Доказательство. Начнем с наиболее простого свойства 3). В случае целого α имеем при $x>\alpha$

$$\mathrm{p}_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{\alpha}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(x-j)^{\alpha-1}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Delta_1^\alpha x^{\alpha-1}.$$

Но $(\Delta_h^l P_m)(x)\equiv 0$ при $l>m$ для любого многочлена $P_m(x)$ степени m (см. (5.75)). Следовательно, $\Delta_1^\alpha x^{\alpha-1}\equiv 0$ и тогда $\mathrm{p}_\alpha(x)\equiv 0$ при $x>\alpha$.

Перейдем к доказательству наиболее трудного первого утверждения в свойстве 1). Можно считать, согласно свойству 3), что α — нецелое. Очевидно, что функция $\mathrm{p}_\alpha(x)$ локально абсолютно интегрируема. Покажем, что $\int_n^\infty|\mathrm{p}_\alpha(t)|\,dt<\infty$ при каком-нибудь $n\geqslant[\alpha]+1$. Для этой цели докажем далее вспомогательную формулу (20.17).

Воспользуемся асимптотическим свойством (1.66) отношения гамма-функций, переписав его при $b=1$ и $a=\alpha-r$, $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, в виде $\dfrac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)}=y^{\alpha-r-1}\sum_{k=0}^{N}\dfrac{c_{k,r}}{y^k}+O(y^{\alpha-r-N-2})$, $y\to\infty$, где $c_{k,r}$ постоянные, $c_{k,r}=\dfrac{(-1)^k}{k!}(r+1-\alpha_k)\,B_k^{\alpha-r}(\alpha-r)$. Отсюда

$$\frac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)}=\sum_{j=r}^{N}c_{j-r,r}y^{\alpha-j-1}+O(y^{\alpha-N-2}),\quad y\to\infty,\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ N. \tag{20.16}$$

Рассматривая (20.16) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $y^{\alpha-1-j}$, видим, что эта система треугольна с диагональными элементами $c_{0,r}=1$. Но тогда степени $x^{\alpha-1-j}$, $j=0,\ 1,\ \ldots,\ N$, с точностью до $O(y^{\alpha-N-2})$ могут быть выражены в виде линейной комбинации функций $\dfrac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)}$, $r=0,\ 1,\ \ldots,\ N$. В частности, при $j=0$

$$y^{\alpha-1}=\sum_{r=0}^{N}b_r\frac{\Gamma(y+\alpha-r)}{\Gamma(y+1)}+O(y^{\alpha-N-r}). \tag{20.17}$$

Отсюда, в частности, для $m=1,\ 2,\ \ldots$

$$m^{\alpha-1}=\sum_{r=0}^{N}c_r\binom{m+\alpha-r-1}{m}+O(m^{\alpha-N-r}), \tag{20.18}$$

где $c_r=b_r\Gamma(2-r)$ постоянные, зависящие от r и N, но не зависящие от m. Из (20.18) заключаем, что

$$(m+\xi)^{\alpha-1}=\sum_{r=0}^{N}P_r(\xi)\binom{m+\alpha-r-1}{m}+O(m^{\alpha-N-2}), \tag{20.19}$$

где $P_r(\xi)$ — многочлены от переменной ξ, а O в (20.19) равномерно по $\xi\in[0,\ 1]$. (Для получения (20.19) из (20.18) достаточно в произведении $(m+\xi)^{\alpha-1}=m^{\alpha-1}\left(1+\dfrac{\xi}{m}\right)^{\alpha-1}$ воспользоваться представлением (20.18) для первого множителя и формулой Тейлора вместе с формулой (20.18) для второго.)

Для оценки интеграла $\int\limits_n^\infty |\mathrm{p}_\alpha(x)|\,dx$ воспользуемся асимптотическим представлением (20.19). Пусть $n \leqslant k \leqslant x < k+1$, так что $x = k+\xi$, $0 \leqslant \xi < 1$. Применяя (20.16) при $m = k-j$ и $N = n-1$, имеем

$$\mathrm{p}_\alpha(x) = \mathrm{p}_\alpha(k+\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{\alpha}{j} (k-j+\xi)^{\alpha-1} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \binom{\alpha}{k} \xi^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \sum_{r=0}^{n-1} P_r(\xi) \binom{k-j+\alpha-r-1}{k-j} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} O((k-j)^{\alpha-n-1}) = A_k + B_k + C_k.$$

Учитывая (1.51), получаем $|A_k| \leqslant ck^{-1-\alpha}\xi^{\alpha-1}$, где c не зависит от k. Далее, с учетом формул (1.52), (1.53) имеем $B_k = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \sum\limits_{r=0}^{n-1} P_r(\xi) \times$
$\times \sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{\alpha}{j} \binom{r-\alpha}{k-j} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \sum\limits_{r=0}^{n-1} P_r(\xi) \left[\binom{r}{k} - \binom{\alpha}{k} \right] = \frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)} \binom{\alpha}{k} \times$
$\times \sum\limits_{r=0}^{n-1} P_r(\xi)$, так как $r \leqslant n-1 < k$. Отсюда $|B_k| \leqslant ck^{-1-\alpha}$ согласно (1.51).

И наконец, $|C_k| \leqslant ck^{\alpha-n-1} + c\sum\limits_{j=1}^{k-1} j^{-1-\alpha}(k-j)^{\alpha-n-1} \leqslant c\left\{k^{\alpha-n-1} + \right.$
$+ k^{\alpha-n-1} \sum\limits_{j=1}^{[(k-1)/2]} j^{-\alpha-1} + k^{-\alpha-1} \left. \sum\limits_{j=\left[\frac{k-1}{2}\right]}^{k-1} (k-j)^{\alpha-n-1} \right\} \leqslant c\,\{k^{\alpha-n-1} +$
$+ k^{-\alpha-1}\}$. В таком случае $\int\limits_n^\infty |\mathrm{p}_\alpha(x)|\,dx \leqslant c\sum\limits_{k=n}^{\infty} (k^{\alpha-n-1} + k^{-\alpha-1}) < \infty$ и первое утверждение свойства 1) доказано.

Свойство 2) получается непосредственным применением к $\mathrm{p}_\alpha(x)$ преобразования Фурье с учетом формулы (7.6). Из него получается при $x=0$ второе утверждение свойства 1). Лемма доказана.

Лемма 20.2. *При всех* $\alpha > 0$ *и* $h > 0$

1) $\int\limits_0^{2\pi} \chi_\alpha(x;\ h)\,dx = 2\pi$;

2) $\|\chi_\alpha(\cdot;\ h)\|_{L_1(0,2\pi)} \leqslant M < \infty$, *$M$ не зависит от* h;

3) $\lim\limits_{h\to 0+} \int\limits_\delta^{2\pi} \chi_\alpha(x;\ h)\,dx = 0$ *при* $\delta > 0$;

4) *коэффициенты Фурье функции* $\chi_\alpha(x;\ h)$ *вычисляются по формуле*

$$(\chi_\alpha(\cdot;\ h))_k = \left(\frac{1-e^{-ikh}}{ikh} \right)^\alpha \tag{20.20}$$

(с естественным доопределением $(\chi_\alpha(\cdot;\ h))_0 = 1$).

Доказательство. Свойства 1) — 4) являются следствием стандартных рассуждений из теории рядов Фурье, основанных на формуле суммирования Пуассона. Именно, хорошо известно и легко проверяется, что если $G(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(x + 2\pi j)$, то

$$g(x) \in L_1(R^1) \Rightarrow \|G\|_{L_1(0,2\pi)} \leqslant \|g\|_{L_1(R^1)}, \quad G_k = \tilde{g}(k) \tag{20.21}$$

(мы уже пользовались этим приемом при доказательстве леммы 19.1). Пользуясь переходом (20.21), мы получаем, что

$$\int_0^{2\pi} \chi_\alpha(x;\ h)\,dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(x)\,dx, \quad \int_\delta^{2\pi} |\chi_\alpha(x;\ h)|\,dx \leqslant 2\pi \int_{\delta/h}^{\infty} |p_\alpha(x)|\,dx,$$
$$[\chi_\alpha(\cdot;\ h)]_k = \tilde{p}_\alpha(k), \tag{20.22}$$

где $\tilde{p}_\alpha(k)$ — обратное преобразование Фурье функции $p_\alpha(x)$. Из (20.22) в силу леммы 20.1 и следуют свойства 1) — 4) леммы 20.2.

Наконец, потребность в функции $\chi_\alpha(x;\ h)$ проясняется равенством

$$\chi_\alpha(x,\ h) = \frac{(\Delta_h^\alpha \Psi_+^\alpha)(x)}{h^\alpha} + 1, \tag{20.23}$$

где $\Psi_+^\alpha(x)$ — знакомое нам ядро (19.8) дробного интеграла Вейля (19.7). Для доказательства этого равенства достаточно показать, что совпадают коэффициенты Фурье: $(\chi_\alpha(\cdot;\ h))_k = h^{-\alpha}(\Delta_h^\alpha \Psi_+^\alpha)_k$, $k \neq 0$. Последнее вытекает из (20.20), (20.6) и (19.8).

Теперь мы подготовлены к доказательству основных утверждений. В теоремах 20.1 и 20.2 пространство $X_{2\pi}$ — любое из пространств $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$, $C(0, 2\pi)$.

Теорема 20.1. *Пусть $f(x) \in X_{2\pi}$. Для того чтобы в $X_{2\pi}$ существовала (сильная) производная Грюнвальда—Летникова (20.7), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\varphi_\pm(x) \in X_{2\pi}$ такая, что*

$$f(x) = I_\pm^{(\alpha)} \varphi_\pm + f_0, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \tag{20.24}$$

при этом $\varphi_\pm(x) = f_\pm^{(\alpha)}(x)$.

Доказательство. Для определенности выберем левостороннее дробное дифференцирование (знак $+$). Пусть существует производная (20.7) в смысле сходимости в $X_{2\pi}$. Тогда

$$(f_+^{(\alpha)})_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} \lim_{\substack{h\to+0\\(X_{2\pi})}} h^{-\alpha}(\Delta_h^\alpha f)(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{h\to+0} h^{-\alpha} \int_0^{2\pi} (\Delta_h^\alpha f)(x) e^{-ikx}\,dx.$$

В силу (20.6) отсюда $(f_+^{(\alpha)})_k = (ik)^\alpha f_k$. Так как $f_+^{(\alpha)}(x) \in X_{2\pi}$, то тогда (20.24) выполнено в силу теоремы 19.3.

Обратно, пусть выполнено (20.24). Тогда

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_+(t)(\Delta_h^\alpha \Psi_+^\alpha)(x - t)\,dt.$$

Применяя формулу (20.23), имеем

$$\frac{(\Delta_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_+(t)\chi_\alpha(x - t,\ h)\,dt. \tag{20.24'}$$

Отсюда требуемый предельный переход $\left\| \frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - \varphi_+ \right\|_{X_{2\pi}} \to 0$ обосновывается теоремой 1.3. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 20.1 и теоремы 19.2 вытекает

Теорема 20.2. *Пусть $f \in X_{2\pi}$. Тогда дробная производная (20.7) Грюнвальда—Летникова существует одновременно с производной Маршо (19.34) и они совпадают:*

$$\lim_{\substack{h\to+0\\(X_{2\pi})}} \frac{(\Delta_{\pm h}^\alpha f)(x)}{h^\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(X_{2\pi})}} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}\, dt. \qquad (20.25)$$

При $X_{2\pi}=L_p(0, 2\pi)$, $1<p<\infty$, производная Грюнвальда—Летникова и производная Маршо существуют одновременно и при разном выборе знаков $\pm$.

Отметим, что утверждение теоремы 20.2 об одновременном существовании дробных производных при разном выборе знаков вытекает из соотношений (19.24), (19.25).

Теорема 20.2 распространяется на значения $\alpha \geqslant 1$ при соответствующем толковании дробной производной Маршо, см. замечание 19.2.

В теореме 19.2 было установлено, что условие $\|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f\|_{L(p^0, 2\pi)} \leqslant c$ равномерной ограниченности усеченных производных Маршо необходимо и достаточно для существования в L_p дробной производной Маршо (или, что то же самое, для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом порядка α от функции из L_p). Следующая теорема дает аналогичное утверждение для производной Грюнвальда—Летникова.

Теорема 20.3. *Пусть $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $1<p<\infty$. Для существования производной Грюнвальда—Летникова $f_+^{(\alpha)}(x)$ или $f_-^{(\alpha)}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_{L_p(0,2\pi)} \leqslant ch^\alpha, \quad h>0, \qquad (20.26)$$

где c не зависит от h.

Доказательство. В доказательстве нуждается переход от (20.26) к существованию предела $\lim\limits_{h\to+0} h^{-\alpha}\Delta_h^\alpha f$ по норме L_p. Известно, что в пространстве L_p ограниченные множества слабо компактны, т. е. из всякого ограниченного множества в нем можно выделить слабосходящуюся последовательность (Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1, с. 314]). Поэтому существует последовательность $h_m \to 0$ и функция $g(x) \in L_p$ такие, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} h_m^{-\alpha} (\Delta_{h_m}^\alpha f)(x)\, \psi(x)\, dx = \int_0^{2\pi} g(x)\, \psi(x)\, dx \qquad (20.27)$$

для всех функций $\psi(x) \in L_{p'}(0, 2\pi)$. Выберем здесь $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-ikx}$. Тогда (20.27) превращается в равенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{h_m^\alpha} (\Delta_{h_m}^\alpha f)_k = g_k.$$

Отсюда в силу (20.6) получаем, что $(ik)^\alpha f_k = g_k$, $g(x) \in L_p$. Тогда, согласно теореме 19.3, функция $f(x)$ представима в виде (20.24), что на основании теоремы 20.1 равносильно существованию в L_p производной Грюнвальда — Летникова.

Замечание 20.3. Неравенство (20.26) можно уточнить:

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_{X_{2\pi}} \leqslant ch^\alpha \|\mathbf{D}_+^{(\alpha)} f\|_{X_{2\pi}}, \quad c = \sup_{h>0} \int_0^{2\pi} |\chi_\alpha(x;\ h)|\, dx \qquad (20.26')$$

для функций $f(x)$, представимых в виде (20.24). Это вытекает из (20 24').

3°. **Совпадение дробной производной Грюнвальда—Летникова с производной Маршо. Непериодический случай.** На всей прямой R^1 дробное интегрирование не сохраняет пространства L_p. Поэтому, когда дробная производная Грюнвальда — Летникова $f^{(\alpha)}_{\pm}$ или производная Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f$ будут пониматься в смысле сходимости в $L_p(R^1)$, мы не будем требовать, чтобы сами функции были из $L_p(R^1)$ — это было бы заведомым сужением постановки задачи, ср. теорему 20.4 с аналогичной теоремой 20.2.

Теорема 20.4. *Пусть $f(x)\in L_r(R^1)$ при каком-нибудь $1\leqslant r<\infty$. Тогда пределы*

$$f^{(\alpha)}_{\pm}(x)=\lim_{\substack{h\to+0\\(L_p(R^1))}}\frac{(\Delta^{\alpha}_{\pm h}f)(x)}{h^{\alpha}},$$
$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f)(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p(R^1))}}(\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}f)(x),\tag{20.28}$$

существуют одновременно и совпадают (при одинаковом выборе знаков), $1<p<1/\alpha$.

Доказательство. Пусть существует второй из пределов (20.28). Тогда $f(x)=I^{\alpha}_{+}\varphi$, $\varphi=\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f\in L_p$, в силу теоремы 6.2. Применяя к дробному интегралу $f=I^{\alpha}_{+}\varphi$ разность дробного порядка, имеем

$$(\Delta^{\alpha}_{h}f)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}\mathrm{k}_{\alpha}(x-t-hj)\,dt,\tag{20.29}$$

где $\mathrm{k}_{\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x_{+}^{\alpha-1}$ (почленное интегрирование ряда легко обосновывается). Из (20.29) после замены $x-t=h\tau$ получаем

$$\frac{(\Delta^{\alpha}_{h}f)(x)}{h^{\alpha}}=\frac{1}{h^{\alpha}}(\Delta^{\alpha}_{h}I^{\alpha}_{+}\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{p}_{\alpha}(\tau)\varphi(x-\tau h)\,d\tau,\tag{20.30}$$

где $\mathrm{p}_{\alpha}(\tau)$ — функция (20.14). В силу леммы 20.1 ядро $\mathrm{p}_{\alpha}(\tau)$ является усредняющим, так что, согласно теореме 1.3, правая часть в (20.30) сходится в $L_p(R^1)$ к $\varphi(x)$ при $h\to+0$. Поэтому из (20.30) $\lim\limits_{\substack{h\to+0\\(L_p(R^1))}}\frac{(\Delta^{\alpha}_{h}f)(x)}{h^{\alpha}}=\varphi(x)=(\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f)(x)$.

Обратно, пусть существует производная Грюнвальда — Летникова $f^{(\alpha)}_{+}(x)$. Докажем тождество

$$I^{\alpha}_{+}\left(\frac{\Delta^{\alpha}_{h}f}{h^{\alpha}}\right)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{p}_{\alpha}(t)f(x-ht)\,dt\tag{20.31}$$

в предположениях теоремы относительно $f(x)$. На «хороших» функциях $f(x)$ тождество (20.31) немедленно сводится к (20.30), так как I^{α}_{+} и Δ^{α}_{h} коммутируют на хороших функциях. Суть дела заключается в обосновании тождества (20.31) в ситуации, когда I^{α}_{+} применимо к $\Delta^{\alpha}_{h}f$, но не применимо, вообще говоря, к каждому члену ряда $\Delta^{\alpha}_{h}f$. Для получения (20.31) воспользуемся приемом, примененным при доказательстве теоремы 6.2. Пусть A_{ξ} — оператор (6.22). Имеем (на «хороших» функциях):

$$A_\xi(\Delta_h^\alpha f/h^\alpha) = h^{-\alpha}[(I_+^\alpha \Delta_h^\alpha f)(x) - (I_+^\alpha \Delta_h^\alpha f)(x-\xi)] =$$
$$= h^{-\alpha}[(\Delta_h^\alpha I_+^\alpha f)(x) - (\Delta_h^\alpha I_+^\alpha f)(x-\xi)].$$

Применяя тождество (20.30), получаем

$$A_\xi(\Delta_h^\alpha f/h^\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(t) f(x-th)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(t) f(x-\xi-th)\,dt. \tag{20.32}$$

Ввиду ограниченности в L_r операторов в левой и правой частях равенство (20.32) справедливо не только на «хороших» функциях, но и на всем пространстве L_r. Тождество (20.32) означает, что

$$\Delta_\xi^1 I_+^\alpha\left(\frac{1}{h^\alpha}\Delta_h^\alpha f\right) = \Delta_\xi^1 \frac{1}{h} p_\alpha\left(\frac{x}{h}\right) * f, \tag{20.33}$$

где Δ_ξ^1 — разность первого порядка. Так как функции, имеющие тождественно совпадающие конечные разности, сами могут отличаться только на постоянную, а рассматриваемые функции принадлежат $L_r(R^1)$, то эта постоянная равна нулю и из (20.33) получаем (20.31).

Переходя же в (20.31) к пределу при $h\to 0$ в соответствии с теоремой 1.3 и на основании свойств ядра $p_\alpha(t)$, получаем, что $f(x) = I_+^\alpha\left(\lim\limits_{h\to+0}\frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha}\right) = I_+^\alpha\varphi$, $\varphi = f_+^{(\alpha)}$. Таким образом, существование у функции $f(x)$ производной Грюнвальда — Летникова влечет за собой представимость функции $f(x)$ дробным интегралом от этой производной, а тогда функция $f(x)$ имеет, согласно теореме 6.1, дробную производную Маршо, совпадающую с $\varphi = f_+^{(\alpha)}$. Теорема доказана.

Докажем, наконец, теорему, аналогичную теореме 20.3.

Теорема 20.5. *Пусть* $f(x)\in L_r(R^1)$, $1\leqslant r<\infty$. *Для того чтобы* $f(x)\in I^\alpha(L_p)$, $1<p<1/\alpha$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leqslant ch^\alpha, \quad h>0. \tag{20.34}$$

Доказательство. Необходимость вытекает из равенства (20.30). Для доказательства достаточности воспользуемся тождеством (20.31), справедливым при наших предположениях о $f(x)$. Из равномерной ограниченности в L_p функций $h^{-\alpha}\Delta_h^\alpha f$ вытекает в силу слабой компактности пространства $L_p(R^1)$ существование такой последовательности $h_m\to 0$ и функции $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, что $h_m^{-\alpha}\Delta_{h_m}^\alpha f$ слабо сходится к $\varphi(x)$ в $L_p(R^1)$. Так как правая часть в (20.31) сходится к $f(x)$ по норме L_r, то и тем более она слабо сходится в L_r. Тогда существует слабый предел (w-lim) в L_r и левой части:

$$\underset{\substack{m\to\infty\\(L_r)}}{\text{w-lim}}\, I_+^\alpha(\Delta_{h_m}^\alpha f/h_m^\alpha) = f(x). \tag{20.35}$$

Кроме того, так как $h_m^{-\alpha}\Delta_{h_m}^\alpha f$ слабо сходится в L_p, а оператор I_+^α ограничен из L_p в L_q, $q=p/(1-\alpha p)$, то существует и предел

$$\underset{\substack{m\to\infty\\(L_q)}}{\text{w-lim}}\, I_+^\alpha\left(\frac{\Delta_{h_m}^\alpha f}{h_m^\alpha}\right) = I_+^\alpha\left(\underset{\substack{m\to\infty\\(L_p)}}{\text{w-lim}}\frac{\Delta_{h_m}^\alpha f}{h_m^\alpha}\right) = I_+^\alpha\varphi. \tag{20.36}$$

Так как слабые пределы в L_q и в L_r одной и той же последовательности обязаны совпадать почти всюду, то из (20.35), (20.36) заключаем, что $I_+^\alpha\varphi = f(x)$ почти всюду, что и требовалось.

Замечание 20.3′. Подобно (20.26′) справедливо уточнение неравенства (20.34):

$$\|\Delta_h^\alpha f\|_p \leqslant ch^\alpha \|\mathbf{D}_+^\alpha f\|_p, \quad c = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{p}_\alpha(x)|\, dx, \quad h > 0, \tag{20.34'}$$

для $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$, что вытекает из (20.30). Для таких функций $f(x)$ справедливо также неравенство

$$|(\Delta_h^\alpha f)(x)| \leqslant ch^\alpha \sup_x |(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x)|, \quad h > 0. \tag{20.34''}$$

Замечание 20.4. В непериодическом случае мы ограничились для простоты рассмотрением функций, заданных на всей прямой. Теорема 20.4 остается, очевидно, справедливой и на полуоси R_+^1 для правостороннего дробного дифференцирования $f_-^{\alpha)}$ и $\mathbf{D}_-^\alpha f$ (достаточно продолжить $f(x)$ нулем на отрицательную полуось).

Отвечающее же случаю полуоси утверждение теоремы 20.5 (также получаемое продолжением нулем) сформулируем особо.

Теорема 20.5'. *Пусть $f(x) \in L_r(R_+^1)$, $1 \leqslant r < \infty$. Для того чтобы $f(x)$ имела в $L_p(R_+^1)$ дробную производную Маршо $\mathbf{D}_-^\alpha f = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}_{-,\varepsilon}^\alpha f$, $1 < p < 1/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы $\|\Delta_{-h}^\alpha f\|_p \leqslant ch^\alpha$, $h > 0$, где c не зависит от h.*

Замечание 20.5. Теоремы 20.4 и 20.5' даны для $p \in (1, 1/\alpha)$, но можно показать, что они справедливы для $p \in (1, \infty)$, что требует, однако, других средств доказательства.

4°. Дробное дифференцирование Грюнвальда—Летникова на конечном отрезке. Непосредственное определение разности $\Delta_h^\alpha f$ дробного порядка равенством (20.2) предполагает задание функции $f(x)$ по крайней мере на полуоси. В случае функции $f(x)$, заданной только на отрезке $[a, b]$, естественный способ определения разности $\Delta_h^\alpha f$ состоит в том, чтобы предварительно продолжить $f(x)$ нулем за пределы отрезка $[a, b]$. Обозначив поэтому

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

для функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, по определению полагаем

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta_h^\alpha f^*)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f^*(x - jh). \tag{20.37}$$

Определение (20.37) можно, очевидно, переписать в терминах самой функции $f(x)$, явно не используя ее продолжение:

$$(\Delta_h^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh), \quad x > a, \tag{20.38}$$

$$(\Delta_{-h}^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x + jh), \quad x < b, \tag{20.39}$$

где $h > 0$. После этого дробные производные $f_{a+}^{\alpha)}$, $f_{b-}^{\alpha)}$ типа Грюнвальда—Летникова вводятся тем же способом, что и на всей прямой:

$$f_{a+}^{\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh), \tag{20.40}$$

$$f_{b-}^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{\left[\frac{b-x}{h}\right]}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(x+jh). \qquad (20.41)$$

Можно выбрать в (20.38), (20.39) переменный шаг h, зависящий от x: $h=(x-a)/n$ в (20.38), $h=(b-x)/n$ в (20.39), и тогда определение (20.40) примет вид

$$f_{a+}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{(x-a)^\alpha}\lim_{n\to\infty}n^\alpha\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f\left(x-j\frac{x-a}{n}\right) \qquad (20.42)$$

и аналогично для $f_{b-}^{(\alpha)}$.

Именно таким способом определяли дробную производную А. Грюнвальд и А. В. Летников. На этом пути можно строить независимую теорию дробного дифференцирования, отправляясь непосредственно от определений (20.40), (20.41). В этом, однако, нет особой необходимости ввиду того, что и в случае отрезка дробные производные Грюнвальда — Летникова совпадают с другими более употребляемыми формами дробного дифференцирования, в частности с производной Маршо. Справедлива следующая

Теорема 20.6. *Пусть $f(x)\in L_p(a,b)$, $1\leqslant p<\infty$. Предел (20.40) по норме пространства $L_p(a,b)$ существует тогда и только тогда, когда существует в $L_p(a,b)$ дробная производная Маршо (13.9) и они совпадают:*

$$f_{a+}^{(\alpha)}(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt,\quad 0<\alpha<1. \qquad (20.43)$$

Эта теорема является непосредственным следствием из определения (20.40), равенства (20.37), теоремы 20.4 и равенств (13.2), (13.4).

На основании совпадения (20.43) двух определений дробного дифференцирования можно получать различные свойства для объектов (20.40), (20.41). Отметим, в частности, простейшие формулы, вытекающие из (20.43):

$$f(x)\equiv 1\Rightarrow f_{a+}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} \qquad (20.44)$$

(хотя (20.37) устанавливается и непосредственно с учетом (20.4));

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(x-jh-a)^\beta=\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \qquad (20.45)$$

(ср. с (2.44)) и т. п.

Остановимся особо на определении дробного интегрирования по Грюнвальду — Летникову (см. замечания 20.1, 20.2). Положим, отправляясь от (20.40):

$$J_{a+}^\alpha\varphi=\lim_{h\to+0}h^\alpha\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}(-1)^j\binom{-\alpha}{j}\varphi(x-jh)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{h\to+0}h^\alpha\sum_{j=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}\frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)}\varphi(x-jh). \qquad (20.46)$$

Аналогично определяется $J^{\alpha}_{b-}\varphi$. Покажем, что конструкция (20.46) в точности совпадает с дробным интегралом Римана—Лиувилля.

Теорема 20.7. *Пусть $\alpha>0$ и $\varphi(x)\in L_1(a,b)$. Предел (20.46) существует почти для всех x и*

$$J^{\alpha}_{a+}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{x-a}\varphi(x-t)\,t^{\alpha-1}dt. \tag{20.47}$$

Доказательство. Так как функция $t^{\alpha-1}\varphi(x-t)$ интегрируема при почти всех x, то правая часть в (20.47) при почти всех x есть предел интегральной суммы $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Sigma\varphi(x-\xi_j)\xi_j^{\alpha-1}\Delta x_j$, $x_j\leqslant\xi_j\leqslant x_{j+1}$. Выбрав здесь, в частности, $x_j=jh$, $j\leqslant[(x-a)/h]$ и $\xi_j=x_j$, получаем $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{x-a}t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim\limits_{h\to+0}h^{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}j^{\alpha-1}\varphi(x-jh)$. Это совпадает с пределом (20.46), поскольку $\left|j^{\alpha-1}-\frac{\Gamma(j+\alpha)}{\Gamma(j+1)}\right|\leqslant\frac{c}{j^{2-\alpha}}$ согласно (1.66), а $\lim\limits_{h\to+0}h^{\alpha}\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]}j^{\alpha-2}|\varphi(x-jh)|=0$ почти для всех x.

Можно доказать утверждение, аналогичное теореме 20.7 и для функций, заданных на оси или полуоси, в случае достаточно быстрого их убывания на бесконечности.

§ 21. ОПЕРАТОРЫ СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

Одним из непосредственных обобщений дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $I^{\alpha}_{b-}\varphi$ на конечном отрезке $[a,b]$ вещественной оси являются интегралы вида

$$(I^{\alpha,\beta}_{a+}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt,$$

$$(I^{\alpha,\beta}_{b-}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{\ln^{\beta}\frac{\gamma}{t-x}}{(t-x)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt, \tag{21.1}$$

$$\alpha>0,\ \beta\geqslant0,\ \gamma>b-a,$$

содержащие наряду со степенной и логарифмическую особенность. Будем называть их *операторами со степенно-логарифмическими ядрами*. Такие интегралы возникают при исследовании интегральных уравнений первого рода со степенно-логарифмическими ядрами (см. § 32, 33).

Обращение операторов $I^{\alpha,\beta}_{a+}$ будет получено в § 32. В этом параграфе рассмотрим действие операторов со степенно-логарифмическими ядрами в пространствах гельдеровских и суммируемых функций. Полученные результаты, формулируемые и доказываемые для интегралов $I^{\alpha,\beta}_{a+}\varphi$, обобщают некоторые результаты § 3 для дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}\varphi=I^{\alpha,0}_{a+}\varphi$. Отметим также, что для операторов (21.1) существенную роль играет класс $H^{\lambda,k}$ (см. определение 1.7) в отличие от операторов дробного интегрирования, где он появляется только в отдельных случаях (см. теоремы 3.1 и 3.6). Излагаемые здесь результаты будут использованы ниже в § 34.

1°. **Действие в пространстве** H^λ. Следующая ниже теорема показывает, как операторы со степенно-логарифмическим ядром улучшают порядок гельдеровости функции $\varphi(t)$ вне точки $x=a$ (ср. с теоремой 3.1).

Теорема 21.1. *Пусть* $\varphi(t)\in H^\lambda([a, b])$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. *Если* $0<\alpha<1$, $\beta\geqslant 0$, *то*

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta}\varphi)(x) = \frac{\varphi(a)}{\Gamma(\alpha)}\Phi_{\beta,\alpha}(x)+\psi(x), \tag{21.2}$$

где

$$\Phi_{\beta,\alpha}(x)=\int\limits_0^{x-a} t^{\alpha-1}\ln^\beta\frac{\gamma}{t}\,dt, \tag{21.3}$$

а $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha,\beta}$ *при* $\lambda+\alpha\neq 1$ *и* $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha,\beta+1}$ *при* $\lambda+\alpha=1$, *при этом*

$$|\psi(x)|\leqslant A(x-a)^{\lambda+\alpha}\ln^\beta\frac{\gamma}{x-a},\quad A>0\ (x\to a). \tag{21.4}$$

Функция $\Phi_{\beta,\alpha}(x)$ *бесконечно дифференцируема вне точки* $x=a$, *а при* $x\to a$ *имеет степенно-логарифмическое поведение:*

$$\Phi_{m,\alpha}(x)=(x-a)^\alpha\sum_{k=0}^{m}\frac{(m)_k}{\alpha^{k+1}}\ln^{m-k}\frac{\gamma}{x-a} \tag{21.5}$$

при целом $\beta=m$. *Если* β *нецелое, то при любом* $N=1, 2, \ldots$

$$\Phi_{\beta,\alpha}(x)=(x-a)^\alpha\sum_{k=0}^{N}\frac{(\beta)_k}{\alpha^{k+1}}\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{x-a}+r_N(x), \tag{21.6}$$

где $r_N'(x)=\dfrac{(\beta)_{N+1}}{\alpha^{N+1}}\dfrac{(x-a)^\alpha}{\left(\ln\dfrac{\gamma}{x-a}\right)^{N+1-\beta}}$.

Доказательство. Согласно теореме 3.1, достаточно рассмотреть случай $\beta>0$. Равенство (21.2) получаем, если положим

$$\psi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x(x-t)^{\alpha-1}\ln^\beta\frac{\gamma}{x-t}[\varphi(t)-\varphi(a)]\,dt.$$

Равенства (21.5), (21.6) выводятся из (21.3) последовательным интегрированием по частям. Для функции $\psi(x)$ имеем

$$|\psi(x)|\leqslant\Gamma^{-1}(\alpha)\|\varphi\|_{H^\lambda}\int\limits_a^x(x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\lambda\ln^\beta\frac{\gamma}{x-t}\,dt$$

или после замены $t=a+\tau(x-a)$

$$|\psi(x)|\leqslant c(x-a)^{\lambda+\alpha}\int\limits_0^1\tau^{\alpha-1}(1-\tau)^\lambda\left(\ln\frac{1}{x-a}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^\beta d\tau.$$

Применяя известную оценку

$$(a+b)^\nu\leqslant 2^{\max(\nu,1)}(a^\nu+b^\nu),\quad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\quad \nu>0 \tag{21.7}$$

(см., например, Н. К. Бари [1, с. 31]), получаем неравенство $|\psi(x)| \leqslant \leqslant (x-a)^{\lambda+\alpha} \left[c_1 \left| \ln^\beta \frac{\gamma}{x-a} \right| + c_2 \right]$, откуда вытекает (21.4).

Рассматривая далее $\psi(x)$, считаем для простоты, что $a=0$, $b=1$, $\gamma > 1$. Обозначим

$$g(x) = \varphi(x) - \varphi(0), \quad |g(x)| \leqslant \|\varphi\|_{H^\lambda} x^\lambda. \tag{21.8}$$

Заметим, что

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \|\varphi\|_{H^\lambda} |x-y|^\lambda. \tag{21.9}$$

Пусть $0 < h < 1/2$; x, $x+h \in [0, 1]$. Исследуем вначале случай $\lambda + \alpha \leqslant 1$. Имеем $\Gamma(\alpha) [\psi(x+h) - \psi(x)] = g(x) \int\limits_x^{x+h} t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{t} dt + \int\limits_{-h}^{0} (t+h)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{t+h} [g(x-t) - g(x)] dt + \int\limits_0^x \left[\frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{1-\alpha}} - \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{t}}{t^{1-\alpha}} \right] \times \times [g(x-t) - g(x)] dt = I_1 + I_2 + I_3$.

Согласно (21.8), $|I_1| \leqslant \|\varphi\|_{H^\lambda} x^\lambda \int\limits_x^{x+h} t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{t} dt$. Если $x \leqslant h$, то, осуществляя замену $t = h\tau$ и учитывая неравенство (21.7), находим $|I_1| \leqslant \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \left| \int\limits_0^{2h} \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{t}}{t^{1-\alpha}} dt \right| = ch^{\lambda+\alpha} \int\limits_0^2 \frac{\left| \ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau} \right|^\beta}{\tau^{1-\alpha}} d\tau \leqslant h^{\lambda+\alpha} \left(c_1 \ln^\beta \frac{1}{h} + + c_2 \right) \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}$. Если же $x > h$, то, производя замену $t = x\tau$ и опять используя (21.7), имеем $|I_1| \leqslant cx^{\lambda+\alpha} \int\limits_1^{1+h/x} \frac{\left(\ln \frac{\gamma}{\tau} + \ln \frac{1}{x} \right)^\beta}{\tau^{1-\alpha}} d\tau \leqslant \leqslant cx^{\lambda+\alpha} \left(\ln^\beta \frac{1}{x} \int\limits_1^{1+h/x} \tau^{\alpha-1} d\tau + \int\limits_1^{1+h/x} \tau^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau} d\tau \right)$. Так как $\tau^{\alpha-1} \times \times \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau} \leqslant \ln^\beta \gamma$, то отсюда $|I_1| \leqslant \frac{c_1 h}{x^{1-\alpha-\lambda}} \left(\ln^\beta \frac{1}{x} + 1 \right) \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}$ и при $x > h$.

Далее, после замены $t = h(\tau - 1)$ в I_2 с учетом (21.7) и (21.8) получаем $|I_2| \leqslant c \int\limits_{-h}^{0} \frac{|t|^\lambda \ln^\beta \frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{1-\alpha}} dt \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \int\limits_0^1 \frac{\left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau} \right)^\beta (1-\tau)^\lambda}{\tau^{1-\alpha}} d\tau \leqslant \leqslant ch^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}$.

Оценим, наконец, I_3: $|I_3| \leqslant c \int\limits_0^x \left| \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{1-\alpha}} - \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{t}}{t^{1-\alpha}} \right| dt = = ch^{\lambda+\alpha} \int\limits_0^{x/h} \tau^\lambda \left| \tau^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h\tau} \right| d\tau$. Отсюда при $x \leqslant h$ в силу (21.7) находим

$$|I_3| \leqslant c_1 h^{\lambda+\alpha} \int_0^1 \tau^{\alpha+\lambda-1} \left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau}\right)^\beta d\tau \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h},$$

а если $x > h$, то $|I_3| \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \left(\int_0^1 + \int_1^{x/h}\right) \tau^\lambda \left| \tau^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h\tau} - (\tau+1)^{\alpha-1} \times \right.$ $\left. \times \ln^\beta \frac{\gamma}{h(\tau+1)} \right| d\tau = I_{31} + I_{32}$. Для I_{31} аналогично предыдущему устанавливаем, что $|I_{31}| \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta (1/h)$, а для I_{32} используем вытекающую из теоремы о среднем оценку

$$\left| \tau^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau} - (\tau+1)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau+1} \right| \leqslant c \tau^{\alpha-2} \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau}, \quad \tau \geqslant 1. \tag{21.10}$$

Тогда с учетом (21.7) имеем $|I_{32}| \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \int_1^{x/h} \frac{\left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau}\right)^\beta}{\tau^{2-\alpha-\lambda}} d\tau \leqslant$ $\leqslant c h^{\lambda+\alpha} \left(\ln^\beta \frac{1}{h} \int_1^{x/h} \frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha-\lambda}} + \int_1^{x/h} \frac{\ln^\beta \frac{\gamma}{\tau}}{\tau^{2-\alpha-\lambda}} d\tau \right)$. Отсюда при $\lambda + \alpha < 1$ в силу сходимости интегралов $\int_1^\infty \tau^{\alpha+\lambda-2} d\tau$ и $\int_1^\infty \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau} \tau^{\alpha+\lambda-2} d\tau$ получаем, что $|I_{32}| \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}$, а если $\lambda + \alpha = 1$, то $|I_{32}| \leqslant h^{\lambda+\alpha} \left(c \ln^\beta \frac{1}{h} \ln \frac{x}{h} + \right.$ $\left. + c_1 \ln^{\beta+1} \frac{x}{h} + c_2 \right) \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^{\beta+1} \frac{1}{h}$. Собирая оценки для I_1, I_2 и I_3, приходим к утверждению теоремы при $\lambda + \alpha \leqslant 1$.

Пусть теперь $\lambda + \alpha > 1$. Нужно показать, что $\psi'(x) = (d/dx) I_{0+}^{\alpha;\beta} g \in$ $\in H^{\lambda+\alpha-1,\beta}$. Преобразуем $\frac{d}{dx} I_{0+}^{\alpha;\beta} g$ к виду

$$\Gamma(\alpha) \frac{d}{dx} (I_{0+}^{\alpha;\beta} g)(x) = x^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x} g(x) +$$

$$+ \int_0^x \frac{d}{dt} \left(t^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{t} \right) [g(x-t) - g(x)]\, dt = G_1(x) + G_2(x). \tag{21.11}$$

Для непрерывно дифференцируемых функций g формула (21.11) проверяется непосредственным дифференцированием с последующим интегрированием по частям. Для гельдеровских g равенство левой и правой частей (21.11) доказывается так же, как и равенство лиувиллевской дробной производной и производной Маршо на отрезке (см. в § 13 следствие из теоремы 13.1 и следствие из леммы 13.2).

Покажем, что в (21.11) $G_1(x)$, $G_2(x) \in H^{\lambda+\alpha-1,\beta}$. Имеем $G_1(x+h) -$ $- G_1(x) = (x+h)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h} [g(x+h) - g(x)] + \left[(x+h)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h} - \right.$ $\left. - x^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x} \right] g(x) = G_{11} + G_{12}$. Для G_{11} с учетом (21.9) получаем $|G_{11}| \leqslant$ $\leqslant c h^{\lambda+\alpha-1} \ln^\beta \frac{1}{h}$. Для G_{12} в силу (21.8) находим $|G_{12}| \leqslant A x^\lambda \left| x^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x} - \right.$

$-(x+h)^{\alpha-1}\ln^\beta \dfrac{\gamma}{x+h}\Big|$. Отсюда при $x\leqslant h$ имеем $|G_{12}|\leqslant 2Ax^{\lambda+\alpha-1}\times$ $\times \ln^\beta \dfrac{\gamma}{x}\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^\beta\dfrac{1}{h}$. Если же $x>h$, то, согласно (21.10), $|G_{12}|\leqslant$ $\leqslant cx^{\lambda+\alpha-2}h\ln^\beta\dfrac{\gamma}{x}\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^\beta\dfrac{1}{h}$. Введем обозначение

$$K(t)=\frac{d}{dt}\left(t^{\alpha-1}\ln^\beta\frac{\gamma}{t}\right),\quad |K(t)|\leqslant ct^{\alpha-2}\ln^\beta\frac{\gamma}{t}. \tag{21.12}$$

Тогда $G_2(x+h)-G_2(x)=\int\limits_{-h}^{0}K(t+h)\,[g(x-t)-g(x+t)]\,dt+[g(x+h)-$ $-g(x)]\int\limits_0^x K(t+h)\,dt+\int\limits_0^x[K(t+h)-K(t)]\,[g(x-t)-g(x)]\,dt=G_{21}+$ $+G_{22}+G_{23}$. Для G_{21} в силу (21.9), (21.12) и (21.7) получаем $|G_{21}|\leqslant$ $\leqslant c\int\limits_{-h}^{0}(t+h)^{\lambda+\alpha-2}\ln^\beta\dfrac{\gamma}{t+h}\,dt\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\int\limits_0^1\tau^{\lambda+\alpha-2}\left(\ln\dfrac{1}{h}+\ln\dfrac{\gamma}{\tau}\right)^\beta d\tau\leqslant$ $\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^\beta\dfrac{1}{h}$. Далее, $|G_{22}|\leqslant ch^\lambda\int\limits_0^x(t+h)^{\alpha-2}\ln^\beta\dfrac{\gamma}{t+h}\,dt=ch^{\lambda+\alpha-1}\times$ $\times\int\limits_0^{x/h}(\tau+1)^{\alpha-2}\ln^\beta\dfrac{\gamma}{(\tau+1)h}\,d\tau\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\left(\ln^\beta\dfrac{1}{h}\int\limits_0^{x/h}(\tau+1)^{\alpha-2}\,d\tau+\right.$ $\left.+\int\limits_0^{x/h}(\tau+1)^{\alpha-2}\ln^\beta\dfrac{\gamma}{\tau+1}\,d\tau\right)\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^\beta\dfrac{1}{h}$ в силу сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty(\tau+1)^{\alpha-2}\ln^\beta\dfrac{\gamma}{\tau+1}\,d\tau$ при $\beta\geqslant 0$. Наконец, для G_{23}, согласно (21.12) и (21.9), имеем

$$|G_{23}|\leqslant\sum_{k=0}^{1}c_k\int\limits_0^x\left|\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{t+h}}{(t+h)^{2-\alpha}}-\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{t}}{t^{2-\alpha}}\right|t^\lambda dt=$$

$$=h^{\lambda+\alpha-1}\sum_{k=0}^{1}c_k\int\limits_0^{x/h}\left|\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{\tau h}}{\tau^{2-\alpha}}-\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}}{(\tau+1)^{2-\alpha}}\right|\tau^\lambda\,d\tau.$$

Отсюда при $x\leqslant h$ находим

$$|G_{23}|\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\sum_{k=0}^{1}c_k\left(\int\limits_0^1\frac{\left|\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{\tau h}\right|}{\tau^{2-\alpha-\lambda}}\,d\tau+\int\limits_0^1\frac{\left|\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}\right|}{(\tau+1)^{2-\alpha}\tau^{-\lambda}}\,d\tau\right)\leqslant$$

$$\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\left(c_1\ln^\beta\frac{1}{h}+c_2\ln^{\max(0,\beta)}\frac{1}{h}\right)\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^\beta\frac{1}{h}.$$

Если же $x>h$, то, согласно (21.10) и (21.7),

$$|G_{23}|\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\sum_{k=0}^{1}c_k\left(\int\limits_0^1+\int\limits_1^{x/h}\right)\left|\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{\tau h}}{\tau^{2-\alpha}}-\frac{\ln^{\beta-k}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}}{(\tau+1)^{2-\alpha}}\right|\tau^\lambda\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant h^{\lambda+\alpha-1}\left(c\ln^\beta\frac{1}{h}+\sum_{k=0}^{1}c_k\int_1^{x/h}\frac{\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta-k}}{\tau^{3-\alpha-\lambda}}\,d\tau\right)\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\lambda+\alpha-1}\ln^\beta\frac{1}{h},$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Оператор*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}\ln^\beta\frac{\gamma}{x-t}\,dt,\quad 0<\alpha<1,\ \beta\geqslant 0,$$

ограниченно действует из пространства H^λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, *в пространство* $H^{\lambda+\alpha,\beta}$, *если* $\lambda+\alpha\neq 1$, *и в пространство* $H^{\lambda+\alpha,\beta+1}$, *если* $\lambda+\alpha=1$.

Следствие 2. *Оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из пространства* $C=H^0$ *в* $H^{\alpha,\beta}$.

Замечание 21.1. Оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ ограничен даже из L_∞ в $H^{\alpha,\beta}$, что усматривается из анализа доказательства.

2°. Действие в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$. Так же, как в § 3, начнем исследования со случая простейших весов $\rho(x)=(x-a)^\mu$ и $\rho(x)=(b-x)^\mu$.

Теорема 21.2. *Пусть* $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$. *Тогда оператор* $I_{a+}^{\alpha,\beta}$, $\beta\geqslant 0$, *ограниченно действует из пространства* $H_0^\lambda(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$, *если* $\rho(x)=(x-a)^\mu$, $\mu<\lambda+1$, *или* $\rho(x)=(b-x)^\nu$, $\nu>\lambda+\alpha$.

Доказательство. Пусть сначала $\rho(x)=(x-a)^\mu$. В силу теоремы 3.3 достаточно рассмотреть случай $\beta>0$. Считаем, что $a=0$, $b=1$. Пусть $\varphi(t)\in H_0^\lambda(\rho)$, так что $\varphi(t)=g(t)\,t^{-\mu}$, где $g(t)\in H^\lambda$, $g(0)=0$. Нужно показать, что $G(x)=\int_0^x\left(\frac{x}{t}\right)^\mu\ln^\beta\frac{\gamma}{x-t}\,\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\in H_0^{\lambda+\alpha,\beta}$ и $\|G\|_{H^{\lambda+\alpha,\beta}}\leqslant c\,\|g\|_{H^\lambda}$.

Представим $G(x)$ в виде

$$G(x)=\int_0^x\frac{\ln^\beta\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt+\int_0^x\frac{[x^\mu-t^\mu]}{t^\mu(x-t)^{1-\alpha}}\ln^\beta\frac{\gamma}{x-t}\,g(t)\,dt=$$

$$=\Phi(x)+\Psi(x).\qquad(21.13)$$

В соответствии с теоремой 21.1 $\Phi(x)\in H_0^{\lambda+\alpha,\beta}$. Для $\Psi(x)$ имеем (см. (3.7))

$$\Psi(x+h)-\Psi(x)=\int_x^{x+h}\ln^\beta\frac{\gamma}{x+h-t}\,\frac{(x+h)^\mu-t^\mu}{t^\mu(x+h-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt+$$

$$+[(x+h)^\mu-x^\mu]\int_0^x\ln^\beta\frac{\gamma}{x+h-t}\,\frac{(x+h-t)^{\alpha-1}}{t^\mu}\,g(t)\,dt+\qquad(21.14)$$

$$+\int_0^x\frac{x^\mu-t^\mu}{t^\mu}\left[\frac{\ln^\beta\frac{\gamma}{x+h-t}}{(x+h-t)^{1-\alpha}}-\frac{\ln^\beta\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]g(t)\,dt=J_1+J_2+J_3.$$

Оценим J_1. Пусть $\mu \leqslant 1$. Так как $|g(t)| \leqslant \|g\|_{H^\lambda}\, t^\lambda$, то в силу (3.9) и (21.7) находим, что

$$|J_1| \leqslant |\mu|\, \|g\|_{H^\lambda} \int\limits_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^\alpha}{(t-x)^{1-\lambda}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t}\, dt \leqslant |\mu|\, \|g\|_{H^\lambda}\, h^{\lambda+\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{\tau^\alpha}{(1-\tau)^{1-\lambda}} \left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau} \right)^\beta d\tau \leqslant c\, \|g\|_{H^\lambda}\, h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Если же $\mu > 1$, то, согласно (3.8),

$$|J_1| \leqslant |\mu|\, \|g\|_{H^\lambda} (x+h)^{\mu-1} \int\limits_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^\alpha}{t^{\mu-\lambda}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c\, \frac{h^\alpha \ln^\beta \dfrac{\gamma}{h}}{(x+h)^{1-\mu}} \int\limits_x^{x+h} \frac{dt}{t^{\mu-\lambda}} = c\, \frac{h^\alpha \ln^\beta \dfrac{\gamma}{h}}{(x+h)^{1-\mu}} \left[(x+h)^{\lambda-\mu+1} - x^{\lambda-\mu+1}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} (x+h)^{\lambda-1} \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Оценим J_2. Если $x \leqslant h$, то при $\mu \geqslant 0$ имеем

$$|J_2| \leqslant c h^\mu \int\limits_0^x \frac{t^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t}\, dt \leqslant c h^{\mu+\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} \int\limits_0^x t^{\lambda-\mu} dt \leqslant$$

$$\leqslant c h^{\mu+\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h}\, x^{\lambda-\mu+1} \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h},$$

а при $\mu < 0$

$$|J_2| \leqslant c x^\mu \int\limits_0^x \frac{t^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t}\, dt \leqslant c x^\mu h^{\alpha-1} \times$$

$$\times \ln^\beta \frac{\gamma}{h} \int\limits_0^x t^{\lambda-\mu}\, dt = c h^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{h}\, x^{\lambda+1} \leqslant c h^{\alpha+\lambda} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Если же $x > h$, то, применяя неравенства (3.9) и (21.7), при $\mu \leqslant 1$ получаем

$$|J_2| \leqslant |\mu|\, h x^{\mu-1} \int\limits_0^x \frac{t^{\lambda-\mu}}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant ch \int\limits_0^x \frac{\ln^\beta \dfrac{\gamma}{x-t}}{t^{1-\lambda} (x-t)^{1-\alpha}}\, dt = \frac{ch}{x^{1-\lambda-\alpha}} \int\limits_0^1 \frac{\left(\ln \dfrac{\gamma}{x} + \ln \dfrac{1}{h} \right)^\beta}{(1-\tau)^\lambda\, \tau^{1-\alpha}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c\, \frac{h \ln^\beta \dfrac{1}{h}}{x^{1-\lambda-\alpha}} \leqslant c h^{\lambda+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{h},$$

а при $\mu > 1$ в силу (3.8)

$$|J_2|\leqslant \mu h(x+h)^{\mu-1}\int_x^{x+h}\frac{\ln^\beta\dfrac{\gamma}{x+h-t}}{t^{\mu-\lambda}(x+h-t)^{1-\alpha}}\,dt=\mu\frac{h}{(x+h)^{1-\lambda-\alpha}}\times$$

$$\times\int_0^1(1-\tau)^{\lambda-\mu}\tau^{\alpha-1}\left(\ln\frac{\gamma}{x+h}+\ln\frac{1}{\tau}\right)^\beta d\tau\leqslant c\,\frac{h}{(x+h)^{1-\lambda-\alpha}}\ln^\beta\frac{\gamma}{x+h}\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\lambda+\alpha}\ln^\beta\frac{1}{h}.$$

Для J_3, произведя замену $t=sx$, находим оценку

$$|J_3|\leqslant\|g\|_{H^\lambda}x^{\lambda+\alpha}\int_0^1\frac{1-s^\mu}{s^{\mu-\lambda}}\left|\frac{\ln^\beta\dfrac{\gamma}{1-s+h/x}}{(1-s+h/x)^{1-\alpha}}-\frac{\ln^\beta\dfrac{\gamma}{1-s}}{(1-s)^{1-\alpha}}\right|ds.$$

Если $x\leqslant h$, то $|J_3|\leqslant c\,\|g\|_{H^\lambda}h^{\lambda+\alpha}$, а при $x>h$, согласно (21.10), справедливо

$$|J_3|\leqslant\|g\|_{H^\lambda}x^{\lambda+\alpha-1}h\int_0^1\frac{1-s^\mu}{s^{\mu-\lambda}(1-s)^{2-\alpha}}\ln^\beta\frac{\gamma}{1-s}\,ds\leqslant c\,\|g\|_{H^\lambda}h^{\lambda+\alpha}.$$

Собирая оценки для J_1, J_2 и J_3, получаем

$$|\Psi(x+h)-\Psi(x)|\leqslant c\,\|g\|_{H^\lambda}h^{\lambda+\alpha}\ln^\beta\frac{1}{h}.$$

Отсюда, учитывая (21.13) и неравенство $|G(x)|\leqslant c\,\|g\|_{H^\lambda}x^{\lambda+\alpha}\ln^\beta\dfrac{\gamma}{x}$ заключаем, что $G(x)\in H^{\lambda+\alpha,\beta}$. Таким образом, для случая $\rho(x)=(x-a)^\mu$, $\mu<\lambda+1$, теорема доказана. Доказательство теоремы для случая $\rho(x)=(b-x)^\nu$, $\nu>\lambda+\alpha$, производится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.3, с использованием неравенств (3.8), (3.9), (21.7) и (21.10).

Из теоремы 21.2 вытекает утверждение, аналогичное теореме 3.3′.

Теорема 21.2′. *Пусть* $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$. *Тогда оператор* I^α_{a+} *ограниченно действует из* $H_0^\lambda(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$, $\rho(x)=(x-a)^\mu(b-x)^\nu$, $\mu<\lambda+1$, $\nu>\lambda+\alpha$.

Доказательство теоремы 21.2′ проводится аналогично доказательству теоремы 3.3′ с использованием следующего неравенства для функций из $H_0^{\lambda,\beta}(\rho)$: $\|g\|_{H^{\lambda,\beta}(\rho)}\leqslant\max\left(\|g\|_{H^{\lambda,\beta}(\rho_a)},\|g\|_{H^{\lambda,\beta}(\rho_b)}\right)$, где $\rho_a(x)=(x-a)^\mu$, $\rho_b(x)=(b-x)^\nu$.

Для распространения теоремы 21.2 и теоремы 21.2′ на случай общего веса (1.7) требуется утверждение типа леммы 3.1 для интегралов с ядром $(x+t)^{\alpha-1}\ln^\mu\dfrac{\gamma}{x+t}$, $x>0$, $t>0$, которое имеет следующий вид.

Лемма 21.1. *Пусть функция* $\varphi(x)$, $0<x\leqslant l$, *допускает оценку* $|\varphi(x)|\leqslant kx^{-\gamma}$, $\alpha<\gamma<1$. *Тогда*

$$f(x)=\int_0^l\frac{\ln^\mu\dfrac{\gamma}{x+t}}{(x+t)^{1-\alpha}}\varphi(t)\,dt\in H^{\alpha+\beta,\mu}([0,\,l];\;x^{\gamma+\beta})$$

для любых $\mu \geqslant 0$, $\gamma > 2l$ *и* $\beta \geqslant 0$ *таких, что* $\alpha + \beta \leqslant 1$, *при этом* $\|f\|_{H^{\alpha+\beta,\mu}(x^{\gamma+\beta})} \leqslant ck$, *где постоянная* c *не зависит от* $\varphi(x)$.

Доказательство леммы осуществляется с использованием неравенств (21.7), (21.10) по аналогии с доказательством леммы 3.1.

Теорема 21.3. *Пусть* $\rho(x)$ — *вес (3.12),* $\lambda + \alpha < 1$ *и выполняются условия:*

1) $\mu_1 < \lambda + 1$;

2) $\lambda + \alpha < \mu_k < \lambda + 1$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$;

3) $\lambda + \alpha < \mu_n < \lambda + 1$ *при* $x_n < b$ *и* $\lambda + \alpha < \mu_n$ *при* $x_n = b$.

Тогда оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ *ограниченно действует из* $H_0^{\lambda}(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.4, с использованием теорем 21.2, 21.2′ и леммы 21.2.

Замечание 21.2. Условие $\lambda + \alpha < \mu_k$, $k = 2, 3, \ldots, n$, в теореме 21.3 ослабить нельзя: при $\lambda + \alpha \geqslant \mu_k$ теорема 21.3 становится неверной. Действительно, положив $\rho(x) = (b-x)^{\mu}$, $\mu \leqslant \lambda + \alpha$ и $\varphi(x) = (x-a)^{\lambda} \times (b-x)^{\mu}$, непосредственной проверкой устанавливаем, что $(\rho I_{a+}^{\alpha,\beta} \rho^{-1}\varphi)(x) =$

$$= \frac{(b-x)^{\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda}}{(b-t)^{\mu-\lambda}} (x-t)^{\alpha-1} \ln^{\beta} \frac{\gamma}{x-t}\, dt \neq O\left((b-x)^{\lambda+\alpha} \ln^{\beta} \frac{1}{b-x}\right)$$

при $x \to b$. Следовательно, $f = I_{a+}^{\alpha,\beta} \rho^{-1} \varphi \notin H_0^{\lambda+\alpha,\beta}(\rho)$ (см. также замечание 3.2).

3°. Действие в пространстве L_p. С помощью обобщенного неравенства Минковского легко показать, что оператор $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ ограничен в пространстве $L_p = L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$: $\|I_{a+}^{\alpha;\beta} \varphi\|_{L_p} \leqslant c \|\varphi\|_{L_p} \dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \ln^{\beta} \dfrac{\gamma}{b-a}$. Более точное описание этого утверждения содержат следующие две теоремы.

Теорема 21.4. *Если* $0 < \alpha < 1$, $\beta \geqslant 0$, $1 \leqslant p < 1/\alpha$, *то оператор* $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ *ограниченно действует из пространства* L_p *в пространство* L_s, $1 \leqslant s < q = p(1-\alpha p)^{-1}$.

Эта теорема следует из теоремы 3.5, так как

$$|I_{a+}^{\alpha,\beta} \varphi| \leqslant c I_{a+}^{\alpha-\varepsilon}(|\varphi|) \tag{21.15}$$

при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и $0 < \alpha < 1$.

Теорема 21.5. *Пусть* $p > 1$ *и* $1/p < \alpha \leqslant 1 + 1/p$. *Тогда оператор* $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ *ограниченно действует из* L_p *в* $H^{\alpha-1/p,\beta}$, *если* $\alpha < 1 + 1/p$, *и в* $H^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}$, *если* $\alpha = \dfrac{1}{p} + 1$, *причем*

$$(I_{a+}^{\alpha;\beta} \varphi)(x) = o\left((x-a)^{\alpha-1/p} \ln^{\beta} \frac{1}{x-a}\right) \quad \text{при } x \to a. \tag{21.16}$$

Доказательство. Для простоты будем считать, что $a = 0$, $b = 1$. Оценка (21.16) следует из неравенства Гельдера с учетом (21.7):

$$|I_{0+}^{\alpha;\beta} \varphi| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^x |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)p'} \ln^{\beta p'} \frac{\gamma}{x-t}\, dt\right)^{1/p'} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1/p} \left(\int_0^1 \tau^{(\alpha-1)p'} \left(\ln \frac{1}{x} + \ln \frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta} d\tau\right)^{1/p'} \left(\int_0^x |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c x^{\alpha-1/p} \ln^{\beta} \frac{1}{x} \left(\int_0^x |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p}. \tag{21.17}$$

Пусть $x,\ x+h\in[0,\ 1]$ и $0<h\leqslant 1/2$. Имеем

$$\Gamma(\alpha)\ [(I_{0+}^{\alpha;\beta}\varphi)(x+h)-(I_{0+}^{\alpha;\beta}\varphi)(x)]=\int\limits_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}\times$$

$$\times\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}\ \varphi(t)\,dt+\int\limits_0^x[(x+h-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x+h-t}-$$

$$-(x-t)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\Big]\varphi(t)\,dt=\Phi_1+\Phi_2. \tag{21.18}$$

Применяя неравенство Гельдера и приняв во внимание (21.7), находим

$$|\Phi_1|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}\left(\int\limits_x^{x+h}(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x+h-t}\,dt\right)^{1/p}=$$

$$=\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int\limits_0^1\tau^{(\alpha-1)p'}\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{h}\right)^{\beta p'}d\tau\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\frac{1}{h},$$

$$|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int\limits_0^{x/h}\left|\tau^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau h}-(\tau+1)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}\right|^{p'}d\tau\right)^{1/p'}.$$

Отсюда при $x\leqslant h$ получаем $|\Phi_2|\leqslant 2\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int\limits_0^1\tau^{(\alpha-1)p'}\left(\ln\frac{1}{h}+\right.\right.$ $\left.\left.+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta p'}d\tau\right)^{1/p'}\leqslant C\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$. Если же $x>h$, то, применяя неравенства (21.7) и (21.10), имеем $|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left\{\left(\int\limits_0^1+\int\limits_1^{x/h}\right)|\tau^{\alpha-1}\times\right.$ $\left.\times\ln^{\beta}\frac{\gamma}{\tau h}-(\tau+1)^{\alpha-1}\ln^{\beta}\frac{\gamma}{(\tau+1)h}\right|^{p'}d\tau\Big\}^{1/p'}\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\Big[c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h}+$ $+c_2\left(\int\limits_1^{x/h}\tau^{(\alpha-2)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau h}\,d\tau\right)^{1/p'}\Big]$. Тогда при $\alpha-1<1/p$: $|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}\times$ $\times h^{\alpha-1/p}\left(c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h}+c_2\right)\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta}\frac{1}{h}$ в силу сходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty}\tau^{(\alpha-2)p'}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau}\,d\tau$. Если же $\alpha-1=1/p$, то

$$|\Phi_2|\leqslant\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left[c_1\ln^{\beta}\frac{1}{h}+c_2\left(\ln^{\beta p'}\frac{1}{h}\int\limits_1^{x/h}\frac{d\tau}{\tau}\right)^{1/p'}+\right.$$

$$\left.+c_3\left(\int\limits_1^{(x-a)/h}\frac{\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{\tau}}{\tau}\,d\tau\right)^{1/p'}\right]\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^{\beta+1/p'}\frac{1}{h}.$$

Собирая оценки для Φ_1 и Φ_2, завершаем доказательство теоремы.

Отметим, что случаю $p=\infty$ в теореме 21.5 отвечает отраженное в замечании 21.1 утверждение об ограниченности $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ из L_∞ в $H^{\alpha,\beta}$.

З а м е ч а н и е 21.3. В случае чисто логарифмического ядра ($\alpha=1$) и $0<\beta<1/p'$ утверждение теоремы 21.5 можно улучшить: при $0<\beta<1/p'$ оператор $I_{a+}^{1;\beta}$ ограниченно действует из L_p в H^β.

Действительно, оценим Φ_2 в (21.18). Используя неравенство $|a^\beta - b^\beta| \leqslant |a-b|^\beta$, $0<\beta<1$, и неравенство Гельдера, имеем

$$|\Phi_2| \leqslant \|\varphi\|_{L_p} h^{1/p'} \left(\int_0^{\frac{x-a}{h}} \ln^{\beta p'} \frac{t+1}{t}\, dt\right)^{1/p'} \leqslant \|\varphi\|_{L_p} h^{1/p'} \Bigg[c +$$

$$+ c_1 \left(\int_{\frac{h}{x-a}}^{1} \frac{dt}{t^{2-\beta p'}}\right)^{1/p'}\Bigg] \leqslant \|\varphi\|_{L_p} h^{1/p'} \left[c + c_1 \left(\frac{h}{x-a}\right)^{\beta - 1/p'}\right] \leqslant$$

$$\leqslant c\, \|\varphi\|_{L_p} h^\beta .$$

4°. Действие в пространстве $L_p(\rho)$. Как и в п. 2°, рассмотрим вначале вес $\rho(x)=(x-a)^\mu$. Будем различать случаи $1<p<1/\alpha$ и $p>1/\alpha$.

Т е о р е м а 21.6. *Если $p>1$, $\mu<p-1$, $0<\alpha<1/p$, то оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x)=(x-a)^\mu$, в $L_s(r)$, где $1\leqslant s< <q=p(1-\alpha p)^{-1}$, $r(x)=(x-a)^{\mu q/p}$.*

Эта теорема следует из теоремы 3.7 в силу (21.15).

Т е о р е м а 21.7. *Если $1<p<\infty$, $1/p<\alpha\leqslant 1/p+1$, то оператор $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x)=(x-a)^\mu$, $\mu<p-1$, в $H^{\alpha-1/p,\beta}(\rho^{1/p})$, если $\alpha<1/p+1$, и в $H^{1,\beta+1/p'}(\rho^{1/p})$, если $\alpha=1/p+1$, при этом*

$$(I_{a+}^{\alpha;\beta}\varphi)(x) = o\left((x-a)^{\alpha-(1+\mu)/p} \ln^\beta \frac{1}{x-a}\right), \quad x\to a. \tag{21.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $a=0$ и $b=1$. Пусть $\varphi(x)=x^{-\nu}g(x)$, $\nu=\mu/p$, $g\in L_p$. Оценка (21.19) получается такими же действиями, как в (21.17).

Покажем, что

$$G(x) = \int_0^x \left(\frac{x}{t}\right)^\nu (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}\, g(t)\, dt \in H^{\alpha-1/p,\beta}. \tag{21.20}$$
$$\|G\|_{H^{\alpha-1/p,\beta}} \leqslant c\, \|g\|_{L_p},$$

если $\alpha-1/p<1$, и

$$G(x)\in H^{1,\beta+1/p'}, \quad \|G\|_{H^{1,\beta+1/p'}} \leqslant c\, \|g\|_{L_p}, \tag{21.21}$$

если $\alpha-1/p=1$.

Представим $G(x)$ в виде

$$G(x) = \Phi(x) + \Psi(x), \tag{21.22}$$

где $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ — такие же функции, что и в (21.13), но с заменой μ на $\nu=\mu/p$, причем $\nu<1$ в силу условия теоремы. Пусть $h>0$. Согласно теореме 21.5,

$$|\Phi(x+h)-\Phi(x)| \leqslant \begin{cases} ch^{\alpha-1/p} \ln^\beta \dfrac{1}{h}\, \|g\|_{L_p} & \text{при } \alpha-1/p<1, \\ ch \ln^{\beta+1/p'} \dfrac{1}{h}\, \|g\|_{L_p} & \text{при } \alpha-1/p=1. \end{cases} \tag{21.23}$$

Составим для функции $\Psi(x)$ представление вида (21.14): $\Psi(x+h)-\Psi(x)=$ $=J_1+J_2+J_3$, где J_1, J_2, J_3 — те же слагаемые, что и в (21.14), но с заменой μ на $\nu=\mu/p$.

Пусть $\mu>0$ и, следовательно, $\nu>0$. Используя неравенства Гельдера и (21.7), а также гельдеровость функции x^ν, получаем

$$|J_1|\leqslant\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{(\nu+\alpha-1)p'}}{(t-x)^{\nu p'}}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x+h-t}\,dt\right)^{1/p'}=$$

$$=\|g\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\left(\int\limits_0^1\frac{\tau^{(\nu+\alpha-1)p'}}{(1-\tau)^{\nu p'}}\left(\ln\frac{1}{h}+\ln\frac{\gamma}{\tau}\right)^{\beta p'}d\tau\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|g\|_{L_p}h^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}.$$

Для J_2 также с помощью неравенства Гельдера имеем

$$|J_2|\leqslant[(x+h)^\nu-x^\nu]\,\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_0^x\frac{(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}}{t^{\nu p'}}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x+h-t}\,dt\right)^{1/p'}.$$

Отсюда при $x\leqslant h$

$$|J_2|\leqslant ch^{\nu+\alpha-1}\ln^\beta\frac{\gamma}{h}\,\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_0^x t^{-\nu p'}\,dt\right)^{1/p'}\leqslant ch^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Если же $x>h$, то, используя (3.9) и (21.7), находим

$$|J_2|\leqslant\nu h\,x^{\nu-1}\,\|g\|_{L_p}\left(\int\limits_0^x\frac{(x-t)^{(\alpha-1)p'}}{t^{\nu p'}}\ln^{\beta p'}\frac{\gamma}{x-t}\,dt\right)^{1/p'}\leqslant$$

$$\leqslant ch^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Для J_3, применяя неравенство Гельдера и производя замену $t=sx$, получаем $|J_3|\leqslant\|g\|_{H^\lambda}x^{\alpha-1/p}\left(\int\limits_0^1\left(\frac{1-s^\nu}{s^\nu}\right)^{p'}\left|\frac{\ln^\beta\frac{\gamma}{1-s+h(x-a)^{-1}}}{[1-s+h(x-a)^{-1}]^{1-\alpha}}-\right.\right.$
$\left.\left.-\frac{\ln^\beta\frac{\gamma}{1-s}}{(1-s)^{1-\alpha}}\right|^{p'}ds\right)^{1/p'}$. Если $x\leqslant h$, то $|J_3|\leqslant ch^{\alpha-1/p}\|g\|_{H^\lambda}$, а при $x>h$ в силу (21.10) $|J_3|\leqslant\frac{ch}{x^{1+1/p-\alpha}}\|g\|_{L_p}\leqslant ch^{\alpha-1/p}\|g\|_{L_p}$. Собирая оценки для J_1, J_2 и J_3, имеем

$$|\Psi(x+h)-\Psi(x)|\leqslant ch^{\alpha-1/p}\ln^\beta\frac{1}{h}\,\|g\|_{L_p}.$$

Отсюда согласно (21.22), (21.23) получаем (21.20) и (21.21), что и доказывает теорему при $\mu>0$. При $\mu=0$ утверждение теоремы совпадает с утверждением теоремы 21.5.

Пусть теперь $\mu<0$ ($\nu<0$). Тогда $|J_1|\leqslant 2\int\limits_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}\times$

$$\times \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} |g(t)|\, dt \leqslant ch^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h} \|g\|_{L_p}.$$ Для J_2 при $x \leqslant h$ имеем оценку $|J_2| \leqslant 2\, |I_{0+}^{\alpha;\beta} g| \leqslant cx^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{x} \|g\|_{L_p} \leqslant ch^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h} \|g\|_{L_p}$, при $x > h$ такую же оценку получаем рассуждениями, аналогичными проведенным в случае $\nu > 0$.

Для J_3, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|J_3| \leqslant 2\, \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \left(\int_0^{x/h} \left| \tau^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau h} - (\tau+1)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{(\tau+1)h} \right|^{p'} d\tau \right)^{1/p'}.$$

Отсюда при $x \leqslant h$ находим

$$|J_3| \leqslant 4\, \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \left(\int_0^1 \tau^{(\alpha-1)p'} \left(\ln \frac{1}{h} + \ln \frac{\gamma}{\tau} \right)^{\beta p'} d\tau \right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant c\, \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h}.$$

Если же $x > h$, то с учетом (21.10) имеем

$$|J_3| \leqslant \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \left[c_1 \ln^\beta \frac{1}{h} + c_2 \left(\int_1^{x/h} \tau^{(\alpha-2)p'} \ln^{\beta p'} \frac{\gamma}{\tau h}\, d\tau \right)^{1/p'} \right] \leqslant$$
$$\leqslant \begin{cases} c\, \|g\|_{L_p} h^{\alpha-1/p} \ln^\beta \dfrac{1}{h}, & \text{если } \alpha - \dfrac{1}{p} < 1, \\ c\, \|g\|_{L_p} h \ln^{\beta+1/p'} \dfrac{1}{h}, & \text{если } \alpha - \dfrac{1}{p} = 1. \end{cases}$$

Отсюда вытекают (21.20), (21.21) для случая $\mu < 0$. Теорема доказана.

Следствие. *При выполнении условий теоремы 21.7 оператор $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x) = (x-a)^\mu$, в $h_0^{\alpha-1/p,\beta}(\rho^{1/p})$, если $\alpha < 1/p + 1$, и в $h_0^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}(\rho^{1/p})$, если $\alpha = 1/p + 1$.*

Это следствие доказывается аналогично следствию теоремы 3.8.

Рассмотрим теперь вес $\rho(x) = |x-d|^\mu$, $a < d \leqslant b$.

Теорема 21.8. *Если $1 < p < 1/\alpha$, $\mu < p-1$ и $a < d \leqslant b$, то оператор $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^\mu$, $a < d \leqslant b$, в $L_s(r)$, где $1 \leqslant s < q = p(1-\alpha p)^{-1}$, $r(x) = |x-d|^\nu$, а ν выражается формулами (3.21).*

Утверждение теоремы вытекает из теоремы 3.9 в силу (21.15).

Теорема 21.9. *Пусть $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha \leqslant 1/p + 1$, $0 < \mu < p-1$ при $a < d < b$ или $\mu > 0$ при $d = b$. Тогда:*

1) *при $\alpha - 1/p < 1$ оператор $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^\mu$, $a < d \leqslant b$, в $H_0^{\min(\alpha-1/p,\mu/p),\beta}(\rho^{1/p})$, если $\mu \neq \alpha p - 1$, и в $H_0^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}(\rho^{1/p})$, если $\mu = \alpha p - 1$;*

2) *при $\alpha - 1/p = 1$ оператор $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ ограниченно действует из $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^\mu$, $a < d < b$, в $H_0^{\mu/p,\beta}(\rho^{1/p})$ и из $L_p(\rho)$, $\rho(x) = (b-x)^\mu$, в $H_0^{\mu/p,\beta}(\rho^{1/p})$, если $\mu < p$, или в $H_0^{1,\beta+1/p'}(\rho^{1/p})$, если $\mu \geqslant p$.*

Доказательство проведем по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.11. Пусть $\nu = \mu/p$, $g(t) = |t-d|^\nu \varphi(t) \in L_p(a, b)$,

$$f(x) = \int_a^x \left| \frac{x-d}{t-d} \right|^\nu (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t}\, g(t)\, dt.$$

Нужно доказать, что при $\alpha - 1/p < 1$

$$\|f\|_{H^{\lambda,\beta}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \quad \lambda = \min(\alpha - 1/p,\ \mu/p), \quad \text{если } \mu \neq \alpha p - 1,$$
$$\|f\|_{H^{\alpha-1/p,\beta+1/p'}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \qquad \text{если } \mu = \alpha p - 1, \tag{21.24}$$

а при $\alpha - 1/p = 1$

$$\|f\|_{H^{\mu/p,\beta}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \qquad \text{если } d < b \ \text{ или } d = b,\ \mu < p,$$
$$\|f\|_{H^{1,\beta+1/p'}} \leqslant c\,\|g\|_{L_p}, \qquad \text{если } d = b,\ \mu \geqslant p. \tag{21.25}$$

Зафиксировав точку $a_1 \in (a, d)$, согласно теореме 21.7, имеем, что $f \in H^{\alpha-1/p,\beta}(a, a_1)$, если $\alpha - 1/p < 1$, и $f \in H^{1,\beta+1/p'}(a, a_1)$, если $\alpha - 1/p = 1$. Покажем, что f удовлетворяет оценкам (21.24) или (21.25) на $[a_1, d]$. Представим f в виде $f = \Phi + \Psi$, где Φ и Ψ — те же функции, что и в (21.13), но с заменой x^μ на $|d - x|^\nu$. Тогда в силу теоремы 21.7 $\Phi \in H^{\alpha-1/p,\beta}$, если $\alpha - 1/p < 1$, и $\Phi \in H^{1,\beta+1/p'}$, если $\alpha - 1/p = 1$. Функцию Ψ представим в виде $\Psi = J_1 + J_2 + J_3$, где J_1, J_2, J_3 — те же, что и в (21.14), но с заменой x^μ на $|d - x|^\nu$. Пусть $0 < h \leqslant 1/2$, $a_1 < x < x + h < d$. Тогда для J_1 имеем

$$|J_1| \leqslant \|g\|_{L_p} \left(\int_x^{x+h} \left| \frac{|(d-x-h)^\nu - (d-t)^\nu|}{(d-t)^\nu (x+h-t)^{1-\alpha}} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant c\,\|g\|_{L_p} \ln^\beta \frac{\gamma}{h} \left(\int_x^{x+h} \frac{(d-t)^{-\nu p'}\,dt}{(x+h-t)^{(1-\alpha-\nu)p'}} \right)^{1/p'} \leqslant c h^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h} \|g\|_{L_p}.$$

Для J_2 находим $|J_2| \leqslant c h^\nu \ln^\beta \dfrac{\gamma}{h} \|g\|_{L_p} \left[c + c_1 \left(\displaystyle\int_{a_1}^{x} \frac{(d-t)^{-\nu p'}\,dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{1/p'} \right]$.

Отсюда на основании оценки для (3.27) с учетом обозначения $\nu = \mu/p$ получаем

$$|J_2| \leqslant \begin{cases} c h^\lambda \ln^\beta \dfrac{1}{h} \|g\|_{L_p}, \quad \lambda = \min\left(\alpha - \dfrac{1}{p},\ \dfrac{\mu}{p}\right), & \text{при } \mu \neq \alpha p - 1, \\ c h \ln^{\beta+1/p'} \dfrac{1}{h} \|g\|_{L_p} & \text{при } \mu = \alpha p - 1. \end{cases}$$

Заметим, что если $\alpha - 1/p = 1$, то при $a < d < b$ имеем $\mu/p < 1 = \alpha - 1/p$ (согласно условию теоремы $\mu < p - 1$) и поэтому здесь реализуется только один случай $\mu < \alpha p - 1 = p$. Зафиксировав произвольно точку $\delta \in (a, a_1)$, перепишем J_3 в виде

$$J_3 = \left(\int_a^\delta + \int_\delta^{a_1} + \int_{a_1}^x \right) \frac{[(d-x)^\nu - (d-t)^\nu]}{(d-t)^\nu} \left[(x+h-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} - \right.$$
$$\left. - (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} \right] g(t)\,dt = J_{31} + J_{32} + J_{33}.$$

Очевидно, что $|J_{31}| \leqslant ch\,\|g\|_{L_p}$. Для J_{32} имеем

$$|J_{32}| \leqslant c\,\|g\|_{L_p} \left(\int_\delta^{a_1} \left| (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} - (x+h-t)^{\alpha-1} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leqslant c h^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h} \|g\|_{L_p}.$$

Наконец, $|J_{33}| \leqslant c\,\|g\|_{L_p} \left(\int\limits_{a_1}^{x} \left(\frac{x-t}{d-t} \right)^{\nu p'} \left| (x-t)^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{x-t} - (x+h-t)^{\alpha-1} \times \right.\right.$

$$\left.\left. \times \ln^\beta \frac{\gamma}{x+h-t} \right|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leqslant c h^{\alpha-1/p} \|g\|_{L_p} \left(\int\limits_0^{\frac{x-a_1}{h}} \left| \tau^{\alpha-1} \ln^\beta \frac{\gamma}{\tau h} - (\tau+1)^{\alpha-1} \times \right.\right.$$

$\left.\left. \times \ln^\beta \frac{\gamma}{h+\tau h} \right|^{p'} d\tau \right)^{1/p'}$. Отсюда при $x - a_1 \leqslant h$ получаем $|J_{33}| \leqslant$

$\leqslant 2ch^{\alpha-1/p} \|g\|_{L_p} \left(\int\limits_0^1 \tau^{(\alpha-1)p'} \ln^{\beta p'} \frac{\gamma}{\tau h}\, d\tau \right)^{1/p'} \leqslant ch^{\alpha-1/p} \ln^\beta \frac{1}{h} \|g\|_{L_p}$, а при $x - a_1 > h$ приходим к

$$|J_{33}| \leqslant h^{\alpha-1/p} \|g\|_{L_p} \left[c \ln^\beta \frac{1}{h} + c_1 \left(\int\limits_1^{\frac{x-a_1}{h}} \tau^{(\alpha-2)p'} \ln^{\beta p'} \frac{\gamma}{\tau h}\, d\tau \right)^{1/p'} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} ch^{\alpha-1/p} \ln^\beta \dfrac{1}{h} \|g\|_{L_p}, & \text{если } \alpha - 1/p < 1, \\ ch \ln^{\beta+1/p'} \dfrac{1}{h} \|g\|_{L_p}, & \text{если } \alpha - 1/p = 1. \end{cases}$$

Собирая оценки для J_1, J_2 и J_3, заключаем, что f удовлетворяет неравенствам (21.24) или (21.25) на $[a_1, d]$. Аналогично доказывается справедливость такого же результата и на $[d, b]$ при $d<b$. Поскольку нами доказаны оценки (21.24), (21.25) на отрезках $[a, a_1]$, $[a_1, d]$ и $[d, b]$ (при $d<b$), то эти оценки распространяются и на $[a, b]$. Рассуждениями, подобными приведенным выше, устанавливается, что $f(d)=0$. Это завершает доказательство теоремы 21.8.

В заключение пункта отметим, что на основании теорем 21.6—21.9 можно сформулировать соответствующие теоремы и для случая общего степенного веса (1.7) (например, подобные теоремам 3.10 и 3.12) и что в случае чисто логарифмического ядра ($\alpha=1$) при $0<\beta<1/p'$ утверждения теорем 3.7 и 3.9 можно улучшить (см. замечание 21.3).

5°. Асимптотические разложения. Асимптотические представления интегралов со степенно-логарифмическим ядром $I_{0+}^{\alpha,\beta}\varphi$ можно находить методами, изложенными в § 16 для дробных интегралов. В случае, когда φ имеет степенную асимптотику вида (16.5) или (16.6), а также аналогичную степенно-логарифмическую асимптотику, можно применить метод последовательных разложений или метод, основанный на равенстве Парсеваля (1.116) для преобразования Меллина (1.112). В случае, когда φ имеет степенно-логарифмическую асимптотику вида (16.28), можно также пользоваться двумя способами: методом, основанным на представлении $I_{0+}^{\alpha,\beta}\varphi$ в виде свертки Меллина (1.114), и методом непосредственных оценок (см. § 16 и исторические сведения к § 16 в § 17, п. 1°).

Получим, например, асимптотическое разложение интеграла

$$(J_{0+}^{\alpha;\nu}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} \ln^\nu (x-t)\, \varphi(t)\, dt, \quad 0<\alpha<1,$$
$$\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{21.26}$$

при $x \to +\infty$, когда φ имеет степенно-логарифмическую асимптотику (16.29). Так же, как и в § 16, воспользуемся методом непосредственных оценок.

Теорема 21.10. *Пусть функция φ локально интегрируема на $[0, +\infty)$ и*

$$\varphi(t) \sim t^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\ln t)^{\gamma-n} \quad \text{при } t \to \infty, \tag{21.27}$$

где $0 < \beta < 1$, $-\infty < \gamma < \infty$ — произвольные фиксированные числа. Тогда при $x \to \infty$ справедливо разложение

$$(J_{0+}^{\alpha;\nu} \varphi)(x) \sim x^{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\ln x)^{\nu+\gamma-n}, \tag{21.28}$$

где постоянные b_n выражаются формулами

$$b_n = b_n(\alpha, \beta, \nu, \gamma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{\nu}{k} \binom{\gamma-n+m}{m-k} \Omega_{k,m-k}(\alpha, \beta),$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.29}$$

причем

$$\Omega_{k,m}(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \ln^k \tau \ln^m (1-\tau)\, d\tau = (-1)^k \frac{\partial^{k+m}}{\partial\alpha^m \partial\beta^k} B(\alpha, \beta),$$

а $\binom{\nu}{k}$, $\binom{\gamma-n+m}{m-k}$ — биномиальные коэффициенты (1.48).

Доказательство. Представим (21.26) в виде

$$(J_{0+}^{\alpha;\nu} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} + \int_{x-\sqrt{x}}^{x} \right) (x-t)^{\alpha-1} \ln^\nu (x-t)\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= J_1\varphi + J_2\varphi + J_3\varphi.$$

Интегралы $J_1\varphi$ и $J_3\varphi$ асимптотически малы по сравнению с $J_2\varphi$:

$$J_1\varphi = O(x^{\alpha-\beta-\rho_1}), \quad J_3\varphi = O(x^{\alpha-\beta-\rho_2}) \quad \text{при } x \to \infty,$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ — фиксированные числа. Докажем оценку для $J_3\varphi$. Выберем ε так, чтобы $0 < \varepsilon < \alpha/3$. Поскольку $\ln^\nu t = O(t^\varepsilon)$ при $t \to \infty$, то из (21.27) имеем $\varphi(t) = O(t^{-\beta+\varepsilon})$ при $t \to \infty$. Осуществив в $J_3\varphi$ замену $x - t = x\tau$, придем для достаточно больших x к неравенствам $J_3\varphi \leqslant$ $\leqslant c \int_0^{x^{-1/2}} (x\tau)^{\alpha-1} \ln^\nu (x\tau) [x(1-\tau)]^{-\beta+\varepsilon} x d\tau \leqslant c M_{-\beta+\varepsilon} x^{-\beta+\varepsilon} \int_0^{\sqrt{x}} t^{\alpha-1} \ln^\nu t\, dt,$ где $M_\alpha = \max\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant 1/2} (1-\tau)^{\alpha-1}$. При $t \to \infty$ имеем $t^{\alpha-1} \ln^\nu t = O(t^{\alpha-1+\varepsilon})$ и, следовательно, $\int_0^{\sqrt{x}} t^{\alpha-1} \ln^\nu t\, dt = O(x^{(\alpha+\varepsilon)/2})$ при $x \to \infty$. Учитывая это, приходим к оценке для $J_3\varphi$ с $\rho_2 = (\alpha - 3\varepsilon)/2$. Оценка для $J_1\varphi$ доказывается аналогично.

Оценим $J_2\varphi$. В силу (21.27) имеем

$$\varphi(t) = t^{-\beta} \sum_{n=0}^{N} a_n (\ln t)^{\gamma-n} + R_N(t), \quad R_N(t) = O(t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma-N-1}) \quad \text{при } t \to \infty. \tag{21.30}$$

Поэтому

$$J_2\varphi = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)} L(\alpha, \beta, \nu, \gamma - n; x) + r_N(x), \tag{21.31}$$

где обозначено

$$L(\alpha, \beta, \nu, \gamma; x) = \int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} (x-t)^{\alpha-1} \ln^\nu (x-t)\, t^{-\beta} \ln^\gamma t\, dt, \tag{21.32}$$

$$r_N(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sqrt{x}}^{x-\sqrt{x}} (x-t)^{\alpha-1} \ln^\nu (x-t)\, R_N(t)\, dt.$$

Произведем в (21.32) замену $x - t = \tau x$:

$$L(\alpha, \beta, \nu, \gamma; x) =$$

$$= x^{\alpha-\beta} \ln^{\nu+\gamma} x \int_{x^{-1/2}}^{1-x^{-1/2}} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \left[1 + \frac{\ln(1-\tau)}{\ln x}\right]^\nu \left[1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right]^\gamma d\tau. \tag{21.33}$$

Так как на участке интегрирования $x^{-1/2} \leqslant \tau \leqslant 1 - x^{-1/2}$ выполняются неравенства $\left|\dfrac{\ln(1-\tau)}{\ln x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\left|\dfrac{\ln \tau}{\ln x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, то

$$\left[1 + \frac{\ln(1-\tau)}{\ln x}\right]^\nu \left[1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right]^\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{\nu}{k} \binom{\gamma}{m-k} \ln^k (1-\tau) \times \right.$$

$$\left. \times \ln^{m-k} \tau \right] \ln^{-m} x.$$

Подставив это выражение в (21.33), осуществив почленное интегрирование и приняв во внимание непосредственно проверяемые оценки при $x \to \infty$ вида

$$\int_0^{x^{-1/2}} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \ln^m \tau \ln^k (1-\tau)\, d\tau = O(x^{-\delta_1}), \quad \delta_1 > 0,$$

$$\int_{1-x^{-1/2}}^{1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \ln^m \tau \ln^k (1-\tau)\, d\tau = O(x^{-\delta_2}), \quad \delta_2 > 0,$$

придем к асимптотическому равенству при $x \to \infty$:

$$L(\alpha, \beta, \nu, \gamma; x) \sim$$

$$\sim x^{\alpha-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{\nu}{k} \binom{\gamma}{m-k} \Omega_{k,m-k}(\alpha, \beta)\right] (\ln x)^{\nu+\gamma-m}. \tag{21.34}$$

Подставив, наконец, соотношение (21.34) в (21.31), в силу вытекающей из (21.30) оценки $r_N(x) = O(x^{\alpha-\beta} \ln^{\nu+\gamma-N-1} x)$, $x \to \infty$, окончательно получим (21.28), (21.29). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 21.4. Теорема 21.10 обобщает теорему 16.4; ее результаты можно использовать для асимптотического решения уравнения (21.26) (см. § 16, п. 5° и § 34, п. 2°, 32.4).

§ 22. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Все предыдущее изложение относилось к функциям вещественного переменного. Перейдем теперь к рассмотрению идей и понятий, связанных с дробным дифференцированием и интегрированием функций комплексного переменного. Подчеркнем, что развитие теории дробного дифференцирования с самого начала велось в комплексной области (Ж. Лиувилль, А. Грюнвальд, А. В. Летников, Н. Я. Сонин и др.). Известны и широко использовались следующие подходы к определению дробного интегрирования и дифференцирования в комплексной плоскости:

I. *Дробное интегродифференцирование аналитических функций, представленных рядами из экспонент* (подход Ж. Лиувилля) *или степенными рядами* (подход Ж. Адамара). Этот подход основан на почленном интегродифференцировании ряда, при этом равенства $\mathcal{D}^{\alpha} e^{az} = a^{\alpha} e^{az}$, $\mathcal{D}^{\alpha} (z-z_0)^{\mu} = \dfrac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu-\alpha)} (z-z_0)^{\mu-\alpha}$ принимаются в качестве определения, α, a и μ — произвольные числа.

Для функций $f(z)=f(re^{i\varphi})$, аналитических в круге, подход Ж. Адамара означает интегродифференцирование Римана — Лиувилля I^{α}_{0+} по радиальной переменной r.

II. *Перенос дробного интегродифференцирования по Вейлю на функции, аналитические в круге, по правилу*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \Rightarrow I^{(\alpha)} f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{(ik)^{\alpha}} z^k \tag{22.1}$$

(Г. Харди, Д. Литтлвуд). Фактически — это дробное интегродифференцирование $I^{(\alpha)}_{+}$ Вейля функции $f(re^{i\varphi})$ по угловой переменной φ.

III. *Непосредственное распространение дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля в комплексную область:*

$$(I^{\alpha}_{z_0} f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{z_0}^{z} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{22.2}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0} f)(z) = \frac{d^m}{dz^m} (I^{m-\alpha}_{z_0} f)(z), \quad m = [\operatorname{Re}\alpha] + 1, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{22.3}$$

с интегрированием, как правило, по прямолинейному отрезку в комплексной плоскости, соединяющему точки z_0 и z. В (22.2) можно интегрировать по кривой, соединяющей точки z_0 и z и лежащей в области определения функции $f(z)$. Функция $f(z)$ может быть задана только на кривой. См. об этом ниже в § 23.

Заметим, что при рассмотрении функции $f(z)$ в некоторой области определение (22.2), (22.3) с интегрированием по отрезку $[z_0, z]$ предполагает, очевидно, звездообразность области относительно точки z_0. Последнее означает, что с каждой точкой z области принадлежит отрезок $[z_0, z]$.

IV. *Определение, основанное на обобщении формулы дифференцирования интеграла типа Коши:*

$$f^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}} \tag{22.4}$$

(Н. Я. Сонин, П. А. Некрасов и др.). Подчеркнем, что определение (22.4) применяется к аналитическим функциям и его, очевидно, не следует относить к произвольным функциям.

Подчеркнем, что определения (22.2) — (22.4) требуют аккуратной работы, связанной с выделением ветви многозначной функции. Это достигается обычно проведением разреза из точки ветвления z на бесконечность или фиксацией тем или иным способом $\arg(t-z)$. В (22.4) существен также выбор кривой $\mathscr{L}$, охватывающей точку z. Разный выбор разреза, фиксирующего ветвь функции $(t-z)^{1+\alpha}$ в (22.4), и кривой $\mathscr{L}$ приводит к разным, вообще говоря, значениям $f^{(\alpha)}(z)$.

Укажем, наконец, что существуют обобщения указанных выше подходов I—IV в различных направлениях. См. об этом далее в п. 3°.

Всюду ниже будем считать для простоты α вещественным, хотя все излагаемое ниже легко распространяется на случай комплексных α, $\operatorname{Re}\alpha\neq 0$.

1°. Определения и простейшие свойства дробного интегродифференцирования в комплексной области. Пусть функция $f(z)$ задана в некоторой области G комплексной плоскости. Примем в качестве исходного определения дробного интеграла функции $f(z)$ непосредственное распространение (22.2) интеграла Римана — Лиувилля. Чтобы интеграл (22.2) имел смысл для всех $z\in G$, считаем, что область G звездообразна относительно точки z_0. В (22.2) присутствует многозначная функция $(z-t)^{1-\alpha}$. Зафиксируем точку z и выберем для однозначного толкования интеграла (22.2) главное значение функции $(z-t)^{1-\alpha}$. Под этим будем понимать следующее. Учитывая, что точка t лежит на отрезке $[z_0, z]$, выберем из всех возможных значений $\arg(z-t)$ то, которое совпадает с

$$\arg(z-t)=\arg(z-z_0). \tag{22.5}$$

Это, разумеется, требует фиксации $\arg(z-z_0)$. Будем считать всюду в дальнейшем, что

$$0\leqslant\arg(z-z_0)<2\pi. \tag{22.6}$$

Тогда, исходя из (22.5), положим

$$(z-t)^{1-\alpha}=|z-t|^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\arg(z-z_0)}. \tag{22.7}$$

Интеграл

$$(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}},\qquad\alpha>0, \tag{22.8}$$

где интегрирование производится по прямолинейному отрезку $[z_0, z]$ и выбрано главное значение (22.7), и будем называть *дробным интегралом порядка* α функции $f(z)$. Условие (22.6) означает, что мы рассматриваем дробный интеграл $(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)$ в плоскости, разрезанной по лучу, проведенному параллельно вещественной оси из точки z_0 в бесконечно удаленную точку $+\infty+i\operatorname{Im}z_0$.

Из (22.8) в силу (22.7) имеем также следующую форму записи $I^{\alpha}_{z_0}f$:

$$(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{e^{i\alpha\varphi}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{r}\rho^{\alpha-1}f(z_0+(r-\rho)e^{i\varphi})\,d\rho, \tag{22.9}$$

$$\varphi=\arg(z-z_0),\qquad r=|z-z_0|.$$

В этой записи, очевидно, устранена в явном виде неоднозначность. Если обозначить $f^*(\rho)=f(z_0+\rho e^{i\varphi})$, то

$$(I^{\alpha}_{z_0}f)(z)=e^{i\alpha\varphi}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{r}\rho^{\alpha-1}f^*(r-\rho)\,d\rho, \tag{22.10}$$

т. е. дробный интеграл $I^\alpha_{z_0}f$ есть (с точностью до множителя $e^{i\alpha\arg(z-z_0)}$) дробный интеграл Римана — Лиувилля $(I^\alpha_{0+}f^*)(r)$ по радиальной переменной $r=|z-z_0|$.

Так как $t=z_0+\xi(z-z_0)$, где $0\leqslant\xi\leqslant1$, то из (22.8) получаем после замены переменной

$$(I^\alpha_{z_0}f)(z)=\frac{(z-z_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1(1-\xi)^{\alpha-1}f[(1-\xi)z_0+\xi z]\,d\xi, \qquad (22.11)$$

где

$$(z-z_0)^\alpha=|z-z_0|^\alpha e^{i\alpha\arg(z-z_0)}. \qquad (22.12)$$

Заметим, что мы воспользовались тем, что $[(z-z_0)(1-\xi)]^{\alpha-1}=(z-z_0)^{\alpha-1}(1-\xi)^{\alpha-1}$. Подчеркнем, что, вообще говоря, $(uv)^{\alpha-1}\neq u^{\alpha-1}v^{\alpha-1}$ в силу многозначности степенной функции, однако

$$(zu)^{\alpha-1}=z^{\alpha-1}u^{\alpha-1} \qquad (22.13)$$

при любом выборе ветви степенной функции, если $u>0$.

Заметим, наконец, что дробный интеграл $(I^\alpha_{z_0}f)(z)$ определен в каждой точке $z\in G$ (почти в каждой), если функция $f(z)$ непрерывна (локально интегрируема).

Дробной производной порядка α назовем выражение (22.3). Подобно (22.11) можно записать при $0<\alpha<1$

$$(\mathcal{D}^\alpha_{z_0}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^{1-\alpha}\int\limits_0^1\frac{f((1-\xi)z_0+\xi z)}{(1-\xi)^\alpha}\,d\xi\right]. \qquad (22.14)$$

Как обычно, будем считать, что $\mathcal{D}^\alpha_{z_0}f\overset{\text{def}}{=}I^{-\alpha}_{z_0}f$ при $\alpha<0$.

Лемма 22.1. *Пусть функция $f(z)$ локально интегрируема (непрерывна) в области G. Тогда для почти всех (для всех) $z\in G$ выполняется полугрупповое свойство*

$$(I^\alpha_{z_0}I^\beta_{z_0}f)(z)=(I^{\alpha+\beta}_{z_0}f)(z),\quad \alpha\geqslant0,\quad \beta\geqslant0. \qquad (22.15)$$

Доказательство получается подобно вещественному случаю (см. теорему 2.5) непосредственной перестановкой порядка интегрирования в левой части в (22.15) (возможной в силу теоремы Фубини) и вычислением возникающего при этом интеграла

$$\int\limits_\zeta^z\frac{dt}{(t-\zeta)^{1-\alpha}(z-t)^{1-\beta}}=B(\alpha,\beta)(z-\zeta)^{\alpha+\beta-1}, \qquad (22.16)$$

что получается после замены $t=\zeta+s(z-\zeta)$ с учетом (22.13).

Рассмотрим дробное интегрирование, отвечающее случаю бесконечно удаленной точки z_0. Обозначим для этого $\tau=e^{i\theta}$, $-\pi\leqslant\theta<\pi$, и введем оператор

$$(I^\alpha_{+,\,\theta}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{e^{i\theta}\cdot\infty}^z\frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}}, \qquad (22.17)$$

где интегрирование производится по лучу, идущему из бесконечности в точку z параллельно вектору $\tau=e^{i\theta}$, и выбрано главное значение $(z-t)^{1-\alpha}$. Здесь формально $z_0=e^{i\theta}\cdot\infty$, и мы подчеркнем, что выбор θ в интервале $[-\pi,\pi)$ соответствует договоренности (22.6) о выборе $\arg(z-z_0)=\arg(z-e^{i\theta}\cdot\infty)=\arg e^{i(\theta+\pi)}$ в интервале $[0,2\pi)$.

Определение (22.17) предполагает, что область G, где задана функция $f(z)$, является звездообразной относительно точки $e^{i\theta}\cdot\infty$ (с каждой точкой $z\in G$ области G принадлежит луч $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$). Очевидно, такая область G является полуполосой, параллельной вектору $\tau=e^{i\theta}$. В частности, это может быть полуплоскость (с криволинейной границей), содержащая точку $e^{i\theta}\cdot\infty$. Функция $f(z)$ должна, очевидно, убывать на бесконечности так, чтобы обеспечить сходимость интеграла.

Определим также «правосторонний» дробный интеграл

$$(I^{\alpha}_{-,\theta}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{z}^{e^{i\theta}\cdot\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1-\alpha}}, \tag{22.18}$$

где интегрирование производится от точки z по лучу $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$ и также выбрано главное значение степенной функции.

Нетрудно видеть, что

$$(I^{\alpha}_{+,\theta}f)(z)=e^{i(\theta+\pi)\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})}{\rho^{1-\alpha}}\,d\rho, \tag{22.19}$$

$$(I^{\alpha}_{-,\theta}f)(z)=e^{i\theta\alpha}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(z+\rho e^{i\theta})}{\rho^{1-\alpha}}\,d\rho \tag{22.20}$$

при указанном выборе значений степенной функции. Из (22.19), (22.20) видим, что $I^{\alpha}_{-,\theta}f\equiv e^{i\alpha\pi}I^{\alpha}_{+,\theta}f$. Тем не менее имеет смысл пользоваться обеими конструкциями, поскольку операторы $I^{\alpha}_{+,\theta}$, $I^{\alpha}_{-,\theta}$ могут рассматриваться при разных значениях θ, а это означает при разных, вообще говоря, областях определения функций $f(z)$.

Подобно (22.3) определяются операции

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm,\theta}f)(z)=\left(\pm\frac{d}{dz}\right)^{m}(I^{m-\alpha}_{\pm,\theta}f)(z),\quad m=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1,\quad \mathrm{Re}\,\alpha>0. \tag{22.21}$$

Выделим случаи $\tau=\mp1$, т. е. $\theta=-\pi$ и $\theta=0$. Тогда в (22.17), (22.18) интегрирование ведется по лучу, параллельному вещественной оси. В этом случае, сохраняя обозначение (5.2), будем писать $I^{\alpha}_{+,-\pi}f=I^{\alpha}_{+}f$, $I^{\alpha}_{-,0}f=I^{\alpha}_{-}f$, так что, согласно (22.19), (22.20),

$$(I^{\alpha}_{\pm}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(z\mp\rho)}{\rho^{1-\alpha}}\,d\rho. \tag{22.22}$$

Соответствующие дробные производные имеют, согласно (22.21), вид $(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}f)(z)=\left(\pm\frac{d}{dz}\right)^{m}(I^{m-\alpha}_{\pm}f)(z)$. Дробное интегродифференцирование $(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}f)(z)$ предполагает, что функция $f(z)$ задана в горизонтальной полуполосе (левой или правой соответственно знаку $\pm$).

В случае $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ дробную производную (22.21) можно записать в форме Маршо

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{+,\theta}f)(z)=\frac{\alpha e^{-i(\theta+\pi)\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{f(z)-f(z+\rho e^{i\theta})}{\rho^{1+\alpha}}\,d\rho$$

(подобно тому как это делалось в § 5, см. (5.56), (5.57)) и аналогично для $(\mathcal{D}^{\alpha}_{-,\theta}f)(z)$. Случаю $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$ отвечают конструкции типа (5.80):

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{+,\theta}f)(z) = \frac{e^{-i(\theta+\pi)\alpha}}{\varkappa(\alpha, l)} \int_0^{\infty} \frac{(\Delta^{l}_{\rho e^{i\theta}}f)(z)}{\rho^{1+\alpha}}\, d\rho, \tag{22.21'}$$

где $(\Delta^{l}_{\rho e^{i\theta}}f)(z)$ — конечная разность (5.72) с шагом $\rho e^{i\theta}$, $\varkappa(\alpha, l)$ — постоянная (5.81). Переход от (22.21) к (22.21′) осуществляется на достаточно хороших функциях подобно действиям в § 5, п. 5°. Следует лишь подчеркнуть, что, как и в § 5, дробная производная в форме (22.21′) может существовать тогда, когда в форме (22.21) она не существует. Поэтому область определения оператора, порожденного правой частью в (22.21′), шире, вообще говоря, чем оператора (22.21), и его можно поэтому обозначить символом $(\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\theta}f)(z)$ подобно (5.80).

2°. Дробное интегродифференцирование аналитических функций. Дробное интегродифференцирование (22.8), (22.3) Римана — Лиувилля от аналитической функции $f(z)$ дает аналитическую же функцию только при целых α, приводя к функции с ветвлением в точке z_0 при нецелых α (это видно непосредственно из (22.11), (22.14)). Поэтому, желая сохранить аналитичность, можно было бы видоизменить определение дробного интегродифференцирования так, чтобы оно не давало ветвления. Можно, например, отбросить множитель $(z-z_0)^{\alpha}$ в (22.11) или $(z-z_0)^{-\alpha}$ в (22.14); это равносильно рассмотрению $(z-z_0)^{-\alpha}I^{\alpha}_{z_0}f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}[(z-z_0)^{\alpha}f(z)]$ вместо $I^{\alpha}_{z_0}f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f$ соответственно. Очень часто так и поступают при рассмотрении (обобщенного) интегродифференцирования аналитических функций, см. об этом в п. 3°. Здесь же, сохраняя исходное определение (22.8), (22.3), мы, напротив, расширим класс рассматриваемых функций, допуская с самого начала для них ветвление в точке z_0. Более точно будем предполагать, что функции $f(z)$ имеют вид $f(z) = (z-z_0)^{\mu}g(z)$, $\mu \in R^1$, где $g(z)$ аналитична в окрестности точки z_0. Тогда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+\mu}, \quad c_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}. \tag{22.23}$$

Возникающие здесь неоднозначности будем устранять выбором главной ветви и подчеркнем, что всюду в дальнейшем $(z-z_0)^{\mu}$ есть функция, аналитическая в плоскости с разрезом по лучу $(z_0, z_0+\infty)$:

$$(z - z_0)^{\mu} = |z - z_0|^{\mu} e^{i\mu \arg(z-z_0)},$$
$$0 \leqslant \arg(z - z_0) < 2\pi.$$

Лемма 22.2. *Пусть $f(z)$ — функция (22.23). Тогда при всех $\alpha \in R^1$*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z) = (z - z_0)^{\mu+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu - \alpha + 1)} c_k (z - z_0)^k, \tag{22.24}$$

$$\mu \neq -1, -2, -3, \ldots,$$

при этом радиусы сходимости рядов (22.23), (22.24) совпадают.

Подобное утверждение доказано нами ранее в случае аналитических функций на вещественной оси (см. лемму 15.4). Лемма 23.2 доказывается аналогично с учетом того, что ряд (22.23) можно почленно интегрировать и дифференцировать и с учетом того, что $\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}[(z - z_0)^{\beta}] = \dfrac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} \times$

$\times (z - z_0)^{\beta-\alpha}$. Последнее устанавливается непосредственно на основании равенства (22.16).

Формула (22.24) связывает исходное определение (22.2), (22.3) дробного интегродифференцирования с подходом Ж. Адамара. С подходом Ж. Лиувилля связано дробное интегродифференцирование (22.17), (22.18), (22.21). Непосредственно из (22.19) видим с учетом формулы (7.5), что

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{+,\,\theta}\, e^{az} = a^{\alpha} e^{az} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(ae^{i\theta}) < 0. \tag{22.25}$$

Правая часть в (22.25) в действительности зависит от θ: значение θ сказывается на выборе ветви многозначной функции a^{α}. Именно в (22.25) a^{α} означает $a^{\alpha} = |a|^{\alpha} e^{i\alpha \operatorname{Arg} a}$, $0 < \theta + \operatorname{Arg} a < 2\pi$ (точнее, $\pi/2 < \theta + \operatorname{Arg} a < 3\pi/2$ с учетом того, что $\operatorname{Re}(ae^{i\theta}) < 0$). В частности,

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{+} e^{az} = a^{\alpha} e^{az}, \quad \text{если } \operatorname{Re} a > 0, \tag{22.26}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{-} e^{az} = (-a)^{\alpha} e^{az}, \quad \text{если } \operatorname{Re} a < 0, \tag{22.27}$$

с главным значением $(\pm a)^{\alpha}$. Из (22.26), (22.27) вытекает, что для функций $f(z)$, представимых рядами Дирихле $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$, где все $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$ или все $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, имеем

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{+} f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^{\alpha} e^{\lambda_k z}, \quad \operatorname{Re}\lambda_k > 0,$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{-} f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-\lambda_k)^{\alpha} e^{\lambda_k z}, \quad \operatorname{Re}\lambda_k < 0$$

(Ж. Лиувилль полагал по определению $(\mathcal{D}^{\alpha} f)(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^{\alpha} e^{\lambda_k z}$ при любых λ_k).

Перейдем к одному из главных вопросов в теории дробного дифференцирования аналитических функций — распространению формулы Коши

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{f(t)\, dt}{(t - z)^{n+1}}$$

на нецелые значения n. У возникающей при этом многозначной функции $(t-z)^{-\alpha-1}$ выделим однозначную ветвь, проведя разрез из точки z через z_0 на бесконечность и рассматривая в плоскости, разрезанной таким способом, однозначную функцию (z фиксировано):

$$(t - z)^{-\alpha-1} = |t - z|^{-\alpha-1} e^{-(1+\alpha)\arg(t-z)} \tag{22.28}$$

с главным значением $\arg(t-z)$, т. е. $\arg(t-z) = 0$, если $t-z > 0$. Учитывая, что разрез может пойти параллельно вещественной оси вправо от точки z, уточним это выделение условием

$$\arg(t - z)\big|_{t \in C_+} \in (-2\pi,\ 0], \tag{22.29}$$

где C_+ — берег разреза, указанный на рис. 1.

Теорема 22.1. *Пусть $f(z) = (z - z_0)^{\mu} g(z)$, где $\mu > -1$, функция $g(z)$ аналитична в области G и выбрано главное значение $(z - z_0)^{\mu}$. Тогда при всех $\alpha \in R^1$, кроме $\alpha = -1, -2, \ldots,$*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0} f)(z) = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{L}_{z_0}} \frac{f(t)\, dt}{(t - z)^{1+\alpha}}, \tag{22.30}$$

где ветвь функции $(t-z)^{-\alpha-1}$ зафиксирована условиями (22.28), (22.29), а замкнутый контур $\mathscr{L}_{z_0}$, лежащий в G, проходит через точку z_0 и охватывает точку z в положительном направлении. В частности, при выборе окружности $|t-z|=|z-z_0|$ в качестве $\mathscr{L}_{z_0}$

$$(\mathscr{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi\,|z-z_0|^{\alpha}}\int_0^{2\pi}e^{-i\alpha\theta}f(z+|z-z_0|\,e^{i\theta})\,d\theta. \qquad (22.30')$$

Доказательство. Пусть вначале $\alpha<0$. Так как подынтегральная функция в (22.30) аналитична в области G, разрезанной от z к z_0, то в силу интегральной теоремы Коши

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}_{z_0}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\Big[\lim_{\gamma_+\to C_+}\int_{\gamma_+}\ldots+$$
$$+\lim_{\gamma_-\to C_-}\int_{\gamma_-}\ldots+\lim_{\gamma\to\{z\}}\int_{\gamma}\ldots\Big],$$

где $\gamma_\pm$ — прямые, параллельные берегам разреза, см. рис. 1, а γ — окружность радиуса ε, охватывающая точку z. Отсюда имеем с учетом скачка $(t-z)^{-1-\alpha}$ на разрезе

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}_{z_0}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\left(1-e^{-2\alpha\pi i}\right)\int_{z_0}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}+$$
$$+\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\alpha}\int_0^{2\pi}f(z+\varepsilon e^{i\varphi})\,e^{-i\alpha\varphi}d\varphi. \qquad (22.31)$$

Здесь $(t-z)^{-1-\alpha}=e^{-(1+\alpha)\pi i}(z-t)^{-1-\alpha}$ при выборе (22.29), где $(z-t)^{-1-\alpha}$ совпадает с выбранным в (22.7) значением (при замене $1-\alpha$ на $-1-\alpha$). Поэтому из (22.31) получаем

$$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}_{z_0}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}}=(I^{-\alpha}_{z_0}f)(z), \qquad (22.32)$$

что и доказывает (22.30) при $\alpha<0$. Если же $\alpha>0$, то, отправляясь непосредственно от определения (22.3), получим (22.30), дифференцируя равенство (22.32) (записанное для значения $\alpha-[\alpha]-1$ вместо α) соответствующее число раз под знаком интеграла. Теорема доказана.

Заметим, что правую часть в формуле (22.30) часто принимают в качестве определения дробной производной (любого порядка α, $\alpha\neq-1, -2, \ldots$) аналитической функции.

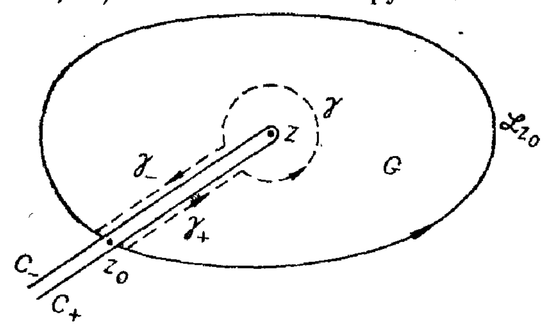

Рис. 1. Контур интегрирования

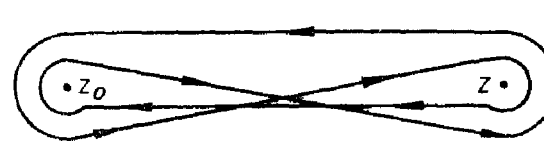

Рис. 2. Петля Похгаммера

Замечание 22.1. Формулу (22.30) удобно записывать в виде

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}_{z_0}}\frac{f(t)dt}{\left(1-\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^{1+\alpha}(t-z_0)^{1+\alpha}}$$

с тем же контуром $\mathcal{L}_{z_0}$, где выбрана главная ветвь функции $(1-w)^{1+\alpha}$, рассматриваемой в плоскости с разрезом по лучам $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$,

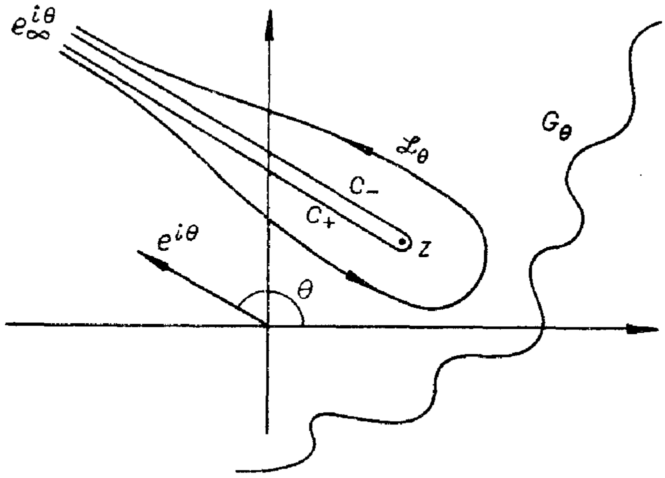

Рис. 3. Контур Ханкеля

а функция $(t-z_0)^{1+\alpha}$ рассматривается в плоскости с разрезом по лучу из точки z через z_0 на бесконечность. В частности, при $z_0=0$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{0}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}_0}\frac{f(t)}{\left(1-\frac{z}{t}\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t^{1+\alpha}},\qquad(22.33)$$

где контур $\mathcal{L}_0$ охватывает точку z, проходя через начало координат.

Замечание 22.2. Ограничение $\mu>-1$ в теореме 22.1 может быть изменено на $\mu\neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, если в качестве контура $\mathcal{L}_{z_0}$ взять так называемую «петлю Похгаммера» $C=(z+, z_0+, z-, z_0-)$, рис. 2 (L. Pochhammer), и изменить коэффициент перед интегралом:

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{z_0}f)(z)=\frac{e^{-\mu\pi i}\Gamma(1+\alpha)}{4\pi\sin\mu\pi}\int\limits_{C}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}},\ f(t)=(t-z_0)^{\mu}g(t).\qquad(22.33')$$

Остановимся еще на формуле (22.30) для дробного дифференцирования с бесконечно удаленной «начальной» точкой $z_0=e^{i\theta}\cdot\infty$, $-\pi\leqslant\theta<\pi$. Пусть функция $f(z)$ аналитична в криволинейной полуплоскости G_θ, содержащей бесконечно удаленную точку $e^{i\theta}\cdot\infty$. Аналогично теореме 22.1 получается, что при всех $\alpha\in R^1$, $\alpha\neq -1, -2, \ldots$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{+,\theta}f)(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}_\theta}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{1+\alpha}},$$

где уходящий на бесконечность контур Ханкеля $\mathcal{L}_\theta=\mathcal{L}_\theta(z)$ любой такой, который содержит внутри себя луч $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$ и обходится в положительном направлении (рис. 3), а главная ветвь функции $(t-z)^{1+\alpha}=|t-z|^{1+\alpha}e^{i(1+\alpha)\arg(t-z)}$, аналитической в плоскости с разрезом вдоль луча $(z, e^{i\theta}\cdot\infty)$, зафиксирована условием $\arg(t-z)|_{t\in C_+}\in(-2\pi, 0]$, так что

$$\arg(t-z)|_{t\in C_+}=\begin{cases}\theta, & -\pi\leqslant\theta\leqslant 0,\\ \theta-2\pi, & 0<\theta<2\pi.\end{cases}$$

В заключение этого пункта приведем без доказательства теорему Харди — Литтлвуда о действии дробного интегрирования

$$(I_{0}^{\alpha}f)(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1-\alpha}}=\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-\xi)^{\alpha-1}f(z\xi)\,d\xi \qquad (22.34)$$

в классах Харди H_p функций, аналитических в единичном круге. Класс H_p, $0<p<\infty$, состоит из функций $f(z)$, аналитических в единичном круге, для которых

$$\|f\|_p=\sup_{r>0}\int_{0}^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^p d\varphi<\infty.$$

Теорема 22.2. *Пусть* $0<p<\infty$, $0<\alpha<1/p$, $\gamma>-1$. *Оператор* $z^{-\gamma-\alpha}I_{0}^{\alpha}z^{\gamma}f(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}\xi^{\gamma}(1-\xi)^{\alpha-1}f(z\xi)\,d\xi$ *ограничен из* H_p *в* H_q, $1/q=1/p-\alpha$.

Доказательство этой теоремы, кроме оригинальных работ Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5, 7]) можно найти в книге А. Зигмунда [2, с. 209] (ср. теорему 22.2 с теоремами 3.5, 3.7).

3°. Обобщения дробного интегродифференцирования аналитических функций. Пусть функция

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k z^k \qquad (22.35)$$

аналитична в единичном круге, так что, согласно (22.24),

$$(\mathcal{D}_{0}^{\alpha}f)(z)=z^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}f_k z^k. \qquad (22.36)$$

Естественный путь обобщения интегродифференцирования (22.36) — замена множителя $\Gamma(k+1)/\Gamma(k-\alpha+1)$ в (22.36) более общим выражением. Начнем с обобщения, называемого обобщенным интегродифференцированием Гельфонда — Леонтьева. Отправляясь от простого факта, что обычное дифференцирование d/dz отвечает множителю $\Gamma(k+1)/\Gamma(k)$ в (22.36), введем, следуя А. О. Гельфонду, А. Ф. Леонтьеву [1], операцию

$$\mathcal{D}^n(a;\, f)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_{k-n}}{a_k}f_k z^{k-n}, \qquad (22.37)$$

где $a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$. Функция $a(z)$ предполагается целой порядка ρ и типа $\sigma\neq 0$ (относительно этих понятий см., например, книгу А. Ф. Леонтьева [1]) и такой, что

$$\lim_{k\to\infty}k^{1/\rho}\sqrt[k]{|a_k|}=(\sigma e\rho)^{1/\rho} \qquad (22.38)$$

(известно (А. Ф. Леонтьев [1, с. 13]), что (22.38) всегда выполняется для верхнего предела $\overline{\lim_{k\to\infty}}$). В силу (22.38) существует предел $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k-n]{|a_{k-n}/a_k|}=1$, и потому ряд (22.37) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (22.35). Оператор (22.37) называется *оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда—Леонтьева*. Очевидно, что $\mathcal{D}^n(a;\, f)=d^nf/dz^n$ в случае $a(z)=e^z$.

Оператор

$$I^n_{\mathfrak{a}}(a;\, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{a_k} f_k z^{k+n}, \tag{22.39}$$

являющийся правым обратным к (22.37), называется *оператором обобщенного интегрирования Гельфонда — Леонтьева.*

Заметим, что, хотя операторы $\mathscr{D}^n$, I^n непосредственно обобщают интегродифференцирование целого порядка n, они содержат в себе и операции интегродифференцирования дробного характера. В этом убедимся, рассмотрев следующий специальный случай:

$$a(z) = E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad \alpha > 0, \tag{22.40}$$

т. е. случай функции Миттаг-Леффлера (1.90) (она имеет порядок $\rho = 1/\alpha$, тип $\sigma = 1$ и для нее выполнено условие (22.38)). Соответствующий оператор обобщенного интегрирования (порядка $n = 1$) есть

$$(\mathscr{I}_\alpha f)(z) \overset{\text{def}}{=} I^1(E_{1/\alpha};\, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} f_k z^{k+1}. \tag{22.41}$$

Лемма 22.3. *Оператор обобщенного интегрирования (22.41) имеет следующее интегральное представление:*

$$(\mathscr{I}_\alpha f)(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha - 1} f(zt^\alpha)\, dt. \tag{22.42}$$

Утверждение леммы становится очевидным, если заметить, что

$$\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} = \frac{\mathrm{B}(\alpha,\, \alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha - 1} t^{\alpha k} dt.$$

Лемма 22.3 позволяет распространить определение оператора интегрирования (22.41) с аналитических функций $f(z)$ на непрерывные (и даже интегрируемые), заданные в области, звездообразной относительно начала координат.

Заметим еще, что

$$(\mathscr{I}_\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z \left(z^{\frac{1}{\alpha}} - t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha - 1} f(t)\, \frac{t^{\frac{1}{\alpha} - 1}}{\alpha}\, dt,$$

где интегрирование производится по отрезку, соединяющему точки 0 и z, и надлежащим образом выбраны ветви многозначных функций. Поэтому оператор $\mathscr{I}_\alpha$ можно интерпретировать так же, как оператор дробного интегрирования порядка α функции $f(z)$ по функции $g(z) = z^{1/\alpha}$, см. § 18, п. 2°. Учитывая это, мы можем построить (левый) обратный к $\mathscr{I}_\alpha$ оператор дифференцирования $\mathscr{D}_\alpha$ на основании формулы (18.29):

$$(\mathscr{D}_\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{1}{g'(z)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(t)\, g'(t)\, dt}{[g(z) - g(t)]^\alpha},$$

где $g(z) = z^{1/\alpha}$. После простых преобразований это приводит к равенству

$$(\mathscr{D}_\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{1-\alpha}{z} + \alpha\frac{d}{dz}\right)\int\limits_0^1 \frac{f(zt^\alpha)\,dt}{(1-t)^\alpha}. \quad (22.43)$$

Оператор $\mathscr{D}_\alpha$ отвечает, очевидно, разложению

$$(\mathscr{D}_\alpha f)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1-\alpha)} f_k z^{k-1}. \quad (22.44)$$

Можно пойти по пути дальнейшего обобщения, если заменить $\dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}$ в (22.36) произвольной последовательностью b_k (удовлетворяющей некоторым предположениям). Именно пусть функция

$$b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad (22.45)$$

аналитична в единичном круге. Рассмотрим оператор

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = b \circ f = \sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k z^k. \quad (22.46)$$

Это выражение называют *произведением (композицией) Адамара* функций $b(z)$ и $f(z)$. Конечно, конструкция (22.46) — очень широкое обобщение понятия интегродифференцирования. Она будет обобщать дифференцирование, если $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Операция (22.46) обратима, если $b_k \neq 0$, $k=0, 1, 2, \ldots$, и в этом случае мы обозначим

$$b_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / b_k. \quad (22.47)$$

Соответствующую операцию

$$I\{b;\ f\} = \mathscr{D}\{b_*;\ f\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{b_k} z^k$$

назовем *обобщенным интегрированием* (в предположении, что $b_k \to \infty$). Заметим, что функции $b(z)$ и $b_*(z)$ называют обычно союзными (В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев [1, с. 168]). Справедлива следующая

Лемма 22.4. *Пусть ряды (22.45), (22.47) сходятся в единичном круге. Если $g(z) = b \circ f$, где $f(z)$ аналитична при $|z| < 1$, то*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r} b\left(\frac{z}{t}\right) f(t)\,\frac{dt}{t}, \quad (22.48)$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r} b_*\left(\frac{z}{t}\right) g(t)\,\frac{dt}{t}, \quad |z| < r < 1. \quad (22.49)$$

Равенства (22.48), (22.49) получаются разложением $f(t)$, $g(t)$, $b(z/t)$, $b_*(z/t)$ в ряды и почленным интегрированием.

Выбирая различные функции $b(z)$, будем получать интегродифференциальные операции различных типов. Рассмотрим примеры.

1. Пусть

$$b(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)} z^k, \quad |z| < 1. \quad (22.50)$$

Тогда $\mathscr{D}\{b;\ f\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)} f_k z^k$, что совпадает в силу (22.24) с

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \mathscr{D}_0^\alpha [z^\alpha f(z)], \tag{22.51}$$

а в силу (22.48) с

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{f(t)}{\left(1-\frac{z}{t}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \tag{22.52}$$

(ср. с (22.30) и (22.33)). Таким образом, при выборе (22.50) функции $b(z)$ мы получаем дробное дифференцирование Римана — Лиувилля функции $z^\alpha f(z)$. Формула (22.51) позволяет получить обратный к $\mathscr{D}\{b; f\}$ оператор $I\{b;\ f\}$ в виде

$$I\{b;\ f\} = z^{-\alpha}(I_0^\alpha f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(zt)\, dt. \tag{22.53}$$

Его можно построить, согласно (22.49), также в виде

$$I\{b;\ f\} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} {}_2F_1\left(1,\ 1;\ 1+\alpha;\ \frac{z}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t}, \tag{22.54}$$

где $|z| < r < 1$ и ${}_2F_1(1,\ 1;\ 1+\alpha;\ z)$ — гипергеометрическая функция (1.72), которой в данном случае равно союзное ядро $b_*(z)$.

Если бы мы взяли $b(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)z}{(1-z)^{1+\alpha}}$ вместо (22.50), то получили бы, что

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k)} f_k z^k = z\mathscr{D}_0^\alpha [z^{\alpha-1} f(z)]. \tag{22.55}$$

Последнюю конструкцию называют иногда *дробной производной Рушевея*.

2. Пусть $b(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^\alpha z^k$. Тогда

$$\mathscr{D}\{b;\ f\} = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^\alpha f_k z^k \tag{22.56}$$

есть дробное дифференцирование по Вейлю, совпадающее с дифференцированием Вейля $\mathscr{D}_+^{(\alpha)} f$, см. (19.6), функции $f(z) = f(re^{i\varphi})$ по угловой переменной φ.

3. Выберем, наконец, $b(z)$ так, чтобы $\mathscr{D}\{b;\ f\}$ совпадало с обобщенным интегродифференцированием

$$(L^{(\omega)} f)(z) = -\int\limits_0^1 f(zt)\, \omega'(t)\, dt \tag{22.57}$$

по М. М. Джрбашяну (см. § 18, п. 6°; заметим, что (22.57) можно рассматривать как результат применения оператора (18.110) к функции $f(z) = f(re^{i\varphi})$ по радиальной переменной r). Отправляясь от (18.111)—(18.114), введем функцию

$$b(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_\omega(k) z^k.$$

Тогда, очевидно, $\mathscr{D}\{b;\ f\} = (L^{(\omega)} f)(z)$.

Относительно других обобщений см. также § 23.

§ 23. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 4

1°. Исторические сведения. К § 18, п. 1°. Операторы (18.5) и (18.6) введены X. Кобером (H. Kober [1], 1940 г.), операторы (18.1) и (18.3) при $a=0$ и $b=+\infty$ — А. Эрдейи (A. Erdelyi [6], 1950 г., см. также [13]), операторы (18.2) и (18.4) в форме (18.13) и (18.14) — Дж. Лаундесом (J. S. Lowndes [2], 1971 г., $\alpha>-1$; [6], 1980 г., $\alpha>-n$).

Операторы (18.8) также связывают с именами А. Эрдейи и X. Кобера, по-видимому, первым их так назвал И. Снеддон (I. N. Sneddon [2], 1962 г.). Отметим, однако, что впервые интеграл

$$(A^{(\rho)}f)(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\rho)\,\Gamma(1/2-\rho)}\int_0^x\frac{t^{2\eta+1}f(t)\,dt}{(x^2-t^2)^{\rho+1/2}},$$

для которого $(A^{(1/2-\alpha)}f)(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}x^{2\alpha+2\eta}}{2\Gamma(3/2-\alpha)}I_{\eta,\alpha}f(x)$, появился в работах Н. Я. Сонина, см. по поводу операторов $A^{(\rho)}$ книгу Н. Я. Сонина [6, с. 208] и работу Б. М. Левитана [1, с. 129], 1951 г. В последней работе оператор $A^{(\rho)}$ как преобразующий тригонометрические функции в функции Бесселя рассматривался в связи с разложениями в ряды по функциям Бесселя. Следует также сказать, что идеи, связанные с дробным дифференцированием «по функции x^2» или «по функции $\sqrt{x}$», содержались еще у Ж. Лиувилля (J. Liouville [1, с. 10], 1832 г., и др.).

Формулы (18.15), (18.16) и (18.18) для операторов (18.5), (18.6) получены X. Кобером (H. Kober [1]), формулы (18.15) и (18.18) для операторов (18.1) и (18.3) при $a=0$, $b=+\infty$ — А. Эрдейи (A. Erdelyi [6]), а формулы (18.17) — Дж. Лаундесом (J. S. Lowndes [2, 6]). Формулы (18.16′), (18.41′) при $a=0$, $b=\infty$ установлены А. Мак-Брайдом (A. C. McBride [10, с. 243—244], 1984 г.), указавшим условия их справедливости в классе $F_{p\mu}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ (о классе $F_{p\mu}$ см. в § 8, п. 4°). Случай $\sigma=1$, $a=0$ первой из формул (18.16′) встречается у Р. Бушмана (R. G. Buschman [5], 1964 г.). При $\sigma=1$ представления (18.20) и (18.22) для более общих, чем (18.19) и (18.5), (18.6), операторов урезанных модифицированных преобразований Ханкеля и Кобера (см. далее п. 2°, 18.2, 18.3) найдены А. Эрдейи (A. Erdelyi [4], 1940 г.). При $\sigma=2$ формулы (18.15)—(18.23) для операторов (18.8) приведены в работе И. Снеддона (I. N. Sneddon [2]).

К § 18, п. 2°. Дробный интеграл от функции по функции — понятие, известное еще математикам прошлого века. Оно введено X. Хольмгреном (Hj. Holmgren [1, с. 10], 1866 г.), хотя в зародыше идеи такого понятия развивались еще в работе Ж. Лиувилля (J. Liouville [7], 1835 г.). Работа X. Хольмгрена содержит детальное исследование композиций $D^{\lambda_1}_{\theta_1(x)}f_1(x)\,D^{\lambda_2}_{\theta_2(x)}\ldots D^{\lambda_n}_{\theta_n(x)}f_n(x)\,u(x)$, где $f_j(x)$ — операция умножения на функцию $f_j(x)$, а $D^{\lambda_j}_{\theta_j(x)}$ — дробное дифференцирование «по функции $\theta_j(x)$»; вся композиция применяется к функции $u(x)$. В современных работах понятие производной функции по функции появляется в работе А. Эрдейи (A. Erdelyi [9], 1964 г.) и независимо Дж. Таленти (G. Talenti [1], 1965 г.), см. также A. Erdelyi [14], 1970 г. Случай целого порядка интегрирования функции по функции см. в работе Ф. А. Шелковникова [1], 1951 г. Некоторым простым свойствам интегралов от функции по функции посвящена заметка A. Chrysovergis [1], 1971 г. Отметим еще, что в совершенно неявном виде дробный интеграл от функции по функции содержится еще в работе В. Сьюелла (W. Sewell [2, гл. 3, п. 14], 1937 г.) при доказательстве инвариантности относительно конформных отображений свойства дробной дифференцируемости функций, заданных на кривых.

Дробные интегралы от функции по функции в комплексной плоскости исследовали Т. Ослер (T. J. Osler [1, 2], 1970 г.; [5, 7], 1972 г.). Дробное дифференцирование от функции по функции в форме Грюнвальда—Летникова, рассмотренной в § 20, п. 4°, изучалось В. А. Красновым [2], 1977 г.

Теорема 18.1 доказана А. Эрдейи (A. Erdelyi [9], 1964 г.), однако доказательство в [9] содержит погрешность: не обоснована представимость дробным интегралом.

К § 18, п. 3°. Дробное интегродифференцирование (18.42) введено Ж. Адамаром (J. Hadamard [1], 1892 г.). Модификация адамаровского дробного дифференцирования в виде аналогов (18.56)—(18.58) дробного дифференцирования Маршо ранее не вводилась.

К § 18, п. 4°. Бесселево дробное интегрирование (18.61) возникло давно и особенно интенсивно стало разрабатываться и использоваться после работ N. Aronszajn, K. T. Smith [1], 1961 г., N. Aronszajn, F. Mulla, P. Szeptycki [1], 1963 г., N. Aronszajn [1], 1965 г., посвященных многомерным бесселевым потенциалам. Рассматриваемое в п. 4° дробное интегродифференцирование $(E\pm\mathcal{D})^\alpha$ также известно, см., например, книгу Т. Ливермана (T. P. G. Liverman [1, с. 28—31], 1964 г.), где оно имеется в форме (18.71), приспособленной к полуоси. Используемые здесь формы оператора $(E\pm\mathbf{D})^{\alpha}$ содержатся в работе Н. К. Карапетянца, С. Г. Самко [1], 1975 г. В ней же получена связь (18.73). В этой работе операторы $(E\pm\mathbf{D})^{\alpha}$ использованы при исследовании нормальной разрешимости сингулярных интегральных уравнений в свертках. Отметим также работу Н. К. Карапетянца [1], 1977 г., в которой операторы $(E\pm D)^{\alpha}$ применены к решению интегрального уравнения Винера—Хопфа с символом, имеющим нуль дробного порядка.

Утверждение теоремы 18.2 было известно, но в явном виде нигде, по-видимому, не отмечалось. Утверждение (18.78) теоремы 18.3 о совпадении $H^{s,p}([a,b])$ и $I^{\alpha}[L_p(a,b)]$ при $1<p<1/\alpha$ также известно и является немедленным следствием из теорем Б. С. Рубина [1], 1972 г., о продолжении и сужении дробных интегралов (теоремы 13.9 и 13.10 в книге). В явном виде теорема 18.3 фактически содержится в работе L. Biacino [2, теорема 2.1], 1984 г.

К § 18, п. 5°. Рассматриваемые здесь конструкции дробного интегрирования введены Ю. Чженем в работе Y. W. Chen [2], 1961 г., где также доказаны лемма 18.1 и теорема 18.4 Здесь приведены другие доказательства. Отметим, что в указанной работе имеется неточность в формулировке этой теоремы в случае $p>1/\alpha$.

К § 18, п. 6°. Рассматриваемые здесь конструкции введены М. М. Джрбашяном [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

К § 19, пп. 1—3°. Определение дробного дифференцирования периодических функций, рассматриваемого в § 19, было дано Г. Вейлем (H. Weyl [1], 1917 г.). Имеется прекрасное изложение основополагающих результатов для дробного интегродифференцирования Вейля в книге А. Зигмунда [2, гл. XII, § 8, 9]. Мы воспользовались этой книгой при освещении ряда результатов в § 19. Отметим, что дробное интегродифференцирование почти периодических функций изучалось в работах E. R. Love [1], 1938 г.; B. S. Nagy [2], 1939 г.; S. Takahashi [1], 1940 г.; T. Bang [1], 1941 г. В первой из этих работ дробные интегралы и производные рассматривались на всей прямой также и от произвольных ограниченных функций (см. об этом § 9, п. 2°, 5.3).

Представление (19.9) функции $\Psi_{+}^{\alpha}(x)$ через дзета-функцию Римана взято из работы М. Миколаша (M. Mikolás [1], 1959 г.). Связь с дзета-функцией в другом плане отмечалась еще Г. Харди (G. H. Hardy [2], 1922 г.).

Представление функции $\Psi_{+}^{\alpha}(t)$ в виде (19.11) принадлежит Г. Вейлю (H. Weyl [1, с. 300], 1917 г.), доказательство леммы заимствовано из книги А. Зигмунда [2, гл. XII, § 8]. Некоторые свойства ядра Вейля $\Psi_{+}^{\alpha}(x)$, важные в вопросах приближения тригонометрическими многочленами, были получены в работах Б. Надя (B. S. Nagy [1], 1938 г.), см. также работу В. К. Дзядыка [1], 1953 г. Конструкция (19.18) ранее не использовалась. Утверждение (19.19) леммы 19.3 было указано еще Г. Вейлем (H. Weyl [1, с. 300], 1917 г.). Запись дробного интеграла Вейля в виде (19.21) предложена М. Миколашем (M. Mikolás [1, с. 80], 1959 г.).

Связи (19.24), (19.25) в явном виде ранее, по-видимому, не отмечались. Операторы $I_{\mu}^{(\alpha)}$(свертки с ядром $K_{\alpha,\mu}(x)$) широко используются в теории приближения периодических функций, см., например, работы С. М. Никольского, А. В. Ефимова, С. А. Теляковского и др., указанные далее в п. 2°, 19.6).

К § 19, п. 4°. Формальное совпадение (19.35) дробной производной Вейля с производной Маршо фактически содержится в работе Г. Вейля (H. Weyl [1, с. 301—302], 1917 г.). Лемма 19.4 новая.

К § 19, п. 5°. Теорема 19.2 доказана С. Г. Самко [33], 1985 г., эквивалентность утверждений (19.46) и (19.47) в теореме 19.3 — в работе P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 129], 1975 г.

К § 19, п. 6°. Оценки (19.48), (19.49) и теорема 19.6 доказаны в статье Х. М. Мурдаева [2], 1985 г. Утверждение следствия из теоремы 19.6 при $\lambda+\alpha<1$ получено Г. Харди, Д. Литтлвудом (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3, с. 589], 1928 г.) и там же содержится утверждение замечания 19.4; случай $\alpha+\lambda=1$ принадлежит А. Зигмунду (A. Zygmund [2, с. 53], 1945 г.). Теоремы 19.7, 19.8 доказаны Х. М. Мурдаевым [2], 1985 г. Утверждение следствия из теоремы 19.7 и утверждение (19.62) принадлежат Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3, с. 576 и 591], 1928 г.; см. также [2], 1926 г.).

К § 19, п. 7°. Утверждения этого пункта, за исключением изоморфизма (19.71), принадлежат Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3, с. 592—604], 1928 г.).

К § 19, п. 8°. Распространение неравенства Бернштейна для тригонометрических многочленов на дробные производные в метрике $C([0,2\pi])$ впервые в явном виде получил П. Сайвин (P. Civin [1], 1940 г.; [2], 1941 г.), но в других терминах оно по существу содержалось в работе В. Сьюелла (W. Sewell [2, с. 111], 1937 г.). Отметим, что аналогичное неравенство для дробных производных алгебраических многочленов, рассматриваемых на конечном отрезке, было фактически получено П. Монтелем (P. Montel [1, с. 170], 1918 г.). Распространение на случай $L_p(0,2\pi)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, дано И. И. Огиевецким [3, 4], 1958 г. В работе П. Сайвина рассматривался более общий случай целых функций экспоненциального типа, но постоянная в неравенстве была весьма загрублена. Точная постоянная, равная 1, как в классическом неравенстве Бернштейна, была получена при всех $\alpha \geqslant 1$ П. И. Лизоркиным [3], 1965 г., также для целых функций экспоненциального типа., см. п. 2° этого параграфа. Приведенное в теореме 19.10 простое доказательство для $0<\alpha<1$ с постоянной, указанной в (19.74), содержится в работе С. П. Гейсберга [2], 1967 г. Однако в более общем виде (19.81) неравенство Бернштейна для дробных производных было получено другим способом ранее в работе T. Bang [1, с. 21—22], 1941 г.

Неравенство Фавара (19.82) для дробных интегралов периодических функций $f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k e^{ikx}$ впервые было получено Б. Надем (B. S. Nagy [1, с. 123], 1938 г.).

К § 20, п. 1°. Формула, представляющая дробное дифференцирование в виде предела разностных отношений, впервые появляется у Ж. Лиувилля (J. Liouville [2, с. 107—110], 1832 г.). Она используется Ж. Лиувиллем в работе J. Liouville [6, с. 224], 1835 г., для вывода формулы Фурье дробного дифференцирования из своего подхода и для вычисления дробных производных от функций $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$ в работе J. Liouville [2, с. 136], 1832 г. Эти эпизоды не находят развития у Ж. Лиувилля. В 1867 г. появляется работа А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1]), в которой развивается подход к дробному интегродифференцированию на основе равенства (20.7) или, точнее, на основе (20.42), однако рассуждения здесь носят еще эмпирический характер. Первое строгое построение теории дробного интегродифференцирования на этом пути осуществил А. В. Летников [1], 1868 г. Этому подходу была посвящена также статья Р. Моста (R. Most [1], 1871 г.). Следует сказать, что у А. Грюнвальда и А. В. Летникова построения велись в комплексной плоскости, при этом приращение h в (20.7) было фактически комплексным с фиксированным направлением (определяемым начальной точкой a, см. (20.42)). На долгие годы подход Грюнвальда—Летникова остается в забвении ввиду явной предпочтительности формы интегродифференцирования Римана—Лиувилля. Спустя лишь многие годы, появляются работы W. L. Ferrar [1], 1928 г.; N. Stuloff [1], 1951 г.; K. F. Moppert [1], 1953 г.; M. Mikolás [4], 1963 г.; [5], 1964 г., в которых излагается подход Грюнвальда — Летникова на более современном языке, даны примеры, рассмотрены связи с другими формами и т. п. Результаты А. В. Летникова отражены также в статье Ю. Л. Рабиновича [1]. Новую жизнь подход Грюнвальда—Летникова обрел с публикацией работ У. Вестфаль (U. Westphal [4], 1974 г.), П. Бутцера, У. Вестфаль (P. L. Butzer, U. Westphal [1], 1975 г.), в которых этот подход был переосмыслен с позиций современной теории функций и различные классические вопросы дробного исчисления были связаны с современными задачами функционального анализа и теории функций, см. также работу Я. С. Бугрова [1], 1985 г. В этом же плане следует отметить работу P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Cörlich, R. L. Stens [1], 1977 г. Отметим, наконец, что подход через разности дробного порядка в рамках обобщенных функций развивался в работах A. Brédimas [1—5], 1973—1976 гг.

Обобщенное дифференцирование $a(\mathscr{D})$, см. (20.10), вводилось Э. Постом (E. L. Post [2, с. 726], 1930 г.). Заметим, что обобщенное дифференцирование $\mathscr{D}^{\alpha}\log \mathscr{D}$, $\varphi(\mathscr{D})\log \mathscr{D}$ и др. на основе другого подхода исследовал Х. Дэвис (H. T. Davis [3, с. 78—85], 1936 г.).

К § 20, п. 2°. В этом пункте мы использовали построения из работ У. Вестфаль (U. Westphal [3, 4], 1974 г.), см. также П. Бутцер, У. Вестфаль (P. L. Butzer, U. Westphal [1], 1975 г.), в частности введенные в этих работах функции (20.14), (20.15). Лемма 20.1 доказана U. Westphal [3, с. 560], см. также P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 127—128], откуда и заимствовано ее доказательство (лишь дано независимое от [3] доказательство разложения (20.19)). Утверждение 1) леммы 20.1 было известно Л. Бозанке (L. S. Bosanquet [5], 1945 г.), см. U. Westphal [4, с. 562]. Лемма 20.2 и теорема 20.1 получены P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 128—129]. Теорема 20.2 является новой. Теорема 20.3 установлена P. L. Butzer, U. Westphal [1, с. 133].

К § 20, п. 3°. Теорема 20.4 получена С. Г. Самко [33], 1985 г. Близкий вариант теоремы 20.4 содержится в работе U. Westphal [4, с. 568] в общем контексте дробных степеней операторов, однако при ограничении, что функции и их дробные производные берутся из одного и того же пространства, см. ниже п. 2° (на бесконечной прямой такое предположение ограничительно по существу). Теоремы 20.5, 20.5′ являются аналогами теоремы 20.3 и ранее не отмечались; близкий вариант теоремы 20.5 (при $r=p$, $1<p<\infty$) содержится в работе Я. С. Бугрова [1, с. 62, 64], 1985 г.

К § 20, п. 4°. Определения (20.42), (20.46) восходят, как отмечалось, к А. Грюнвальду, А. В. Летникову. Совпадение (20.47) интеграла (20.46) с интегралом Римана—Лиувилля содержится (в случае достаточно хороших функций) в работах А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1, с. 455—458], 1867 г.), А. В. Летникова [1, с. 19], 1868 г. Теорема 20.6 новая.

К § 21, п. 1°. Теорема 21.1 для операторов $I_{a+}^{\alpha,\beta}$ со степенно-логарифмическими ядрами при натуральных β (и $\gamma=1$) из H^{λ} получена А. А. Килбасом [1], 1975 г.

К § 21, п. 2°. Утверждения теорем 21.2, 21.3 о действии операторов $I_{a+}^{\alpha;\beta}$ из $H^{\lambda}(\rho)$ при натуральных β ($\gamma=1$) доказаны А. А. Килбасом [6], 1978 г., для случаев простейшего веса $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$ и общего степенного веса (3.12) в случаях $0\leqslant\mu<\lambda+1$ и $0\leqslant\mu_1<\lambda+1$, $\lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1$, $k=2, 3, \ldots, n$, соответственно.

К § 21, пп. 3—4°. Приведенные здесь результаты являются новыми. Отмеченная в замечании 21.3 гельдеровость (точнее, обобщенная степенно-логарифмическая гельдеровость) чисто логарифмических интегралов

$$(I_{a+}^{1;\beta}\varphi)(x)=\int_a^x \ln^{\beta}\frac{\gamma}{x-t}\,\varphi(t)\,dt,\quad \varphi\in L_p(a, b),\quad \beta>0,$$

была при $p>1/\alpha$ отмечена А. А. Килбасом, С. Г. Самко [1], 1978 г.

К § 21, п. 5°. Приведенное в теореме 21.10 асимптотическое разложение интеграла $I_{0+}^{\alpha,\nu}\varphi$ с натуральными степенями логарифма следует результатам работы А. А. Килбаса [8], 1982 г., где наряду со случаем $0<\beta<1$ в асимптотике (21.27) рассмотрены и случаи $\beta=1$ и $\beta>1$. В указанной работе имеется погрешность: вместо интеграла

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ln^{\nu}(x-t)\,\varphi(t)\,dt,\quad 0<\alpha<1,\quad -1<\nu<+\infty,$$

допускающего комплексные значения, следует рассматривать интеграл

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,|\ln(x-t)|^{\nu}\,\varphi(t)\,dt.$$

К § 22, пп. 1—2°. Теория дробного интегродифференцирования с самого зарождения развивалась в комплексной области, достаточно сослаться, например, на работы Ж. Лиувилля (J. Liouville [1—8], 1832—1837 гг.) с исходным определением дробного дифференцирования функций, разложимых в ряд из экспонент, или на работы А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1], 1867 г.), А. В. Летникова [1], 1868 г., Н. Я. Сонина [2], 1872 г. Подход, связываемый с Ж. Адамаром, дан им в работе J. Hadamard [1], 1892 г.

Дробное интегрирование Вейля (22.1) (подход II) в комплексной плоскости впервые появляется в работе Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5], 1932 г.). Подход III — дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля (22.2), (22.3) с интегрированием по прямолинейному стрезку $[z_0, z]$ встречается в первых же работах по теории дробного интегродифференцирования. Формула (22.11) содержится уже у X. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1, с. 1], 1865—1866 гг.) В работе А. К. Grünwald [1], 1867 г., дробное интегродифференцирование определяется с помощью конечных разностей дробного порядка (см. § 20) в комплексной плоскости и устанавливается сводимость этого определения к определению Римана—Лиувилля.

Дробное интегродифференцирование Римана—Лиувилля с интегрированием по произвольной кривой в комплексной плоскости детально исследовал В. Сьюелл (W. E. Sewell [1, 2], 1935, 1937 гг.) в связи с вопросами приближения полиномами в комплексной плоскости (см. об этом также ниже в п. 2°).

Что же касается подхода IV, то обобщенная формула Коши (22.4) впервые встречается у Н. Я. Сонина [2], 1872 г., доказавшего, в частности, совпадение (22.32) дробной производной Коши с дробным интегралом $I_{z_0}^{-\alpha}$ при $\alpha<0$. Позже эта формула рассматривалась Ж. Лораном (H. Laurent [1], 1884 г.), П. А. Некрасовым [1, с. 87], 1888 г., А. Кругом (A. Krug [1], 1890 г.). Этот подход использовали П. Монтель (P. Montel [1, с. 167], 1914 г.), Г. Харди, Д. Литтлвуд (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5], 1932 г.). Формула (22.4) встречается в работе L. M. Blumenthal [1, с. 490], 1931 г., в которой дробное интегрирование трактовалось с точки зрения теории композиций, развитой В. Вольтерра. Конструкция (22.30) *впервые указана* А. В. Летниковым [3, с. 428], 1872 г.

Дробное интегродифференцирование в виде (22.17), (22.18), (22.21) ранее, по-видимому, не рассматривалось, за исключением случаев $I_{+,-\pi}^{\alpha}$, $\mathcal{D}_{+,-\pi}^{\alpha}$ и $I_{+,0}^{\alpha}$, $\mathcal{D}_{+,0}^{\alpha}$, встречающихся в работах К. Нишимото (K. Nishimoto [1—5, 7] и др., 1976—1984 гг.), см. также S. Owa, K. Nishimoto [1].

Теорема 22.2 принадлежит Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5], 1932 г.; [7], 1941 г.).

К § 22, п. 3°. Представление дробного интеграла I_0^{α} в виде (22.34) использовалось Ж. Адамаром (J. Hadamard [1], 1892 г.). Это вместе с интегралами (18.44) послужило ему отправной точкой для того, чтобы предложить идею рассмотрения общих конструкций $\int_0^1 V(t)f(zt)dt$ (вида (22.57)). Однако эта идея не была им реализована надлежащим образом. Реализация такой идеи с достаточно богатым содержанием была дана в работах М. М. Джрбашяна [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

Обобщенное интегродифференцирование по Гельфонду—Леонтьеву восходит к работе А. О. Гельфонда, А. Ф. Леонтьева [1], 1951 г. Имеется обширная литература, содержащая различные обобщения и развития идей, связанных с этим понятием. См. по этому поводу работы Ю. Ф. Коробейника [1, 2], 1964 г.; [3], 1965 г.; [4], 1983 г., в которых идея обобщенного интегродифференцирования аналитических функций развита в наибольшей общности. Ю. Ф. Коробейником [4] введены и исследованы также операторы обобщенного дифференцирования $\mathcal{D}_c$ и интегрирования J_c, определенные на произвольных числовых семействах $C=\{C_\alpha\}_{\alpha\in M}$, где M — не обязательно счетное множество. Отметим работу Н. И. Нагнибиды [1], 1966 г., содержащую исследование некоторых вопросов, связанных с операторами Гельфонда—Леонтьева. Оператор (22.41) указан в качестве примера в работе А. О. Гельфонда, А. Ф. Леонтьева [1], 1951 г. Представление его в виде (22.42) дано в работе И. Димовского (I. H. Dimovski [1], 1981 г.; см. также [3, с. 105], 1982 г.). Близкую к (22.43) конструкцию см. в I. H. Dimovski [2; 3, с. 106], 1982 г.

Соображения, основанные на переходе от произведения Адамара (22.46) к свертке (22.48), общеизвестны, см., например, книгу В. И. Смирнова, Н. А. Лебедева [1, с. 169]. Интегральные операторы (22.48) в более общей ситуации исследованы Ю. Ф. Коробейником [3], 1965 г., см. об этом ниже в п. 2° этого параграфа. В примерах 1—3 мы следовали работе В. И. Белого [6], 1977 г., где рассматривалась конструкция обобщенного дифференцирования (22.46) в связи с построением интегральных представлений для функций, аналитических в круговом кольце, см. также работу Э. С. Белинского, В. И. Белого [1], 1971 г. Вариант (22.55) имеется также в работах S. Owa [3], 1981 г.; [6], 1982 г.; [13], 1985 г.

Обобщенное интегродифференцирование (22.57) введено и использовано в ряде вопросов теории аналитических функций в работах М. М. Джрбашяна [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

2°. Обзор других результатов. 18.1. Пусть $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}$ — операторы (18.1), (18.7), а $\mathfrak{M}$ — оператор преобразования Меллина (1.112). Если $f\in L_p(0,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant 2$, то $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}f$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}f\in L_p(0,\infty)$ и при $s=1/p+i\tau$, $-\infty<\tau<\infty$,

$$(\mathfrak{M}I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}f)(s)=\frac{\Gamma(1+\eta-s/\sigma)}{\Gamma(1+\eta+\alpha-s/\sigma)}(\mathfrak{M}f)(s),\quad \mathrm{Re}(\eta-s/\sigma)>-1,\qquad(23.1)$$

$$(\mathfrak{M}I^\alpha_{-,\sigma,\eta}f)(s)=\frac{\Gamma(\eta+s/\sigma)}{\Gamma(\eta+\alpha+s/\sigma)}(\mathfrak{M}f)(s),\quad \mathrm{Re}(\eta+s/\sigma)>0.\qquad(23.2)$$

Если $2<p<\infty$, а $f\in\mathfrak{M}_p=\{g:g=\mathfrak{M}^{-1}\varphi,\ \varphi\in L_{p'}(\sigma p^{-1}-i\infty,\ \sigma p^{-1}+i\infty),\ 1/p+1/p'=1\}$, то $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}f$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}f\in\mathfrak{M}_p$ и имеют место формулы (23.1), (23.2) (A. Erdelyi [6, лемма 5]). Отметим, что впервые эти утверждения при $\sigma=1$ для операторов (18.5), (18.6) доказал H. Kober [1, теоремы 5а, 5в]. В работе P. G. Rooney [4] изучено действие операторов $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}$, $I^\alpha_{-,\sigma,\eta}$ из весового пространства $L_p(R^+_1;\ x^\mu)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$; см. также § 9, п. 2°, 5.6.

Пусть $\mathfrak{M}$, L, L^{-1} — операторы преобразований Меллина (1.112) и Лапласа (1.119), (1.120); $I^+_{\eta,\alpha}$, $K^-_{\eta,\alpha}$ — операторы Кобера (18.5), (18.6). Пусть еще выполняются условия: $\alpha>0$, $\eta>0$; $f(x)$, $x^{-1/2}f(x)\in L(0,\infty)$; $f^*(s)=\mathfrak{M}\{f(t);\ s\}\in L(1/2-i\infty,\ 1/2+i\infty)$; $x^{-1/2}(I^+_{\eta,\alpha}f)(x)$, $x^{-1/2}(K^-_{\eta,\alpha}f)(x)\in L(0,\infty)$. Тогда имеют место представления

$$(I^+_{\eta,\alpha}f)(x)=x^{-\alpha-\eta}L^{-1}\{t^{-\alpha}L[\tau^\eta f(\tau);\ t];\ x\},$$

$$(K^-_{\eta,\alpha}f)(x)=\{y^{1-\alpha-\eta}L^{-1}\{t^{-\alpha}L[\tau^{\eta-1}f(1/\tau);\ t];\ y\}\}_{y=x^{-1}}$$

(C. Fox [7]).

В работе K. J. Srivastava [2] показано, что композиции $I^+_{\eta,\alpha}I^+_{\xi,\alpha}$, $K^-_{\eta,\alpha}K^-_{\xi,\alpha}$ операторов Кобера (18.5), (18.6) являются композициями двух операторов вида $\int\limits_0^\infty(xt)^\nu w_{\mu,\nu}(xt)f(t)\,dt$, где $w_{\mu,\nu}(x)=x^{1/2}\int\limits_0^\infty\tau^{-1}J_\nu(\tau)J_\mu(x/\tau)\,d\tau$ — функция Ватсона, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя (1.83).

Пусть $I^+_{\eta,\alpha}$, $K^-_{\eta,\alpha}$ — операторы Кобера (18.5), (18.6); $Rf(x)=x^{-1}f(x^{-1})$; $\mathrm{Re}\,\nu$, $\mathrm{Re}(\nu+2\alpha)\neq-2,\ -4,\ \ldots$, $T_\alpha=(I^+_{\nu/2,\alpha})^{-1}RI^+_{\nu/2,\alpha}$ при $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ и $T_\alpha=(K^-_{\nu/2+\alpha,-\alpha})^{-1}RK^-_{\nu/2+\alpha,-\nu}$ при $\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant 0$. Если $f\in L_2(0,\infty)$, то $T_\alpha f\in L_2(0,\infty)$, причем $T^{-1}_\alpha f=T_\alpha f$, $T_0f=Rf$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}T_\alpha f\left(\frac{x}{\alpha^2}\right)=\int\limits_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xt})f(t)\,dt$, где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода (1.83) (A. Erdelyi [5]).

18.2. Пусть $S_{\eta,\alpha} \equiv S_{\eta,\alpha,1}$ — оператор модифицированного преобразования Ханкеля (18.19), а $S_\eta = S_{\eta,0}$. Если $\operatorname{Re}\eta > -1/2$, то на функциях из $L_2(0, \infty)$ имеют место следующие представления для операторов Кобера (18.5), (18.6):

$$\begin{gathered} I^+_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+2\alpha} S_{2\eta+\alpha,\alpha} = S_{2\eta+\alpha,\alpha} S_{2\eta}, \\ K^+_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+\alpha,\alpha} S_{2\eta+2\alpha} = S_{2\eta} S_{2\eta+\alpha,\alpha}, \\ I^+_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+\alpha+\beta,\alpha-\beta} S_{2\eta+\beta,\beta}, \quad 0 \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant \operatorname{Re}\alpha, \\ K^-_{\eta,\alpha} = S_{2\eta+\beta,\beta} S_{2\eta+\alpha+\beta,\alpha-\beta} \end{gathered} \tag{23.3}$$

(H. Kober [1]; ср. с соотношениями (18.22)).

В работе A. Erdelyi, H. Kober [1] установлены соотношения, связывающие операторы Кобера (18.5), (18.6) и урезанные преобразования Ханкеля:

$${}_mS_\nu f(x) = \int\limits_0^\infty J_{\nu,m}(2\sqrt{xt}) f(t)\,dt, \quad f \in L_p(0, \infty), \quad 1 \leqslant p \leqslant 2,$$

$$J_{\nu,m}(z) = \sum_{k=m}^\infty \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}, \quad \operatorname{Re}\nu/2 + 1/p' \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

где $J_{\nu,m}(z)$ — урезанная функция Бесселя (ср. с (1.83)).

В работе J. M. Ch. Joshi [1] операторы Кобера (18.5), (18.6) применены для нахождения связей между обобщенными преобразованиями Ханкеля вида

$$\int\limits_0^\infty (xt)^{\lambda+1/2} J^\mu_\lambda\left[\left(\frac{x^2t^2}{4}\right)^\mu\right] f(t)\,dt, \qquad \int\limits_0^\infty (xt)^\nu J^\mu_\lambda[(xt)^\mu] f(t)\,dt,$$

где $J^\mu_\lambda(x) = \sum\limits_{k=0}^\infty \dfrac{(-x)^k}{k!\,\Gamma(1+\lambda+\mu k)}$, $\mu > 0$, — функция Бесселя — Мейтленда, см. книгу О. И. Маричева [10, с. 288], а индексы λ принимают различные значения.

В работе V. M. Bhise [2] операторы Эрдейи—Кобера (18.5), (18.6) применены для исследования некоторых свойств интегрального преобразования

$$(Kf)(x) = \int\limits_0^\infty G^{21}_{24}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix} k-m-(\nu+1)/2, & m-k+(\nu+1)/2 \\ \nu/2, \ \nu/2+2m, & -\nu/2, \ -\nu/2-2m \end{matrix}\right) f(t)\,dt$$

с G-функцией Мейера в ядре, называемого *обобщенным преобразованием Ханкеля* и сводящегося при $k+m=1/2$ к преобразованию Ханкеля.

18.3. В работе B. L. J. Braaksma, A. Schuitman [1] предложена модификация дробного интеграла типа Эрдейи—Кобера (18.1) в духе конструкции А. Эрдейи (9.3):

$$\tilde{I}^\alpha_{0+,\sigma,\eta}\varphi(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\left[\int\limits_0^x (x^\sigma - t^\sigma)^{\alpha-1} t^{\sigma(\eta+1)-1}\varphi(t)\,dt - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{\alpha-1}{k} \int\limits_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\sigma k} x^{\sigma(\alpha-1)} t^{\sigma(\eta+1)-1}\varphi(t)\,dt\right] \tag{23.4}$$

и аналогичная модификация $\tilde{I}^\alpha_{-,\sigma,\eta}\varphi$ оператора (18.3) с $h = +\infty$. В указанной работе изучены свойства операторов $\tilde{I}^\alpha_{0+,\sigma,\eta}$, $\tilde{I}^\alpha_{-,\sigma,\eta}$ в специальных пространствах $T(\lambda, \mu)$:

$$T(\lambda, \mu) = \{\varphi \in C^\infty(0, \infty): \sup_{\substack{t>0 \\ \lambda_n \leqslant c < \mu_n}} |t^{c+p}\varphi^{(p)}(t)|, \ p = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$; $\lambda_n < \mu_n$, $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$; $\mu_0 < \mu_1 < \ldots$ $\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu\}$ основных и $T'(1-\mu, 1-\lambda)$ обобщенных функций (отличных от рассмотренных в § 8), а также даны связи таких модифицированных дробных интегралов с модифицированным преобразованием Ханкеля ${}_mS_\nu f$ (см. выше п. 18.2).

18.4. Более общие, чем (18.5), (18.6), операторы

$$(Rf)(x) = \frac{x^{-\nu-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x {}_2F_1(1-\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ t/x)\, t^\nu f(t)\, dt, \tag{23.5}$$

$$(Kf)(x) = \frac{x^\delta}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty {}_2F_1(1-\alpha,\ \beta+m;\ \beta;\ x/t)\, t^{-\delta-1} f(t)\, dt, \tag{23.6}$$

где ${}_2F_1$—гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), ввел Р. Саксена (R. K. Saxena [5]), при этом он получил аналоги формул (23.1), (23.2) для преобразования Меллина и формулы (18.18) дробного интегрирования по частям. В работе M. E. Nieva del Pino [1] найдены преобразования Варма (9.6), Мейера и Ханкеля (см. § 1, п. 4°) операторов (23.5), (23.6). Обобщения операторов Эрдейи—Кобера (18.5), (18.6) типа (23.5), (23.6) с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре рассматривались также в работах S. L. Kalla, R. K. Saxena [1], R. K. Saxena, R. K. Kumbhat [1], с функцией типа гипергеометрической функции Райта ${}_pF_q$— В. А. Маловичко [1], с функцией Бесселя — J. S. Lowndes [1], с G-функцией Мейера — В. Р. Parashar [1], S. L. Kalla [6, 12], с H-функцией Фокса — S. L. Kalla [4, 12], R. K. Saxena, R. K. Kumbhat [2], с произвольной функцией некоторого класса — S. L. Kalla [7]. См. также далее § 35—39.

18.5. Пусть $F_{p\mu}$ — пространство основных, а $F'_{p\mu}$ — пространство обобщенных функций, введенные в § 8, п. 4°, H^c_m — оператор вида

$$H^c_m f(x) \equiv \int_0^x \frac{(x^m-t^m)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ 1-\frac{x^m}{t^m}\right) m t^{m-1} f(t)\, dt, \tag{23.7}$$

$m>0$, $\operatorname{Re} c>0$, a, $b \in \mathbf{C}$, ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72). В работе A. C. McBride [1] показано, что оператор $H^c_m f$ представим в виде

$$H^c_m f(x) = I^{c-b}_{0+,m} x^{-ma} I^b_{0+,m} x^{ma} f(x), \quad x>0,$$

где $I^\alpha_{0+,m} \equiv I^\alpha_{0+;m,0}$ — оператор типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.2), и непрерывно действует из $F_{p\mu}$ в $F_{p,\mu+mc}$ и из $F'_{p\mu}$ в $F'_{p,\mu-mc}$. Аналогичные исследования проведены для трех других операторов, получающихся из $H^c_m f$ перестановкой x^m и t^m в функции ${}_2F_1$ или такой же перестановкой во всем ядре с заменой промежутка интегрирования $(0, x)$ на (x, ∞), см. также далее § 39, п. 2°, 36.2.

Свойства операторов типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.4), $a=0$, $b=\infty$, в пространствах $F_{p\mu}$ и $F'_{p\mu}$ изучены в работах A. C. McBride [2, 4]. В статье A. C. McBride [5] исследовано действие операторов преобразования Ханкеля (см. § 1, п. 4°) и модифицированного преобразования Ханкеля (18.19) при $\sigma=2$ из $F_{p,\mu}$, $F'_{p,\mu}$ в $F_{p,2/p-\mu-1}$, $F'_{p,2/p-\mu-1}$ соответственно и установлены различные соотношения между ними и операторами дробного интегрирования типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.3); в частности, доказаны формулы (18.20) — (18.23) при $\sigma=2$.

Отметим еще, что впервые операторы типа (23.7) при $m=1$, но в других пространствах функций Q_q и R_r, см. § 17, п. 1°, рассмотрел E. R. Love [2, 3], а аналогичный $H^c_m f$ оператор с переменным нижним пределом изучил T. P. Higgins [3], см. далее § 39, п. 2°, 36.1, 36.2.

18.6. В работах M. Saigo [1—3], см. также [6, 7], введены интегральные операторы

$$(I^{\alpha,\beta,\eta}_{a+} f)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\beta,\ -\eta;\ \alpha;\ \frac{x-t}{x-a}\right) f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha>0,$$

$$(I^{\alpha,\beta,\eta}_{a+} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}_{a+} f)(x), \quad \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0, \quad n=[-\operatorname{Re}\alpha]+1;$$

$$(I^{\alpha,\beta,\eta}_{b-} f)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1}\, {}_2F_1\left(\alpha+\beta,\ -\eta;\ \alpha;\ \frac{t-x}{b-x}\right) f(t) dt, \quad \operatorname{Re}\alpha>0,$$

$$(I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x), \quad \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0, \quad n = [-\operatorname{Re}\alpha] + 1;$$

$$(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \int_x^\infty \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} t^{-\alpha-\beta} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{x}{t}\right) f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f)(x), \quad \operatorname{Re}\alpha \leqslant 0, \quad n = [-\operatorname{Re}\alpha] + 1,$$

сводящиеся при $\beta = -\alpha$ и $\beta = 0$ к дробным интегралам и производным Римана — Лиувилля (§ 2, 5) и Кобера (§ 18, п. 1°) соответственно. Исследованы различные свойства этих операторов. В частности, в работе M. Saigo [1] установлены композиционные разложения операторов $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$, $I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}$ типа (10.18) — (10.29), условия выполнимости формулы интегрирования по частям

$$\int_0^\infty g(x)\,(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f)(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}g)(x)\,dx,$$

условия справедливости аналогов полугруппового свойства (2.65):

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{a+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f = I_{a+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f,$$

$$I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{a+}^{\gamma,\delta,\eta-\beta-\gamma-\delta} f = I_{a+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\delta} f,$$

$$I_{-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} I_{-}^{\alpha,\beta,\eta} f = I_{-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f,$$

$$I_{-}^{\gamma,\delta,\eta-\beta-\gamma-\delta} I_{-}^{\alpha,\beta,\eta} f = I_{-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\delta} f.$$

(первые две из них остаются справедливыми при замене индекса $a+$ на $b-$), а также исследовано действие операторов $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$, $I_{-}^{\alpha,\beta,\eta}$ в весовых пространствах $L_p((0,\infty); x^\nu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. В работах M. Saigo [2, 3, 6, 7] указано, что из последних равенств вытекают следующие представления для обратных операторов:

$$(I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta})^{-1} = I_{a+}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta}, \quad (I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta})^{-1} = I_{b-}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta},$$

$$(I_{-}^{\alpha,\beta,\eta})^{-1} = I_{-}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta}$$

и установлен характер гельдеровости функций $I_{a+}^{\alpha,\beta,\eta}f$, $I_{b-}^{\alpha,\beta,\eta}f$ на отрезке $[a, b]$ в предположении, что $f(x) \in H^\lambda([a, b])$, $0 < \lambda < 1$.

18.7. Развивая идею A. Erdelyi [3], см. об этом в § 4, п. 2°, 2.6 и в § 9, п. 2°, 5.4, С. А. Акопян, А. Б. Нерсесян [1] использовали формулу (18.18) дробного интегрирования по частям для операторов $I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha}$ Эрдейи—Кобера при $\sigma=2$ для построения новых биортогональных систем функций:

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{2}{j_{n,\nu}}\right)^\alpha x^{\nu+\alpha} J_{\nu+\alpha}(j_{n,\nu}x),$$

$$\Psi_m(x) = -\frac{2}{J_{\nu+1}^2(j_{m,\nu})\,\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t^2-x^2)^{-\alpha} t^{1-\nu} J_\nu(j_{m,\nu}t)\,dt,$$

где $j_{n,\nu}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — корни функции Бесселя $J_\nu(z)$, $0 \leqslant \alpha < 1$. В случае $\nu = 1/2$ отсюда получается обобщенная биортогональная система Шлемильха.

18.8. Операторы типа Эрдейи—Кобера $(x^{1-\sigma}d/dx)^\alpha$ использовались в работе М. И. Ключанцева [1] для построения оператора преобразования F_r для дифференциальных операторов

$$B_r = \frac{d^r}{dx^r} + \frac{b_1}{x}\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} + \cdots + \frac{b_r}{x^r}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

т. е. такого оператора F_r, что $F_r^{-1} B_r F_r = d^r/dx^r$. Оператор F_r на функциях v, удовлетворяющих некоторым условиям четности, имеет вид

$$F_r v = \prod_{k=1}^{r-1} x^{a_k}\left(\frac{d}{x^{r-1}dx}\right)^{c_k},$$

где a_k и c_k находятся по коэффициентам $b_1, \ldots, b_r$.

В работе K. Trimèche [1] содержится обобщение

$$(X\varphi)(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt,\quad ('X\varphi)(x)=\int_x^\infty K(t,x)\,A(t)\,\varphi(t)\,dt$$

операторов Эрдейи — Кобера с некоторым ядром $K(x,t)$, которое служит аналогичным оператором преобразования: $\Delta X\varphi\equiv X\frac{d^2}{dx^2}f$, для дифференциального оператора $\Delta=\frac{1}{A(x)}\frac{d}{dx}\left(A(x)\frac{d}{dx}\right)-q(x)$.

18.9. В работе P. G. Rooney [1] исследовалось действие дробного интегрирования $I^\alpha_{0+;1,s}=x^{-\alpha-s}I^\alpha_{0+}x^s$, $I^\alpha_{-;1,s}=x^sI^\alpha_{-}x^{-\alpha-s}$ (см. (18.1), (18.7)) типа Эрдейи—Кобера в пространствах Лоренца $L(p,q)$, о которых см., например, R. O'Neil [1]. Показано, что

$$\|I^\alpha_{0+;1,s}\|_{L(p,q)}\leqslant\frac{\Gamma(s+1-1/p)}{\Gamma(\alpha+s+1-1/p)},\qquad \|I^\alpha_{-;1,s}\|_{L(p,q)}\leqslant\frac{\Gamma(s+1/p)}{\Gamma(\alpha+s+1/p)}$$

при $1\leqslant p<\infty$, $q\geqslant p$, $\alpha>0$ и $s>-1/p'$ в первом случае и $s>-1/p$ во втором. Даны приложения к действию в $L(p,q)$ интегрального преобразования Варма (9 Є) и интегрального преобразования $\int_0^\infty (xt)^{-m-1/2}e^{-xt/2}M_{k,m}(xt)\,f(t)\,dt$ со специальной функцией Уиттекера $M_{k,m}(z)$ (Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 251]).

18.10. Пусть $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}$, $I^\alpha_{-;\sigma,\eta}$ — операторы левостороннего и правостороннего дробного интегрирования Эрдейи — Кобера (см. (18.1), (18.7)). Связь их друг с другом, подобно связи (11.27) — (11.30), дана в работе P. G. Rooney [2] в виде

$$I^\beta_{-;\sigma,\eta}H_1=I^\alpha_{0+;\sigma,\xi},\quad \operatorname{Re}\beta\leqslant\operatorname{Re}\alpha,$$

$$I^\alpha_{0+;\sigma,\xi}H_2=I^\beta_{-;\sigma,\eta},\quad \operatorname{Re}\alpha\leqslant\operatorname{Re}\beta,$$

где H_1, H_2 — операторы, ограниченность которых в пространстве с весом $L_p(R^1_+,x^\mu)$ получается с помощью теоремы о Фурье-мультипликаторах. На основе такой связи сделаны выводы о вложении образов $I^\alpha_{0+;\sigma,\eta}[L_p(R^1_+;x^\mu)]$, $I^\beta_{-;\sigma,\eta}[L_p(R^1_+;x^\mu)]$ друг в друга или об их совпадении, см. также P. G. Rooney [3]. Даны приложения к вложениям образов $\tilde S_{\rho,\lambda,\gamma}(L_p(R^1_+;x^\mu))$, где $\tilde S_{\rho,\lambda,\gamma}=S_{\frac{\lambda+\gamma+\rho-1}{2},1-\rho,2}\,S_{\frac{\lambda+\rho-1}{2},1-\rho,2}$ — оператор композиции двух модифицированных преобразований Ханкеля (18.19), см. также P. G. Rooney [4].

18.11. В работе C. Fox [1] показано, что дробное интегрирование Эрдейи—Кобера при некоторых условиях сохраняет свойства интегральных преобразований быть так называемыми цепными.

18.12. Дробные производные и интегралы Адамара (18.42), (18.43), (18.56), (18.56') использовались в работах Р. Г. Мамедова, Г. Н. Оруджаева [1, 2] для построения некоторых классов дробнодифференцируемых функций на полуоси, которые хорошо приспособлены для применения преобразования Меллина.

18.13. Пусть $f(x)\in L_2(R^1_+,\rho_\alpha)$, где взят вес $\rho_\alpha(x)=e^{-x}x^\alpha$, $\alpha\geqslant 0$, и пусть $f(x)=\sum_{n=0}^\infty \ln\hat L^{(\alpha)}_n(x)$, где $\hat L^{(\alpha)}_n(x)=[\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(n+1)]^{-1/2}L^{(\alpha)}_n(x)$ — ортонормированная система многочленов Лагерра (см. § 9, п. 2°, 5.4). Для того чтобы $\sum_{n=0}^\infty c_n^2n^\nu<\infty$, $0<\nu<1$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была представима в виде

$$f(x)=\int_x^\infty e^{x-t}(t-x)^{\nu-1}\varphi(t)\,dt,\quad \varphi(t)\in L_2(R^1_+,\rho_{\alpha+\nu})$$ (С. З. Рафальсон [1]).

18.14. Дробное дифференцирование Чженя (18.87) было применено в работе А. В. Скорикова [2] к описанию пространства $L^\alpha_p([a,b])=H^{\alpha,p}([a,b])$ бесселевых потенциалов на отрезке, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. В этой работе первоначальное определение

пространства $L_p^\alpha([a, b])$ дано в терминах дробного дифференцирования Чженя. Это определение при $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$ имеет вид

$$L_p^\alpha([a, b]) = \{f : f \in L_p,\ \mathbf{D}_c^\alpha f \in L_p\}, \tag{23.8}$$

где $\mathbf{D}_c^\alpha f$ — производная Чженя — Маршо (18.91) — (18.93), $a \leqslant c \leqslant b$. Показано, что это определение не зависит от выбора точки c и что $L_p^\alpha([a, b])$ совпадает с пространством сужений на $[a, b]$ бесселевых потенциалов из $L_p(R^1)$. Эти утверждения представляют собой развитие теоремы 18.3, отвечающей случаю $c = a$ или $c = b$. В случае $p > 1/\alpha$ определение (23.8) модифицировано в [2] с учетом непрерывности функций из L_p^α при $p > 1/\alpha$.

18.15. В ряде работ W. A. Al-Salam [1, 2], W. A. Al-Salam, A. Verma [1], R. P. Agarwal [2, 3], S. Sharma [1], M. Upadhyay [1] вводились и исследовались некоторые объекты, названные *дробными q-интегралами* и *q-производными*. Однако их определение, не содержащее предельных переходов, не является определением интегралов и производных в общепринятом смысле, а является расширением на дробные показатели восходящего к F. H. Jackson [1, 2] понятия q-производной: $(\mathcal{D}_q f)(x) = \dfrac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}$, играющего важную роль в комбинаторном анализе.

Подобные конструкции дробного порядка впервые вводились в работах W. A. Al-Salam [1, 2] в виде

$$({}_qI_-^{\nu} f)(x) = q^{-\nu(\nu+1)/2} x^\nu (1-q)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{bmatrix} -\nu \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} \times$$

$$\times f(xq^{-\nu-k}), \quad -\infty < \nu < \infty, \quad 0 < q < 1,$$

где $\begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix} = \dfrac{[\alpha][\alpha-1] \cdots [\alpha-k+1]}{[1][2] \cdots [k]}$, $[\alpha] = \dfrac{1-q^\alpha}{1-q}$. Имеются и другие формы дробных q-интегралов и q-производных (W. A. Al-Salam [1], R. P. Agarwal [2, 3]). В указанных работах содержится ряд приложений дробных q-интегралов и q-производных. См. также работу M. A. Khan [1] и монографию H. Exton [1], в которой более подробно излагается соответствующая «q-теория».

19.1. Пусть $X_{2\pi}$ — то же, что и в теореме 19.2. Скажем, что 2π-периодическая функция $f(x) \in X_{2\pi}$ имеет в $X_{2\pi}$ *сильную дробную производную Вейля*, если существуют функция $\varphi(x) \in X_{2\pi}$ и последовательность тригонометрических полиномов $T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_{n,k} e^{ikx}$ такие, что $\|f - T_n\|_{X_{2\pi}}$, $\|\varphi - T_n^{(\alpha)}\|_{X_{2\pi}} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по определению $\varphi = \mathcal{D}_+^{(\alpha)} f$ — сильная производная Вейля. Здесь $T_n^{(\alpha)} = \sum_{k=-n}^{n} (ik)^\alpha a_{n,k} e^{ikx}$ — дробная производная Вейля многочлена $T_n(x)$. Справедлива (см. работы В. Н. Малоземова [1 — 4]) следующая

Теорема 23.1. *Существование сильной (в $X_{2\pi}$) дробной производной Вейля функции $f(x) \in X_{2\pi}$ равносильно ее представимости дробным интегралом Вейля: $f(x) = f_0 + I_+^{(\alpha)}\varphi$, $\varphi \in X_{2\pi}$, $\alpha > 0$.*

Сопоставляя эту теорему с теоремой 19.2, видим, что существование сильной в $X_{2\pi}$ дробной производной Вейля равносильно сходимости в $X_{2\pi}$ усеченной дробной производной Маршо.

19.2. К теоремам 19.3 и 19.2 (с замечанием 19.2), описывающим функции $f(x)$, представимые дробными интегралами от функций из L_p, примыкает следующее утверждение. Пусть $\alpha > 0$, m — наименьшее целое такое, что $m \geqslant \alpha$. В работе A. Katsaras, D. Liu [1] введена модификация (ср. с (19.17)) дробной производной Вейля в виде

$$D_+^{(\alpha)} f = \lim_{h_i \to 0} h_1^{-1} \ldots h_m^{-1} \Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_m} I^{(m-\alpha)} f, \tag{23.9}$$

где $\Delta_h f = f(x+h) - f(x)$, $\Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_m} f = \Delta_{h_1}(\Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_m} f)$ и $I^{(m-\alpha)} f$ — дробный интеграл (19.26), (19.27). Доказано, что для функции $f \in L_p$ существование предела в (23.9) по норме L_p, $1 \leqslant p < \infty$, равносильно существованию функции $g(x) \in L_p$ такой, что $g_n = (i \operatorname{sign} n)^m |n|^\alpha f_n$.

19.3. Известную в теории рядов Фурье (Н. К. Бари [1, с.647]) теорему Саса обобщает следующее утверждение (Д. Л. Кудрявцев [1]).

Теорема 23.2. *Пусть $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ и существует $\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)} f \in L_p(0, 2\pi)$ (в том смысле, что существует функция $\varphi = (\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)} f) \in L_p$ с коэффициентами Фурье $\varphi_n = (in)^\alpha f_n$), $1 \leqslant p < 2$, $\alpha > 0$. Тогда при любом $\gamma > (\alpha + 1 - 1/p)^{-1}$ справедливы оценки*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^\gamma < \infty, \quad \sum_{|n|=N+1}^{\infty} |f_n|^\gamma = o(N^{1-\gamma(\alpha+1-1/p)}). \tag{23.10}$$

19.4. Д. Л. Кудрявцевым [1] введено обобщение $\mathscr{D}^{\alpha,\beta}$ дробного интегродифференцирования Вейля, определяемое разложением

$$\mathscr{D}^{\alpha,\beta} f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^\alpha \ln^\beta |n| \, e^{inx}$$

и названное им *дробно-логарифмической производной порядка* (α, β). Для $\mathscr{D}^{\alpha,\beta} f$ доказано утверждение более общее, чем упомянутое выше в теореме 23.2. Именно, если существует $\mathscr{D}^{\alpha,\beta} f \in L_p$ в предположениях этой теоремы, то вместо (23.10) имеем

$$\sum_{|n|=N+1}^{\infty} |f_n|^\gamma = o(N^{1-\gamma(\alpha+1-1/p)} \ln^{-\beta\gamma} N).$$

19.5. В работе М. Г. Есмаганбетова, К. Ж. Наурызбаева, Е. С. Смаилова [1] доказаны теоремы, связывающие существование (в L_p) дробной производной Вейля $\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)} f$ периодической функции $f(x)$ с поведением норм в L_p дробных производных частичных сумм $S_n(f)$ ряда Фурье. В частности, доказаны оценки типа

$$\|\mathscr{D}_{+}^{(\alpha)} f\|_p \leqslant c \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma r-1} \|\mathscr{D}^{(\alpha+r)} S_n(f)\|_p^\gamma\right]^{1/\gamma},$$

где $\alpha \geqslant 0$, $r > 0$, $\gamma = \min(r, p)$ и др.

19.6. В § 17, п. 2°, 14.16, упоминалось о применении методов теории приближений в вопросах дробного интегродифференцирования. В периодическом случае существенную роль сыграли работы J. Favard [1], B. S. Nagy [1], С. М. Никольского [1, 3], D. Kralik [1], И. И. Огиевецкого [1, 2, 5], А. Ф. Тимана [2]. В частности, в работах B. S. Nagy [1], С. М. Никольского [3], А. Ф. Тимана [2] получена оценка $E_n(I_{+}^{(\alpha)} f) \leqslant \leqslant cn^{-\alpha} \omega_k(f, 1/n)$, где $E_n(f)$ — наилучшее приближение в L_p функции f тригонометрическими многочленами, $\omega_k(f, 1/n)$ — модуль непрерывности порядка k в L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. К этим ссылкам добавим работы Xie Ting-fan [1], R. Taberski [1—4, 6], P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens [1], М. Г. Есмаганбетова [1]. Есть много работ, посвященных различным вопросам приближения теми или иными тригонометрическими суммами периодических функций, имеющих дробные производные (В. Т. Пинкевич [1], С. М. Никольский [1, 3], А. Ф. Тиман [1], В. К. Дзядык [1], S. Izumi, M. Sato [1], С. Б. Стечкин [2], А. В. Ефимов [1—4], Сунь Юн-Шен [1], С. А. Теляковский [1, 2], А. К. Покало [1], В. Н. Русак [1—3], В. В. Жук [1] и др.); см. также ссылки в этих работах. В статье В. Ф. Бабенко [1] дана оценка поперечников Колмогорова классов периодических функций, представимых в виде дробных интегралов $I_\mu^{(\alpha)} \varphi$, $\varphi \in L_1$ или $\varphi \in L_\infty$.

19.7. Утверждение (19.62) теоремы Харди—Литтлвуда перестает быть верным для $p = 1$. Его заменяет следующий результат. Если $0 < \alpha < 1$, $q = 1/(1-\alpha)$, то

$$\|I_{+}^{(\alpha)} \varphi\|_{L_q(0, 2\pi)} \leqslant A \int_0^{2\pi} |f(x)| (\ln^+ |f(x)|)^{1-\alpha} dx + A,$$

где постоянная A зависит только от α (A. Zygmund [1]). Обобщение этого результата на случай, когда $\int_0^{2\pi} |f(x)| (\ln^+ |f(x)|)^s dx < \infty$, $s > 0$, дано в работе R. O'Neil [3].

19.8. Пусть $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. В работе S. Izumi [1] даны различные достаточные условия на коэффициенты a_n для того, чтобы существование конечного предела

$\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_x^\pi (t-x)^{\alpha-1}f(t)\,dt$ обеспечивало бы сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}a_n,\quad 0<\alpha<1$. В случае $\alpha=1$ необходимые и достаточные условия сходимости в близких термина даны в работе N. Matsuyama [1].

19.9. В выражении $\mathscr{D}^{(\alpha)}f=\dfrac{d^m g(x)}{dx^m},\quad g(x)=(I^{(m-\alpha)}f)(x),\qquad m-1<\alpha<m,$ дробной производной Вейля периодической функции $f(x)$ дифференцирование $(dg/dx)^m$ можно понимать в смысле Пеано (это означает существование полинома $P_x(t)$ степени не больше m такого, что $g(x+t)-P_x(t)=o(|t|^m)$. Так понимаемые дробные производные рассматривались в работе A. Zygmund [3], где выяснена связь условия $f(x+t)-P_x(t)=O(|t|^{m+\beta})$ с дробной дифференцируемостью функции $f(x)$. В непериодическом случае см. работу E. M. Stein, A. Zygmund [1]. Развитие идей этих работ для функций $f(x)$, имеющих лакунарный ряд Фурье, дано в работе G. V. Welland [1], а распространение на случай функций многих переменных — в работе G. V. Welland [2].

20.1. Определение (20.7) дробного дифференцирования естественным образом распространяется на случай дробных степеней операторов (инфинитезимальных операторов, см. об этом в § 5, п. 7°). Идея построения теории дробных степеней операторов через дробные разности принадлежит П. Бутцеру (P. L. Butzer) и была реализована в работе U. Westphal [4]. Пусть T_t, A и X — то же, что в § 5, п. 7°. Введем дробную степень $(-A)^\alpha,\alpha>0$, равенством

$$(-A)^\alpha f=\lim_{t\to 0+} t^{-\alpha}(E-T_t)^\alpha f, \tag{23.11}$$

где, подобно (20.2), $(E-T_t)^\alpha f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}T_{kt}$ и предел — по норме пространства X. Справедлива (U. Westphal [4]) следующая

Теорема 23.3. *Область определения $D((-A)^\alpha)$ оператора $(-A)^\alpha$ плотна в X, при этом $D((-A)^\alpha)\subset D((-A)^\beta)$, $\alpha>\beta>0$, $(-A)^\alpha$ — замкнутый оператор.*

К теореме 20.4 примыкает также следующая теорема (U. Westphal [3]; см. также комментарий к § 20, п. 3° в исторических сведениях в этом параграфе).

Теорема 23.4. *Для $f\in X$ предел (23.11) существует в X тогда и только тогда, когда существует в X предел*

$$\frac{1}{\varkappa(\alpha,l)}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1}(E-T_t)^l f\,dt,\quad l>\alpha,$$

и оба предела совпадают (значение $\varkappa(\alpha,l)$ см. в (5.81)).

Идея введения дробного дифференцирования по Грюнвальду — Летникову допускает другое далеко идущее обобщение: заменяя в разности дробного порядка $(\Delta_h^\alpha f)(x)=(E-\tau_h)^\alpha f$ оператор сдвига τ_h тем или иным оператором обобщенного сдвига, можно получить различные формы дробного дифференцирования. В работе P. L. Butzer, R. L. Stens [1] эта идея реализована при рассмотрении дробных производных, связанных с преобразованием Чебышева $(\tau_h f)(x)=(1/2)[f(xh+\sqrt{(1-x^2)(1-h^2)})+f(xh-\sqrt{(1-x^2)(1-h^2)})]$, $-1<x<1$, $-1<h<1$. В указанной работе введено дробное дифференцирование

$$\mathscr{D}^{(\alpha)}f=\lim_{h\to 1-0}\frac{(\overline{\Delta}_h^\alpha f)(x)}{(1-h)^\alpha},\quad (\overline{\Delta}_h^\alpha f)(x)=(-1)^{[\alpha]}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{j}(\tau_h^j f)(x)$$

(где предел понимается по норме пространства $X=C$ или $X=L_p$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$). В частности, $\mathscr{D}^{(1)}f=(1-x^2)f''(x)-xf'(x)$ и $\mathscr{D}^{(1/2)}f=-\sqrt{1-x^2}\dfrac{d}{dx}(Hf)(x)$, где Hf — сингулярный оператор Гильберта (19.22). Функции $f(x)\in X$, имеющие в X дробные производные $(\mathscr{D}^{(\alpha)}f)(x)$, охарактеризованы как те и только те функции, которые представимы «дробным интегралом» $f=\varphi*\psi_\alpha$, где $f*\varphi=(1/\pi)\int\limits_{-1}^{1}(\tau_x f)(t)\,\varphi(t)\,(1-t^2)^{-1/2}dt$, $\psi_\alpha(x)$ — функция, для которой $\hat\psi_\alpha(k)=(-1)^{[\alpha]}k^{-2\alpha}$. Здесь $\hat f(k)=(1/\pi)\int\limits_{-1}^{1}f(t)\cos(k\arccos t)(1-t^2)^{-1/2}dt$ — коэффициенты Фурье — Чебышева.

20.2. Сопоставление дифференцирования по Грюнвальду—Летникову и Риману—Лиувиллю дается следующей теоремой (U. Westphal [3]), где $X=L_p(R^1_+)$, $1\leqslant p<\infty$, или $X=C_0$— пространство ограниченных равномерно непрерывных на R^1_+ функций $f(x)$, таких, что $f(0)=0$.

Теорема 23.5. *Пусть $f(x)\in X$ и $\alpha>0$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *существует производная Грюнвальда — Летникова по норме пространства* X: $\lim\limits_{h\to 0+} \| h^{-\alpha}\Delta_h^\alpha f - f_+^{(\alpha)}\|_X = 0$;

2) $\dfrac{d^k}{dx^k}(I_{0+}^{n+1-\alpha}f)(x)\in AC_{\text{loc}}$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, *где* $n=[\alpha]$, *и* $\mathcal{D}_{0+}^\alpha f\in X$.

20.3. Интересный вариант введения разностей дробного порядка предложен в работе L. S. Bosanquet [4, с. 240]:

$$\Delta_h^{(\alpha)}f(x)\overset{\text{def}}{=}\alpha\int_0^h (h-t)^{\alpha-1}(\mathcal{D}_{0+}^\alpha f)(x+t)\,dt,$$

так что $\Delta_h^{(\alpha)}f(x)/h^\alpha \to (\mathcal{D}_{0+}^\alpha f)(x)$ при $h\to 0$.

20.4. Обобщением неравенства типа Бернштейна (19.74) служит следующее утверждение (П. И. Лизоркин [3, с. 118]). Пусть $g(x)=\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixt}d\omega(t)$, где $\omega(t)$ имеет ограниченную вариацию в $[-\sigma,\ \sigma]$. Тогда для дробной производной

$$g^{(\alpha)}(x)=\int_{-\sigma}^{\sigma}(ix)^\alpha e^{ixt}d\omega(t),\quad \alpha\geqslant 1,$$

функции $g(x)$ справедливо неравенство $\|g^{(\alpha)}\|_p\leqslant \sigma^\alpha\|g\|_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

20.5. К неравенствам типа Бернштейна (19.74) примыкает неравенство для дробной производной Вейля тригонометрического многочлена $T_n(x)$:

$$\|\mathcal{D}_+^{(\alpha)}T_n\|_p\leqslant\left(\frac{n}{2\sin(nh/2)}\right)^\alpha\|\Delta_h^\alpha T_n\|_p,\quad 0<h<\frac{2\pi}{n},$$

(R. Taberski [3]), обобщающее неравенство Стечкина—Никольского и неравенство для дробной производной типа Грюнвальда—Летникова целой функции $G(x)$ экспоненциального типа σ:

$$\|G^{(\alpha)}\|_p\leqslant \sigma^\alpha[2\sin(\sigma h/2)]^{-\alpha}\|\Delta_h^\alpha G\|_p,\quad 0<h<2\pi/\sigma$$

(R. Taberski [5, с. 133]). Здесь $\Delta_h^\alpha f$ — «центрированная» конечная разность дробного порядка.

20.6. Для обобщенного дифференцирования $a(\mathcal{D})f$ по Э. Посту, см. определение (20.10), справедливо обобщенное правило Лейбница:

$$a(\mathcal{D})[u(x)v(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}u^{(k)}(x)\,a^{(k)}(\mathcal{D})\,v(x)$$

(E. L. Post [2, с. 755]). Из него, в частности, при $a(x)=x^\alpha$ получается формула Лейбница (15.11).

20.7. Разности дробного порядка используются для введения модулей непрерывности дробного порядка: $\omega_\alpha(f,\ h)=\omega_{\alpha,X}(f,\ h)=\sup\limits_{|t|<h}\|\Delta_t^\alpha f\|_X$, где X — банахово пространство. Свойства таких модулей непрерывности исследовались в работах P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens [1], R. Taberski [3], Г. Гаймназарова [1], В. Г. Пономаренко [1, 2], см. также некоторые модифицированные (усредненные) разности дробного порядка в работах D. P. Drianov [1, 2]. В работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [3] рассмотрен обобщенный класс Гельдера $H^{\varphi,\alpha}=H_X^{\varphi,\alpha}$, определяемый модулем непрерывности дробного порядка:

$$H^{\varphi,\alpha}=\{f(x):f(x)\in X,\quad \sup_{\delta>0}\omega_\alpha(f,\ \delta)/\varphi(\delta)<\infty\},$$

где $X=L_p(0,\ 2\pi)$, $1\leqslant p<\infty$, или $X=C(0,\ 2\pi)$. Показано, что $H^{\varphi,\alpha}=H^{\varphi,\beta}$ при $\beta\geqslant\alpha>0$ для $\varphi(\delta)\in\Phi_\alpha^0$ (см. (13.68)). Для степенных функций $\varphi(\delta)=\delta^\lambda$ это было установлено ранее (P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Görlich, R. L. Stens [1]). О классе $H^{\varphi,\alpha}$ в многомерном случае см. в работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [4].

Можно рассматривать более общие модули непрерывности в соответствии с идеями Э. Поста, см. (20.11). Далеко идущие обобщения модулей непрерывности можно найти в работах J. Boman [1], J. Boman, H. S. Shapiro [1], H. S. Shapiro [1, с. 219].

21.1. В работе А. А. Килбаса [9] показана обобщенная гельдеровость некоторых многомерных интегралов типа потенциала по ограниченной области многомерного евклидова пространства R^n, частным случаем которых являются интегралы со степенно-логарифмическими ядрами.

21.2. В работе Э. Я. Риекстыньша [1] показана возможность найти модифицированным методом последовательных разложений асимптотику более общего, чем дробный интеграл (16.1), интеграла свертки (17.1) при $x\to+\infty$ в предположении, что входящие в него функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют при $t\to+\infty$ степенно-логарифмическую асимптотику. Другие методы нахождения асимптотических разложений интегралов вида (17.1), (17.2) в этом случае, а также в случае чисто логарифмической асимптотики читатель может найти в монографии Э. Я. Риекстыньша [2] (см., например, § 32).

22.1. Можно рассматривать дробное интегродифференцирование функций, заданных на кривых в комплексной плоскости. Обстоятельное исследование в такой ситуации провел W. E. Sewell [1, 2], рассматривавший дробное интегродифференцирование (22.2), (22.3) с интегрированием вдоль кривой, на которой задана функция. Им, в частности, выделен класс спрямляемых кривых, на которых дробный интеграл сходится абсолютно при $f(z)\equiv 1$. На кривых этого класса доказаны следующие результаты: а) существование младших производных $(\mathcal{D}^{\beta}f)(z)$ при существовании $(\mathcal{D}^{\alpha}f)(z)$, $\beta<\alpha$; б) полугрупповое свойство; в) инвариантность дробной дифференцируемости при конформных отображениях (отметим, что здесь в построениях В. Сьюелла в неявном виде содержится производная от функции по функции, см. о последнем понятии в § 18, п. 3°); г) теоремы типа Харди — Литтлвуда (типа леммы 13.1) о существовании дробной производной $\mathcal{D}^{\alpha}f$ на кривой, если $f(z)$ удовлетворяет на этой кривой условию Гельдера порядка $\lambda>\alpha$; д) неравенство типа Бернштейна: $|P_n^{(\alpha)}(z)|\leqslant An^{\alpha}$ (вне «начальной» точки интегрирования z_0), где $P_n(z)$ — многочлен, а также ряд других теорем, связанных с приближением многочленами в комплексной области.

Ряд уточнений и обобщений результатов В. Сьюелла содержится в работах В. И. Белого [1—6], В. И. Белого, Ю. И. Волкова [1], где имеются также различные приложения дробного интегродифференцирования к задачам теории приближения в комплексной области.

В связи с дробным интегродифференцированием по кривым упомянем также работу W. Fabian [1], в которой дробный интеграл (производная) $(\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha}f)(z)$ рассматривается при любых, в том числе комплексных, α вдоль кривой L_{z_0}, начинающейся из точки z_0 и уходящей на бесконечность. Изучается поведение $z^{-\mu}(\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha}f)(z)$ при $z\to\infty$ вдоль кривой, если известно, что $z^{-\nu}f(z)\to A=\text{const}$ при $z\to\infty$ вдоль кривой. Эти результаты применяются в [1] к суммированию рядов и интегралов.

В другой работе W. Fabian [3] для дробной производной $\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha}f$ вдоль такой же кривой исследуется характер ветвления в точке z_0, а также в точках, в которых для $f(z)$ допускаются особенности.

22.2. T. Carleman [2, с. 42—47] доказал теорему: для всякой функции $f(x)$, $x\in R^1$, такой, что $\int\limits_0^A |f(x)|\,dx$ растет не быстрее $|A|^{\gamma}$ при каком-нибудь $\gamma>0$, существуют функции $f_+(z)$, $f_-(z)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскостях $\mathbf{C}_+$, $\mathbf{C}_-$ соответственно и такие, что

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_{x'}^{x''}[f_+(x+iy)-f_-(x-iy)]\,dx=\int\limits_{x'}^{x''}f(x)\,dx$$

равномерно по всем $x', x''\in[a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$. Результат о единственности функций $f_\pm(z)$ дан Т. Карлеманом в терминах дробных интегралов. Именно Т. Карлеман показал единственность функций $f_\pm(z)$ с точностью до многочленов в классе функций, удовлетворяющих при каких-нибудь $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ условию

$$\sup_{z\in\mathbf{C}_\pm}\left|\frac{(I_{z_0}^{\alpha}f_\pm)(z)}{(z-z_0)^{\alpha}(z-\bar z_0)^{\beta}}\right|<\infty,$$

где $z_0\in\mathbf{C}_\pm$ (при соответственном выборе знаков).

22.3. Для дробного дифференцирования Вейля $f^{(\alpha)}(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(ik)^{\alpha}f_kz^k$ аналитических в круге функций $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ в работе G. H. Hardy, J. E. Littlewood [7, с. 232] доказана оценка

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|f^{(\alpha)}(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right)^{1/p}\leqslant c(1-r)^{-\alpha}\left(\int\limits_0^{2\pi}|f(r^{1/2}e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p},\quad 0<r<1,$$

а также аналогичная оценка для дробного дифференцирования $\mathcal{D}_0^\alpha f$ с добавлением множителя $r^{-\alpha}$ в правой части.

В работе T. M. Flett [5] использовалась модификация дробного интегрирования Вейля в виде

$$\mathfrak{B}^\alpha f=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k}{k^\alpha}z^k,\qquad f_0=0,$$

а в работах T. M. Flett [6—8] — в виде

$$\mathfrak{J}^\alpha f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{(k+1)^\alpha}z^k. \tag{23.12}$$

Эти операторы имеют представление

$$\mathfrak{B}^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z\frac{\varphi(t)\,dt}{[\ln(z/t)]^{1-\alpha}t},\qquad \mathfrak{J}^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)z}\int\limits_0^z\frac{\varphi(t)\,dt}{[\ln(z/t)]^{1-\alpha}},$$

т. е. являются конструкциями типа Адамара (18.42). Отметим, в частности, полученную в работе T. M. Flett [5] оценку

$$|(\mathfrak{B}^\alpha f)(re^{i\theta})|\leqslant Ar(1-r)^{-\alpha}\Phi(\theta),\quad 0\leqslant r<1,$$

где $\Phi(\theta)=\sup\limits_{z\in S_\eta(\theta)}|f(z)|$, $S_\eta(\theta)$ — часть единичного круга, заключенная между касательными, проведенными из точки $e^{i\theta}$ к окружности радиуса η с центром в 0, и бóльшей дугой этой окружности между точками касания.

В работе T. M. Flett [7, теорема 6] выяснено действие оператора $\mathfrak{J}^\alpha$ в классах Бергмана $A^{p,\beta}$, $0<p<\infty$, $\beta>-1$, аналитических в единичном круге функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|^p_{A^p,\,\beta}=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p(1-r)^\alpha d\theta dr<\infty.$$

Именно $\mathfrak{J}^\alpha: A^{p,\,\beta}\to A^{p,\,\beta-\alpha p}$ для любых $\alpha\in R^1$, таких, что $\beta-\alpha p>-1$.

Уточнение теоремы 22.2 Харди—Литтлвуда о действии оператора $\mathfrak{J}^\alpha$ из пространства Харди H^p, $0<p<\infty$, в пространство H^q, $q=\gamma p/(\gamma-\alpha)$, при дополнительном предположении, что $f(z)=O((1-|z|)^{-\gamma})$, $0<\alpha<\gamma\leqslant 1/p$, получено в работе Kim Hong Oh [1]. Отметим, наконец, что в работе [2] этого автора теорема 22.2 распространена на случай функций $f(z,w)$ двух переменных, где $(z,w)\in\mathbf{C}^2$, $|z|\leqslant 1$, $|w|\leqslant 1$.

22.4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood [5] доказали теоремы вида 14.6, 14.7 и 19.9 о действии дробного интегродифференцирования в липшицевых пространствах функций $f(z)$, аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условию

$$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i(\theta+h)})-f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}\leqslant c|h|^\lambda,\quad p\geqslant 1.$$

Эти результаты были распространены в работе A. E. Gwilliam [1] на значения $0<p<1$.

22.5. В работе А. А. Пекарского [3] предложена модификация дробной производной $(\mathcal{D}_0^\alpha f)(z)$ аналитических в единичном круге функций:

$$f^{(\alpha)}(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{t^{-1-[\alpha]}f(t)}{(1-z/t)^{1+\alpha}}dt=\mathcal{D}_0^\alpha[z^{\alpha-[\alpha]}f(z)], \tag{23.13}$$

где $\alpha>0$, $|z|<\rho<1$ (ср. с (22.33) и (22.52)). Эта модификация отвечает разложению $f^{(\alpha)}(z)=\sum\limits_{k=[\alpha]}^{\infty}\frac{\Gamma(k-[\alpha]+1+\alpha)}{\Gamma(k-[\alpha]+1)}f_k z^{k-[\alpha]}$ (ср. с (22.36)). Она имеет то удобство в теории аналитических функций, что, подобно операции $z^{\alpha}(\mathcal{D}_0^{\alpha}f)(z)$ и операции (23.12), переводит аналитические функции в аналитические. Отметим, что в этой работе получены неравенства типа Бернштейна для дробных производных (23.13) рациональных функций. Исследования в указанной работе, а также в работах того же автора [1, 2] связаны с аппроксимацией аналитических функций из пространств Харди — Бесова рациональными функциями (в [2] использовалось дробное дифференцирование вида (23.12)).

22.6. Пусть $f_{\alpha}(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(ik)^{-\alpha}f_k z^k$ — дробный интеграл Вейля, см. (22.56). В ряде работ I. I. Hirshman [1], T. M. Flett [2, 4] изучены функции типа Литтлвуда — Пэли

$$g_{k,\alpha}(\theta)=\left\{\int\limits_0^1(1-\rho)^{k-\alpha k-1}\,|\rho^{-1}f_{\alpha-1}(\rho e^{i\theta})|^k d\rho\right\}^{1/k}$$

и некоторые другие их модификации с дробными интегралами (производными) Вейля. Доказаны, в частности, оценки нормы $g_{k,\alpha}(\theta)$ в $L_p(-\pi,\pi)$ через норму f в классе Харди H_p, $0<p<\infty$. В связи с этим смотри также работы G. Sunouchi [1], S. Koizumi [1].

22.7. В работе J. L. Lavoie, R. Tremblay, T. J. Osler [1], см. также J. L. Lavoie, T. J. Osler, R. Tremblay [1], с помощью модификации интегральной формулы Коши (22.4) введено дробное интегродифференцирование $\mathcal{D}^{\alpha}$ аналитических функций вида $t^{\beta}(\ln t)^{\delta}f(t)$ ($\delta=0$ или $\delta=1$), имеющих степенно-логарифмическое ветвление. Модификация заключается в том, что интегрирование ведется по петле Похгаммера ($z+$, $0+$, $z-$, $0-$), см. рис. 2. Ее целью является обеспечение единой формы записи для всех α и β (за исключением $\alpha=-1,-2,\ldots,\beta=0,\pm1,\pm2,\ldots$). Для такого дробного интегродифференцирования доказаны полугрупповое свойство и формула Лейбница для $\mathcal{D}^{\alpha}(uv)$. Последней формуле в комплексной плоскости посвящен ряд работ T. J. Osler [1, 4, 5, 7, 8], где исходным определением дробного интегродифференцирования служит формула (22.30). По поводу формулы Лейбница см. также § 17, п. 2°, 15.3.

О роли, которую в случае функций с ветвлением играет выбор контура интегрирования (выбор «петель Похгаммера»), см. также работу L. M. B. C. Campos [1].

22.8. В работе T. J. Osler [2] изучена производная от функции по функции (см. § 18, п. 3°), определяемая как

$$\mathcal{D}_{h(z)}^{\alpha}f(z)=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(t)\,h'(t)\,dt}{[h(t)-h(z)]^{1+\alpha}},$$

где разрез для $[h(t)-h(z)]^{-1-\alpha}$ проходит через точки $t=z$ и $t=h^{-1}(0)$, а контур L проходит через точку $h^{-1}(0)$ и охватывает точку z. Доказана, в частности, формула перехода

$$\mathcal{D}_{g(z)}^{\alpha}f(z)=\mathcal{D}_{h(z)}^{\alpha}\left\{\frac{f(z)\,g'(z)}{h'(z)}\left[\frac{h(z)-h(w)}{g(z)-g(w)}\right]^{1+\alpha}\right\}\Bigg|_{w=z},$$

где подставляется $w=z$ после вычисления $\mathcal{D}_{h(z)}^{\alpha}\{\ldots\}$.

22.9. В работах M. C. Gaer [1] и M. C. Gaer, L. A. Rubel [1, 2] развит своеобразный подход к дробному интегродифференцированию через исследование его как (целой) функции параметра α. Рассмотрение ведется в классе функций G, аналитических в окрестности вещественной прямой R^1 и исчезающих на бесконечности. Показав, что для любого $t\in R^1$ и любой функции $f\in G$ существует единственная целая (по α) функция $F(z,t)$ экспоненциального типа с порядком роста по мнимой оси, меньшим π, такая, что $\frac{1}{n!}f^{(n)}(t)=F(n,t)$, авторы определили дробную производную $f^{(z)}(t)$ произвольного порядка z как $f^{(z)}(t)=\Gamma(1+z)\,F(z,t)$. На основе этого в указанных работах проведено исследование интегродифференцирования $f^{(z)}(t)$.

22.10. В работе H. Kober [7] дробное интегрирование в форме Лиувилля $(1/\Gamma(\alpha))\times$ $\times\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}f(t\pm z)\,dt$ (а также в форме Рисса) исследовано в пространствах Харди функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости или полосе.

22.11. Разности дробного порядка (с фиксированным шагом $h=1$) в комплексной плоскости рассматривались в работе J. B. Diaz, T. J. Osler [1] в виде

$$\Delta^{\alpha}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(z+\alpha-k),\quad z\in\mathbb{C},$$

ср. с (20.2). Основной результат работы — формула

$$\Delta^{\alpha} f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\,\Gamma(t-z-\alpha)}{\Gamma(t-z+1)}\,dt,$$

где контур C охватывает луч $L=\{t: t=z+\alpha-\xi,\ \xi\geqslant 0\}$ в положительном направлении; функция $f(z)$ предполагается аналитической в области, содержащей луч L и такой, что $|f(z)|\leqslant M|(-z)^{\alpha-p}|$. Доказана также формула Лейбница для разностей $\Delta^{\alpha} f(z)$.

22.12. Большой круг применений дробного интегродифференцирования в теории аналитических и мероморфных функций был дан в работах М. М. Джрбашяна. Так, в его работах [1; 2, гл. IX, § 1—3; 3] использовано дробное интегродифференцирование для описания новых классов мероморфных функций и получения параметрических представлений для этих классов. В частности, в терминах функции $v_{\alpha}(\rho e^{i\varphi}, z) = \rho^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}\log|1-\rho e^{i\varphi}/z|$, $\alpha>-1$, где интегродифференцирование применяется по переменной ρ, получено обобщение известной в теории мероморфных функций формулы Иенсена — Неванлинны.

В работах М. М. Джрбашяна [6, 7] дробное интегродифференцирование $\mathcal{D}_{-}^{\alpha}$ использовано для обобщения понятия квазианалитичности функций. Это обобщение основано на замене производных целого порядка в импликации $f^{(n)}(x_0)=0$, $n=0, 1, \ldots \Rightarrow f(x)=0$ на дробные производные вида $(\mathcal{D}_{-}^{n\alpha}f)(x_0)$, $0<\alpha<1$. О применении дробного дифференцирования в теории квазианалитических функций см. также в работе М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [3].

В работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [4, 5] дробное интегродифференцирование Римана — Лиувилля использовалось для построения и исследования разложений по биортогональным системам, связанным с функциями Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$. Показано, что среди этих биортогональных систем содержатся системы собственных (и присоединенных) функций некоторых взаимно сопряженных краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. В связи с этим в работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [5, 6] проведено обстоятельное исследование таких краевых задач. Дальнейшее развитие эти вопросы получили в работах М. М. Джрбашяна [8—11].

22.13. Имеются результаты о поведении на бесконечности функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z>0$. В работе Y. Komatu [1] доказано, что если $\mathrm{Re}\, f(z)>0$, то $z^{\alpha-1}(\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha}f)(z) \to c/\Gamma(2-\alpha)$ при $z\to\infty$, $|\arg z|\leqslant a<\pi/2$, где c не зависит от $f(z)$ и α, $\alpha\in R^1$, $\mathrm{Re}\, z_0>0$, $\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha}f$ — интегродифференцирование (22.3). Доказан также аналог такого утверждения для единичного круга.

В работе Y. Komatu [2] для функций $f(z)$, аналитических в единичном круге и таких, что $\mathrm{Re}\, f(z)>0$ и $f(0)=1$, доказана оценка $\|I_0^{\alpha}f\|_{L_p(|z|=r)}\leqslant r^{-\alpha}\|I_0^{\alpha}k\|_{L_p(|z|=r)}$, где $k(z)$ — конкретная функция, $\alpha>0$, $I_0^{\alpha}f$ — дробный интеграл (22.2) при $z_0=0$.

22.14. Дробное интегродифференцирование Римана — Лиувилля $(\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha}f)(z)$, $\alpha\in R^1$, а также его модификация (22.55) использовались для изучения свойств однолистных, выпуклых и звездообразных функций (неравенства для дробных производных таких функций; вопросы, связанные с проблемой Бибербаха о коэффициентах однолистных функций, оценки коэффициентов и др.) в работах S. Owa [1 — 15], G. L. Reddy, K. S. Padmanabhan [1], H. M. Srivastava, S. Owa [1, 2], S. Owa, K. Nishimoto [2], S. Owa, C. Y. Shen [1], T. Sekine, S. Owa, K. Nishimoto [1], H. M. Srivastava, T. Sekine, S. Owa, K. Nishimoto [1], S. Owa, O. P. Ahuja [1], S. Owa, M Obradovic [1].

22.15. В работе I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova [1] рассмотрено весовое обобщение $(\mathcal{D}_{\alpha,\mu}f)(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k+\mu)}{\Gamma(\alpha k-\alpha+\mu)} f_k z^{k-1}$ специального оператора Гельфонда — Леонтьева (22.41) и для (правого) обратного к нему оператора интегрирования $(J_{\alpha,\mu}f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha k+\mu)}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\mu)} f_k z^{k+1}$ получено интегральное представление типа (22.42):

$$(J_{\alpha,\mu}f)(z) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\mu-1} f(zt^{\alpha})\,dt, \quad \mu\geqslant 1.$$

В работе Н. Е. Линчука [1] описаны все линейные непрерывные операторы $T: H(G)\to H(G)$, коммутирующие с оператором $J_{\alpha,\mu}$; $H(G)$ — пространство аналитических в звездообразной области функций с топологией компактной сходимости.

22.16. Операторы обобщенного интегродифференцирования (22.46) в виде $L^{\alpha} f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha} f_k z^k$ исследовались в работе Y. Komatu [3] с полугрупповой точки зрения и для них получено в отличие от равенства (22.48) представление

$$L^{\alpha} f = \int_0^1 t^{-1} f(zt)\, d\sigma_{\alpha}(t), \quad f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k, \quad |z| < 1.$$

Здесь мера $d\sigma_{\alpha}(t)$ определяется по α и $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выделен случай $a_k = 1/k$, отвечающий оператору $\mathfrak{B}^{\alpha}$ дробного интегрирования типа Адамара, см. п. 22.3. О некоторых неравенствах для операторов $L^{\alpha} f$ см. также Y. Komatu [4].

22.17. Пусть $a \in R^1$, $H(a)$ — класс функций $f(z)$, аналитических в области $S(a) = \{z \in C: |\mathrm{Im}\, z| < a,\ 0 < a \leqslant +\infty\}$ и обладающих свойством: для любого числа t, $0 \leqslant t < a$, существует $A(t) \geqslant 0$ такое, что для каждого $z = x + iy \in \overline{S(t)}$ выполняется неравенство $|f(z)| \leqslant A(t) \exp\{x^2/2 - |x|(t^2 - y^2)^{1/2}\}$. В работе П. К. Русева [1] показано, что оператор типа Эрдейи — Кобера (18.8)

$$(I_{-1/2,\alpha+1/2} f)(z) = 2[\Gamma(\alpha + 1/2)]^{-1} \int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - 1/2} f(zt)\, dt$$

при $-1/2 < \alpha < 1/2$ осуществляет изоморфизм топологического векторного пространства $H(a)$, наделенного топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $S(a)$. На основании этого показано, что *необходимым и достаточным условием разложимости аналитической функции* $f(z)$ *в полосе* $S(a)$ *в ряд по обобщенным полиномам* Лагерра $\{L_n^{(\alpha)}(z^2)\}_{n=0}^{\infty}$ (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [2, с. 188]) при $\alpha \in R^1$, $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, является принадлежность $f(z)$ подпространству $H(a)$, состоящему из четных функций.

22.18. Пусть

$$(Pf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} b\left(\frac{z}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t^2} \tag{23.14}$$

— оператор типа (22.48), где спрямляемая замкнутая жорданова кривая C_z охватывает точку z и лежит в области аналитичности G функции $f(z)$, а функция $b(z)$ аналитична при $|z-1| > 0$ и имеет на бесконечности нуль не ниже второго порядка. Ю. Ф. Коробейником [1, 2] показано, что оператор (23.14) дает общее представление линейного оператора, непрерывного в пространстве $H(G)$ аналитических в области G функций, а в случае, если $0 \in G$, он совпадает для z, достаточно близких к 0, с некоторым оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда — Леонтьева. При этом оператор P и его степени допускают также представление в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка:

$$(P^m f)(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\Delta_{k,m}}{k!} z^{k-m} f^{(k)}(z), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где числа $\Delta_{k,m}$ определяются по $b(z)$ и удовлетворяют условию $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\Delta_{k,m}|} = 0$, $m \geqslant 1$.

3°. Ответы на некоторые вопросы, поставленные на конференции по дробному исчислению (г. Нью-Хейвен, 1974 г.). Завершим часть книги, относящейся к теории дробного исчисления функций одного переменного, «закрыв» некоторые вопросы, поставленные на указанной конференции, см. T. J. Osler [9]. Приведем те из вопросов, на которые имеются ответы.

1. *Вопрос А. Эрдейи* (A. Erdelyi). Пусть $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и S — множество неотрицательных α таких, что $(\mathscr{D}_{0+}^{\alpha} f)(x)$ существует и непрерывна (локально интегрируема). Содержит ли S максимальный элемент?

2. *Вопрос Л. Лорха* (Lee Lorch). Имеет ли теорема о среднем в дифференциальном исчислении аналог, связывающий разности дробного порядка с производными (того же) дробного порядка?

3. *Вопрос Э. Лава* (E. R. Love). Известны ли теоремы, связывающие дробные интегралы $I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $I_{b+}^{\alpha}\varphi$ с разными нижними пределами интегрирования?

4а. *Вопрос Б. Росса* (B. Ross). Операция $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{\beta}_{b+}$ при $a \neq b$ может рассматриваться с точки зрения отклонения от полугруппового свойства $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{\beta}_{a+} = \mathcal{D}^{\alpha+\beta}_{a+}$. Каковы теоремы, характеризующие это отклонение?

7. *Вопрос Дж. Лью* (J. S. Lew). Пусть $\{I^{\alpha}\}_{\alpha\geqslant 0}$ — семейство операторов в $L_1(0, 1)$ или $L_2(0, 1)$. Будут ли условия $I^0 f = f$, $I^1 f = \int\limits_0^t f(u)\,du$, $I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta}$, I^{α} непрерывен в некоторой операторной топологии, $I^{\alpha} f \geqslant 0$ для $f \geqslant 0$ определять семейство $\{I^{\alpha}\}_{\alpha\geqslant 0}$ однозначно?

Ответы. 1. Ответ на этот вопрос отрицателен: для $f(x) = x^{\beta}\ln x$, $\beta > 0$, множество S есть открытый справа интервал $S = [0, \beta)$ или $S = [0, \beta + 1)$ соответственно случаям непрерывности или интегрируемости $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f)(x)$. Во втором случае и для $f(x) = x^{\beta}$, $\beta > 0$, имеем $S = [0, \beta + 1)$.

2. В случае, например, функций, заданных на всей оси, ответ легко может быть дан в форме $(\Delta^{\alpha}_{h} f)(x) = h^{\alpha}(\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f)_h(x)$, где $g_h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(\tau)\,\varphi(x - \tau h)\,d\tau$ — усреднение функции $\varphi(x)$ с ядром (20.14), см. формулу (20.30). Однако неясно, можно ли (в случае непрерывных функций) записать равенство $(\Delta^{\alpha}_{h} f)(x) = h^{\alpha}(\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f)(\xi)$, $\xi \in R^1$. Оно заведомо справедливо в случае целых $\alpha = l$, что вытекает, например, из формулы

$$(\Delta^{l}_{h}f)(x) = \int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h f^{(l)}(x + t_1 + \ldots + t_l)\,dt_1 \ldots dt_l.$$

3. Ответ дан в § 13, см. следствие из теоремы 13.9.

4а. Ответ найден также в следствии из теоремы 13.9: $(I^{\beta}_{a+} I^{\alpha}_{c+}\varphi)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a+}\psi)(x)$, $x > a > c$, где $\psi(x)$ — то же, что в указанном следствии.

7. Ответ см. в § 4, п. 2°, 2.12.