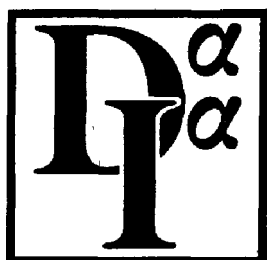


С.Г.Самко/А.А.Килбас/О.И.Маричев

ИНТЕГРАЛЫ
И ПРОИЗВОДНЫЕ
ДРОБНОГО
ПОРЯДКА
И НЕКОТОРЫЕ
ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ



МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1987

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.** Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Книга посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложениям теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты указанной теории. В конце каждой главы приводятся исторические сведения и обзоры работ по тематике главы. Книга носит энциклопедический характер, охватывает самые разнообразные известные формы дробного интегрирования и дифференцирования и огромное число публикаций в этой области вплоть до 1986 г.

Включение в книгу необходимых предварительных сведений и подробное изложение доказательств делают ее доступной студентам физико-математических факультетов, а также технических вузов.

Предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим анализом и его приложениями.

Табл. 11. Ил. 6. Библиогр.: 1421 назв.

Редактор

академик АН СССР С. М. Никольский

Рецензенты:

П. И. Лизоркин, д-р физ.-мат. наук,
М. М. Смирнов, д-р физ.-мат. наук,
А. П. Прудников, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. Брычков, канд. физ.-мат. наук

ГЛАВА

3

Дальнейшие свойства дробных интегралов и производных

В настоящей главе продолжается изучение свойств дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля на конечном и бесконечном промежутках вещественной оси. Сначала рассматриваются вопросы, играющие важную роль далее в главах 6, 7 при исследовании интегральных уравнений первого рода: композиции дробных интегралов и производных со степенно-экспоненциальными весами, связи между дробными и сингулярными интегралами, линейные комбинации левосторонних и правосторонних дробных интегралов. Далее дается описание дробных интегралов от функций из L_p и из весовых гильбертовских пространств $H_0^\lambda(\rho)$ на отрезке и изучаются различные аспекты дробного интегродифференцирования в теории функций действительного переменного (действие операторов дробного интегродифференцирования из липшицевых классов H_p^λ и $\tilde{H}_p^\lambda$, дробное дифференцирование абсолютно непрерывных функций, неравенства для дробных интегралов и производных, связи дробного интегродифференцирования с вопросами суммируемости рядов и интегралов и др.). В заключение приводятся обобщения классического правила Лейбница о производной произведения двух функций и выводятся асимптотические разложения дробных интегралов вблизи конечных точек промежутка.

§ 10. ВЕСОВЫЕ ФОРМУЛЫ КОМПОЗИЦИЙ

В настоящем параграфе рассматриваются композиции операторов дробного интегродифференцирования со степенными, экспоненциальными и степенно-экспоненциальными весами в пространстве L_p , $1 \leq p < \infty$, и исследуется вопрос о коммутативности таких операторов. Основное внимание уделяется композициям операторов вида $x^\gamma I_{0+}^\alpha x^\delta$, при изучении которых раскрывается многовариантная зависимость свойств этих композиций, в частности областей определения и значения, от величин параметров. Поскольку интегралы чисто мнимого порядка на всем пространстве L_1 не определены, а там, где определены (см. § 2, п. 4°), не ограничены, то случаи, связанные с такими интегралами, здесь, как правило, не рассматриваются. Для сокращения записей в ряде формул используются следующие обозначения.

Пусть комплексные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ такие, что существует только одно α_j , для которого $\operatorname{Re} \alpha_j = \min(\operatorname{Re} \alpha_1, \dots, \operatorname{Re} \alpha_n, \operatorname{Re} \alpha_{n+1})$. Тогда положим $\alpha_{n+1} = 0$ и введем функцию

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ -\alpha_j, & \text{если существует } \alpha_j, \text{ для которого} \\ & \operatorname{Re} \alpha_j < \min(0, \operatorname{Re} \alpha_1, \dots, \operatorname{Re} \alpha_{j-1}, \operatorname{Re} \alpha_{j+1}, \dots, \operatorname{Re} \alpha_n) \end{cases} \quad (10.1)$$

(если существуют α_j, α_k такие, что $\alpha_j \neq \alpha_k$, но $\operatorname{Re} \alpha_j = \operatorname{Re} \alpha_k = \min(0, \operatorname{Re} \alpha_1, \dots, \operatorname{Re} \alpha_n)$, то функция $m(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ не определяется);

$$L_{p,*}(a, b) = \begin{cases} L_p(a, b) & \text{при } p > 1, \quad 0 \leq a < b \leq \infty, \\ L_1((a, b); |\ln x| + 1) & \text{при } p = 1, \quad 0 \leq a < b \leq \infty; \end{cases} \quad (10.2)$$

$$I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_p(0, b)) = \begin{cases} L_p(0, b), & \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ I_{0+}^{-\alpha}(L_{p,*}(0, b)), & \operatorname{Re} \alpha < 0. \end{cases} \quad (10.3)$$

Символ $I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_{p,*}(0, b))$ определим через правую часть (10.3), в которой поменяем местами L_p и $L_{p,*}$.

Символы $I_{-}^{m(\alpha)*}(L_p((a, \infty); x^q))$ и $I_{-}^{m(\alpha)*}(L_{p,*}((a, \infty); x^q))$ введем аналогично двум предыдущим, но по отношению к пространствам $L_p(a, \infty)$ с весом x^q (при $p > 1$) или $x^q(|\ln x| + 1)$ (при $p = 1$).

Отметим, что $L_{1,*}(a, b) \subset L_1(a, b)$ (причем $L_{1,*}(a, b) = L_1(a, b)$, если $0 < a < b < \infty$) и, например, $x^{-1} \ln^{-2} x \in L_1(0, b)$, но $x^{-1} \ln^{-2} x \notin L_{1,*}(0, b)$.

1°. Композиции двух односторонних интегралов со степенными весами. Как отмечалось в § 2, для операторов дробного интегрирования выполняется полугрупповое свойство (2.65), которое приводит к формулам

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x), \quad I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x), \quad (10.4)$$

$$I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f(x), \quad I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x). \quad (10.5)$$

Исходя из теоремы 2.5 и замечания 2.3, несложно указать условия их справедливости, которые можно свести в следующую теорему.

Теорема 10.1. Пусть α и β — такие комплексные числа, что определена функция $m(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ (соответственно $m(\alpha, \alpha + \beta)$). Тогда в классах функций $I_{a+}^{m(\alpha, \beta, \alpha + \beta)}(L_p(a, b))$ и $I_{b-}^{m(\alpha, \beta, \alpha + \beta)}(L_p(a, b))$, $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \leq p < \infty$ (соответственно $I_{a+}^{m(\alpha, \alpha + \beta)}(L_p(a, b))$ и $I_{b-}^{m(\alpha, \alpha + \beta)}(L_p(a, b))$), $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \leq p < \infty$) имеют место первые из формул (10.4) и (10.5) (соответственно вторые из формул (10.4) и (10.5)). Формулы (10.5) сохраняют силу и при $b = +\infty$, если пространство $L_p(a, b)$ заменить на весовое пространство $L_p((a, \infty); x^{p(M+1)-2})$, где $M = m(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \alpha + \beta, -\alpha - \beta)$.

Замечание 10.1. Если функция $m(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ (соответственно $m(\alpha, \alpha + \beta)$) не определена, то утверждения теоремы сохраняют силу, если классы допускаемых функций $f(x)$ соответственно сузить условиями существования суммируемых производных порядка $\mathcal{D}^{-\gamma_j} f$, где γ_j те две или четыре из точек $0, \alpha, \beta, \alpha + \beta$ (две или три из точек $0, \alpha, \alpha + \beta$), которые находятся на прямой $\{\gamma: \operatorname{Re} \gamma = \min(0, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta, \operatorname{Re}(\alpha + \beta))\}$ (соответственно $\{\gamma: \operatorname{Re} \gamma = \min(0, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re}(\alpha + \beta))\}$).

Доказательство. Утверждения теоремы 10.1 и замечания 10.1 являются прямыми следствиями теорем 2.4, 2.5 и замечания 2.3 с учетом того, что на конечном отрезке $L_p(a, b) \subset L_1(a, b)$ при $p > 1$, а также с

учетом обозначения (10.1), свойства $I_{a+}^0(L_p(a, b)) = L_p(a, b)$ и возможности замен переменных вида $x = a + b - y$ при переходе от операторов I_{a+}^α к операторам I_{b-}^α при $b < \infty$. Для случая $b = +\infty$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 10.6 и формулы (10.6) после замен x на x^{-1} и $f(x)$ на $x^{-\alpha-\beta-1}f(x^{-1})$, а также из обозначения (10.1).

Из вторых формул (10.5) при $b = \infty$ и (10.4) при $a = 0$ после указанных замен получаются следующие соотношения с весовыми множителями:

$$x^\alpha I_{0+}^\beta x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^\alpha x^\beta f(x) = I_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f(x) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(x), \quad (10.6)$$

$$x^\alpha I_{-}^\beta x^{-\alpha-\beta} I_{-}^\alpha x^\beta f(x) = I_{-}^\alpha I_{-}^\beta f(x) = I_{-}^{\alpha+\beta} f(x). \quad (10.7)$$

Поэтому естественно вначале рассмотреть вопрос о свойствах и действии композиций двух операторов вида $x^\nu I_{0+}^\alpha x^\delta$ (здесь и далее множители x^ν и x^δ означают операторы умножения на функции x^ν и x^δ в указанном порядке). Для более точного описания пространства, куда действуют такие композиции, нам понадобится следующая

Лемма 10.1. Пусть $\psi(x) \in L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $p(1 + \operatorname{Re} \mu) > 1$, и $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$. Тогда для того чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu f(x)$, где $f(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_p(0, b))$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = x^\mu I_{0+}^\alpha g(x)$, где $g(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_{p,*}(0, b))$, или в виде $\psi(x) = x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^\alpha x^\varepsilon g_1(x)$, где $g_1(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)*}(L_p(0, b))$, $p(1 + \operatorname{Re} \varepsilon) > 1$. Из указанных классов функций операторы $I_{0+}^\alpha x^\mu$, $x^\mu I_{0+}^\alpha$ и $x^{\mu-\varepsilon} I_{0+}^\alpha x^\varepsilon$ при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ ограничено действуют на пространство $L_p((0, b); x^{-p(\alpha+\mu)})$.

Доказательство. Случай $\operatorname{Re} \alpha > 0$. I часть. *Необходимость.* Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu f(x)$, $f(x) \in L_p(0, b)$, $1 \leq p < \infty$. Покажем, что существует функция $g(x) \in L_{p,*}(0, b)$, для которой выполняется соотношение

$$I_{0+}^\alpha x^\mu f(x) = x^\mu I_{0+}^\alpha g(x). \quad (10.8)$$

В качестве такой функции возьмем функцию, получаемую из (10.8) применением к обеим частям (10.8) оператора $I_{0+}^{-\alpha} x^{-\mu}$, и запишем ее в виде $g(x) = \frac{d}{dx}(xX(x))$, где $X(x) = (Xf)(x) = (x^{-1} I_{0+}^{1-\alpha} x^\alpha)(x^{-\mu-\alpha} I_{0+}^\alpha x^\mu) f(x)$. Тогда из неравенства (5.46'), дважды примененного к операторам, заключенным в круглые скобки, следует, что оператор X ограниченно действует из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$, если выполняются условия $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $p(1 + \operatorname{Re} \mu) > 1$, $1 \leq p < \infty$. Значит, если $f(x) \in L_p(0, b)$, то и функция $X(x) = x^{-1} I_{0+}^1 g(x) \in L_p(0, b)$. В случае $p > 1$ отсюда (см. также лемму 3.2, (3.15)) вытекает, что $g(x) \in L_p(0, b)$. В случае $p = 1$ условие $x^{-1} I_{0+}^1 g(x) \in L_1(0, b)$ эквивалентно $(|\ln x| + 1)g(x) \in L_1(0, b)$, см. неравенство (3.17'') при $\alpha = 1$ и $\lambda = 0$ или же соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^b x^{-1} \int_0^x |g(t)| dt dx &= \int_0^b \int_0^x |g(t)| dt d \ln x = \\ &= \ln x \int_0^x |g(t)| dt \Big|_{x=+0}^{x=b} - \int_0^b \ln x |g(x)| dx, \end{aligned} \quad (10.8')$$

из которых указанная эквивалентность следует, например, при $b < 1$. Таким образом, по определению (10.2) доказано, что $g(x) \in L_{p,*}(0, b)$, если $f(x) \in L_p(0, b)$.

Достаточность. Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) =$

$= x^\mu I_{0+}^\alpha g(x)$, $g(x) \in L_{p,*}(0, b)$, $1 \leq p < \infty$. Покажем, что существует функция $f(x) \in L_p(0, b)$, которая удовлетворяет уравнению (10.8). Сопоставив (10.8) с (3.16), видим, что функции f соответствует $\varphi + A_2\varphi$, а $g = \varphi$. Для того чтобы $f = \varphi + A_2\varphi \in L_p(0, b)$, в силу леммы 3.2 достаточно, чтобы $g = \varphi \in L_p(0, b)$ при $p > 1$. Но при $p = 1$ класс $L_1(0, b)$ следует сузить условием $(|\ln x| + 1)g(x) \in L_1(0, b)$. Это вытекает из представления оператора $(A_2\varphi)(x)$ при $x \rightarrow 0$, которое получается из равенств для A_2 в формулировке леммы 3.2 (эти равенства сохраняют силу и при $p = 1$). Тогда имеем $A_2(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} x^{-1} \int_0^x \left(\frac{y}{x-y} \right)^\alpha \left(\frac{y}{x} \right)^\mu \frac{dy}{y} = x^{-1} B(\alpha + \mu, 1 - \alpha) \equiv$

$$\equiv A_2(x, 0), (A_2\varphi)(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \pi^{-1} \mu \sin \alpha \pi \int_0^x A_2(x, 0) \varphi(t) dt = [B(\alpha, \mu)]^{-1} x^{-1} I_{0+}^1 \varphi(x).$$

Из последнего представления и из соотношения (10.8') (с заменой g на φ) видим, что условие $A_2\varphi \in L_1(0, b)$ эквивалентно $(|\ln x| + 1)\varphi \in L_1(0, b)$. Таким образом, если $g = \varphi \in L_{p,*}(0, b)$, то $f \in L_p(0, b)$.

Случай $\operatorname{Re} \alpha > 0$. II часть. Необходимость. Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu f(x)$, $f(x) \in L_p(0, b)$, $1 \leq p < \infty$, и $p(1 + \operatorname{Re} \epsilon) > 1$. Тогда в силу доказанной выше необходимости существует функция $g \in L_{p,*}(0, b)$, для которой выполняется равенство (10.8). Для этой функции $g(x)$ в силу доказанной выше достаточности существует другая функция $g_1 \in L_p(0, b)$, которая удовлетворяет аналогичному (10.8) соотношению $x^\epsilon I_{0+}^\alpha g(x) = I_{0+}^\alpha x^\epsilon g_1(x)$. Исключив из этих равенств $I_{0+}^\alpha g(x)$, получим формулу

$$I_{0+}^\alpha x^\mu f(x) = x^{\mu-\epsilon} I_{0+}^\alpha x^\epsilon g_1(x), \quad (10.9)$$

являющуюся аналогом (10.8), из которой следует представление функции ψ в виде $\psi(x) = x^{\mu-\epsilon} I_{0+}^\alpha x^\epsilon g_1(x)$, $g_1(x) \in L_p(0, b)$.

Достаточность доказывается аналогично (или из необходимости путем замены местами ϵ и μ , g_1 и f).

Случай $\operatorname{Re} \alpha < 0$. I часть. Необходимость. Пусть функция $\psi(x)$ представима в виде $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu f(x)$, $f(x) \in I_{0+}^{-\alpha}(L_{p,*}(0, b))$. Это означает, что $f(x) = I_{0+}^{-\alpha} f_1^*(x)$ и $\psi(x) = I_{0+}^\alpha x^\mu I_{0+}^{-\alpha} f_1^*(x)$, где $f_1^*(x) \in L_{p,*}(0, b)$. Поскольку $p(1 + \operatorname{Re} \mu) > 1$ и $f_1^*(x) \in L_{p,*}(0, b)$, а $-\operatorname{Re} \alpha > 0$, то с помощью доказанной достаточности (I часть) и свойства $I_{0+}^\alpha I_{0+}^{-\alpha} = E$ придем к соотношениям

$$\begin{aligned} \psi &= I_{0+}^\alpha (x^\mu I_{0+}^{-\alpha} f_1^*) = I_{0+}^\alpha (I_{0+}^{-\alpha} x^\mu f_2) = x^\mu f_2 = \\ &= x^\mu I_{0+}^\alpha (I_{0+}^{-\alpha} f_2) = x^\mu I_{0+}^\alpha g, \quad f_2 \in L_p(0, b), \end{aligned}$$

где $g = I_{0+}^{-\alpha} f_2 \in I_{0+}^{-\alpha}(L_p(0, b))$.

Достаточность в этом случае доказывается обратным ходом рассуждений по отношению к последним равенствам.

Случай $\operatorname{Re} \alpha < 0$. II часть. Доказательство проводится таким же образом, как и в случае $\operatorname{Re} \alpha > 0$ (II часть).

Последнее из утверждений леммы 10.1 вытекает из предыдущих и из неравенства (5.46'). Лемма доказана.

Теперь, воспользовавшись формулой Дирихле (1.32), вычислим композицию

$$\begin{aligned} &(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1 - \beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2 - \beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = \\ &= x^{\beta_1} \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha_1 - \beta_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1 - \beta_1)} t^{\beta_2 - \alpha_1} dt \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_2 - \beta_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_2 - \beta_2)} \tau^{-\alpha_2} f(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$= x^{\beta_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1}}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1)\Gamma(\alpha_2-\beta_2)} \tau^{\beta_2-\alpha_1-\alpha_2} f(\tau) d\tau \times \\ \times \int_0^1 u^{\alpha_2-\beta_2-1} (1-u)^{\alpha_1-\beta_1-1} (1-u(1-x/\tau))^{\beta_2-\alpha_1} du,$$

$$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0.$$

Отсюда, согласно (1.73), имеем следующее представление:

$$(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = x^{\beta_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)} \times \\ \times {}_2F_1(\alpha_1-\beta_2, \alpha_2-\beta_2; \alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2; 1-x/\tau) \tau^{\beta_2-\alpha_1-\alpha_2} f(\tau) d\tau. \quad (10.10)$$

Если в левой части (10.10) поменять местами операторы, заключенные в круглые скобки, то в правой части индексы 1 и 2 поменяются местами, что приведет там к оператору, получаемому из правой части (10.10) с помощью *формулы автотрансформации*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z) \quad (10.11)$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 2.1.4(23)]). Таким образом, при соответствующих условиях операторы в левой части формулы (10.10) коммутативны:

$$(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = \\ = (x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}) f(x). \quad (10.12)$$

Обозначим через T_{12} , F и T_{12} , T_{21} операторы, содержащиеся в обеих частях формул (10.10) и (10.12). Области определения этих операторов и области, на которые они ограничено действуют, существенно зависят от величин параметров и прежде всего от знаков $\operatorname{Re}(\alpha_1-\beta_1)$ и $\operatorname{Re}(\alpha_2-\beta_2)$. Эти области совпадают с пространством $L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$, или являются некоторыми подпространствами из $L_p(0, b)$, определяемыми соответствующими условиями представимости. Для более удобного описания этих подпространств в терминах представимости через функции $x^{-\nu} I_{0+}^{\nu} \psi(x)$, $\psi \in L_p, \ast(0, b)$, приходится накладывать дополнительные ограничения на параметры, порождаемые условием $p(1 + \operatorname{Re} \mu) > 1$ леммы 10.1, которая является основным инструментом такого описания. В тех случаях, когда указанные условия и области определения операторов пересекаются, на этом пересечении значения соответствующих операторов совпадают, что приводит к равенствам (10.10) или (10.12).

Перечисленные обстоятельства порождают весьма разветвленную картину свойств операторов T_{12} , T_{21} и F , которую описывают следующие теорема и связанная с ней табл. 10.1, где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2$.

Теорема 10.2. Пусть выполняются какие-либо из условий A_j табл. 10.1. Тогда оператор (операторы) B_j определен (определены) на множестве S_j из $L_p(0, b)$, $1 \leq p < \infty$, и ограничено отображает (отображают) S_j на множество $D_j \subset L_p(0, b)$, причем имеют место равенства E_j .

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что все параметры α_1 , α_2 , β_1 , β_2 — действительные числа. Допустим вначале, что выполняются условия A_1 . Тогда, как следует из формулы (5.46'), оператор

i	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) > 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_1) > 1, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_2) > 1$	T_{12}, F T_{21}	$L_p(0, b)$	$B L_p(0, b)$	(10.10), (10.12)
2	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) > 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0, p[1 + \operatorname{Re}(\beta_1 - \alpha_1 - \alpha_2)] > 1, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_2) > 1$	T_{12}, F	$L_p(0, b)$	$\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.10)
3	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) > 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0, p[1 + \operatorname{Re}(\beta_1 - \alpha_1 - \alpha_2)] > 1, p[1 + \operatorname{Re}(\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2)] > 1$	T_{12}, T_{21}	$L_p(0, b)$	$\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.12)
4	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) < 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_1) > 1, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_2) > 1, p(1 - \operatorname{Re}\beta_1) > 1, \operatorname{Re}\alpha > 0$	T_{12}, F	$L_p(0, b)$	$B L_p(0, b)$	(10.10)
5	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) < 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0, p[1 + \operatorname{Re}(\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2)] > 1, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_2) > 1, p(1 - \operatorname{Re}\beta_1) > 1, \operatorname{Re}\alpha > 0$	T_{12}, F	$L_p(0, b)$	$\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.10)
6	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) < 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0, p(1 - \operatorname{Re}\beta_1) > 1, p[1 + \operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2)] > 1, \operatorname{Re}\alpha < 0$	T_{12}	$\{x^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	$L_p(0, b)$	—
7	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) > 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) < 0, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_1) > 1, p(1 - \operatorname{Re}\beta_2) > 1, \operatorname{Re}\alpha > 0$	$T_{12}, F,$ T_{21}	$\{x^{\alpha_2 - \beta_2} I_{0+}^{\beta_2 - \alpha_2} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	$\{x^{\beta_1 - \alpha_1} I_{0+}^{\alpha_1 - \beta_1} \chi, \chi \in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.10), (10.12)
8	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) > 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) < 0, p(1 - \operatorname{Re}\alpha_1) > 1, p(1 - \operatorname{Re}\beta_2) > 1, \operatorname{Re}\alpha < 0$	T_{12}, T_{21}	$\{x^{\alpha_2 - \beta_2} I_{0+}^{\beta_2 - \alpha_2} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	$\{x^{\beta_1 - \alpha_1} I_{0+}^{\alpha_1 - \beta_1} \chi, \chi \in L_{p,*}(0, b)\}$	(10.12)
9	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) < 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) < 0, p[1 + \operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2)] > 1, p(1 - \operatorname{Re}\beta_1) > 1$	T_{12}	$\{x^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	$L_p(0, b)$	—
10	$\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) < 0, \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) < 0, p[1 + \operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1 - \beta_2)] > 1, p[1 + \operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_1 - \beta_2)] > 1$	T_{12}, T_{21}	$\{x^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$	$L_p(0, b)$	(10.12)
11	$p=1, \alpha_1=\alpha_2=0, \operatorname{Re}\beta_1 < 0, \operatorname{Re}\beta_2 < 0$	$T_{12}, F,$ T_{21}	$L_1((0, b); \ln^2 x + 1)$	$L_1(0, b)$	(10.10), (10.12)

$x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2 - \beta_2} x^{-\alpha_2}$ ограниченно действует из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$ (при условиях $p \geq 1, p(1 - \alpha_2) > 1$). Поэтому и композиция T_{12} ограниченно действует из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$, если еще $p(1 - \alpha_1) > 1$. На плотном в $L_p(0, b)$ множестве достаточно «хороших» функций $f(x)$ равенство (10.10) легко проверить непосредственным вычислением с помощью теоремы Фубини. Значит, оператор справа F также ограничен на этом плотном множестве и, следовательно, на всем $L_p(0, b)$. Отсюда по теореме 1.7 Банаха следует выполнение равенства (10.10) при условиях A_1 на всем пространстве $L_p(0, b)$. Формула (10.12) следует из (10.10) с помощью преобразования (10.11) и с учетом симметрии условий A_1 при перестановке индексов 1 и 2 местами.

Аналогичные рассуждения, но на основе формулы (3.17'') вместо (5.46'), применяемой дважды при $\lambda=1$ и $\lambda=0$, приводят к утверждению теоремы для последнего случая $j=11$.

Важно отметить, что области из $L_p(0, b)$, на которые действуют операторы T_{12} и T_{21} , вообще говоря, не совпадают, так как из леммы 10.1 следует, что при условии $p(1 - \alpha_2) > 1$ оператор T_{12} действует на область $\{x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1 - \beta_1} x^{\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2} I_{0+}^{\alpha_2 - \beta_2} \psi(x), \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$, а при условии $p(1 - \alpha_1) > 1$

оператор T_{21} действует на множество $\{x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{\beta_1-\alpha_1-\alpha_2} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} \psi(x), \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$. Эти области будут совпадать между собой и с областью $\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha} \varphi(x), \varphi \in L_{p,*}(0, b), \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2\}$, если указанные условия сузить до $p(1 + \beta_1 - \alpha_1 - \alpha_2) > 1$ и $p(1 + \beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2) > 1$, когда к внешним операторам $x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1}$ и $x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2}$ можно будет применить лемму 10.1. Это приводит к утверждениям теоремы в случаях $j = 3$ и $j = 2$.

Пусть теперь заданы условия A_4 . Тогда, как следует из теоремы 1.5, оператор F ограниченно действует из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$. В самом деле, положим $k(x, \tau) = (1 - \tau/x)_+^{\alpha-1} {}_2F_1(\alpha_1 - \beta_2, \alpha_2 - \beta_2; \alpha; 1 - x/\tau)(x/\tau)^{\alpha+\beta_1-1} \tau^{-1}$ и рассмотрим второй из интегралов (1.43): $\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} {}_2F_1(\alpha_1 - \beta_2, \alpha_2 - \beta_2; \alpha; 1 - \tau^{-1}) \tau^{-\alpha-\beta_1-1/p} d\tau$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$. В силу формулы

$${}_2F_1(a, b; c; z) = O(z^{-a}) + O(z^{-b}),$$

$$a - b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, z \rightarrow \infty \quad (10.13)$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 2.10(2)]), последний интеграл будет сходиться на нижнем конце, если будут сходиться следующие два интеграла $\int_0^1 \tau^{-\alpha_2-1/p} d\tau$ и $\int_0^1 \tau^{-\alpha_1-1/p} d\tau$, что имеет место при условиях $p(1 - \alpha_2) > 1$ и $p(1 - \alpha_1) > 1$. Таким образом, в этом случае теорема 1.5 к оператору F применима и этот оператор ограничен в $L_p(0, b)$. Воздействуя на него оператором $x^{\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{-\beta_1}$, который также ограничен из $L_p(0, b)$ в $L_p(0, b)$, при условиях $p \geq 1$ и $p(1 - \beta_1) > 1$ (см. (5.46')), получим ограниченную в $L_p(0, b)$ композицию. Прямым ее вычислением не сложно убедиться, что она совпадает с $x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2} f(x)$. Применив теперь к полученному равенству обратный оператор $x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}$, окончательно придем к формуле (10.10) при условиях A_4 . При несколько более жестких условиях A_5 область, куда действуют операторы T_{12} и F , с помощью леммы 10.1, как и в случае $j = 2$, может быть представлена в виде $\{x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha} \psi, \psi \in L_{p,*}(0, b)\}$.

Пусть теперь заданы условия A_6 и справедливо представление $f(x) = x^{\alpha} I_{0+}^{-\alpha} \psi^*(x)$, $\psi^* \in L_{p,*}(0, b)$. Тогда, применив к оператору $x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2} I_{0+}^{-\alpha} \psi^*(x)$ лемму 10.1, затем к оператору $I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2}$ снова лемму 10.1 (при $\alpha > 0$) и, наконец, к внешнему оператору $x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\beta_1}$ лемму 10.1 (но при $\alpha = \alpha_1 - \beta_1 < 0$, $\mu = -\beta_1$), придем к равенствам $T_{12}f(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1+\beta_2} \times I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1+\beta_2-\alpha_2} \psi^*(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{\beta_2-\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{\alpha_1-\beta_1-\beta_2} \psi_1(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\beta_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} \psi_1^*(x) = x^{\beta_1-\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} \psi_2(x) = \psi_2(x)$, где $\psi_1, \psi_2 \in L_p(0, b)$, $\psi_1^* \in L_{p,*}(0, b)$, т. е. оператор T_{12} при условиях A_6 ограниченно действует из C_6 на $L_p(0, b)$.

При выполнении условий A_7 (или A_8), кроме ограничения на α , функция $f(x)$, взятая из области $C_7 = C_8$, в силу леммы 10.1 и условия $p(1 - \beta_2) > 1$ представима в виде $f(x) = x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} \varphi$, где $\varphi \in L_p(0, b)$. Значит, существует дробная производная $\varphi(x) = x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2} f(x)$, и поскольку $p(1 - \alpha_1) > 1$, то оператор T_{12} определен и ограничен на указанном множестве C_7 . Его значение $T_{12}f(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1} \varphi(x)$ представимо в виде $x^{\beta_1-\alpha_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} \chi$, $\chi \in L_{p,*}(0, b)$, опять-таки по лемме 10.1 (см. области $D_7 = D_8$). Подействовав на последнее равенство ограниченным оператором $x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2}$, получим в правой части композицию, порядок в которой можно изменить в силу выполнения соответствующих условий типа условий A_1 : $x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} T_{12}f(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1} x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} \varphi(x) = x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} \times$

$\times x^{-\alpha_1} f(x)$. Применив к этому соотношению обратный оператор $x^{\beta_2} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_2} x^{-\alpha_2}$, придем к формуле (10.12): $T_{12}f = T_{21}f$. Если еще $\operatorname{Re} \alpha > 0$, то композиции T_{12} и T_{21} остаются ограниченными операторами, значения которых можно записать в виде правой части (10.10), т. е. Ff , после непосредственных вычислений.

В случае условий A_9 рассуждения аналогичны проведенным выше при рассмотрении условий A_6 .

Остается доказать справедливость равенства (10.12) при несколько более жестких, чем A_9 , условиях A_{10} . Обозначим $T_{12}f = g$, где $g \in L_p(0, b)$. Из условий A_{10} следует, что $p(1-\beta_1) > 1$ и $p(1-\beta_2) > 1$. Поэтому в силу аналога условий A_1 имеют место равенства $x^{\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{-\beta_1} x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} g = x^{\alpha_2} I_{0+}^{\beta_2-\alpha_2} x^{-\beta_2} x^{\alpha_1} I_{0+}^{\beta_1-\alpha_1} x^{-\beta_1} g = f$. Применим к этим равенствам операторы T_{12} и T_{21} : $g = T_{12}f$, $g = T_{21}f$. Отсюда следует соотношение (10.12). Теорема 10.2 доказана.

З а м е ч а н и е 10.2. В табл. 10.1 условия A_j имеют достаточный характер. В частности, в ряде случаев их можно расширить, допуская знаки равенств $\operatorname{Re}(\alpha_j - \beta_j)$ нулю при дополнительном требовании $p > 1$. Это следует из замечаний после формулы (5.46') об ограниченности соответствующих дробных интегралов чисто мнимого порядка.

Рассмотрим теперь композиции двух правосторонних интегродифференциальных операторов в случае $b = +\infty$. При этом будем учитывать, что после замен x на $1/x$, α на $1-\beta$, β на $1-\alpha$ и $f(x)$ на $f(x^{-1})$ в операторе $x^\beta I_{0+}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha} f(x)$ лишь индекс $0+$ заменяется на $-$. Это свойство вытекает из формулы

$$x^\beta I_{0+}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha} f(x) = y^{1-\alpha} I_-^{\alpha-\beta} y^{\beta-1} \varphi(y), \quad xy = 1, \quad f(x) = \varphi(y). \quad (10.14)$$

Указанные замены и формула (10.11) дают возможность равенства (10.10), (10.12) преобразовать к следующим соотношениям:

$$(x^{\beta_1} I_-^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_-^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = x^{\beta_1+\beta_2-\alpha_1} \int_x^\infty \frac{(\tau-x)^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)} \times \\ \times {}_2F_1(\alpha_1-\beta_1, \alpha_1-\beta_2; \alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2; 1-\tau/x) \tau^{-\alpha_2} f(\tau) d\tau, \quad (10.15)$$

$$(x^{\beta_1} I_-^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_-^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = \\ = (x^{\beta_2} I_-^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})(x^{\beta_1} I_-^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}) f(x). \quad (10.16)$$

Таким же образом после замен x на $1/x$, $\psi(x)$ на $x^{\alpha-1}\psi(1/x)$, $f(x)$ на $x^{-\alpha-1}f(1/x)$ и $g(x)$ на $x^{-\alpha-1}g(1/x)$ лемма 10.1 переходит в следующее утверждение.

Лемма 10.2. Пусть $\psi(x) \in L_p((a, \infty); x^{p-\alpha p-2})$, $0 < a < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $p(1+\operatorname{Re} p) > 1$, и $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$. Тогда для того чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = I_-^\alpha x^{-\mu} f(x)$, где $f(x) \in I_-^{m(\alpha)*}(L_p((a, \infty); x^{p+\tilde{\alpha}p-2}))$, $\tilde{\alpha} = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \alpha \cdot \alpha$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = x^{-\mu} I_-^\alpha g(x)$, где $g(x) \in I_-^{m(\alpha)*}(L_{p,*}((a, \infty); x^{p+\tilde{\alpha}p-2}))$, или в виде $\psi(x) = x^{\varepsilon+\mu} I_-^\alpha x^{-\varepsilon} g_1(x)$, где $g_1(x) \in I_-^{m(\alpha)*}(L_p((a, \infty); x^{p+\tilde{\alpha}p-2}))$, $p(1+\operatorname{Re} \varepsilon) > 1$.

Для формулировки аналога теоремы 10.2 совершим в табл. 10.1 замены α_i на $1-\beta_i$, β_i на $1-\alpha_i$, x на $1/x$, $L_p(0, b)$ на $L_p((a, \infty); x^{-2})$, $0 < a < \infty$, а номеров (10.10), (10.12) в столбце E_j на (10.15), (10.16). Под операторами T_{12} , F и T_{21} будем понимать соответствующие операторы из формул (10.15), (10.16). Полученную таблицу назовем табл. 10.1', но выписывать для краткости не будем. Тогда из теоремы 10.2 вытекает

Теорема 10.3. Пусть выполняются какие-либо из условий A_j табл. 10.1'. Тогда оператор (операторы) B_j определен (определены) на множестве C_j при $1 \leq p < \infty$ и ограниченно отображает (отображают) C_j на множество $D_j \subset L_p((a, \infty); x^{-2})$, причем имеют место равенства E_j .

Правые части соотношений (10.10), (10.15) можно преобразовать с помощью равенства

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \quad (10.17)$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 2.1.4(22)]), что приведет еще к двум формулам такого сорта. Положив $c = \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2$, осуществим в (10.10), полученных двух формулах, а также в (10.15) соответственно замены: $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_2 - \beta_2$, $\varphi(\tau) = \tau^{\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2} f(\tau)$; $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_1 - \beta_1$, $\varphi(\tau) = \tau^{-\alpha_2} f(\tau)$; $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_2 - \beta_2$, $\varphi(\tau) = \tau^{\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2} \times \times f(\tau)$; $a = \alpha_1 - \beta_2$, $b = \alpha_1 - \beta_1$, $\varphi(\tau) = \tau^{-\alpha_2} f(\tau)$. Введем также обозначения:

$${}_1I_{0+}^c(a, b) \varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau, \quad (10.18)$$

$${}_2I_{0+}^c(a, b) \varphi(x) \equiv \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{\tau}{x}\right) \varphi(\tau) d\tau, \quad (10.19)$$

$${}_3I_-^c(a, b) \varphi(x) \equiv \int_x^\infty \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{x}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau, \quad (10.20)$$

$${}_4I_-^c(a, b) \varphi(x) \equiv \int_x^\infty \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{\tau}{x}\right) \varphi(\tau) d\tau. \quad (10.21)$$

После таких преобразований с учетом коммутативности (10.12), (10.16) получаются композиционные разложения для операторов (10.18) — (10.21) вида

$${}_1I_{0+}^c(a, b) \varphi(x) = I_{0+}^{c-b} x^{-a} I_{0+}^b x^a \varphi(x), \quad (10.22)$$

$${}_1I_{0+}^c(a, b) \varphi(x) = x^{c-a-b} I_{0+}^b x^{a-c} I_{0+}^{c-b} x^b \varphi(x); \quad (10.23)$$

$${}_2I_{0+}^c(a, b) \varphi(x) = x^a I_{0+}^b x^{-a} I_{0+}^{c-b} \varphi(x), \quad (10.24)$$

$${}_2I_{0+}^c(a, b) \varphi(x) = x^b I_{0+}^{c-b} x^{a-c} I_{0+}^b x^{c-a-b} \varphi(x); \quad (10.25)$$

$${}_3I_-^c(a, b) \varphi(x) = x^{c-a-b} I_-^b x^{a-c} I_-^{c-b} x^b \varphi(x), \quad (10.26)$$

$${}_3I_-^c(a, b) \varphi(x) = I_-^{c-b} x^{-a} I_-^b x^a \varphi(x); \quad (10.27)$$

$${}_4I_-^c(a, b) \varphi(x) = x^a I_-^b x^{-a} I_-^{c-b} \varphi(x), \quad (10.28)$$

$${}_4I_-^c(a, b) \varphi(x) = x^b I_-^{c-b} x^{a-c} I_-^b x^{c-a-b} \varphi(x). \quad (10.29)$$

Из формул (10.11), (10.17) и других простых свойств функции Гаусса несложно выписать формулы взаимосвязи и формулы частных значений для операторов (10.18) — (10.21):

$${}_jI^c(a, b) = {}_jI^c(b, a) = x^{(-1)^j(a+b-c)} {}_jI^c(c-a, c-b) x^{(-1)^j(c-a-b)}, \quad (10.30)$$

$$j = 1, 2, 3, 4;$$

$${}_jI^c(a, b) = x^{-a} {}_{j+1}I^c(a, c-b) x^a, \quad j = 1, 3; \quad (10.31)$$

$${}_jI^c(a, b)\varphi(x) = y^{1-c} {}_{4-j}I^c(a, b)\varphi_1(y), \quad xy = 1, \quad (10.32)$$

$$\varphi_1(y) = x^{c+1}\varphi(x), \quad j = 1, 2, 3, 4;$$

$${}_jI_{0+}^c(a, 0) = I_{0+}^c, \quad {}_jI_{0+}^c(a, c) = x^{(-1)^ja} I_{0+}^c x^{(-1)^{j-1}a}, \quad j = 1, 2, \quad (10.33)$$

$${}_jI_-^c(a, 0) = I_-^c, \quad {}_jI_-^c(a, c) = x^{(-1)^ja} I_-^c x^{(-1)^{j-1}a}, \quad j = 3, 4 \quad (10.34)$$

(для простоты записи индексы $0+$ и $-$ в соотношениях (10.30) — (10.32) опущены).

Теоремы 10.2, 10.3 после указанных замен и преобразований в отношении к операторам (10.18) — (10.21) позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 10.4. Пусть $\operatorname{Re} c > 0$, $1 \leq p < \infty$, $0 < e < d < \infty$, и выполняются какие-либо из условий A_j табл. 10.2. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве S_j и ограниченно отображает S_j на множество D_j , причем имеют место равенства E_j .

Доказательство. Рассмотрим случай $j = 1$ табл. 10.2. Для этого правую часть равенства (10.22) представим в виде $x^c (x^{-c} I_{0+}^{c-b} x^b) \times \times (x^{-a-b} I_{0+}^b x^a) \varphi(x)$, образовав оператор типа T_{12} из формулы (10.10). Для такого оператора выпишем условия случаев $j = 2, 5$ из теоремы 10.2 (условие $p[1 + \operatorname{Re}(\beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2)] > 1$ в данном случае при $p = 1$ нарушается, однако в силу формул (10.4) это обстоятельство не является существенным). В совокупности выписанные условия приведут к условиям случая $j = 1$ теоремы 10.4. Аналогичные условия случая $j = 7$ теоремы 10.2 приведут к условиям случая $j = 2$ теоремы 10.4.

При рассмотрении равенств (10.23) — (10.25) поступаем аналогичным образом, а указанная картина соответствия условий полностью повторяется. При этом из условий исключаются неравенства, естественным образом вытекающие из остальных неравенств.

При изучении случаев $j = 9, \dots, 16$ табл. 10.2 воспользуемся формулой (10.32); а затем соответственно случаями $j = 5, 6, 7, 8, 3, 4, 1, 2$ этой таблицы, но в отношении к функции $\varphi_1(x) = x^{-c-1}\varphi(1/x)$. После пересчета возникнут указанные в случаях $j = 9, \dots, 16$ условия на функции и параметры.

Замечание 10.3. Обозначим через ${}_1I_{e+}^c(a, b)$, ${}_2I_{e+}^c(a, b)$, ${}_3I_{d-}^c(a, b)$, ${}_4I_{d-}^c(a, b)$ операторы вида (10.18) — (10.21), но с пределами интегрирования (e, x) и (x, d) , $0 < e < d < \infty$, вместо $(0, x)$ и (x, ∞) . Для этих операторов теорема 10.4 сохраняет силу, причем в условиях A_j табл. 10.2 ограничения, включающие p , опускаются, а в остальных условиях интервалы $(0, d)$ и (e, ∞) заменяются на (e, d) , а индексы $0+$ и $-$ в операторах I^α преобразуются соответственно в $e+$ и $d-$ (при этом следует учитывать, что $L_{p,*}(e, d) = L_p(e, d)$).

Справедливость этого замечания следует из возможности доопределения нулем с промежутка (e, d) на $(0, \infty)$ подынтегральной функции и ограниченности в $L_p(e, d)$ оператора умножения на степенную функцию вида x^γ при любом γ (что позволяет устранить из условий A_j ограничения, включающие p и связанные с влиянием веса x^γ в нуле и на бесконечности).

В заключение пункта отметим, что замечание 10.2 в полной мере переносится и на теоремы 10.3, 10.4.

2°. Композиции двух разносторонних интегралов со степенными весами. Выясним теперь условия коммутативности двух операторов $x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1 - \beta_1} x^{-\alpha_1}$ и $x^{\beta_2} I_{d-}^{\alpha_2 - \beta_2} x^{-\alpha_2}$ со степенными весами и найдем некоторые важные частные представления таких композиций. Для этого воспользуемся несколько иным подходом к таким операторам.

l	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\operatorname{Re} b > 0, p(1 + \operatorname{Re} a) > 1$	${}_1I_{0+}^c(a, b)$	$L_p(0, d)$	$I_{0+}^c(L_{p,*}(0, d))$	(10.22)
2	$\operatorname{Re} b < 0, p(1 + \operatorname{Re} b) > 1, p[1 + \operatorname{Re}(a+b)] > 1$	${}_1I_{0+}^c(a, b)$	$\{x^b I_{0+}^{-b}\psi, \psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^b I_{0+}^{c-b}\chi, \chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.22)
3	$\operatorname{Re}(c-b) > 0, p(1 + \operatorname{Re} b) > 1, p[1 + \operatorname{Re}(a+b-c)] > 1$	${}_1I_{0+}^c(a, b)$	$L_p(0, d)$	$I_{0+}^c(L_{p,*}(0, d))$	(10.23)
4	$\operatorname{Re}(b-c) > 0, p(1 + \operatorname{Re} a) > 1$	${}_1I_{0+}^c(a, b)$	$\{x^{c-b} I_{0+}^{b-c}\psi, \psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^{c-b} I_{0+}^b\chi, \chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.23)
5	$\operatorname{Re}(c-b) > 0, p(1 - \operatorname{Re} a) > 1$	${}_2I_{0+}^c(a, b)$	$L_{p,*}(0, d)$	$I_{0+}^c(L_{p,*}(0, d))$	(10.24)
6	$\operatorname{Re}(b-c) > 0, p[1 + \operatorname{Re}(c-a-b)] > 1, p[1 + \operatorname{Re}(c-b)] > 1$	${}_2I_{0+}^c(a, b)$	$\{x^{c-b} I_{0+}^{b-c}\psi, \psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^{c-b} I_{0+}^b\psi, \chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.24)
7	$\operatorname{Re} b > 0, p(1 - \operatorname{Re} b) > 1, p[1 + \operatorname{Re}(c-a-b)] > 1$	${}_2I_{0+}^c(a, b)$	$L_{p,*}(0, d)$	$I_{0+}^c(L_{p,*}(0, d))$	(10.25)
8	$\operatorname{Re} b < 0, p[1 + \operatorname{Re}(c-a)] > 1$	${}_2I_{0+}^c(a, b)$	$\{x^b I_{0+}^{-b}\psi, \psi \in L_{p,*}(0, d)\}$	$\{x^b I_{0+}^{c-b}\chi, \chi \in L_{p,*}(0, d)\}$	(10.25)
9	$\operatorname{Re}(c-b) > 0, p(1 - \operatorname{Re} a) > 1$	${}_3I_-^c(a, b)$	$L_{p,*}((e, \infty); x^{pc+p-2})$	$I_-^c(L_{p,*}((e, \infty); x^{pc+p-2}))$	(10.26)
10	$\operatorname{Re}(b-c) > 0, p[1 + \operatorname{Re}(c-b)] > 1, p[1 + \operatorname{Re}(c-a-b)] > 1$	${}_3I_-^c(a, b)$	$\{x^{-c} I_-^{b-c}\psi, \psi \in L_{p,*}((e, \infty); x^{p(1+b-c)-2})\}$	$I_-^b(L_{p,*}((e, \infty); x^{p+p b-2}))$	(10.26)
11	$\operatorname{Re} b > 0, p(1 - \operatorname{Re} b) > 1, p[1 + \operatorname{Re}(c-a-b)] > 1$	${}_3I_-^c(a, b)$	$L_{p,*}((e, \infty); x^{pc+p-2})$	$I_-^c(L_{p,*}((e, \infty); x^{pc+p-2}))$	(10.27)
12	$\operatorname{Re} b < 0, p[1 + \operatorname{Re}(c-a)] > 1$	${}_3I_-^c(a, b)$	$\{x^{-c} I_-^{-b}\psi, \psi \in L_{p,*}((e, \infty); x^{p-p b-2})\}$	$I_-^{c-b}(L_{p,*}((e, \infty); x^{p(1+c-b)-2}))$	(10.27)
13	$\operatorname{Re}(c-b) > 0, p(1 + \operatorname{Re} b) > 1, p[1 + \operatorname{Re}(a+b-c)] > 1$	${}_4I_-^c(a, b)$	$L_p((e, \infty); x^{pc+p-2})$	$I_-^c(L_{p,*}((e, \infty); x^{pc+p-2}))$	(10.28)
14	$\operatorname{Re}(b-c) > 0, p(1 + \operatorname{Re} a) > 1$	${}_4I_-^c(a, b)$	$\{x^{-c} I_-^{b-c}\psi, \psi \in L_{p,*}((e, \infty); x^{p(1+b-c)-2})\}$	$I_-^b(L_{p,*}((e, \infty); x^{pb+p-2}))$	(10.28)
15	$\operatorname{Re} b > 0, p(1 + \operatorname{Re} a) > 1$	${}_4I_-^c(a, b)$	$L_p((e, \infty); x^{pc+p-2})$	$I_-^c(L_{p,*}((e, \infty); x^{pc+p-2}))$	(10.29)
16	$\operatorname{Re} b < 0, p(1 + \operatorname{Re} b) > 1, p[1 + \operatorname{Re}(a+b)] > 1$	${}_4I_-^c(a, b)$	$\{x^{-c} I_-^{-b}\psi, \psi \in L_{p,*}((e, \infty); x^{p-p b-2})\}$	$I_-^{c-b}(L_{p,*}((e, \infty); x^{p(1+c-b)-2}))$	(10.29)

Как следует из формул (7.17), (7.21), после применения к ним обратного преобразования Меллина (1.113) и замен α на $\alpha - \beta$, $f(x)$ на $x^{-\alpha}f(x)$ и s на $s + \beta$ имеют место представления

$$x^\beta I_{0+}^{\alpha-\beta} x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-\beta-s)} f^*(s) x^{-s} ds, \quad \operatorname{Re}(\alpha+s) < 1, \quad (10.35)$$

$$x^\beta I_-^{\alpha-\beta} x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\alpha+s)} f^*(s) x^{-s} ds, \quad \operatorname{Re}(\beta+s) > 0, \quad (10.36)$$

где $f^*(s)$ — преобразование Меллина (1.112) функции $f(x)$. На достаточно хороших функциях эти формулы сохраняют силу при любых значениях α, β (подробнее об этом см. начало § 36).

Составив композицию левых частей (10.35), (10.36) с разными индексами и воспользовавшись равенством Парсеваля для преобразования Меллина (1.116), придем к соотношению

$$\begin{aligned} & (x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1-\alpha_1-s) \Gamma(\beta_2+s)}{\Gamma(1-\beta_1-s) \Gamma(\alpha_2+s)} f^*(s) x^{-s} ds, \\ & -\operatorname{Re} \beta_2 < \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} \alpha_1. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Поскольку гамма-множители в правой части можно переставлять местами, то и операторы в скобках из левой части на соответствующих функциях коммутативны. Достаточные условия такой коммутативности и ограниченности этих операторов отражает

Теорема 10.5. Пусть $\operatorname{Re}(\alpha_1 - \beta_1) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha_2 - \beta_2) > 0$, $p(1 - \operatorname{Re} \alpha_1) > 1$, $p \operatorname{Re} \beta_2 > -1$ и $f(x) \in L_p(0, \infty)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & (x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1})(x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2}) f(x) = \\ &= (x^{\beta_2} I_{-}^{\alpha_2-\beta_2} x^{-\alpha_2})(x^{\beta_1} I_{0+}^{\alpha_1-\beta_1} x^{-\alpha_1}) f(x) = \int_0^{\infty} k_0\left(\frac{x}{t}\right) f(t) \frac{dt}{t}, \end{aligned} \quad (10.38)$$

$$\begin{aligned} k_0(y) &= \frac{\Gamma(1+\beta_2-\alpha_1) y^{\beta_2}}{\Gamma(\alpha_2-\beta_2) \Gamma(1+\beta_2-\beta_1)} \times \\ & \times {}_2F_1(1+\beta_2-\alpha_1, 1+\beta_2-\alpha_2; 1+\beta_2-\beta_1; y), \quad y < 1, \\ k_0(y) &= \frac{\Gamma(1+\beta_2-\alpha_1) y^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1-\beta_1) \Gamma(1+\alpha_2-\alpha_1)} \times \\ & \times {}_2F_1(1+\beta_1-\alpha_1, 1+\beta_2-\alpha_1; 1+\alpha_2-\alpha_1; y^{-1}), \quad y > 1, \end{aligned}$$

причем все указанные в (10.38) операторы ограничены в $L_p(0, \infty)$.

Доказательство. Ограниченность операторов в $L_p(0, \infty)$ является прямым следствием формул (5.45'), (5.46'), которые применяются при указанных в теореме условиях последовательно в том или ином порядке. Совпадение композиций из (10.38) между собой следует из равенства (10.37), а их представление через правую часть (10.38) устанавливается путем непосредственных вычислений композиций или же интеграла (10.37), которое производится по теории вычетов или с помощью теоремы Л. Слейтера из книги О. И. Маричева [10, с. 48].

Укажем важные частные случаи таких композиций.

А. Пусть в (10.37) $\alpha_1 = 1 - 2a$, $\alpha_2 = c - 2a$, $\beta_1 = 1 - c$, $\beta_2 = 0$. Воспользовавшись формулой 12.24 (1) из § 10 книги О. И. Маричева [10] и обратным переходом по теореме о свертке (1.116), получим следующее композиционное разложение через коммутирующие операторы:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{t^{2a-1}}{(x+t)^{2a}} {}_2F_1\left(a, a + \frac{1}{2}; c; \frac{4xt}{(x+t)^2}\right) f(t) dt = \\ &= B(c, c - 2a) (x^{1-c} I_{0+}^{c-2a} x^{2a-1}) (I_{-}^{c-2a} x^{2a-c}) f(x), \end{aligned} \quad (10.39)$$

$$\operatorname{Re}(c - 2a) > 0, \quad 2p \operatorname{Re} a > 1, \quad f(x) \in L_p(0, \infty), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Б. Пусть в (10.37) $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta_1 = \alpha/2$, $\beta_2 = 0$. Тогда аналогичным способом, но с помощью формулы 2.5(1) § 10 книги О. И. Маричева [10] получаем следующее разложение:

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}}{|x-t|^{1-\alpha}} f(t) dt = \\ = 2\Gamma(\alpha) \cos \frac{\alpha\pi}{2} (x^{\alpha/2} I_{0+}^{\alpha/2} x^{-\alpha})(I_-^{\alpha/2} x^{-\alpha/2}) f(x), \quad (10.40)$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad p(1 - \operatorname{Re} \alpha) > 1, \quad f(x) \in L_p(0, \infty), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Подробнее о таких операторах см. в § 12, п. 3°, в частности ср. (10.40) с (12.39).

В. Пусть в (10.37) $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 1/2$. Тогда из формулы 2.4(1) § 10 книги О. И. Маричева [10] аналогично находим разложения

$$x^{1/2} I_{0+}^{-1/2} I_-^{1/2} x^{-1/2} f(x) = (Sf)(x), \quad (10.41)$$

$$I_-^{1/2} I_{0+}^{-1/2} f(x) = (Sf)(x),$$

где $(Sf)(x)$ — сингулярный интеграл (11.1) при $a = 0$, $b = \infty$.

Г. Пусть в (10.37) $\alpha_1 = \beta_2 = -\alpha$, $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ или $\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = -\beta_1 = \alpha$. Тогда под интегралом в правой части (10.37) гамма-функции соответственно преобразуются в функции $\frac{\sin s\pi}{\sin(s-\alpha)\pi} = \cos \alpha\pi +$
 $+\sin \alpha\pi \operatorname{ctg}(s-\alpha)\pi$ и $\frac{\sin(s+\alpha)\pi}{\sin s\pi} = \cos \alpha\pi + \sin \alpha\pi \operatorname{ctg} s\pi$, которым в

силу (10.41) соответствуют операторы $\cos \alpha\pi E + \sin \alpha\pi x^{-\alpha} S x^\alpha$ и $\cos \alpha\pi E + \sin \alpha\pi S$, E — тождественный оператор. Совершив тогда замены $f = \varphi$ и $I_{0+}^\alpha f = \varphi$, в результате из (10.37) легко получим равенства (11.27) и (11.29), которые в § 11 устанавливаются другим более строгим способом.

3°. Композиции нескольких интегралов со степенными весами. Составив композицию вида (10.37) из трех операторов $x^{\beta_j} I_{0+}^{\alpha_j - \beta_j} x^{-\alpha_j}$ или $x^{\beta_j} I_-^{\alpha_j - \beta_j} x^{-\alpha_j}$, $j = 1, 2, 3$, и подобрав параметры α_j , β_j так, чтобы все гамма-функции под интегралом сократились, получим на основе формулы (1.113) следующие соотношения:

$$I_{0+}^\gamma x^\alpha I_{0+}^\beta x^\gamma I_{0+}^\alpha x^\beta f(x) = f(x), \quad (10.42)$$

$$I_-^\gamma x^\alpha I_-^\beta x^\gamma I_-^\alpha x^\beta f(x) = f(x), \quad (10.43)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Очевидно, что эти соотношения после исключения γ приводят к эквивалентным им равенствам (10.6), (10.7). Условия справедливости указанных формул отражает

Теорема 10.6. Пусть α и β — такие комплексные числа, что определена функция $t(\alpha, \alpha + \beta)$ (см. (10.1)). Тогда в классе функций $f(x)$, представимых в виде $f(x) = x^u I_{0+}^{m(\alpha, \alpha+\beta)} x^v \psi(x)$, где $\psi(x) \in L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$, имеют место формулы (10.6), (10.42), а в классе функций $f(x)$, представимых в виде $f(x) = x^u I_-^{m(\alpha, \alpha+\beta)} x^v \psi(x)$, где $\psi(x) \in L_p(a, \infty)$, $0 < a < \infty$, $1 \leq p < [\max(|\operatorname{Re} \alpha|, |\operatorname{Re} \beta|, |\operatorname{Re}(\alpha + \beta)|)]^{-1}$, имеют место формулы (10.7), (10.43). Значения параметров u и v для обоих случаев указаны в табл. 10.3. Если функция $t(\alpha, \alpha + \beta)$ не определена, то приведенные утверждения сохраняют силу при дополнительных условиях на $f(x)$, которые получаются из замечания 10.1 после замен x на x^{-1} и $f(x)$ на $x^{-\alpha-\beta-1} f(x^{-1})$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$ и $f \in L_p(0, b)$. Тогда из условия $p(1 + \operatorname{Re} \beta) > p \geq 1$ и неравенства (5.46') вытекает принадлежность функции $\varphi(x) = x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{\beta} f(x)$ пространству $L_p(0, b)$. Значит, композиция в левой части (10.6) существует в $L_p(0, b)$. Правая часть этой формулы при указанных условиях также существует и принадлежит $L_p(0, b)$. Проверив равенство (10.6) на плотном в $L_p(0, b)$ множестве достаточно «хороших» функций, мы можем его распространить на все $L_p(0, b)$, воспользовавшись теоремой Банаха 1.7.

ТАБЛИЦА 10.3

№ п. п.	Условие	Значение
1	$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$	$u = v = 0$
2	$\operatorname{Re} \beta < 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0$	$u = -\beta, v = 0$
3	$\operatorname{Re} \alpha < 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0$	$u = -\beta, v = \alpha + \beta$
4	$\operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 0$	$u = -\beta, v = 0$
5	$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 0$	$u = 0, v = \alpha$
6	$\operatorname{Re} \alpha < 0, \operatorname{Re} \beta < 0$	$u = v = 0$

В случае правостороннего оператора вместо указанного условия $p(1 + \operatorname{Re} \beta) > 1$, которое выполнялось автоматически, из неравенства (5.45') появляется условие $p \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1$.

Все остальные пять случаев сводятся к первому, если воспользоваться утверждением первого случая, но по отношению к соответствующим аналогам равенства (10.6):

$$\begin{aligned}
 x^{\alpha+\beta} I_{0+}^{-\beta} x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha+\beta} x^{-\beta} (x^{\beta} f(x)) &= I_{0+}^{\alpha} (x^{\beta} f(x)), \\
 x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha+\beta} x^{-\beta} I_{0+}^{-\alpha} x^{\alpha+\beta} \psi(x) &= I_{0+}^{\beta} \psi(x), \\
 x^{\beta} I_{0+}^{-\alpha-\beta} x^{\alpha} I_{0+}^{\beta} x^{-\alpha-\beta} \psi(x) &= I_{0+}^{-\alpha} \psi(x), \\
 x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{\beta} I_{0+}^{-\alpha-\beta} x^{\alpha} \psi(x) &= I_{0+}^{\beta} \psi(x), \\
 x^{-\beta} I_{0+}^{-\alpha} x^{\alpha+\beta} I_{0+}^{-\beta} x^{-\alpha} \psi(x) &= I_{0+}^{-\alpha-\beta} \psi(x),
 \end{aligned} \tag{10.44}$$

в которых функции $\psi(x)$ связаны с $f(x)$ формулами, указанными в условии теоремы и табл. 10.3. В самом деле, например, первые две формулы (10.44) получаются из (10.6) соответственно применением к (10.6) оператора $x^{\alpha+\beta} I_{0+}^{-\beta} x^{-\alpha}$ и заменой $\psi(x) = x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{\alpha} x^{\beta} f(x)$ и отличаются от (10.6) заменами β на $-\beta$, α на $\alpha + \beta$, f на $x^{\beta} f$ и β на $\alpha + \beta$, α на $-\alpha$, f на ψ . Выписав для этих формул соответствующие им условия первой строки табл. 10.3 и совершив обратный переход к виду (10.6), легко придем к условиям, указанным в строках 2 и 3. В случае правосторонних операторов справедливы аналогичные соотношения, получаемые из (10.44) заменой индекса $0+$ на $-$. Полученные шесть групп условий можно объединить с помощью обозначения (10.1) в условия, приведенные в формулировке теоремы. Последнее утверждение теоремы 10.6 вытекает из теоремы 10.1, замечания 10.1 и указанных замен, связывающих формулы (10.4), (10.5) и (10.7), (10.6). В случае $\operatorname{Re}(\alpha + \beta + \gamma) > 0$ композиции из левых частей (10.42), (10.43) выражаются через интегральные операторы, содержащие в ядрах функцию Горна (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, 5.7.1(8)]):

$$\begin{aligned}
 F_3(a, a', b, b'; c; x, y) &= \\
 &= \sum_{h, l=0}^{\infty} \frac{(a)_h (b)_h (a')_l (b')_l}{(c)_{h+l} k! l!} x^h y^l, \quad 0 < x, y < 1.
 \end{aligned} \tag{10.45}$$

В самом деле, композиция двух дробных интегралов, например, вида (10.22) приводит к оператору (10.18). Применяя к нему еще один дробный интеграл с весом, получим следующее представление для композиции трех дробных интегралов типа (10.42):

$$\begin{aligned}
 I_{0+}^{\alpha} x^{\beta} I_{0+}^c(a, b) \varphi(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} t^{\beta} dt \times \\
 &\times \int_0^t \frac{(t-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t}{\tau}\right) \varphi(\tau) d\tau = \\
 &= \int_0^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\Gamma(\alpha) \Gamma(c)} \int_{\tau}^x t^{\beta} (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{c-1} {}_2F_1\left(a, b; c; 1 - \frac{t}{\tau}\right) dt = \\
 &= \int_0^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\Gamma(\alpha) \Gamma(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (-\tau)^{-k}}{(c)_k k!} \int_{\tau}^x t^{\beta} (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{c+k-1} dt = \\
 &= \int_0^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\Gamma(\alpha) \Gamma(c)} \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k (-\tau)^{-k} \Gamma(\alpha) \Gamma(c+k) (x-\tau)^{\alpha+c+k-1} x^{\beta}}{(c)_k k! \Gamma(\alpha+c+k) (\alpha+c+k)_l l!} \times \\
 &\times (-\beta)_l (\alpha)_l \left(1 - \frac{\tau}{x}\right)^l = x^{\beta} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\alpha+c-1}}{\Gamma(\alpha+c)} \times \\
 &\times F_3(a, \alpha, b, -\beta; \alpha+c; 1-x/\tau, 1-\tau/x) \varphi(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re}(\alpha+c) > 0.
 \end{aligned} \tag{10.46}$$

Здесь при вычислениях предполагалось, что $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, применялась теорема Фубини, замена $t = x - \eta(x - \tau)$ и разложение в гипергеометрический ряд внутреннего интеграла с помощью формулы (1.72). Эти операции законны и приводят к правой части (10.46) при условиях сходимости соответствующих рядов, которые затем могут быть ослаблены или даже устранены с помощью принципа аналитического продолжения равенств, если через функцию F_3 из правой части (10.46) обозначать не только двойной ряд (10.45), но и его аналитическое продолжение за пределы области $0 < x, y < 1$. Таким же образом условие $\operatorname{Re} \alpha > 0$ можно ослабить до $\operatorname{Re}(\alpha+c) > 0$.

Совершив в (10.46) замены α на a' , β на $-b'$, $\alpha+c$ на c и приняв во внимание (10.22), (10.35), несложно найти следующий аналог равенства (10.37):

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} F_3\left(a, a', b, b'; c; 1 - \frac{x}{\tau}, 1 - \frac{\tau}{x}\right) \varphi(\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(1+a-c-s) \Gamma(1+b-c-s) \Gamma(1-a'-b'-s)}{\Gamma(1+a+b-c-s) \Gamma(1-a'-s) \Gamma(1-b'-s)} \varphi^*(s+c) x^{-s} ds, \\
 &\operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re}(a-c), \quad 1 + \operatorname{Re}(b-c), \quad 1 - \operatorname{Re}(a'+b').
 \end{aligned} \tag{10.47}$$

В силу (10.35) каждая пара гамма-функций (по одной функции из числителя и знаменателя) из правой части (10.47) соответствует одному

дробному интегралу со степенными весами. Значит, шести гамма-функциям из (10.47) соответствует шесть вариантов композиций из трех таких интегралов, причем интегралы внутри каждой композиции могут располагаться в различном порядке шестью способами. Если еще учесть, что каждому такому расположению еще соответствуют шесть вариантов условий, которые связаны с различными вариантами знаков порядков этих интегралов, то становится ясным, что выписывание всех вариантов композиционных разложений оператора (10.47) и условий типа табл. 10.2 не целесообразно.

Композиция произвольного числа операторов (10.35), (10.36) по аналогии с (10.37) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^m (x^{\beta_j} I_{0+}^{\alpha_j - \beta_j} x^{-\alpha_j}) \prod_{k=1}^n (x^{\delta_k} I_{-\infty}^{\gamma_k - \delta_k} x^{-\gamma_k}) f(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(1 - \alpha_j - s)}{\Gamma(1 - \beta_j - s)} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(\delta_k + s)}{\Gamma(\gamma_k + s)} f^*(s) x^{-s} ds = \\ &= \int_0^\infty G_{m+n, m+n}^{n, m} \left(\frac{x}{t} \middle| \begin{matrix} (\alpha)_m, (\gamma)_n \\ (\delta)_n, (\beta)_m \end{matrix} \right) f(t) \frac{dt}{t}, \end{aligned} \quad (10.48)$$

где в правой части содержится G -функция Мейера (1.95). Для справедливости второго из равенств (10.48) необходимо условие $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m (\alpha_j - \beta_j) + \right.$

$\left. + \sum_{k=1}^n (\gamma_k - \delta_k) \right) > 0$ (см. теорему 36.3, условие (36.21)).

Достаточные условия, обеспечивающие коммутативность операторов, заключенных в круглые скобки слева (10.48), доставляет следующая

Теорема 10.7. Пусть $f(x) \in L_p(0, \infty)$, $p(1 - \operatorname{Re} \alpha_j) > 1$, $j = 1, 2, \dots, m$, $p \operatorname{Re} \delta_k > -1$, $k = 1, 2, \dots, n$, и $p \geq 1$, $\operatorname{Re}(\alpha_j - \beta_j) > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k) > 0$ или $p > 1$, $\operatorname{Re}(\alpha_j - \beta_j) \geq 0$, $\operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k) \geq 0$. Тогда операторы в скобках левой части (10.48) коммутативны. Если еще $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^m (\alpha_j - \beta_j) + \right.$

$\left. + \sum_{k=1}^n (\gamma_k - \delta_k) \right) > 0$, то левая и правая части (10.48) (без середины) ограничено действуют из $L_p(0, \infty)$ в $L_p(0, \infty)$ и совпадают между собой.

Доказательство следует из ограниченности левой части (10.48) в $L_p(0, \infty)$, имеющей место при условиях теоремы. Рассуждения здесь те же, что и при рассмотрении случая $j=1$ в доказательстве теоремы 10.2, но с учетом замечаний после формулы (5.46').

Как и в случае теорем 10.1, 10.2, условия теоремы 10.7 можно ослабить, распространив эту теорему на отрицательные значения $\operatorname{Re}(\alpha_j - \beta_j)$ или $\operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k)$ и сузив класс $L_p(0, \infty)$ до соответствующего пространства функций, представимых через дробные интегралы других функций из $L_p(0, \infty)$.

В заключение пункта отметим, что при соответствующих условиях коммутативность имеет место и для произведений более общих операторов вида $x^{k\beta} I_{0+; x^k}^{\alpha - \beta} x^{-k\alpha}$, $x^{m\beta} I_{-\infty; x^m}^{\alpha - \beta} x^{-m\alpha}$, см. § 18, п. 2°.

4°. Композиции с экспоненциальными и степенно-экспоненциальными весами. Вначале рассмотрим случай композиции двух левосторонних интегралов с экспоненциальными весами. Справедлива следующая

Лемма 10.3. Пусть $\psi(x) \in L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$, и $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$. Тогда для того чтобы $\psi(x)$ была представима в виде $\psi(x) = e^{\lambda x} I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} f(x)$, где $f(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)}(L_p(0, b))$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi(x) \in I_{0+}^{m(-\alpha)}(L_p(0, b))$.

Доказательство. В случае $\operatorname{Re} \alpha > 0$ утверждение леммы является прямым следствием леммы 31.4, поскольку из этой леммы вытекает ограниченное действие оператора $e^{\lambda x} I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, из пространства $L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$, на пространство $I_{0+}^{\alpha}(L_p(0, b))$. Случай $\operatorname{Re} \alpha < 0$ здесь рассматривается так же, как и при доказательстве леммы 10.1.

Сказанное позволяет сформулировать следующий аналог теоремы 10.1.

Теорема 10.8. Пусть α и β — такие комплексные числа, что определена функция $m(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$. Тогда в классе функций $I_{0+}^{m(\alpha, \beta, \alpha + \beta)}(L_p(0, b))$, $0 < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$, операторы I_{0+}^{α} и $e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x}$ коммутативны, т. е. имеет место равенство

$$I_{0+}^{\alpha} e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x} f(x) = e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\alpha} f(x). \quad (10.49)$$

Если $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0$, $\operatorname{Re} \beta \neq 0$, то при $f(x) \in I_{0+}^{m(\beta)}(L_p(0, b))$ справедливо равенство

$$I_{0+}^{\alpha} e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x} f(x) = \int_0^x \frac{(x - \tau)^{\alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} {}_1F_1(\beta; \alpha + \beta; \lambda(x - \tau)) f(\tau) d\tau. \quad (10.50)$$

Если $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0$, $\operatorname{Re} \alpha \neq 0$, то при $f(x) \in I_{0+}^{m(\alpha)}(L_p(0, b))$ справедливо равенство

$$e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\alpha} f(x) = \int_0^x \frac{(x - \tau)^{\alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} {}_1F_1(\beta; \alpha + \beta; \lambda(x - \tau)) f(\tau) d\tau. \quad (10.51)$$

В случае $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 0$ операторы (10.50), (10.51) ограниченно действуют из указанных пространств на пространство $I_{0+}^{\alpha + \beta}(L_p(0, b))$.

Доказательство. Из всех утверждений остается доказать лишь справедливость равенств (10.49) — (10.51), причем это достаточно сделать в пространстве $L_1(0, b)$. В силу теоремы Фубини после вычислений и применения интегрального представления 6.5(1) из справочника Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1] имеем

$$\begin{aligned} I_{0+}^{\alpha} e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{-\lambda x} f(x) &= \int_0^x \frac{(x - t)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda t} dt \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\beta - 1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda \tau} f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^x \frac{(x - \tau)^{\alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} f(\tau) d\tau \int_0^1 u^{\beta - 1} (1 - u)^{\alpha - 1} e^{\lambda u(x - \tau)} du = \\ &= \int_0^x \frac{(x - \tau)^{\alpha + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} {}_1F_1(\beta; \alpha + \beta; \lambda(x - \tau)) f(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Применив далее формулу 6.3(7) указанного справочника и воспользовавшись равенством (10.52), но в обратном порядке, придем к соотношению (10.51). Из (10.50), (10.51) следует равенство (10.49) в случае $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} \beta > 0$. Последние ограничения можно ослабить, заменив их

на условия, указанные в теореме, которые обеспечивают существование всех операторов из этих равенств. Теорема доказана.

Отметим, что соотношение (10.49) дает возможность композицию произвольного числа операторов $I_{0+}^{\alpha j} e^{\pm \lambda x}$ с чередующимися знаками при λx выразить через композицию лишь двух таких операторов. Например, справедливы равенства

$$I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{\lambda x} I_{0+}^{\gamma} e^{-\lambda x} f(x) = I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} (e^{\lambda x} I_{0+}^{\beta} \times \\ \times e^{-\lambda x} I_{0+}^{\gamma} f(x)) = I_{0+}^{\alpha+\beta} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\gamma} f(x), \quad (10.53)$$

$$I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\beta} e^{\lambda x} I_{0+}^{\gamma} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\delta} e^{\lambda x} f(x) = I_{0+}^{\alpha} e^{-\lambda x} \times \\ \times (I_{0+}^{\beta+\gamma} e^{\lambda x} I_{0+}^{\delta} f(x)) = I_{0+}^{\alpha+\beta+\gamma} e^{-\lambda x} I_{0+}^{\delta} e^{\lambda x} f(x). \quad (10.54)$$

По аналогии с операторами (10.18) — (10.21) введем операторы

$$(I_{0+}^{c,a,\lambda} f)(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a; c; \lambda(x-\tau)) f(\tau) d\tau, \quad (10.55)$$

$$(I_{-}^{c,a,\lambda} f)(x) = \int_x^{\infty} \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_1F_1(a; c; \lambda(x-\tau)) f(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (10.56)$$

Очевидно, что

$$I_{0+}^{c,0,\lambda} = I_{0+}^{c,a,0} = I_{0+}^c, \quad I_{0+}^{c,c,\lambda} = e^{\lambda x} I_{0+}^c e^{-\lambda x}, \\ I_{-}^{c,0,\lambda} = I_{-}^{c,a,0} = I_{-}^c, \quad I_{-}^{c,c,\lambda} = e^{\lambda x} I_{-}^c e^{-\lambda x}. \quad (10.57)$$

Из соотношений (10.50), (10.51) после замен $\beta = a$, $\alpha + \beta = c$ вытекают первые две из четырех формул:

$$(I_{0+}^{c,a,\lambda} f)(x) = I_{0+}^{c-a} e^{\lambda x} I_{0+}^a e^{-\lambda x} f(x), \quad (10.58)$$

$$(I_{0+}^{c,a,\lambda} f)(x) = e^{\lambda x} I_{0+}^a e^{-\lambda x} I_{0+}^{c-a} f(x), \quad (10.59)$$

$$(I_{-}^{c,a,\lambda} f)(x) = I_{-}^{c-a} e^{\lambda x} I_{-}^a e^{-\lambda x} f(x), \quad (10.60)$$

$$(I_{-}^{c,a,\lambda} f)(x) = e^{\lambda x} I_{-}^a e^{-\lambda x} I_{-}^{c-a} f(x), \quad (10.61)$$

две последние устанавливаются аналогично. Для их исследования нам понадобится следующая лемма, которая получается из теорем 18.2, 18.3 и связанных с ними рассуждений.

Лемма 10.4. Оператор $e^{\lambda x} I_{-}^{\alpha} e^{-\lambda x} f(x)$ при $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $1 \leq p < (\operatorname{Re} \alpha)^{-1}$ ограниченно действует из пространства $L_p(a, \infty)$, $0 < a < \infty$, на пространство $I_{-}^{\alpha}(L_p(a, \infty))$.

Условия, при которых выполняются соотношения (10.58) — (10.61), отражаются следующей легко проверяемой теоремой.

Теорема 10.9. Пусть $\operatorname{Re} c > 0$ и выполняются какие-либо из условий A_j табл. 10.4. Тогда оператор B_j определен на множестве C_j из пространства $L_p(0, b)$, $0 < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$, и ограниченно отображает C_j на множество D_j , причем имеет место равенство E_j .

Композиции разносторонних интегралов с экспоненциальными весами, вообще говоря, приводят к интегральным операторам весьма громоздкого вида. Исключение составляют лишь отдельные частные случаи, один из которых мы здесь рассмотрим. Воспользовавшись формулой 2.3.6.10 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1], вычислим следующую композицию:

i	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\operatorname{Re} a > 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$L_p(0, b)$	$I_{0+}^c(L_p(0, b))$	(10.58)
2	$\operatorname{Re} a < 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$I_{0+}^{-a}(L_p(0, b))$	$I_{0+}^{c-a}(L_p(0, b))$	(10.58)
3	$\operatorname{Re}(c-a) > 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$L_p(0, b)$	$I_{0+}^c(L_p(0, b))$	(10.59)
4	$\operatorname{Re}(c-a) < 0$	$I_{0+}^{c,a,\lambda}$	$I_{0+}^{a-c}(L_p(0, b))$	$I_{0+}^a(L_p(0, b))$	(10.59)
5	$\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \rho \max(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} c) < 1$	$I_-^{c,a,\lambda}$	$L_p(a, \infty)$	$I_-^c(L_p(a, \infty))$	(10.60)
6	$\operatorname{Re} a < 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \rho \operatorname{Re}(c-a) < 1$	$I_-^{c,a,\lambda}$	$\{e^{\lambda x} I_-^{-a} \times$ $\times e^{-\lambda x} \psi,$ $\psi \in L_p(a, \infty)\}$	$I_-^{c-a}(L_p(a, \infty))$	(10.60)
7	$\operatorname{Re}(c-a) > 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \rho \max(\operatorname{Re} c, \operatorname{Re}(c-a)) < 1$	$I_-^{c,a,\lambda}$	$L_p(a, \infty)$	$I_-^c(L_p(a, \infty))$	(10.61)
8	$\operatorname{Re}(c-a) < 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \rho \operatorname{Re} a < 1$	$I_-^{c,a,\lambda}$	$I_-^{a-c}(L_p(a, \infty))$	$\{e^{\lambda x} I_-^a e^{-\lambda x} \chi,$ $\chi \in L_p(a, \infty)\}$	(10.61)

$$\begin{aligned}
I_-^\alpha e^{-\lambda x} I_{0+}^\alpha f(x) &= \int_0^x \frac{f(\tau) d\tau}{\Gamma^2(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt + \\
&+ \int_x^\infty \frac{f(\tau) d\tau}{\Gamma^2(\alpha)} \int_\tau^\infty (t-x)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^{1/2-\alpha}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \times \\
&\times \int_0^\infty |x-\tau|^{\alpha-1/2} e^{-\lambda(x+\tau)/2} K_{\alpha-1/2} \left(\frac{\lambda}{2} |x-\tau| \right) f(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (10.62)
\end{aligned}$$

где $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (1.85). Очевидно, что для этого оператора можно доказать соответствующий аналог теоремы 10.9, но свойство типа (10.43) для него не имеет места.

Композиция двух односторонних дробных интегралов со степенно-экспоненциальными весами приводит к формуле

$$\begin{aligned}
&I_{0+}^\alpha x^{-\delta} e^{\lambda x} I_{0+}^\beta x^\delta e^{-\lambda x} f(x) = \\
&= \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \Phi_1 \left(\beta, \delta; \alpha+\beta; 1 - \frac{x}{t}; \lambda(x-t) \right) f(t) dt, \quad (10.63)
\end{aligned}$$

где Φ_1 — одна из функций Гумберта:

$$\Phi_1(\beta, \delta; \gamma; x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_{j+k} (\delta)_j}{(\gamma)_{j+k} j! k!} x^j y^k, \quad |x| < 1 \quad (10.64)$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1, 5.7.1(20)] с исправлением опечатки в индексе). Эта формула устанавливается так же, как и формула (10.50).

§ 11. СВЯЗЬ
ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ
С СИНГУЛЯРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Изучается связь операторов дробного интегрирования с сингулярным интегральным оператором и показывается, как левостороннее дробное интегрирование выражается через правостороннее (и наоборот) с помощью сингулярного оператора. Предварительно излагаются необходимые сведения о сингулярном операторе.

1°. Сингулярный оператор S . Пусть по-прежнему $\Omega = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Рассмотрим сингулярный интеграл

$$(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, \quad x \in (a, b), \quad (11.1)$$

где сходимость понимается в смысле главного значения. С теорией таких интегралов и с доказательством приводимых ниже теорем 11.1—11.3 можно ознакомиться по книгам Ф. Д. Гахова [1], Н. И. Мусхелишвили [1], И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4]. Здесь приведем свойства оператора S , которые нам неоднократно понадобятся в дальнейшем. Важным свойством оператора S является свойство его ограниченности в пространствах $H_0^\lambda(\rho)$ и $L_p(\rho)$. Пусть $\rho(x)$ — вес вида (1.7) или (1.9), причем $x_1 = a$, $x_n = b$ в случае, если a, b — конечные точки.

Теорема 11.1. Если $\text{mes } \Omega < \infty$, $0 < \lambda < 1$, то оператор S ограничен в пространстве H_0^λ и в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}$, $x_k \in \Omega$, если $\lambda < \mu_k < \lambda + 1$ ($k = 1, \dots, n$).

Теорема 11.2. Если $\text{mes } \Omega = \infty$, $0 < \lambda < 1$, то оператор S ограничен в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$, $\rho(x) = (1+x^2)^{\mu/2} \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}$, $x_k \in \Omega$, если $\lambda < \mu_k < \lambda + 1$ ($k = 1, \dots, n$) и $-\lambda < \mu + \sum_{k=1}^n \mu_k < 1 - \lambda$.

Теорема 11.3. Оператор S ограничен в пространстве $L_p(\rho)$, $1 < p < \infty$, $\rho(x) = (1+x^2)^{\mu/2} \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}$, $x_k \in \Omega$, если $-1 < \mu_k < p - 1$ ($k = 1, \dots, n$) и если (в случае $\text{mes } \Omega = \infty$) $-1 < \mu + \sum_{k=1}^n \mu_k < p - 1$.

В случае $\Omega = R^1$ известно, см. работу С. Пихоридеса (S. K. Pichorides [1]), точное значение нормы сингулярного оператора S в пространстве $L_p(R^1)$:

$$\|S\| = \text{tg} \{ \pi [2 \min(p, p')]^{-1} \}. \quad (11.1')$$

Известно также, что в случае $\Omega = R^1$ выполняется равенство $S^{-1} = -S$, так что

$$S^2 \varphi = -\varphi, \quad (11.2)$$

а преобразование Фурье сингулярного интеграла $S\varphi$ дается формулой

$$\widehat{(S\varphi)}(x) = i \text{sign } x \varphi(x). \quad (11.3)$$

В случае, когда $[a, b]$ — конечный отрезок, справедливы следующие формулы:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{(t-a)^{\mu-1} (b-t)^{-\mu}}{t-x} dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sin \mu \pi} \left| \frac{x-a}{x-b} \right|^{\mu-1} \frac{1}{b-x}, & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \\ -\operatorname{ctg} \mu \pi \frac{(x-a)^{\mu-1}}{(b-x)^{\mu}}, & \text{если } a < x < b \end{cases} \quad (11.4)$$

$$(0 < \operatorname{Re} \mu < 1);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-t} \right)^{\mu} \frac{dt}{t-x} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sin \mu \pi} \left[1 - \left| \frac{x-a}{x-b} \right|^{\mu} \right], & \text{если } x < a \text{ или } x > b, \\ \frac{1}{\sin \mu \pi} \left[1 - \cos \mu \pi \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^{\mu} \right], & \text{если } a < x < b \end{cases} \quad (11.5)$$

$$(-1 < \operatorname{Re} \mu < 1);$$

$$\int_a^b \frac{(t-a)^{\nu-1} (b-t)^{\mu-1} dt}{t-x} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(b-a)^{\mu+\nu-1}}{b-x} {}_2F_1 \left(1, \mu; \mu+\nu; \frac{b-a}{b-x} \right), & \text{если } x < a \text{ или } x > b; \\ (x-a)^{\nu-1} (b-x)^{\mu-1} \pi \operatorname{ctg} \mu \pi - (b-a)^{\mu+\nu-2} {}_2F_1 \left(2-\mu-\nu, 1; 2-\mu; \frac{b-x}{b-a} \right), & \text{если } a < x < b \end{cases} \quad (11.6)$$

$$(\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re} \nu > 0)$$

(см. справочники А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.2.6.5—8] и Г. Бейтмена, А. Эрдейи [4, 15.2(33)]). Заметим, что при $x \notin (a, b)$ интегралы (11.4) — (11.6) вычисляются простыми заменами переменных. Так, например, при $x < a$ замена $s = \frac{(t-a)(b-x)}{(b-a)(t-x)}$ приводит

(11.4) к бета-функции и эта же замена в силу (1.73) дает формулу (11.6) при $x > b$. Для значений $a < x < b$ требуемые равенства можно получить из формул для $x \notin (a, b)$ с помощью формул Сохоцкого, известных в теории сингулярных интегралов (см. Ф. Д. Гахов [1, с. 38]).

Справедливы также (Ф. Д. Гахов [1, с. 530—531]) формулы

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\frac{\alpha}{2}} (b-t)^{\frac{\alpha}{2}} |t-y|^{1-\alpha} (t-x)} = \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\alpha \pi}{2} \operatorname{sign}(y-x)}{(x-a)^{\alpha/2} (b-x)^{\alpha/2} |x-y|^{1-\alpha}}, \quad (11.7)$$

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sign}(t-y) dt}{(t-a)^{\frac{1+\alpha}{2}} (b-t)^{\frac{1+\alpha}{2}} |t-y|^{1-\alpha} (t-x)} = \frac{\pi \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2}}{(x-a)^{\frac{1+\alpha}{2}} (b-x)^{\frac{1+\alpha}{2}} |x-y|^{1-\alpha}}, \quad (11.8)$$

где $a < x < b$, $a < y < b$, $0 < \alpha < 1$.

Отметим, наконец, формулу перестановки сингулярных интегралов:

$$\int_a^b \frac{dy}{y-x} \int_a^b \frac{\varphi(y, t) dt}{t-y} = -\pi^2 \varphi(x, x) + \int_a^b dt \int_a^b \frac{\varphi(y, t) dy}{(y-x)(t-y)}, \quad (11.9)$$

называемую *формулой перестановки Пуанкаре — Бертрана* (см. Ф. Д. Гахов [1, с. 63]).

2°. Случай оси. В случае оси формулы связи дробных интегралов $I_+^\alpha \varphi$, $I_-^\alpha \varphi$ с сингулярным оператором S имеют самый простой вид.

Теорема 11.4. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\varphi(x) \in L_p(R^1)$. Тогда дробные интегралы I_+^α , I_-^α и сингулярный оператор S связаны соотношениями

$$I_-^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_+^\alpha \varphi + \sin \alpha \pi S I_+^\alpha \varphi, \quad 1 \leq p < 1/\alpha, \quad (11.10)$$

$$I_+^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_-^\alpha \varphi - \sin \alpha \pi S I_-^\alpha \varphi, \quad 1 \leq p < 1/\alpha, \quad (11.11)$$

$$S I_\pm^\alpha \varphi = I_\pm^\alpha S \varphi, \quad 1 < p < 1/\alpha. \quad (11.12)$$

Доказательство. Пусть вначале $\varphi \in C_0^\infty$. Рассмотрим интеграл

$$S I_+^\alpha \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}.$$

Здесь можно поменять порядок интегрирования (такая возможность в случае, когда только один из интегралов является сингулярным, известна, см. книги Ф. Д. Гахова [1], Н. И. Мусхелишвили [1]). Поэтому

$$S I_+^\alpha \varphi = \frac{1}{\pi \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{dt}{(t-\tau)^{1-\alpha}(t-x)}.$$

Внутренний интеграл после замены $t = \tau + s/(1-s)$

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} \frac{dt}{(t-\tau)^{1-\alpha}(t-x)} &= \int_0^1 \frac{s^{\alpha-1} (1-s)^{-\alpha} ds}{\tau - x + s(1+x-\tau)} = \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} (\tau - x)^{\alpha-1}, & x < \tau, \\ -\pi \operatorname{ctg} \alpha \pi (x - \tau)^{\alpha-1}, & x > \tau, \end{cases} \end{aligned}$$

согласно (11.4). Следовательно,

$$S I_+^\alpha \varphi = \frac{1}{\sin \alpha \pi \Gamma(\alpha)} \left[\int_x^{\infty} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha}} - \cos \alpha \pi \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}} \right],$$

откуда и вытекает (11.10) для $\varphi \in C_0^\infty$. В силу плотности C_0^∞ в $L_p(R^1)$ результат, согласно теореме Банаха 1.7, распространяется на $L_p(R^1)$ за счет ограниченности операторов $I_\pm^\alpha$ из $L(R^1)$ в $L_q(R^1)$, $q = p/(1-\alpha p)$ (теорема 5.3) и ограниченности оператора S в $L_q(R^1)$ (теорема 11.3). В случае $p=1$ вместо теоремы 5.3 следует привлечь теорему 5.6 (и замечание 5.2).

Формула (11.11) следует из (11.10) на основании перехода (5.9) с учетом того, что $QS = -SQ$, где $Q\varphi = \varphi(-x)$.

Коммутация (11.12) очевидна на хороших функциях в силу того, что на таких функциях можно перейти к образам Фурье (см. формулы (7.1) и (11.3)). Для функций же из L_p остается вновь сослаться на ограниченность операторов $I_{\pm}^{\alpha}$ и S .

Следствие 1. Справедливо совпадение образов

$$I_{+}^{\alpha}(L_p) = I_{-}^{\alpha}(L_p) \stackrel{\text{def}}{=} I^{\alpha}(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha$$

(см. (6.1)). Класс $I^{\alpha}(L_p)$ инвариантен относительно оператора S .

Действительно, $I_{\pm}^{\alpha}\varphi = I_{\pm}^{\alpha}(\cos \alpha\pi\varphi \mp \sin \alpha\pi S\varphi)$, и поэтому совпадение образов вытекает из ограниченности оператора S в L_p .

Следствие 2. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то

$$I_{+}^{\alpha} I_{-}^{\beta} = [\cos(\beta - \alpha)\pi E + \sin(\beta - \alpha)\pi S] I_{-}^{\alpha} I_{+}^{\beta},$$

где E — тождественный оператор.

Следствие 3. Дробные производные Марио $D_{+}^{\alpha}f$, $D_{-}^{\alpha}f$ связаны друг с другом тождеством

$$D_{-}^{\alpha}f = \cos \alpha\pi D_{+}^{\alpha}f - \sin \alpha\pi S D_{+}^{\alpha}f, \quad f \in I^{\alpha}(L_p). \quad (11.11')$$

В самом деле, для получения (11.11') достаточно обозначить $I_{-}^{\alpha}\varphi = f$ в (11.11), применить в соответствии с теоремой 6.1 оператор D_{+}^{α} к обеим частям в (11.11) и учесть (11.12).

Следствие 4. При всех $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, справедливо неравенство

$$\|D_{-}^{\alpha}f\|_p \leq A \|D_{+}^{\alpha}f\|_p, \quad f \in I^{\alpha}(L_p), \quad (11.11'')$$

где $A = |\cos \alpha\pi| + \sin \alpha\pi \operatorname{tg} \{\pi[2 \min(p, p')]^{-1}\}$.

Действительно, эта оценка вытекает из (11.11') и (11.1').

Замечание 11.1. Формулы (11.10) — (11.12) справедливы для $\varphi(x) \in L_p(\rho)$, $\rho(x) = (1+x^2)^{\mu/2} \prod_{k=1}^n |x-x_k|^{\mu_k}$, $x_k \in \mathbb{R}^1$, если $1 < \mu_k < p-1$

($k=1, \dots, n$), $\alpha p - 1 < \mu + \sum_{k=1}^n \mu_k < p-1$, $p > 1$. Это вытекает из теоремы типа Харди — Литтлвуда 5.5 и теоремы 11.3 согласно теореме Банаха 1.7.

Замечание 11.2. В теории сингулярных интегралов известна (Ф. Д. Гахов [1, с. 43]) простая формула дифференцирования сингулярного интеграла: $(Sf)^{(n)} = S(f^{(n)})$. Она имеет место и в случае дробного дифференцирования:

$$D_{\pm}^{\alpha}(Sf) = S(D_{\pm}^{\alpha}f), \quad f \in I^{\alpha}(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha, \quad (11.13)$$

являясь перефразировкой свойства коммутации (11.12).

3°. Случай отрезка и полуоси. Выясним, как связаны между собой дробные интегралы $I_{a+}^{\alpha}\varphi$ и $I_{b-}^{\alpha}\varphi$ в случае конечного отрезка $[a, b]$. Эти связи сложнее, чем связи (11.10) — (11.12): сказывается влияние концов отрезка. Вопрос заключается в следующем: к какому результату приводит композиция $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha}$ (или $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha}$)? Естественно ожидать, что операторы $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$, I_{b-}^{α} в каком-то смысле уничтожают действие друг друга и их композиция является оператором, ограниченным, например, в стандартных пространствах H^{λ} , L_p . Мы увидим, что она содержит весовой сингулярный оператор.

Считая пока, что $\varphi \in C_0^{\infty}$, рассмотрим композицию

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} \varphi &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} \varphi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^b \varphi(\tau) d\tau \int_a^{\min(x, \tau)} (x-t)^{-\alpha} (\tau-t)^{\alpha-1} dt.\end{aligned}$$

Введем функцию

$$\begin{aligned}J_{\varepsilon}(x) &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \left[\int_a^{x-\varepsilon} \varphi(\tau) d\tau \int_a^{\tau} (x-t)^{-\alpha} (\tau-t)^{\alpha-1} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x+\varepsilon}^b \varphi(\tau) d\tau \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (\tau-t)^{\alpha-1} dt \right]\end{aligned}$$

и обозначим

$$\mathcal{H}_1(x, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^{\tau} (x-t)^{-\alpha} (\tau-t)^{\alpha-1} dt = \int_0^{\frac{\tau-a}{x-\tau}} s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha} ds, \quad \tau < x,$$

$$\mathcal{H}_2(x, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} (\tau-t)^{\alpha-1} dt = \int_0^{\frac{x-a}{\tau-x}} s^{-\alpha} (1+s)^{\alpha-1} ds, \quad \tau > x.$$

Тогда

$$\begin{aligned}J_{\varepsilon}(x) &= \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\mathcal{H}_1(x, x-\varepsilon) \varphi(x-\varepsilon) - \mathcal{H}_2(x, x+\varepsilon) \varphi(x+\varepsilon) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \left(\frac{\tau-a}{x-a} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-x} \right].\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} \varphi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_{\varepsilon}(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \int_a^b \left(\frac{\tau-a}{x-a} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-x} + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x) [\mathcal{H}_1(x, x-\varepsilon) - \mathcal{H}_2(x, x+\varepsilon)] \right\}.\end{aligned}$$

Вычисляя предел, имеем

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\mathcal{H}_1(x, x-\varepsilon) - \mathcal{H}_2(x, x+\varepsilon)] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\frac{x-a-\varepsilon}{\varepsilon}} [s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha} - s^{-\alpha} (1+s)^{\alpha-1}] ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{x-a-\varepsilon}{\varepsilon}}^{\frac{x-a}{\varepsilon}} s^{-\alpha} (1+s)^{\alpha-1} ds \right\} = \int_0^{\infty} \left[\frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha}} - \frac{(1+s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}} \right] ds = \pi \operatorname{ctg} \alpha \pi\end{aligned}$$

в силу формулы 2.2.12.3 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1]. Поэтому

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} \varphi = \cos \alpha \pi \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^b \left(\frac{\tau-a}{x-a} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-x} \quad (11.14)$$

и искомая связь найдена. Теперь, зная явный вид связи, легко дать строгое ее обоснование. Оно будет дано на функциях $\varphi \in L_p$. Одновременно получим и другие связи.

Теорема 11.5. Пусть $0 < \alpha < 1$,

$$r_a(x) = x - a, \quad r_b(x) = b - x. \quad (11.15)$$

Тогда дробные интегралы $I_{a+}^\alpha \varphi$, $I_{b-}^\alpha \varphi$ и сингулярный оператор S связаны между собой соотношениями

$$I_{b-}^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_{a+}^\alpha \varphi + \sin \alpha \pi I_{a+}^\alpha r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p > 1, \quad (11.16)$$

$$I_{a+}^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_{b-}^\alpha \varphi - \sin \alpha \pi I_{b-}^\alpha r_b^{-\alpha} S r_b^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p > 1, \quad (11.17)$$

$$I_{b-}^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_{a+}^\alpha \varphi + \sin \alpha \pi r_b^\alpha S r_b^{-\alpha} I_{a+}^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p \geq 1, \quad (11.18)$$

$$I_{a+}^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_{b-}^\alpha \varphi - \sin \alpha \pi r_a^\alpha S r_a^{-\alpha} I_{b-}^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p, \quad p \geq 1, \quad (11.19)$$

которые выполняются почти всюду, если $p\alpha \leq 1$, и для всех $x \in (a, b)$, если $p\alpha > 1$.

Доказательство. Пусть вначале $\varphi \in C_0^\infty$. Тождество (11.16) вытекает из (11.14), поскольку $I_{a+}^\alpha \mathcal{D}_{a+}^\alpha f = f$, но может быть проверено и непосредственной перестановкой порядка интегрирования в правой части в (11.16). Тождество (11.18) докажем непосредственной проверкой:

$$r_b^\alpha S \frac{1}{r_b^\alpha} I_{a+}^\alpha \varphi = \frac{(b-x)^\alpha}{\pi} \int_a^b \varphi(\tau) d\tau \int_\tau^b \frac{(t-\tau)^{\alpha-1} (b-t)^{-\alpha}}{t-x} dt$$

(произведенная здесь перестановка порядка интегрирования сингулярного интеграла и абсолютно сходящегося, как уже упоминалось, возможна).

Отсюда в силу (11.4) правая часть равна $\frac{1}{\Gamma(\alpha) \sin \alpha \pi} \int_x^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha}} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha \pi}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}}$, что и дает (11.18). Соотношения (11.17), (11.19)

вытекают из (11.16), (11.18) соответственно, если воспользоваться формулами (2.19) и учесть, что $QS = -SQ$.

Итак, тождества (11.16) — (11.19) установлены для $\varphi \in C_0^\infty$. Оператор $r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha$ ограничен в L_p , $1 < p < 1/\alpha$, в силу теоремы 11.3. Тогда ввиду ограниченности операторов I_{a+}^α , I_{b-}^α из L_p в L_q , $q = p/(1-\alpha p)$, можно сделать вывод о том, что справедливость тождества (11.16) на плотном в L_p множестве C_0^∞ влечет его справедливость на всех функциях $\varphi \in L_p$, $1 < p < 1/\alpha$. Подобным же образом обосновываются равенства (11.17) — (11.19) для $\varphi \in L_p$, $1 < p < 1/\alpha$. Ввиду вложения $L_{p_1}(a, b) \subset L_{p_2}(a, b)$, $p_1 > p_2$, тождества справедливы и при $p \geq 1/\alpha$.

Чтобы пояснить выполнимость тождеств в каждой точке $x \in (a, b)$ при $p > 1/\alpha$, запишем легко проверяемое равенство

$$\frac{1}{r_a^\alpha} S r_a^\alpha \varphi = \frac{1}{r_a^{\alpha-1}} S r_a^{\alpha-1} \varphi + \frac{c}{(x-a)^\alpha}, \quad c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \quad (11.20)$$

считая, что $\varphi \in L_p$, $p > 1/\alpha$. Так как оператор $r_a^{1-\alpha} S r_a^{\alpha-1}$ ограничен, согласно теореме 11.3, в L_p при $p > 1/\alpha$, то правая часть в (11.16) оказывается гильбертовской функцией в силу теоремы 3.6. Поэтому (11.16) справедли-

во в каждой точке. Аналогично обосновывается это утверждение для остальных тождеств.

Остался случай $p=1$ в (11.18) и (11.19). Подобно (11.20) получается, что

$$r_a^\alpha S \frac{1}{r_a^\alpha} f = r_a^{\alpha-1} S r_a^{1-\alpha} f + \frac{c_1}{(x-a)^{1-\alpha}}, \quad c_1 = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(t) dt}{(t-a)^\alpha}$$

в предположении, что существуют интегралы в правой части. Поэтому для $f = I_{b-}^\alpha \varphi$ простыми вычислениями находим

$$r_a^\alpha S \frac{1}{r_a^\alpha} I_{b-}^\alpha \varphi = r_a^{\alpha-1} S \frac{1}{r_a^{\alpha-1}} I_{b-}^\alpha \varphi - \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\pi} \Gamma(1-\alpha) \int_a^b \varphi(t) dt. \quad (11.21)$$

Отсюда усматривается ограниченность оператора $r_a^\alpha S r_a^{-\alpha} I_{b-}^\alpha$ из L_1 в L_r , $1 < r < 1/(1-\alpha)$. Действительно, для второго слагаемого в правой части это очевидно, а для первого вытекает из теорем 5.6 и 11.3. Аналогично рассматривается случай $p=1$ в (11.18).

Следствие 1. *Классы функций, представимых дробными интегралами $I_{a+}^\alpha \varphi$ и $I_{b-}^\alpha \varphi$ с плотностью $\varphi \in L_p$, совпадают при $1 < p < 1/\alpha$.*

Действительно, в силу (11.16) и (11.17)

$$I_{b-}^\alpha \varphi = I_{a+}^\alpha (\cos \alpha \pi \varphi + \sin \alpha \pi r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha \varphi),$$

$$I_{a+}^\alpha \varphi = I_{b-}^\alpha (\cos \alpha \pi \varphi - \sin \alpha \pi r_b^{-\alpha} S r_b^\alpha \varphi),$$

и поэтому следствие вытекает из ограниченности операторов $r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha$, $r_b^{-\alpha} S r_b^\alpha$ в L_p при $p < 1/\alpha$.

Следствие 2. *Справедливы следующие формулы «коммутации»:*

$$I_{a+}^\alpha r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha \varphi = r_b^\alpha S r_b^{-\alpha} I_{a+}^\alpha \varphi, \quad (11.22)$$

$$I_{b-}^\alpha r_b^{-\alpha} S r_b^\alpha \varphi = r_a^\alpha S r_a^{-\alpha} I_{b-}^\alpha \varphi.$$

Подобно (11.13) можно перефразировать формулы (11.22) как формулы дробного дифференцирования сингулярного интеграла:

$$D_{a+}^\alpha \left(\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^\alpha \frac{f(t) dt}{t-x} \right) = \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\alpha \frac{(D_{a+}^\alpha f)(t)}{t-x} dt, \quad (11.22')$$

$$D_{b-}^\alpha \left(\int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\alpha \frac{f(t) dt}{t-x} \right) = \int_a^b \left(\frac{b-x}{x-a} \right)^\alpha \frac{(D_{b-}^\alpha f)(t)}{t-x} dt$$

для $f \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < 1/\alpha$.

Следствие 3. *Наряду со связями (11.16) — (11.19) справедливы соотношения*

$$I_{b-}^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_{a+}^\alpha \varphi + \sin \alpha \pi I_{a+}^{\alpha-1} \frac{1}{r_a^{\alpha-1}} S r_a^{\alpha-1} \varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{(t-a)^{1-\alpha}}, \quad (11.23)$$

$$I_{a+}^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_{b-}^\alpha \varphi - \sin \alpha \pi I_{b-}^{\alpha-1} \frac{1}{r_b^{\alpha-1}} S r_b^{\alpha-1} \varphi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{(b-t)^{1-\alpha}}, \quad (11.24)$$

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi = \cos \alpha\pi I_{a+}^{\alpha}\varphi + \sin \alpha\pi r_b^{\alpha-1} S \frac{1}{r_b^{\alpha-1}} I_{a+}^{\alpha}\varphi + \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) dt, \quad (11.25)$$

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = \cos \alpha\pi I_{b-}^{\alpha}\varphi - \sin \alpha\pi r_a^{\alpha-1} S \frac{1}{r_a^{\alpha-1}} I_{b-}^{\alpha}\varphi + \frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) dt, \quad (11.26)$$

где $0 < \alpha < 2$, $\varphi(x) \in L_p(a, b)$ и $p > \max(1, 1/\alpha)$ в (11.23), (11.24) и $1 \leq p < \infty$ в (11.25), (11.26).

Утверждения следствия 3 вытекают непосредственно из соотношений (11.16) — (11.19) на основании переходов типа (11.20), (11.21). Обоснование их выполнимости для $\varphi \in L_p$ при указанных значениях p проводится так же, как в теореме 11.5 для тождеств (11.16) — (11.19).

Замечание 11.2. В силу теоремы 3.12 доказанные соотношения (11.16) — (11.19) справедливы и для $\varphi(x) \in L_p([a, b], \rho)$, $\rho(x) = \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}$, $x_k \in [a, b]$, если $-1 < \mu_k < p - 1$ ($k = 1, \dots, n$).

В случае, когда $\Omega = R_+^1 = [0, \infty)$, связи между операторами дробного интегрирования I_{0+}^{α} , I_-^{α} и сингулярным оператором можно получить из соотношений (11.16) — (11.19) с помощью предельного перехода при $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$. Эти связи даются следующими формулами:

$$I_-^{\alpha}\varphi = \cos \alpha\pi I_{0+}^{\alpha}\varphi + \sin \alpha\pi I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} S x^{\alpha}\varphi, \quad (11.27)$$

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi = \cos \alpha\pi I_-^{\alpha}\varphi - \sin \alpha\pi I_-^{\alpha} S \varphi. \quad (11.28)$$

$$I_-^{\alpha}\varphi = \cos \alpha\pi I_{0+}^{\alpha}\varphi + \sin \alpha\pi S I_{0+}^{\alpha}\varphi, \quad (11.29)$$

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi = \cos \alpha\pi I_-^{\alpha}\varphi - \sin \alpha\pi x^{\alpha} S x^{-\alpha} I_-^{\alpha}\varphi, \quad (11.30)$$

где $\varphi(x) \in L_p(R_+^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, в (11.27), (11.28), (11.30) и $1 \leq p < 1/\alpha$ в (11.29). Отметим также, что (11.27), (11.30) следуют из (11.16) и (11.19), (11.28) — из (11.11) с учетом (11.12), а (11.29) — из (11.10). Кроме того, из (11.27) — (11.30) вытекают формулы «коммутации»

$$I_{0+}^{\alpha} x^{-\alpha} S x^{\alpha} = S I_{0+}^{\alpha}, \quad x^{\alpha} S x^{-\alpha} I_-^{\alpha} = I_-^{\alpha} S \quad (11.31)$$

типа (11.20).

Аналогичным образом на полуось R_+^1 можно перенести формулы (11.23) — (11.26).

Завершим этот пункт следующей леммой.

Л е м м а 11.1. Пусть $0 < \alpha < 1$. Операторы

$$A\varphi = \cos \alpha\pi \varphi(x) - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, \quad x > 0, \quad (11.32)$$

$$B\varphi = \cos \alpha\pi \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, \quad x > 0, \quad (11.33)$$

являются взаимно обратными: $AB\varphi \equiv BA\varphi \equiv \varphi$ для $\varphi(x) \in L_p(R_+^1)$, $1 < p < 1/\alpha$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из сопоставления тождеств (11.27), (11.28). Действительно, они имеют вид $I_-^{\alpha}\varphi = I_{0+}^{\alpha} B\varphi$, $I_{0+}^{\alpha}\varphi = I_-^{\alpha} A\varphi$. Отсюда, очевидно, $AB\varphi \equiv BA\varphi \equiv \varphi$ на достаточно хороших функциях $\varphi(x)$, а тогда и на всех функциях $\varphi(x) \in L_p(R_+^1)$ ввиду ограниченности операторов A и B в $L_p(R_+^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, согласно теореме 11.3.

Заметим, что тождества $AB\varphi \equiv BA\varphi \equiv \varphi$ могут быть проверены и непо-

средственным вычислением композиций AB, BA по формуле Пуанкаре—Бертрана (11.9).

4°. **Некоторые другие формулы композиции.** Покажем, что если $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, то «урезание нулем» функции $f(x)$ также принадлежит $I^\alpha(L_p)$. Именно пусть $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и

$$P_{ab}\varphi = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases} \quad (11.34)$$

а в случае полуосей $[a, b] = R_+^1$ или $[a, b] = R_-^1$ будем писать

$$P_+\varphi = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad P_-\varphi = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \varphi(x), & x < 0. \end{cases} \quad (11.35)$$

Покажем также, что $P_{ab}I_+^\alpha\varphi \equiv I_+^\alpha N\varphi$, $\varphi \in L_p$, $1 < p < 1/\alpha$, где N — ограниченный оператор в L_p .

Теорема 11.6. Пусть $\varphi(x) \in L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, тогда

$$P_+I_+^\alpha\varphi = I_+^\alpha\psi, \quad \psi \in L_p(R^1), \quad (11.36)$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha \frac{\varphi(-t)}{x+t} dt, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (11.37)$$

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что $\psi(x) \in L_p$ в силу теоремы 1.5. Далее, очевидно, что $(I_+^\alpha\psi)(x) = 0$ при $x < 0$. Остается доказать, что $(I_+^\alpha\psi)(x) = (I_+^\alpha\varphi)(x)$ при $x > 0$. Имеем $(I_+^\alpha\psi)(x) =$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 (-\tau)^\alpha \varphi(\tau) d\tau \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} t^{-\alpha}}{t-x} dt.$$

В силу (11.4) получаем $(I_+^\alpha\psi)(x) = (I_+^\alpha\varphi)(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = (I_+^\alpha\varphi)(x),$

что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что теорема 11.6 означает следующее: если функция $f(x)$ представима дробным интегралом от функции из $L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, то этим же свойством обладает и функция $f_+(x) = f(x)$ при $x > 0$, $f_+(x) = 0$ при $x < 0$.

Следствие 1. Пусть $\varphi(x) \in L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, тогда

$$P_{ab}I_+^\alpha\varphi = I_+^\alpha\psi, \quad \psi \in L_p(R^1), \quad (11.38)$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x-a}\right)^\alpha \frac{\varphi(a-t)}{(x+t-a)^{1-\alpha}} dt, & a < x < b, \\ \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\int_0^\infty \left(\frac{t}{x-a}\right)^\alpha \frac{\varphi(a-t)}{(x+t-a)^{1-\alpha}} dt - \int_0^\infty \left(\frac{t}{x-a}\right)^\alpha \frac{\varphi(b-t)}{(x+t-b)^{1-\alpha}} dt \right], & x > b. \end{cases}$$

Следствие 2. Пусть $a(x)$ — кусочно-постоянная функция с конечным числом точек разрыва. Тогда $a(x)f(x) \in I^\alpha(L_p)$ для $f \in I^\alpha(L_p)$ и $\|af\|_{I^\alpha(L_p)} \leq \|a\|_{I^\alpha(L_p)} \|f\|_{I^\alpha(L_p)}$.

Теорема 11.7. Пусть $f(x)$ — кусочно-гельдеровская на оси функция с конечным числом точек разрыва и с показателем гельдеровости $\lambda > \max(\alpha, -\alpha + 1/p)$ и пусть $f(\infty) = 0$. Тогда $f(x) \in I^\alpha(L_p)$.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $f(x)$ имеет одну точку разрыва $x = 0$. Введем функции

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ \omega_1(x), & x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \omega_2(x), & x > 0, \\ f(x), & x \leq 0, \end{cases}$$

выбрав функции $\omega_1(x), \omega_2(x) \in C_0^\infty$ так, чтобы $\omega_1(0) = f(+0), \omega_2(0) = f(-0)$. Тогда $f_i(x) \in H^\lambda(R^1)$ и $f_i(\infty) = 0, i = 1, 2$. Поэтому $f_i(x) \in I^\alpha(L_p)$ в силу теоремы 6.5. Очевидно, $f(x) = \theta(x)f_1(x) + \theta(-x)f_2(x)$, где $\theta(x) = (1 + \operatorname{sign} x)/2$, так что $f(x) \in I^\alpha(L_p)$ ввиду теоремы 11.6. Теорема доказана.

Ясно, что из (11.36) можно получить аналогичное равенство $P_-I_-^\alpha \varphi = I_-^\alpha g$ с функцией $g(x)$, записываемой подобно (11.37). В следующей теореме доказывается представление для $P_-I_-^\alpha \varphi$ в виде $I_+^\alpha g$. Обозначим

$$S_\alpha \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{t}{x} \right|^\alpha \frac{\varphi(t) dt}{t-x}. \quad (11.39)$$

Теорема 11.8. Для $\varphi(x) \in L_p(R^1), 1 < p < 1/\alpha$, справедливо тождество

$$P_-I_-^\alpha \varphi = I_+^\alpha N\varphi, \quad (11.40)$$

где N — ограниченный в $L_p(R^1)$ оператор:

$$N\varphi = \cos \alpha\pi P_- \varphi + \sin \alpha\pi S\varphi - \sin \alpha\pi P_+ S_\alpha P_+ \varphi = \quad (11.41)$$

$$= \begin{cases} \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t-x} - \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x} \right)^\alpha \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, & x > 0 \\ \cos \alpha\pi \varphi(x) + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, & x < 0. \end{cases} \quad (11.42)$$

Доказательство. Применяя тождество (11.10), имеем

$$P_-I_-^\alpha \varphi = (E - P_+) I_+^\alpha (\cos \alpha\pi \varphi + \sin \alpha\pi S\varphi). \quad (11.43)$$

Перепишем равенство (11.36) в виде

$$P_+I_+^\alpha \varphi = I_+^\alpha P_+ (\varphi - \sin \alpha\pi S_\alpha P_- \varphi). \quad (11.44)$$

Используя (11.44) в (11.43), получаем

$$P_-I_-^\alpha \varphi = I_+^\alpha (\cos \alpha\pi P_- \varphi + \sin \alpha\pi P_- S\varphi + \\ + \sin \alpha\pi \cos \alpha\pi P_+ S_\alpha P_- \varphi + \sin^3 \alpha\pi P_+ S_\alpha P_- S\varphi). \quad (11.45)$$

Переставляя порядок интегрирования в последнем слагаемом согласно

$$(11.9), \text{ находим } P_+ S_\alpha P_- S\varphi = -\frac{1}{\pi^2 x^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{t^\alpha dt}{(t+x)(t+\tau)} \quad \text{при}$$

$x > 0$. Здесь внутренний интеграл (см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.2.4. 25, 26])

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha} dt}{(t+x)(t+\tau)} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \frac{|\tau|^{\alpha} v(\tau) - x^{\alpha}}{\tau - x}, \quad x > 0, \quad (11.46)$$

где $v(\tau) = 1$ при $\tau > 0$, $v(\tau) = \cos \alpha \pi$ при $\tau < 0$. Поэтому

$$P_+ S_{\alpha} P_- S \varphi = \frac{1}{\sin \alpha \pi} (P_+ S - P_+ S_{\alpha} P_+ - \cos \alpha \pi P_+ S_{\alpha} P_-) \varphi, \quad (11.47)$$

после чего (11.45) превращается в требуемое равенство (11.40). Ограниченность оператора (11.41) в $L_p(R^1)$ при $1 < p < 1/\alpha$ следует из ограниченности S и S_{α} в $L_p(R^1)$ согласно теореме 11.3.

§ 12. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА

Широкое распространение получили операторы типа дробного интегрирования «с постоянными пределами интегрирования» (они допускают естественное обобщение на случай функций многих переменных, см. § 25). Такие операторы ввиду ряда аналогий с операторами математической физики получили название операторов типа потенциала. Мы не касаемся в этом параграфе соответствующих форм дробного дифференцирования, т. е. не рассматриваем явные формы операторов, обратных к потенциалам. Они будут построены в § 30, п. 4°. Рассмотрение потенциалов начнем со случая функций, заданных на прямой R^1 .

1°. Случай оси. Потенциалы Рисса и Феллера. Рассмотрим интеграл

$$I^{\alpha} \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{|t-x|^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots, \quad (12.1)$$

в котором выбор нормирующего множителя прояснится ниже, см. соотношения (12.12), (12.16). Интеграл $I^{\alpha} \varphi$ называется *потенциалом Рисса*. Наряду с ним будем рассматривать следующую его модификацию:

$$H^{\alpha} \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \alpha \neq 2, 4, 6, \dots \quad (12.2)$$

Очевидно, что

$$I^{\alpha} = [2\cos(\alpha\pi/2)]^{-1} (I_+^{\alpha} + I_-^{\alpha}), \quad (12.3)$$

$$H^{\alpha} = [2\sin(\alpha\pi/2)]^{-1} (I_+^{\alpha} - I_-^{\alpha}), \quad (12.4)$$

где $I_{\pm}^{\alpha}$ — операторы (5.2), (5.3), так что операторы I^{α} и H^{α} определены при $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ на функциях $\varphi(t) \in L_p(R^1)$, $1 \leq p < 1/\operatorname{Re} \alpha$, и ограничены при $1 < p < 1/\operatorname{Re} \alpha$ из $L_p(R^1)$ в $L_q(R^1)$, $q = p(1 - p \operatorname{Re} \alpha)^{-1}$.

В § 30, п. 4° будет показано, что обратные к I^{α} и H^{α} операторы можно построить в виде

$$\begin{aligned} (I^{\alpha})^{-1} f &= \frac{1}{2\Gamma(-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{|t|^{1+\alpha}} dt = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_0^{\infty} \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)}{t^{1+\alpha}} dt, \end{aligned} \quad (12.1')$$

$$\begin{aligned}(H^\alpha)^{-1}f &= \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{|t|^\alpha} \operatorname{sign} t \, dt = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\sin(\alpha\pi/2)} \int_0^{\infty} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}} \, dt\end{aligned}\quad (12.2')$$

(ср. с формулами (5.57), (5.58) для дробной производной Маршю).

Пусть

$$S\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) \, dt}{t-x}.\quad (12.5)$$

Лемма 12.1. Операторы I^α , H^α связаны соотношениями

$$I^\alpha \varphi = S H^\alpha \varphi,\quad (12.6)$$

$$H^\alpha \varphi = -S I^\alpha \varphi,\quad (12.7)$$

где $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$, $\varphi \in L_p(R^1)$, $1 \leq p < 1/\operatorname{Re} \alpha$.

Доказательство. Достаточно доказать (12.6), так как (12.7) следует из (12.6) в силу (11.2). Равенство же (12.6) получим, сложив (11.10) и (11.11) с учетом (12.3), (12.4).

Следствие. Операторы дробного интегрирования $I_\pm^\alpha$ выражаются через операторы типа потенциала I^α и H^α по формулам

$$I_\pm^\alpha = I^\alpha \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} E \mp \sin \frac{\alpha\pi}{2} S \right),\quad (12.8)$$

$$I_\pm^\alpha = H^\alpha \left(\pm \sin \frac{\alpha\pi}{2} E + \cos \frac{\alpha\pi}{2} S \right),\quad (12.9)$$

где $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ и E — единичный оператор.

Доказательство. Для проверки равенств (12.8), (12.9) достаточно в правой части воспользоваться тождествами (12.6), (12.7) и после этого соотношениями (12.3), (12.4).

Равенства (12.3), (12.4) приводят к естественному обобщению операторов I^α , H^α в виде произвольной линейной комбинации операторов I_+^α и I_-^α :

$$M_{u,v}^\alpha \varphi = u I_+^\alpha \varphi + v I_-^\alpha \varphi,\quad (12.10)$$

где u , v — произвольные постоянные. Оператор (12.10) можно записать в виде

$$M_{u,v}^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) \, dt,\quad (12.11)$$

где $c_1 = (u+v)/2$, $c_2 = (u-v)/2$, так что

$$M_{u,v}^\alpha \varphi = (u+v) \cos \frac{\alpha\pi}{2} K^\alpha \varphi + (u-v) \sin \frac{\alpha\pi}{2} H^\alpha \varphi.\quad (12.12)$$

Оператор (12.10) будем называть потенциалом Феллера. Подобные операторы в виде

$$I_\delta^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \{ \alpha [\pi/2 + \delta \operatorname{sign}(t-x)] \}}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) \, dt\quad (12.13)$$

были впервые введены В. Феллером (W. Feller [1]), установившим для I_δ^α полугрупповое свойство $I_\delta^\alpha I_\delta^\beta \varphi = I_\delta^{\alpha+\beta} \varphi$. Очевидно, что $I_\delta^\alpha \varphi$ получается из (12.10) при выборе $u = \frac{\sin(\alpha\pi/2 - \alpha\delta)}{\sin \alpha\pi}$, $v = \frac{\sin(\alpha\pi/2 + \alpha\delta)}{\sin \alpha\pi}$. Отметим также, что

$$I_\delta^\alpha \varphi = \cos \alpha\delta I^\alpha \varphi - \sin \alpha\delta H^\alpha \varphi. \quad (12.14)$$

З а м е ч а н и е 12.1. Оператор $M_{u,v}^\alpha$ имеет очень простую форму обратного оператора (близкую к форме дробного дифференцирования Маршо). Обратный оператор особенно прост в случае операторов I^α , H^α . Обращение операторов типа потенциала $M_{u,v}^\alpha$ дается нами в § 30, п. 4°.

Покажем в теореме 12.1, что композиция двух операторов вида (12.10) — снова оператор такого же вида. Предварительно установим следующую вспомогательную лемму.

Л е м м а 12.2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$ и $\varphi(x) \in L_p(R^1)$ $1 \leq p < 1/(\alpha + \beta)$. Тогда

$$\sin(\alpha + \beta) \pi I_+^\alpha I_-^\beta \varphi = \sin \alpha\pi I_+^{\alpha+\beta} \varphi + \sin \beta\pi I_-^{\alpha+\beta} \varphi, \quad (12.15)$$

$$\sin(\alpha + \beta) \pi I_-^\alpha I_+^\beta \varphi = \sin \beta\pi I_+^{\alpha+\beta} \varphi + \sin \alpha\pi I_-^{\alpha+\beta} \varphi. \quad (12.16)$$

Доказательство. В силу тождеств (11.10), (11.11) имеем

$$I_-^\alpha I_+^\beta \varphi = \cos \alpha\pi I_+^{\alpha+\beta} \varphi + \sin \alpha\pi S I_+^{\alpha+\beta} \varphi,$$

$$I_+^\alpha I_-^\beta \varphi = \cos \alpha\pi I_-^{\alpha+\beta} \varphi - \sin \alpha\pi S I_-^{\alpha+\beta} \varphi.$$

Отсюда с учетом (12.3), (12.4)

$$\begin{aligned} (I_+^\alpha I_-^\beta + I_-^\alpha I_+^\beta) \varphi &= 2 \cos \alpha\pi \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \pi I^{\alpha+\beta} \varphi + \\ &+ 2 \sin \alpha\pi \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \pi S H^{\alpha+\beta} \varphi, \\ (I_-^\alpha I_+^\beta - I_+^\alpha I_-^\beta) \varphi &= 2 \cos \alpha\pi \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \pi H^{\alpha+\beta} \varphi + \\ &+ 2 \sin \alpha\pi \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \pi S I^{\alpha+\beta} \varphi. \end{aligned}$$

Применяя лемму 12.1, получаем соотношения

$$(I_+^\alpha I_-^\beta + I_-^\alpha I_+^\beta) \varphi = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \pi I^{\alpha+\beta} \varphi,$$

$$(I_-^\alpha I_+^\beta - I_+^\alpha I_-^\beta) \varphi = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \pi H^{\alpha+\beta} \varphi,$$

из которых после простых преобразований получаем (12.15), (12.16).

Т е о р е м а 12.1. Пусть M_{u_1, v_1}^α и M_{u_2, v_2}^β — операторы вида (12.10) и пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$. Тогда

$$M_{u_1, v_1}^\alpha M_{u_2, v_2}^\beta \varphi = M_{u, v}^{\alpha+\beta} \varphi, \quad (12.17)$$

где $\varphi \in L_p(R^1)$, $1 \leq p < 1/(\alpha + \beta)$, и

$$\begin{aligned} u &= u_1 u_2 + \frac{u_1 v_2 \sin \alpha\pi + v_1 u_2 \sin \beta\pi}{\sin(\alpha + \beta)\pi}, \\ v &= v_1 v_2 + \frac{u_1 v_2 \sin \beta\pi + v_1 u_2 \sin \alpha\pi}{\sin(\alpha + \beta)\pi}. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как любая из композиций $I_{\pm}^{\alpha} I_{\pm}^{\beta} \varphi$ определена для $\varphi \in L_p(R^1)$, $1 \leq p < 1/(\alpha + \beta)$, то с учетом (5.15) имеем

$$M_{u_1, v_1}^{\alpha} M_{u_2, v_2}^{\beta} \varphi = u_1 u_2 I_{+}^{\alpha+\beta} \varphi + v_1 v_2 I_{-}^{\alpha+\beta} \varphi + u_1 v_2 I_{+}^{\alpha} I_{-}^{\beta} \varphi + v_1 u_2 I_{-}^{\alpha} I_{+}^{\beta} \varphi. \quad (12.18)$$

Соотношения (12.15), (12.16) дают возможность выразить композиции $I_{+}^{\alpha} I_{-}^{\beta}$, $I_{-}^{\alpha} I_{+}^{\beta}$ через $I_{+}^{\alpha+\beta}$ и $I_{-}^{\alpha+\beta}$, что после простых преобразований превращает (12.18) в (12.17).

Следствие 1. Если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, то

$$I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta}, \quad (12.19)$$

$$H^{\alpha} H^{\beta} = -I^{\alpha+\beta}. \quad (12.20)$$

$$I^{\alpha} H^{\beta} = H^{\alpha+\beta}. \quad (12.21)$$

Следствие 2. Если $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$, то

$$I_{\delta}^{\alpha} I_{\delta}^{\beta} = I_{\delta}^{\alpha+\beta}. \quad (12.22)$$

Действительно, (12.22) легко получается с помощью формулы (12.14) и равенств (12.19) — (12.21).

Отметим, наконец, что с помощью связей (12.3), (12.4) нетрудно перенести на операторы I^{α} , H^{α} и $M_{u,v}^{\alpha}$ и различные другие свойства операторов $I_{\pm}^{\alpha}$. В частности, справедлива

Теорема 12.2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\varphi(x) \in L_1(R^1)$. Тогда

$$(\mathcal{F} I^{\alpha} \varphi)(x) = |x|^{-\alpha} \hat{\varphi}(x), \quad (12.23)$$

$$(\mathcal{F} H^{\alpha} \varphi)(x) = i \operatorname{sign} x |x|^{-\alpha} \hat{\varphi}(x), \quad (12.24)$$

$$(\mathcal{F} M_{u,v}^{\alpha} \varphi)(x) = \left[(u+v) \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i(u-v) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \operatorname{sign} x \right] \frac{\hat{\varphi}(x)}{|x|^{\alpha}}. \quad (12.25)$$

Доказательство легко получается из формулы (7.1) и теоремы 7.1 на основании связей (12.3), (12.4), (12.10).

2°. Об «урезании» риссова потенциала на полуось. Аналогично лемме 11.1 зададимся вопросом: если $f(x) = I^{\alpha} \varphi$, то будет ли функция $f_+(x) = f(x)$ при $x > 0$ и $f_+(x) = 0$ при $x < 0$ также представима риссовым потенциалом

$$\theta_+(x) (I^{\alpha} \varphi)(x) = (I^{\alpha} \psi)(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (12.26)$$

$$\theta_{\pm}(x) = (1 \pm \operatorname{sign} x)/2, \quad (12.27)$$

и как определить функцию $\psi(x)$ по $\varphi(x)$?

Теорема 12.3. Для любой функции $\varphi(x) \in L_p(R^1)$, $1 < p < 1/\alpha$, существует функция $\psi(x)$ такая, что выполняется равенство (12.26) и при этом

$$\psi(x) = \theta_+(x) \varphi(x) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} N^{\alpha} \varphi, \quad (12.28)$$

где

$$N^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{|t|^{\alpha} \operatorname{sign} t}{|x|^{\alpha} \operatorname{sign} x} - 1}{t - x} \varphi(t) dt. \quad (12.29)$$

Доказательство. Из (11.36) вытекает, что $\theta_-(x) (I_{+}^{\alpha} \varphi)(x) = (I_{+}^{\alpha} \varphi_1)(x)$, где

$$\varphi_1(x) = \theta_-(x) \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \theta_+(x) \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{t}{x} \right|^{\alpha} \frac{\varphi(t) dt}{t-x}.$$

Тогда в силу (5.9)

$$\theta_+(x) (I_{-}^{\alpha} \varphi)(x) = (I_{-}^{\alpha} \varphi_2)(x), \quad (12.30)$$

где

$$\varphi_2(x) = \theta_+(x) \varphi(x) - \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \theta_-(x) \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{|x|^{\alpha}} \frac{\varphi(t) dt}{t-x}.$$

Объединяя (11.36) и (12.30), получим с учетом (12.3) равенство

$$\theta_+(x) I^{\alpha} \varphi = \frac{1}{2 \cos(\alpha \pi / 2)} (I_{+}^{\alpha} \varphi_3 + I_{-}^{\alpha} \varphi_2), \quad (12.31)$$

где через $\varphi_3(x)$ обозначена функция (11.37). Применяя в (12.31) формулу (12.8), устанавливаем, что

$$\theta_+(x) I^{\alpha} \varphi = \frac{1}{2} I^{\alpha} \left[\varphi_2 + \varphi_3 + \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2} S(\varphi_2 - \varphi_3) \right].$$

Таким образом, искомая функция $\psi(x)$ в (12.26) есть

$$\psi(x) = \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_3) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2} S(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Ряд несложных преобразований окончательно приводит $\psi(x)$ к виду (12.28), при этом при вычислении сингулярного интеграла $S(\varphi_2 - \varphi_3)$ следует воспользоваться формулой Пуанкаре—Бертрана (11.9) перестановки сингулярных интегралов.

Принадлежность функции $\psi(x)$ пространству $L_p(R^1)$ следует из ограниченности оператора N^{α} в $L_p(R^1)$ при $1 < p < 1/\alpha$. Последняя получается переходом к полуосям $R_{\pm}^1$ и применением теорем 5.5 и 11.3.

Заметим, что формула (12.26), где $\psi(x)$ дается равенством (12.28), может быть проверена и непосредственно — прямой перестановкой порядка интегрирования в композиции $I^{\alpha} N^{\alpha}$ с учетом того, что возникающий при этом внутренний интеграл вычисляется в явном виде (см., например, справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.2.6.26, 2.2.6.27]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign} t dt}{|t|^{\alpha} |t-x|^{1-\alpha} (t-y)} = \pi \operatorname{ctg} \frac{\alpha \pi}{2} \frac{\operatorname{sign} x \operatorname{sign}(x-y)}{|y|^{\alpha} |x-y|^{1-\alpha}}. \quad (12.32)$$

Следствие. Пусть $P_{ab} \varphi = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$ Тогда

$$P_{ab} I^{\alpha} \varphi = I^{\alpha} \left(P_{ab} \varphi + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha \pi}{2} N_{ab}^{\alpha} \varphi \right), \quad (12.33)$$

где

$$N_{ab}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{t-a}{x-a} \right)^{\alpha} - \left(\frac{t-b}{x-b} \right)^{\alpha} \right] \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, \quad \xi^{\alpha} = |\xi|^{\alpha} \operatorname{sign} \xi.$$

3°. Случай полуоси. Потенциалы (12.1), (12.2) можно рассматривать и на полуоси:

$$I_0^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad x > 0, \quad (12.34)$$

$$H_0^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_0^\infty \frac{\text{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad x > 0, \quad (12.35)$$

так что

$$I_0^\alpha = \frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} (I_{0+}^\alpha + I_-^\alpha), \quad H_0^\alpha = \frac{1}{2 \sin(\alpha\pi/2)} (I_{0+}^\alpha - I_-^\alpha).$$

Здесь также справедливы соотношения типа (12.6), (12.7):

$$I_0^\alpha \varphi = H_0^\alpha S_{(1+\alpha)/2} \varphi = S_{-(1+\alpha)/2} H_0^\alpha \varphi, \quad (12.36)$$

$$H_0^\alpha \varphi = -I_0^\alpha S_{\alpha/2} \varphi = -S_{-\alpha/2} I_0^\alpha \varphi, \quad (12.37)$$

где обозначено

$$S_\gamma \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x} \right)^\gamma \frac{\varphi(t) dt}{t-x}, \quad x > 0. \quad (12.38)$$

Формулы (12.36), (12.37) получаются из (12.46), (12.47), доказываемых ниже, предельным переходом (при $b \rightarrow \infty$). Их можно доказать и самостоятельно аналогично выводу формул (12.46), (12.47).

Докажем здесь следующее важное свойство потенциала Рисса $I^\alpha \varphi$ и интеграла $H^\alpha \varphi$ — представление их в виде композиции дробных интегралов.

Теорема 12.4. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\varphi(x) \in L_p(R_+^1)$, $1 \leq p < 1/\alpha$. Тогда

$$I_0^\alpha \varphi = I_-^{\alpha/2} I_{0+}^{\alpha/2} \varphi, \quad (12.39)$$

$$H_0^\alpha \varphi = I_-^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{0+}^{\frac{\alpha+1}{2}} \varphi \quad (12.40)$$

и более общо — при $\alpha + \beta < 1$ справедлива формула

$$\begin{aligned} I_-^\alpha I_{0+}^\beta \varphi &= \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \pi I_0^{\alpha+\beta} \varphi + \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \pi H_0^{\alpha+\beta} \varphi = \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\sin(\alpha + \beta) \pi} I_-^{\alpha+\beta} \varphi + \frac{\sin \beta \pi}{\sin(\alpha + \beta) \pi} I_{0+}^{\alpha+\beta} \varphi. \end{aligned} \quad (12.41)$$

Доказательство. Установим (12.41), так как формулы (12.39), (12.40) получаются из (12.41) очевидным образом. После перестановки порядка интегрирования имеем

$$I_-^\alpha I_{0+}^\beta \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^\infty J(x, y) \varphi(y) dy, \quad (12.42)$$

где обозначено

$$J(x, y) = \int_{\max(x, y)}^\infty (t-y)^{\beta-1} (t-x)^{\alpha-1} dt.$$

В силу формулы (1.71) получаем $J(x, y) = B(\alpha, 1 - \alpha - \beta) |x - y|^{\alpha+\beta-1}$ при $x > y$ и $J(x, y) = B(\beta, 1 - \alpha - \beta) |x - y|^{\alpha+\beta-1}$ при $x < y$. Поэтому из (12.42) простыми преобразованиями устанавливается (12.41).

Отметим, наконец, что из формул (7.11), (7.12) вытекают следующие соотношения для косинус- и синус-преобразований Фурье:

$$\mathcal{F}_c I_0^\alpha \varphi = x^{-\alpha} \mathcal{F}_c \varphi, \quad \mathcal{F}_s H_0^\alpha \varphi = x^{-\alpha} \mathcal{F}_s \varphi \quad (12.43)$$

(ср. с (12.23), (12.24)).

4°. **Случай отрезка.** В случае конечного отрезка $a \leq x \leq b$ операторы, аналогичные (12.1), (12.2), будем обозначать символами

$$A^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{|x-t|^{1-\alpha}}, \quad a < x < b, \quad (12.44)$$

$$B^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_a^b \frac{\text{sign}(x-t)}{|x-t|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt, \quad a < x < b. \quad (12.45)$$

Для них справедливы соотношения, подобные (12.36), (12.37). Именно имеет место

Теорема 12.5. Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$A^\alpha \varphi = B^\alpha S_{(\alpha+1)/2} \varphi = S_{-(\alpha+1)/2} B^\alpha \varphi, \quad (12.46)$$

$$B^\alpha \varphi = -A^\alpha S_{\alpha/2} \varphi = -S_{-\alpha/2} A^\alpha \varphi, \quad (12.47)$$

где в отличие от (12.38)

$$S_\nu \varphi = \frac{1}{\pi [(x-a)(b-x)]^\nu} \int_a^b \frac{[(t-a)(b-t)]^\nu \varphi(t)}{t-x} dt, \quad (12.48)$$

причем тождества (12.46), (12.47) справедливы, например, на функциях $\varphi(t) \in L_p(\rho)$, $1 < p < \infty$, $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, где $\mu, \nu < p-1$ в (12.47) и в первом из равенств (12.46), а $\mu, \nu < \frac{1+\alpha}{2} p-1$ во втором из равенств (12.46).

Доказательство. Тождества (12.46), (12.47) выводятся из основных тождеств (11.16) — (11.19). Проиллюстрируем это на примере первого из тождеств (12.47). Подставляя в (11.17) вместо $\varphi(x)$ функцию $\varphi_1 = \cos \frac{\alpha\pi}{2} \varphi + \sin \frac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2} \varphi$, имеем

$$I_{a+}^\alpha \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} \varphi + \sin \frac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2} \varphi \right) = I_{b-}^\alpha (\cos \alpha\pi E - \sin \alpha\pi r_b^{-\alpha} S r_b^\alpha) \times \\ \times \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} \varphi + \sin \frac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2} \varphi \right),$$

где E — тождественный оператор, а $r_b \varphi = (b-x)\varphi(x)$. Применяя здесь формулу перестановки Пуанкаре — Бертрана (11.9), после простых преобразований с учетом (11.5) выводим симметричное соотношение:

$$I_{a+}^\alpha \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} \varphi + \sin \frac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2} \varphi \right) = I_{b-}^\alpha \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} \varphi - \sin \frac{\alpha\pi}{2} S_{\alpha/2} \varphi \right).$$

Отсюда $\cos \frac{\alpha\pi}{2} (I_{a+}^\alpha - I_{b-}^\alpha) \varphi = -\sin \frac{\alpha\pi}{2} (I_{a+}^\alpha + I_{b-}^\alpha) S_{\alpha/2} \varphi$, что совпадает с первым из тождеств (12.47). Аналогичным приемом доказываются и остальные соотношения.

Приведенные рассуждения применимы на достаточно хороших функциях. Обоснование формул (12.46), (12.47) на функциях $\varphi \in L_p(\rho)$ легко осуществляется с помощью теоремы 1.7, если учесть: 1) плотность «хороших»

функций в $L_p(\rho)$; 2) ограниченность в $L_p(\rho)$ операторов, входящих в (12.46), (12.47), в соответствии с теоремами 3.7 и 11.3, дающими ограниченность операторов A^α , B^α , $S_{(\alpha+1)/2}$ при $p(\alpha+1)/2 - 1 < \mu$, $\nu < p-1$, операторов A^α , $S_{-(\alpha+1)/2}B^\alpha$ при $\alpha p - 1 < \mu$, $\nu < \frac{\alpha+1}{2}p - 1$ и операторов B^α , A^α , $S_{\alpha/2}$ и $S_{-\alpha/2}A^\alpha$ при $\alpha p - 1 < \mu$, $\nu < p-1$; 3) вложения в $L_p(\rho)$, $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$, по параметрам μ и ν .

§ 13. ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВИМЫЕ ДРОБНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ НА ОТРЕЗКЕ

Этот параграф примыкает к § 6, где было дано описание функций, являющихся дробными интегралами от функций из $L_p(R^1)$. Здесь будет дано аналогичное описание для отрезка (и полуоси), а также описание дробных интегралов от гельдеровских функций с весом. Последнее получено в виде теоремы об отображении оператором дробного интегрирования пространства $H_0^\lambda(\rho)$ на $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ (теорема 13.13).

Предварительно рассматривается аналог дробной производной Маршо на отрезке. Обратим внимание на получаемые в п. 3° теоремы о продолжении и «склеивании» дробных интегралов. Всюду в этом параграфе $0 < \alpha < 1$ (можно считать, что $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$).

1°. Дробная производная Маршо на отрезке. Преобразуем дробную производную Римана—Лиувилля $\mathcal{D}_{a+}^\alpha f$ к виду, подобному (5.57). Считаем для этого функцию $f(x)$ достаточно хорошей — дифференцируемой. Интегрируя в (2.24) по частям, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^\alpha f &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} d[f(t) - f(x)] = \right. \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} + \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{(x-t)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \right\}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Здесь среднее слагаемое исчезает для $f(t) \in C^1$, и мы обозначим

$$\mathbf{D}_{a+}^\alpha f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \quad (13.2)$$

так что $\mathcal{D}_{a+}^\alpha f \equiv \mathbf{D}_{a+}^\alpha f$ для достаточно хороших (дифференцируемых) функций в силу (13.1). Конструкция (13.2) и есть аналог дробной производной Маршо в случае отрезка $[a, b]$, $-\infty < a < b \leq \infty$.

К конструкции (13.2) можно прийти и по-другому, продолжив функцию $f(x)$ нулем за пределы отрезка $[a, b]$ и применив после этого к ней дробную производную Маршо по всей прямой. Точнее, пусть

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (13.3)$$

Тогда непосредственное вычисление показывает, что $\mathbf{D}_+^\alpha f^*$ при $a < x < b$ в точности совпадает с правой частью в (13.2)

$$(\mathbf{D}_+^\alpha f^*)(x) = (\mathbf{D}_{a+}^\alpha f)(x), \quad a < x < b. \quad (13.4)$$

В связи с равенством (13.4) заметим, что многие результаты этого параграфа, в частности теоремы 13.1—13.4, могут быть выведены как

следствия из соответствующих теорем § 6. Мы, однако, предпочли дать их независимое доказательство без продолжения на всю ось, поскольку вопросы дробного интегрирования на конечном отрезке представляют больший практический интерес в сравнении со случаем всей оси.

Аналогично вводится правосторонняя дробная производная Маршо:

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt. \quad (13.5)$$

Ясно, что правая часть в (13.2) определена не только на дифференцируемых функциях $f(x)$, но и, например, на функциях $f(x)$, удовлетворяющих условию Гельдера порядка $\lambda > \alpha$.

Верно ли, что производная Римана—Лиувилля и производная Маршо совпадают на всех функциях, на которых они определены? Ниже (см. следствие из теоремы 13.1) мы увидим, что они совпадают на функциях, представимых дробными интегралами от суммируемых функций.

Подчеркнем, что интеграл в (13.2) будет пониматься, вообще говоря, как условно сходящийся. В соответствии с этим введем подобно (5.59) усеченную дробную производную

$$D_{a+, \varepsilon}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \psi_{\varepsilon}(x), \quad (13.6)$$

где обозначено

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \quad \varepsilon > 0. \quad (13.7)$$

Эта запись предполагает, что $x \geq a + \varepsilon$. При $a \leq x \leq a + \varepsilon$ для введения $\psi_{\varepsilon}(x)$ нужно доопределить функцию $f(t)$ при $t < a$. Здесь возможны два варианта:

1) ввести $\psi_{\varepsilon}(x)$ при $a \leq x \leq a + \varepsilon$ равенством (13.7), считая, что $f(x)$ продолжена нулем за пределы отрезка $[a, b]$, тогда

$$\psi_{\varepsilon}(x) = f(x) \int_a^{x-\varepsilon} (x-t)^{-1-\alpha} dt = \frac{f(x)}{\alpha} \left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} - \frac{1}{(x-a)^{\alpha}} \right], \quad (13.8)$$

$$a \leq x \leq a + \varepsilon;$$

2) положить $\psi_{\varepsilon}(x) \equiv 0$ при $a \leq x \leq a + \varepsilon$.

Ниже на «не очень хороших» функциях $f(x)$ дробная производная Маршо (13.2) будет пониматься как

$$D_{a+}^{\alpha} f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_{a+, \varepsilon}^{\alpha} f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_{\varepsilon}(x), \quad (13.9)$$

где характер предельного перехода будет определяться допускаемыми функциями. В частности, он будет по норме L_p при рассмотрении дробных интегралов от функций из L_p (см. теорему 13.1). Будут использованы оба варианта задания $\psi_{\varepsilon}(x)$ при $a \leq x \leq a + \varepsilon$. Обозначим

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_{\varepsilon}(x). \quad (13.10)$$

Отметим, что способ 1) задания функции $\psi_{\varepsilon}(x)$ при $a \leq x \leq a + \varepsilon$ имеет то преимущество, что он связан со свойством (13.4), т. е. усеченная дробная производная (13.6) совпадает с усеченной производной Маршо $D_{+, \varepsilon}^{\alpha} f^{*}$:

$$(D_{+, \varepsilon}^\alpha f^*)(x) = (D_{a+, \varepsilon}^\alpha f)(x), \quad a < x < b, \quad (13.11)$$

где $f^*(x)$ — то же, что в (13.3) (при условии, что $\psi_\varepsilon(x)$ для $a \leq x \leq a + \varepsilon$ задана способом 1)).

Прежде всего убедимся в том, что D_{a+}^α является действительно левым обратным оператором к оператору дробного интегрирования в рамках пространства L_p .

Теорема 13.1. Пусть $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $-\infty < a < b \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$D_{a+}^\alpha f = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} D_{a+, \varepsilon}^\alpha f = \varphi.$$

Доказательство. Так как

$$f(x) - f(x-t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} y^{\alpha-1} \varphi(x-y) dy - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{x-a} (y-t)^{\alpha-1} \varphi(x-y) dy,$$

то с учетом обозначения (6.10)

$$f(x) - f(x-t) = t^{\alpha-1} \int_0^{x-a} k\left(\frac{y}{t}\right) \varphi(x-y) dy.$$

Поэтому при $a + \varepsilon \leq x \leq b$

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_0^{x-a} \frac{\varphi(x-y)}{y} dy \int_{y/(x-a)}^{y/\varepsilon} k(s) ds.$$

Используя функцию $\mathcal{H}(t)$, см. (6.12), получаем отсюда

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \psi_\varepsilon(x) = \int_0^{x-a} \varphi(x-y) \left[\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{H}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{x-a} \mathcal{H}\left(\frac{y}{x-a}\right) \right] dy.$$

Так как в соответствии с (6.7) $\mathcal{H}\left(\frac{y}{x-a}\right) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{y}{x-a}\right)^{\alpha-1}$, то

$$\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \psi_\varepsilon(x) = \int_0^{(x-a)/\varepsilon} \mathcal{H}(y) \varphi(x-\varepsilon y) dy - \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha}.$$

Будем считать для удобства функцию $\varphi(x)$ продолженной нулем за пределы отрезка $[a, b]$. Тогда с учетом (6.8)

$$D_{a+, \varepsilon}^\alpha f - \varphi(x) = \int_0^\infty \mathcal{H}(y) [\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)] dy, \quad (13.12)$$

$$a + \varepsilon \leq x \leq b.$$

Для значений же $a \leq x \leq a + \varepsilon$, согласно (13.8), имеем

$$D_{a+, \varepsilon}^\alpha f - \varphi(x) = \frac{f(x)}{\varepsilon^\alpha \Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \varepsilon^\alpha} \int_a^x \frac{\varphi(x-t+a) dt}{(t-a)^{1-\alpha}}. \quad (13.13)$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), получаем

$$\|D_{a+, \varepsilon}^\alpha f - \varphi\|_{L_p(a, b)} \leq \int_0^\infty \mathcal{H}(y) \|\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)\|_{L_p(a, b)} dy +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \|f\|_{L_{p'}(a, a+\varepsilon)}. \quad (13.14)$$

Здесь первое слагаемое в правой части стремится к нулю на основании теоремы 1.2 и леммы 1.2, а для второго имеем

$$\frac{\|f\|_{L_p(a, a+\varepsilon)}}{\varepsilon^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \leq \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \varepsilon^\alpha} \int_a^{a+\varepsilon} \frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} \left\{ \int_t^{a+\varepsilon} |\varphi(x-t+a)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq c \|f\|_{L_p(a, a+\varepsilon)} \rightarrow 0 \quad (13.15)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема доказана.

Следствие. На функциях $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_1(a, b)$, производная Римана—Лиувилля $\mathcal{D}_{a+}^\alpha f$ и производная Маршо $D_{a+}^\alpha f$ совпадают почти всюду: $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(x) \equiv (D_{a+}^\alpha f)(x) = \varphi(x)$.

Действительно, $D_{a+}^\alpha f = \varphi$ в силу теоремы 13.1 и $\mathcal{D}_{a+}^\alpha f = \varphi$ в силу теоремы 2.1.

Так как абсолютная непрерывность функции $f(x)$ достаточна для того, чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_1)$ (см. следствие из леммы 2.1), мы получаем, в частности, что дробная производная Римана—Лиувилля и производная Маршо совпадают (почти всюду) на абсолютно непрерывных функциях. В неявном виде это утверждалось еще в равенстве (2.14).

Замечание 13.1. В теореме 13.1 усеченная производная $D_{a+, \varepsilon}^\alpha f$ при $a \leq x < a + \varepsilon$ определялась заданием функции $\psi_\varepsilon(x)$ способом (13.8). Если же положить $\psi_\varepsilon(x) \equiv 0$ при $a \leq x \leq a + \varepsilon$, то теорема 13.1 останется справедливой за исключением случая $p = 1$ (доказательство сохраняется с той лишь разницей, что в (13.14) второе слагаемое заменяется на $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} \right\|_{L_p(a, a+\varepsilon)}$, что стремится к нулю только при $1 < p < \infty$, см. (5.46)).

2°. Описание дробных интегралов от функций из L_p . Достаточные признаки. В терминах функции $\psi_\varepsilon(x)$, определенной равенствами (13.7), (13.8), получаются подобно п. 3° из § 6 необходимые и достаточные условия для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом от функции из $L_p(a, b)$. Установим соответствующую теорему в двух вариантах.

Теорема 13.2. Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, где $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, необходимо, а при $1 \leq p < \infty$ и достаточно, чтобы $f \in L_p(a, b)$ и чтобы в L_p существовал $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(x)$, где $\psi_\varepsilon(x)$ — функция (13.7), (13.8).

Доказательство. Необходимость. Пусть $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$. Необходимость условия $f \in L_p$ тривиальна. В силу теоремы 13.1 $D_{a+, \varepsilon}^\alpha f$ сходится в $L_p(a, b)$ к $\varphi(x)$. Так как $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(a, b)$ в силу неравенства Харди (5.46), то тогда $\psi_\varepsilon(x)$ сходится в $L_p(a, b)$, что и требовалось.

Достаточность. Пусть $f \in L_p$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(x) = \psi(x)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \psi_\varepsilon(x). \quad (13.16)$$

Учитывая (13.8), непосредственно убеждаемся в том, что $\varphi_\varepsilon \in L_p(a, b)$. Из фундаментальности последовательности $\{\varphi_\varepsilon\}$ вытекает, что $\varphi_\varepsilon(x) \xrightarrow{L_p} \varphi(x) \in L_p$, причем $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha \psi(x)}{\Gamma(1-\alpha)}$. Покажем, что $f = I_{a+}^\alpha \varphi$.

В силу непрерывности оператора I_{a+}^α в $L_p(a, b)$ достаточно установить, что $f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{a+}^\alpha \varphi_\varepsilon$. С учетом равенств (13.7), (13.8) при $a + \varepsilon \leq x \leq b$ получаем

$$I_{a+\varphi_\varepsilon}^\alpha = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \int_{a+\varepsilon}^x \frac{f(y) dy}{(x-y)^{1-\alpha} (y-a)^\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_a^{a+\varepsilon} \frac{f(y) dy}{(x-y)^{1-\alpha}} + \right. \\ \left. + \alpha \int_{a+\varepsilon}^x \frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha}} \int_a^{y-\varepsilon} \frac{f(y)-f(t)}{(y-t)^{1+\alpha}} dt \right\}.$$

Отсюда простыми преобразованиями находим

$$I_{a+\varphi_\varepsilon}^\alpha = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_a^x \frac{f(y) dy}{(x-y)^{1-\alpha}} - \alpha \int_a^x f(t) dt \times \right. \\ \left. \times \int_{t+\varepsilon}^x \frac{dy}{(x-y)^{1-\alpha} (y-t)^{1+\alpha}} \right\}. \quad (13.17)$$

Справедлива формула

$$\int_a^b \frac{(y-a)^{\mu-1} (b-y)^{\nu-1}}{(y-c)^{\mu+\nu}} dy = \frac{(b-a)^{\mu+\nu-1} B(\mu, \nu)}{(b-c)^\mu (a-c)^\nu}, \quad (13.18) \\ c < a < b, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0,$$

доказываемая с помощью замены $y-c = (b-c)(a-c)[(b-a)t + a-c]^{-1}$. В силу этой формулы из (13.17) получаем

$$I_{a+\varphi_\varepsilon}^\alpha = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \varepsilon^\alpha} \left\{ \int_a^x \frac{f(y) dy}{(x-y)^{1-\alpha}} - \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(t) (x-\varepsilon-t)^\alpha}{x-t} dt \right\}.$$

Отсюда нетрудно установить, что

$$I_{a+\varphi_\varepsilon}^\alpha = \int_0^{(x-a)/\varepsilon} \mathcal{H}(t) f(x-\varepsilon t) dt, \quad a+\varepsilon \leq x \leq b, \quad (13.19)$$

где $\mathcal{H}(t)$ — функция (6.7). Если же $a \leq x < a+\varepsilon$, то, согласно (13.8),

$$I_{a+\varphi_\varepsilon}^\alpha = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi \varepsilon^\alpha} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad a \leq x < a+\varepsilon. \quad (13.20)$$

С помощью представлений (13.19), (13.20) уже легко получается подобно действиям в (13.12)–(13.14), что $I_{a+\varphi_\varepsilon}^\alpha \xrightarrow{L_p} f$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 13.2. Если $p=1$, то для функции $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_1(a, b)$, утверждение $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_1(a, b)$, вообще говоря, неверно (см. контрпример (5.41)). В этом случае, вообще говоря, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon \notin L_1$ и необходимость в теореме 13.2 не имеет места при $p=1$. Однако можно подключить случай $p=1$ и в необходимой части, если вместо сходимости в $L_1(a, b)$ последовательности ψ_ε требовать сходимость в $L_1(a, b)$ последовательности (13.16). Введем еще некоторую модификацию функции $\psi_\varepsilon(x)$. Именно положим

$$\tilde{\psi}_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \quad a < x < b, \quad (13.21)$$

в предположении, что функция $f(x)$ продолжена нулем за пределы интервала $[a, b]$. Легко убедиться в том, что $\tilde{\psi}_\varepsilon(x) \equiv [\alpha/\Gamma(1-\alpha)]^{-1} \varphi_\varepsilon(x)$, где $\varphi_\varepsilon(x)$ — функция (13.16). Поэтому при замене $\psi_\varepsilon(x)$ на $\tilde{\psi}_\varepsilon(x)$ теорема 13.2 будет верна при $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$ и в необходимой и в достаточной части.

Напомним, что при $p=1$ описание дробных интегралов $I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_1(a, b)$, в других терминах было дано еще в теореме 2.1.

Очевидным образом можно сформулировать аналог теоремы 13.2 для правосторонних дробных интегралов $I_{b-}^\alpha \varphi$, вытекающий из теоремы 13.2 в силу (2.19).

Справедлива теорема, аналогичная теореме 6.2:

Теорема 13.3. Для того чтобы $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$, $-\infty < a < x < b < \infty$, где $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_p(a, b)$ и чтобы

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|D_{a+, \varepsilon}^\alpha f\|_p < \infty;$$

последнее равносильно тому, что $\sup_{\varepsilon > 0} \|\tilde{\psi}_\varepsilon\|_p < \infty$, где $\tilde{\psi}_\varepsilon(x)$ — функция (13.21), при этом

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} \tilde{\psi}_\varepsilon(x).$$

Необходимость, очевидно, содержится в теореме 13.2 с учетом замечания 13.2 при $p=1$, а достаточность получается из представлений (13.19), (13.20) теми же рассуждениями, которыми была получена достаточность в теореме 6.2, см. рассуждения после равенства (6.24).

Укажем вариант теоремы 13.3, удобный тем, что в нем используется информация о функции $\psi_\varepsilon(x)$ только при $a+\varepsilon \leq x \leq b$ (и охватывающий случай полуоси).

Теорема 13.4. Для того чтобы $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $-\infty < a < b \leq \infty$, где $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$ при $b < \infty$ и $1 < p < 1/\alpha$ при $b = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(a, b)$ и

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{a+\varepsilon}^b |\psi_\varepsilon(x)|^p dx < \infty. \quad (13.22)$$

Эта теорема получается непосредственным анализом доказательства теоремы 13.3.

Введем обозначения $I_{a+}^\alpha(L_p)$, $I_{b-}^\alpha(L_p)$ для пространств дробных интегралов от функций из L_p . Ранее (см. следствие 1 из теоремы 11.4, следствие 1 из теоремы 11.5 и формулы (11.27)–(11.30)) было установлено, что

$$I_{a+}^\alpha(L_p) = I_{b-}^\alpha(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha,$$

где $L_p = L_p(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Следовательно, описания пространств $I_{a+}^\alpha(L_p)$ и $I_{b-}^\alpha(L_p)$ эквивалентны при $1 < p < 1/\alpha$. Будем обозначать

$$I^\alpha[L_p(a, b)] = I_{a+}^\alpha(L_p) = I_{b-}^\alpha(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha. \quad (13.23)$$

Класс (13.23) превращается аналогично (6.17) в банахово пространство введением эквивалентных норм для $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$:

$$\begin{aligned} \|f\|_{I_{a+}^\alpha[L_p(a, b)]} &= \|\varphi\|_p \sim \|f\|_p + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D_{a+, \varepsilon}^\alpha f\|_p \sim \|f\|_p + \\ &+ \sup_{\varepsilon > 0} \|D_{a+, \varepsilon}^\alpha f\|_p. \end{aligned}$$

Пространство $I^\alpha[L_p(a, b)]$ охарактеризовано в теоремах 13.2, 13.3. Его можно рассматривать, согласно теореме 13.2, как соболевское пространство функций из $L_p(a, b)$, имеющих дробную производную $D_+^\alpha f \in L_p(a, b)$. В связи с этим отметим, что в литературе часто рассматривается в связи с дробным интегродифференцированием пространство $H^{\alpha, p}(a, b)$ (сужение бесселевых потенциалов на отрезок $[a, b]$), о котором у нас пойдет речь в § 18, п. 4°. Сейчас отметим лишь, что

$$I^\alpha[L_p(a, b)] = H^{\alpha, p}(a, b), \quad 1 < p < 1/\alpha,$$

в случае $-\infty < a < b < \infty$, см. доказательство этого в § 18, п. 4°.

Дадим простое достаточное условие для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом функции из L_p . Пусть

$$\omega_p(f, h) = \sup_{|t| < h} \left\{ \int_a^{b-t} |f(x) - f(x-t)|^p dx \right\}^{1/p} \quad (13.24)$$

в предположении, что $f(x)$ продолжается нулем за пределы отрезка $[a, b]$.

Теорема 13.5. Если $f(x) \in L_p(a, b)$ и $\int_0^{b-a} t^{-1-\alpha} \omega_p(f, t) dt < \infty$, то

$f(x) \in I^\alpha[L_p(a, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$.

Эта теорема вытекает из теоремы 13.4, если заметить, что

$$\left\{ \int_{a+\varepsilon}^b |\psi_\varepsilon(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \int_\varepsilon^{b-a} t^{-1-\alpha} \omega_p(f, t) dt.$$

В § 14, п. 5° будет дано достаточное условие для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом от функции $\varphi \in L_1(a, b)$ в терминах абсолютной непрерывности функции $f(x)$ с весом.

Простейшее достаточное условие для представимости функции $f(x)$ дробным интегралом состоит в том, чтобы $f(x) \in H^\lambda$ при $\lambda > \alpha$. Тогда сходимость $\psi_\varepsilon(x)$ очевидна. Ясно, что это условие избыточно: оно дает $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, где φ не только из L_p , но и гельдерова, см. ниже лемму 13.1. Более интересно следующее утверждение.

Теорема 13.6. Пусть $f(x) = (x-a)^{-\mu} g(x)$, где $g(x) \in H^\lambda([a, b])$, $-\infty < a < b < \infty$, $\lambda > \alpha$, $-\alpha < \mu < 1$. Тогда

$$|(D_{a+, \varepsilon}^\alpha f)(x)| \leq c/(x-a)^{\mu+\alpha},$$

где c не зависит от x и ε , и $f(x) \in I_{a+}^\alpha(L_p)$ при $\mu + \alpha < 1/p$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 13.6 доказывается точно так же, как теорема 6.6 (с соответствующими упрощениями: отсутствует бесконечно удаленная точка).

Следствие. Если $g(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, $-\alpha < \mu < -\alpha + 1/p$, то $(b-x)^{-\mu} g(x) \in I^\alpha[L_p(a, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$.

Действительно, достаточно сослаться на совпадение образов (13.23).

В следующем пункте будет дано обобщение теоремы 13.6 на случай весов вида $\prod_{k=1}^N |x-a_k|^{\mu_k}$, см. теорему 13.12.

Заметим еще, что утверждение $f(x) \in I_{a+}^\alpha(L_p)$ теоремы 13.6 вытекает также из того, что $(x-a)^{-\mu} \in I_{a+}^\alpha(L_p)$ при $p(\mu + \alpha) < 1$ и из следующей теоремы, аналогичной теореме 6.7.

Теорема 13.7. Пространство $I_{a+}^\alpha[L_p(a, b)]$, $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, инвариантно относительно умножения на функции $a(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, при этом

$$\|af\|_{I_{a+}^\alpha(L_p)} \leq c \|a\|_{H^\lambda} \|f\|_{I_{a+}^\alpha(L_p)}.$$

Эта теорема доказывается точно так же, как теорема 6.7 с соответствующими упрощениями. Справедлива также следующая

Теорема 13.8. *Пространство $I^\alpha[L_p(a, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$, инвариантно относительно сингулярных операторов с весом*

$$S_a f = \int_a^b \left(\frac{x-a}{t-a} \right)^\alpha \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad S_b f = \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^\alpha \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad (13.25)$$

т. е. если $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, то и $S_a f = I_{a+}^\alpha \psi$, $\psi \in L_p$, и аналогично для $S_b f$.

Утверждение теоремы вытекает из тождеств (11.18), (11.19) и равенства (13.23).

3°. Продолжение, сужение и «склеивание» дробных интегралов. Пусть $f(x) \in I_{a+}^\alpha[L_p(a, b)]$ на каком-нибудь отрезке $[a, b]$. Зададимся следующими вопросами: 1) будет ли функция $f(x)$, продолженная нулем за пределы $[a, b]$, принадлежать классу $I_{A+}^\alpha[L_p(A, B)]$ на большем отрезке $[A, B] \supset [a, b]$? 2) будет ли ее сужение на меньший отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ принадлежать $I_{c+}^\alpha[L_p(c, d)]$? Так как дробные интегралы от функций из L_p являются при $p > 1/\alpha$ непрерывными функциями (обращающимися в нуль в концевой точке), то, очевидно, ответ на эти вопросы, вообще говоря, отрицателен при $p > 1/\alpha$. Если $p < 1/\alpha$, то ответ положителен, см. ниже следствия из теорем 13.9, 13.10. Из теорем 13.9, 13.10 будет выведена также очень полезная теорема о «склеивании» дробных интегралов.

Теорема 13.9. *Пусть $f(x) \in I^\alpha(L_p) = I^\alpha[L_p(R^1)]$, $1 < p < 1/\alpha$, и пусть $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Тогда сужение функции $f(x)$ на $[a, b]$ принадлежит классу $I^\alpha[L_p(a, b)]$:*

$$f(x) = (I_{a+}^\alpha \psi)(x), \quad x > a, \quad \psi(x) \in L_p(a, b), \quad (13.26)$$

где

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_{-\infty}^a \left(\frac{a-\xi}{x-a} \right)^\alpha \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi} d\xi, \quad \varphi = D_+^\alpha f. \quad (13.27)$$

Теорема 13.9 является удобной перефразировкой теоремы 11.6, в которой было установлено, что «обрезание нулем» функции $f(x) \in I^\alpha[L_p(R^1)]$ вне отрезка $[a, b]$ не выводит из класса $I^\alpha[L_p(R^1)]$. Действительно, при $x > 0$ равенство (11.36) совпадает с (13.26) (без ограничения общности считаем, что $a=0$).

З а м е ч а н и е 13.3. Полученное в теореме 13.9 тождество

$$(I_+^\alpha \varphi)(x) = (I_{a+}^\alpha \psi)(x), \quad x > a, \quad (13.28)$$

с выбором функции $\psi(x)$ по правилу (13.27) справедливо не только для $\varphi \in L_p(R^1)$, но, очевидно, и для функций $\varphi(x) \in L_p(-\infty, b)$ при $a < x < b$.

Следствие. *Пусть $\varphi(x) \in L_p(c, b)$, $c < a < b$, $1 < p < 1/\alpha$. Справедливо представление*

$$(I_{c+}^\alpha \varphi)(x) = (I_{a+}^\alpha \psi)(x), \quad a < x < b,$$

где $\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_c^a \left(\frac{a-\xi}{x-a} \right)^\alpha \frac{\varphi(\xi)}{x-\xi} d\xi \in L_p(a, b).$

Действительно, достаточно в (13.28) взять функцию $\varphi(x) \in L_p(-\infty, b)$, тождественно равную нулю при $x < c$.

Отметим, что утверждение следствия является ответом на известный в теории дробного интегрирования вопрос о существовании связи между

дробными интегралами $I_{a+}^{\alpha} \varphi$ и $I_{c+}^{\alpha} \varphi$ с разными нижними пределами интегрирования (см. об этом в § 17 в исторических сведениях к § 13).

В следующей теореме речь пойдет о продолжении нулем функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$. Пусть

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (13.29)$$

Теорема 13.10. Пусть $f(x) = I_{a+}^{\alpha} \varphi$, $a \leq x \leq b$, где $\varphi(x) \in L_p(a, b)$, $1 < p < 1/\alpha$. Тогда

$$f^*(x) = (I_+^{\alpha} \varphi_1)(x), \quad x \in R^1, \quad (13.30)$$

где $\varphi_1(x) \in L_p(R^1)$ и

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & x < a, \\ \varphi(x), & a < x < b, \\ -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1+\alpha}} = g(x), & x > b. \end{cases} \quad (13.31)$$

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что $g(x) \in L_p(b, \infty)$. Действительно,

$$g(x) = -\frac{\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^b \varphi(\tau) d\tau \int_{\tau}^b \frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha} (t-\tau)^{1-\alpha}}. \quad (13.32)$$

Внутренний интеграл здесь вычисляется с помощью замены $t = x - (x-\tau)/\xi$, после чего (13.32) принимает вид

$$g(x) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-\tau}{x-b} \right)^{\alpha} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{x-\tau}, \quad (13.33)$$

так что $g(x) \in L_p(b, \infty)$ в силу теоремы Харди—Литтлвуда 1.5 об операторах с однородным ядром (в данном случае после сдвига точки в начало координат и отражения на положительную полуось ядро $k(x, t)$ в теореме 1.5 равно $(t/x)^{\alpha} (t+x)^{-1}$). Остается проверить равенство (13.30). При $x \leq b$ оно очевидно, а при $x > b$ нужно убедиться в том, что

$$0 = \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_b^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad \text{Это равенство устанавливается непо-}$$

средственно: нужно подставить в него $g(t)$ из (13.33), переставить после этого порядок интегрирования и применить (11.4). Теорема доказана.

Следствие. Пусть $-\infty \leq a \leq c < d \leq b < \infty$. Если $f(x) \in I^{\alpha}[L_p(c, d)]$, $1 < p < 1/\alpha$, то

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [c, d] \\ 0, & x \in [a, b] \setminus [c, d] \end{cases} \in I^{\alpha}[L_p(a, b)].$$

Если $f(x) \in I^{\alpha}[L_p(a, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$, то

$$f(x)|_{x \in [c, d]} \in I^{\alpha}[L_p(c, d)].$$

Доказательство получается непосредственным применением теорем 13.9, 13.10 при продолжении функции $f(x)$ с $[a, b]$ или $[c, d]$ нулем на всю ось.

Теорема 13.11 (о «склеивании»). Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ заданы на $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно, $-\infty \leq a < c < b \leq \infty$, и пусть

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & a \leq x \leq c, \\ f_2(x), & c < x \leq b. \end{cases}$$

Если $f_1(x) \in I^\alpha [L_p(a, c)]$, $f_2(x) \in I^\alpha [L_p(c, b)]$, $1 < p < 1/\alpha$, то $f(x) \in I^\alpha [L_p(a, b)]$.

Эта теорема выводится из полученного выше следствия, так как $f(x) = f_1^*(x) + f_2^*(x)$, где $f_k^*(x)$ — продолжение нулем функций $f_k(x)$ за пределы их области задания, $k = 1, 2$.

Проиллюстрируем применение теоремы 13.10. Справедлива

Теорема 13.12. Пусть $-\infty < a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b < \infty$. Тогда

$$g(x) = \frac{f(x)}{\prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}} \in I^\alpha [L_p(a, b)], \quad 1 < p < 1/\alpha, \quad (13.34)$$

если $f(x) \in H^\lambda([x_k, x_{k+1}])$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\lambda > \alpha$, и $p(\mu_k + \alpha) < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Для $x \in [x_k, x_{k+1}]$ функция $g(x)$ имеет вид $g(x) = (x - x_k)^{-\mu_k} g_1(x) + (x_{k+1} - x)^{-\mu_{k+1}} g_2(x)$, где $g_i(x) \in H^\lambda([x_k, x_{k+1}])$, $i = 1, 2$. Тогда $g(x)|_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \in I^\alpha [L_p(x_k, x_{k+1})]$ в силу теоремы 13.6 и следствия из нее. На основании теоремы 13.11 о «склеивании» и $g(x) \in I^\alpha [L_p(a, b)]$.

4°. Описание дробных интегралов гельдеровских функций. Продолжим рассмотрения, начатые в § 3, пп. 1, 2°, где было установлено, что дробное интегрирование улучшает на порядок α гельдеровские свойства функций (см. теоремы 3.1—3.3). Здесь мы докажем утверждения обратного характера, показав, что дробные производные определены на всех гельдеровских функциях порядка $\lambda > \alpha$ (с весом) и сами являются гельдеровскими порядка $\lambda - \alpha$. После этого будет доказано основное утверждение этого пункта о том, что дробное интегрирование осуществляет изоморфизм (непрерывное взаимно однозначное отображение) класса $H_0^\lambda(\rho)$ на $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$. Именно пусть

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}, \quad -\infty < a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b < \infty. \quad (13.35)$$

Справедлива следующая

Теорема 13.13. Пусть $\rho(x)$ — вес (13.35), где $x_1 = a$. При выполнении условий

$$\lambda + \alpha < 1, \quad 0 \leq \mu_1 < \lambda + 1, \quad \lambda + \alpha < \mu_k < \lambda + 1, \quad k = 2, \dots, n, \quad (13.36)$$

оператор дробного интегрирования I_{a+}^α изоморфно отображает пространство $H_0^\lambda(\rho)$ на пространство $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для оператора I_{b-}^α , если $x_n = b$ и выполнены условия

$$\lambda + \alpha < 1, \quad 0 \leq \mu_n < \lambda + 1, \quad \lambda + \alpha < \mu_k < \lambda + 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (13.37)$$

Доказательство теоремы сравнительно простое в случае веса $\rho(x) = (x-a)^\mu$ и довольно громоздкое для произвольного веса вида (13.35). Для удобства изложения разобьем его на несколько этапов в виде ряда вспомогательных лемм. Прежде всего докажем теорему для веса $\rho(x) = (x-a)^\mu$.

Напомним, что класс $H_0^\lambda(\rho)$ состоит из функций $f \in H^\lambda(\rho)$ таких, что $\rho(x)f(x)$ обращается в нуль в точках x_k , $k=1, 2, \dots, n$.

Лемма 13.1. Если $f(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\alpha < \lambda \leq 1$, то

$$(D_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^\alpha} + \psi(x),$$

где $\psi(x) \in H^{\lambda-\alpha}([a, b])$ и $\psi(a) = 0$, при этом $\|\psi\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leq c \|f\|_{H^\lambda}$.

Доказательство. Согласно (13.2) и (1.16), достаточно показать, что

$$\psi_1(x) = \int_0^{x-a} t^{-1-\alpha} [f(x) - f(x-t)] dt \in H^{\lambda-\alpha}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \psi_1(x+h) - \psi_1(x) &= \int_0^{x-a} [f(x) - f(x-t)] [(t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}] dt + \\ &+ \int_{-h}^0 \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{1+\alpha}} dt + \int_0^{x-a} \frac{f(x+h) - f(x)}{(t+h)^{1+\alpha}} dt = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Легко видеть, что

$$|I_1| \leq c \int_0^\infty t^\lambda |(t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}| dt = c_1 h^{\lambda-\alpha},$$

где $c_1 = c \int_0^\infty t^\lambda |(t+1)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}| dt < \infty$,

$$|I_2| \leq c \int_{-h}^0 (t+h)^{\lambda-\alpha-1} dt = c_2 h^{\lambda-\alpha},$$

$$|I_3| \leq c h^\lambda \int_0^\infty (t+h)^{-\alpha-1} dt = c_3 h^{\lambda-\alpha}.$$

Остается заметить, что $\psi_1(a) = 0$, поскольку $|\psi_1(x)| \leq c \int_0^{x-a} t^{\lambda-\alpha-1} dt$. Лемма доказана.

Теперь с помощью леммы 13.1 докажем оставшийся пока без доказательства случай $\lambda + \alpha > 1$ в теореме 3.1. Пусть $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in H^\lambda([a, b])$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda + \alpha > 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\varphi(a) = 0$. В соответствии с определением 1.6 нужно показать, что $(d/dx) I_{a+}^\alpha \varphi \in H^{\lambda+\alpha-1}$, т. е. что $\mathcal{D}_{a+}^{1-\alpha} \varphi \in H^{\lambda-(1-\alpha)}$. Так как $\lambda > 1 - \alpha$, то $\varphi(x)$ представима дробным интегралом порядка $1 - \alpha$ в силу теоремы 13.5 и потому дробная производная Римана—Лиувилля $\mathcal{D}_{a+}^{1-\alpha} \varphi$ совпадает с производной Маршо (см. следствие из теоремы 13.1). Тогда с учетом того, что $\varphi(a) = 0$, из леммы 13.1 и вытекает требуемое.

Следующий наш шаг—распространение леммы 13.1 на случай гильбертовских функций с весом.

Лемма 13.2. Всякая функция $f(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda + \alpha < 1$, $\rho(x) = (x-a)^\mu$, $0 \leq \mu < \lambda + 1$, представима дробным интегралом $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, где $\varphi \in H_0^\lambda(\rho)$ и

$$\|\varphi\|_{H_0^\lambda(\rho)} \leq c \|f\|_{H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)}. \quad (13.39)$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 13.4, покажем вначале, что $f = I_{a+}^{\alpha} \varphi$, где $\varphi \in L_p$, при каком-нибудь $p > 1$. Тогда в силу теоремы 13.1 $\varphi = D_{a+}^{\alpha} f$ и можно будет непосредственно проверить (13.39). Обозначим $g(x) = (x-a)^{\mu} f(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}$. Проверяя условия теоремы 13.4, видим, что $f(x)/(x-a)^{\alpha} = g(x)/(x-a)^{\alpha+\mu} \in L_p(a, b)$ при $p(\mu-\lambda) < 1$. Далее, при $a + \varepsilon \leq x \leq b$ имеем

$$\psi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{(x-a)^{\mu}} \int_{\varepsilon}^{x-a} \frac{g(x) - g(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt + \int_{\varepsilon}^{x-a} \left[\frac{1}{(x-a)^{\mu}} - \frac{1}{(x-a-t)^{\mu}} \right] \frac{g(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt = A_{\varepsilon}(x) + B_{\varepsilon}(x).$$

Так как $|g(x) - g(x-t)| \leq c_1 t^{\lambda+\alpha}$ и $|g(x-t)| \leq c_2 (x-t-a)^{\lambda+\alpha}$, то

$$|A_{\varepsilon}(x)| \leq c_3 (x-a)^{\lambda-\mu}, \quad |B_{\varepsilon}(x)| \leq c_4 (x-a)^{\lambda-\mu},$$

где постоянные $c_3 = c_1 \int_0^1 t^{\lambda-1} dt$, $c_4 = c_2 \int_0^1 [(1-t)^{-\mu} - 1](1-t)^{\lambda-\mu} t^{-1-\alpha} dt$

не зависят от ε . Следовательно, (13.22) выполнено при $p(\mu-\lambda) < 1$, так что $f = I_{a+}^{\alpha} \varphi$, $\varphi \in L_p$. Остается проверить (13.39). Функция $\varphi(x)$ имеет вид (13.2). Первое слагаемое в (13.2) принадлежит $H_0^{\lambda}(\rho)$ и для него справедлива оценка вида (13.39) в силу свойства (1.16) гильбертовских функций. Остается показать, что $\psi(x) = \int_0^{x-a} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt \in H_0^{\lambda}(\rho)$ и что

$\|\psi\|_{H^{\lambda}(\rho)} \leq c \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$. Для простоты считаем, что $a = 0$. Обозначим $\psi_0(x) = x^{\mu} \psi(x)$. Для оценки разности $\psi_0(x+h) - \psi_0(x)$ представим ее в виде

$$\psi_0(x+h) - \psi_0(x) = \sum_{h=1}^8 A_h(x),$$

где

$$A_1(x) = \left[1 - \left(\frac{x}{x+h} \right)^{\mu} \right] \int_0^{x+h} \frac{g(x+h) - g(y)}{(x+h-y)^{1+\alpha}} dy,$$

$$A_2(x) = [(x+h)^{\mu} - x^{\mu}] \int_0^{x+h} \frac{(x+h)^{-\mu} - y^{-\mu}}{(x+h-y)^{1+\alpha}} g(y) dy,$$

$$A_3(x) = \left(\frac{x}{x+h} \right)^{\mu} \int_x^{x+h} \frac{g(x+h) - g(y)}{(x+h-y)^{1+\alpha}} dy,$$

$$A_4(x) = x^{\mu} \int_x^{x+h} \frac{(x+h)^{-\mu} - y^{-\mu}}{(x+h-y)^{1+\alpha}} g(y) dy,$$

$$A_5(x) = \int_0^x [g(x) - g(y)] [(x+h-y)^{-1-\alpha} - (x-y)^{-1-\alpha}] dy,$$

$$A_6(x) = x^{\mu} \int_0^x g(y) (x^{-\mu} - y^{-\mu}) [(x+h-y)^{-1-\alpha} - (x-y)^{-1-\alpha}] dy,$$

$$A_7(x) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x}{x+h} \right)^\mu [g(x+h) - g(x)] [h^{-\alpha} - (x+h)^{-\alpha}],$$

$$A_8(x) = \alpha^{-1} x^\mu g(x) [(x+h)^{-\mu} - x^{-\mu}] [h^{-\alpha} - (x+h)^{-\alpha}].$$

Произведя оценку каждого из этих слагаемых, получим

$$|\psi_0(x+h) - \psi_0(x)| \leq c \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)} h^\lambda$$

(опускаем выкладки, которые занимают много места, но не сложны; они во многом аналогичны действиям при доказательстве теоремы 3.3). Условие $\psi_0(a) = 0$ проверяется легко. Лемма доказана.

Из леммы 13.2 с учетом следствия из теоремы 13.1 вытекает

Следствие. На функциях $f(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ при условиях леммы 13.2 дробные производные Римана — Лиувилля и Маршо совпадают.

Сопоставляя лемму 13.2 с теоремой 3.3, видим, что теорема 13.13 доказана для веса $\rho(x) = (x-a)^\mu$.

Из леммы 13.2, если применить преобразование $a+b-x \rightarrow x$, вытекает

Лемма 13.2'. Всякая функция $f(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $\rho(x) = (b-x)^\mu$, $0 < \lambda + \alpha < 1$, $0 \leq \mu < \lambda + 1$, представима в виде $f = I_{b-}^\alpha \varphi$, где $\varphi(x) \in H_0^\lambda(\rho)$ и $\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)} \leq c \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$.

Прежде чем распространить лемму 13.2 на случай произвольного веса вида (13.35), докажем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. Если $f = I_{b-}^\alpha \varphi$, где $\varphi \in H_0^\lambda(\rho)$, $\lambda + \alpha < 1$, $\lambda + \alpha < \mu_1 < \lambda + 1$, $\lambda < \mu_k < \lambda + 1$, $k = 2, 3, \dots, n$, $\rho(x)$ — вес (13.35) с $x_1 = a$, то $f = I_{a+}^\alpha \psi$, где $\psi \in H_0^\lambda(\rho)$ и $\|\psi\|_{H^\lambda(\rho)} \leq c \|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}$.

Это утверждение немедленно вытекает из связи (11.16) с учетом ограниченности сингулярного оператора S в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$ (см. теорему 11.1), при этом $\psi = \cos \alpha \pi \varphi + \sin \alpha \pi r_a^{-\alpha} S r_a^\alpha \varphi$.

Утверждение 2 (о продолжении дробных интегралов нулем). Пусть $f(x) = I_{x_j+}^\alpha \varphi$ на отрезке $[x_j, x_{j+1}]$, где $\varphi \in H_0^\lambda(r_j)$ на $[x_j, x_{j+1}]$, $r_j(x) = |x - x_j|^{\mu_j} |x - x_{j+1}|^{\mu_{j+1}}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда функция

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & a \leq x < x_j, \quad x_{j+1} < x \leq b, \end{cases}$$

представима в виде $f^*(x) = I_{a+}^\alpha \varphi_1$, где $\varphi_1(x) \in H_0^\lambda(\rho)$ на $[a, b]$, $\rho(x)$ — вес (13.35), если $0 \leq \mu_k < \lambda + 1$, $k = 1, \dots, j-1$, $\lambda + \alpha < \mu_{j+1} < \lambda + 1$, $\lambda < \mu_k < \lambda + 1$, $k = j, j+2, \dots, n$, причем

$$\|\varphi_1\|_{H^\lambda(\rho)} \leq c \|\varphi\|_{H^\lambda(r_j)}. \quad (13.40)$$

Подобное утверждение было уже доказано для случая дробных интегралов от функций из L_p , см. теорему 13.10. Утверждение 2 доказывается точно так же, как и теорема 13.10, при этом подобно (13.31)

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < x_j, \\ \varphi(x), & x_j < x < x_{j+1}, \\ -\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) (x-t)^{-1-\alpha} dt, & x > x_{j+1}, \end{cases}$$

и при проверке условия (13.40) следует воспользоваться теоремой 11.1.

Лемма 13.3. Всякая функция $f(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $\lambda + \alpha < 1$, где

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^n |x - x_k|^{\mu_k}, \quad a = x_1 < \dots < x_n \leq b,$$

$$0 \leq \mu_1 < \lambda + 1, \quad \lambda + \alpha < \mu_k < \lambda + 1, \quad k = 2, \dots, n,$$

представима в виде $f = I_{a+}^{\alpha} \varphi$, где $\varphi(x) \in H_0^{\lambda}(\rho)$ и $\|\varphi\|_{H^{\lambda}(\rho)} \leq c \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$.

Доказательство. Пусть c — произвольная точка из интервала (a, x_2) . Подобно доказательству теоремы 3.3' полагаем $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq c, \\ f(c), & x \geq c, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ f(x) - f(c), & x \geq c, \end{cases} \quad (13.41)$$

так что $f_1(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho_a)$, $f_2(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho_0)$, причем

$$\|f_1\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} \leq c \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}, \quad \|f_2\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_0)} \leq c \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}, \quad (13.42)$$

где обозначено $\rho_a(x) = (x - a)^{\mu_1}$, $\rho_0(x) = (x - a)^{\lambda+\varepsilon} \prod_{k=2}^n |x - x_k|^{\mu_k}$, $0 < \varepsilon < 1$.

Заметим, что введение функций (13.41) — в некотором смысле основной момент в доказательстве как теоремы 3.3', так и настоящей леммы; оно дает возможность отделить точку $x_1 = a$, являющуюся нижним пределом интегрирования, от остальных точек x_k , $k = 2, 3, \dots, n$, в которых допускаются особенности.

Всюду в дальнейшем $x_{n+1} = b$ в случае $x_n < b$.

В силу леммы 13.2 справедливо представление $f_1(x) = I_{a+}^{\alpha} \varphi_1$, где $\varphi_1(x) \in H_0^{\lambda}(\rho_a) \subset H_0^{\lambda}(\rho)$, причем

$$\|\varphi_1\|_{H^{\lambda}(\rho)} \leq c \|\varphi_1\|_{H^{\lambda}(\rho_a)} \leq c \|f_1\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} \leq c \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}.$$

Рассмотрим функцию $f_2(x)$. Введем обозначения

$$r_k(x) = |x - x_k|^{\beta_k} |x - x_{k+1}|^{\beta_{k+1}}, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad \rho_k(x) = |x - x_k|^{\beta_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\beta_1 = \lambda + \varepsilon$, $\varepsilon > \alpha$, $\beta_k = \mu_k$, $k = 2, \dots, n$. Покажем, что

$$f_2(x) = (I_{x_k+}^{\alpha} \psi_k)(x), \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad (13.43)$$

где $\psi_k(x) \in H_0^{\lambda}(r_k)$ на $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $\psi_n(x) \in H_0^{\lambda}(\rho_n)$ на $[x_n, b]$ (если $x_n < b$) и

$$\|\psi_k\|_{H^{\lambda}(r_k)} \leq c \|f_2\|_{H^{\lambda+\alpha}(r_k)}, \quad \|\psi_n\|_{H^{\lambda}(\rho_n)} \leq c \|f_2\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_n)}. \quad (13.44)$$

Для $f_2(x)$ на $[x_n, b]$ этот факт вытекает из леммы 13.2. Для отрезка же $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 1, \dots, n-1$, выберем произвольную точку $c_k \in (x_k, x_{k+1})$ и положим $f_2(x) = f_{2,k}^{(1)}(x) + f_{2,k}^{(2)}(x)$, где

$$f_{2,k}^{(1)}(x) = \begin{cases} f_2(x), & x_k \leq x \leq c_k, \\ f_2(c_k), & c_k \leq x \leq x_{k+1}, \end{cases} \quad f_{2,k}^{(2)}(x) = \begin{cases} 0, & x_k \leq x \leq c_k, \\ f_2(x) - f_2(c_k), & c_k \leq x \leq x_{k+1}. \end{cases}$$

Так как $f_{2,k}^{(1)}(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho_k)$ на $[x_k, x_{k+1}]$, то в силу леммы 13.2 $f_{2,k}^{(1)}(x) = I_{x_k+}^{\alpha} \psi_k^{(1)}$, где $\psi_k^{(1)}(x) \in H_0^{\lambda}(\rho_k) \subset H_0^{\lambda}(r_k)$, причем

$$\|\psi_k^{(1)}\|_{H^{\lambda}(r_k)} \leq c \|f_{2,k}^{(1)}\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_k)} \leq c \|f_{2,k}^{(1)}\|_{H^{\lambda+\alpha}(r_k)}. \quad (13.45)$$

Далее, так как $f_{2,k}^{(2)}(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho_{k+1})$ на $[x_k, x_{k+1}]$, то по лемме 13.2' $f_{2,k}^{(2)}(x) = I_{x_{k+1}-}^{\alpha} \psi_k^{(2)}$, где $\psi_k^{(2)}(x) \in H_0^{\lambda}(\rho_{k+1}) \subset H_0^{\lambda}(r_k)$, причем

$$\|\psi_k^{(2)}\|_{H^{\lambda}(r_k)} \leq c \|f_{2,k}^{(2)}\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_{k+1})} \leq c \|f_{2,k}^{(2)}\|_{H^{\lambda+\alpha}(r_k)}. \quad (13.46)$$

Применяя к функции $f_{2,k}^{(2)}(x)$ сформулированное выше утверждение 1, получаем $f_{2,k}^{(2)}(x) = I_{x_k+}^\alpha \tilde{\psi}_k^{(2)}$, где $\tilde{\psi}_k^{(2)}(x) \in H_0^\lambda(r_k)$ на $[x_k, x_{k+1}]$ и

$$\|\tilde{\psi}_k^{(2)}\|_{H^\lambda(r_k)} \leq c \|\psi_k^{(2)}\|_{H^\lambda(r_k)}. \quad (13.47)$$

Тем самым мы приходим к соотношению (13.43), в котором $\psi_k(x) = \psi_k^{(1)}(x) + \tilde{\psi}_k^{(2)}(x)$. Неравенство (13.44) для норм непосредственно вытекает из оценок (13.45)–(13.47).

Далее, на основании утверждения 2 функция $f_{2,k}^*(x)$, являющаяся продолжением функции $f_2(x)$ нулем за пределы отрезка $[x_k, x_{k+1}]$, представима дробным интегралом $f_{2,k}^* = I_{a+}^\alpha \tilde{\varphi}_k$, где $\tilde{\varphi}_k(x) \in H_0^\lambda(\rho_0)$ на $[a, b]$ и

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_k\|_{H^\lambda(\rho_0)} &\leq \text{const} \|\psi_k\|_{H^\lambda(r_k)}, \quad k = 1, \dots, n-1; \quad \|\tilde{\varphi}_n\|_{H^\lambda(\rho_0)} \leq \\ &\leq \text{const} \|\psi_n\|_{H^\lambda(\rho_n)}. \end{aligned} \quad (13.48)$$

Отсюда следует, что $f_2 = I_{a+}^\alpha \varphi_2$, где $\varphi_2(x) = \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k(x) \in H_0^\lambda(\rho_0)$, и в силу (13.48), (13.44) и оценки (13.42) имеет место неравенство

$$\|\varphi_2\|_{H^\lambda(\rho_0)} \leq \text{const} \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}.$$

Покажем, что

$$\varphi_2(x) \in H_0^\lambda(\rho) \quad \text{на } [a, b] \quad \text{и} \quad \|\varphi_2\|_{H^\lambda(\rho)} \leq \text{const} \|\varphi_2\|_{H^\lambda(\rho_0)}. \quad (13.49)$$

Учитывая, что $f_2(x) \equiv 0$ при $x \leq c$, на основании равенства $\varphi_2(x) = D_{a+}^\alpha f_2$ получаем $\varphi_2(x) \equiv 0$ при $x \leq c$ (см. выражение (13.2) для дробной производной Маршо). Отсюда вытекает (13.49), а из него в силу (13.48) получаем $\|\varphi_2\|_{H^\lambda(\rho)} \leq \text{const} \|f\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)}$. Лемма доказана.

Из теоремы 3.4 и леммы 13.3 следует утверждение теоремы 13.13.

5°. Дробное интегрирование функций из объединения весовых гильбертовских классов. Теорема 13.13 описывает действие дробного интегрирования в классах Гильдера со степенным весом в случае, когда показатель гильбертовости λ и показатели веса фиксированы. В приложениях наряду с подобным фактом бывает полезно утверждение о действии дробного интегрирования в классах гильбертовских функций с нефиксированными показателями, т. е. в объединении пространств $H^\lambda(\rho)$ (имеется в виду объединение как по λ , так и по весу). Введем соответствующие обозначения для таких объединений.

Через $H^* = H^*(a, b)$ обозначим класс функций, гильбертовских (с каким-нибудь порядком) в интервале (a, b) и имеющих интегрируемые особенности на концах этого интервала. Более точно дадим следующее

Определение 13.1. К классу $H^* = H^*(a, b)$ отнесем функции $f(x)$, для которых существуют числа λ , $0 < \lambda \leq 1$, и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1} (b-x)^{1-\varepsilon_2}}, \quad (13.50)$$

где $f^*(x) \in H^\lambda([a, b])$.

Класс H^* широко известен как класс функций, использовавшийся в теории сингулярных интегральных уравнений (Н. И. Мусхелишвили [1]), и называется иногда *классом Мусхелишвили*.

Введем еще для удобства обозначение

$$\begin{aligned} H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \{f : f(x) = (x-a)^{\varepsilon_1-1} (b-x)^{\varepsilon_2-1} g(x), \quad g(x) \in H^\lambda([a, b]), \\ &g(a) = g(b) = 0\} \end{aligned} \quad (13.51)$$

для знакомого нам весового класса Гельдера с фиксированными показателями. Простыми рассуждениями устанавливается равенство

$$H^* = \bigcup_{\substack{0 < \lambda \leq 1 \\ \varepsilon_i > 0}} H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \bigcup_{\substack{0 < \lambda \leq \lambda_0 \\ 0 < \varepsilon_i < d(\lambda)}} H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (13.52)$$

где $0 < \lambda_0 \leq 1$ и $d(\lambda)$ — любое положительное число. Введем еще аналогичное объединение функций, гильдеровских порядка больше α :

$$H_\alpha^* = \bigcup_{\substack{\alpha < \lambda \leq 1 \\ \varepsilon_i > 0}} H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \bigcup_{\substack{\alpha < \lambda \leq \lambda_0 \\ 0 < \varepsilon_i < d(\lambda)}} H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (13.53)$$

где $\alpha < \lambda_0 < 1$, $d(\lambda) > 0$.

Классы H^* , H_α^* будут использоваться нами в § 30 в приложениях к интегральным уравнениям первого рода. Дадим классу H_α^* эквивалентное описание. Для этого нам понадобится ввести еще вспомогательный класс следующим определением.

Определение 13.2. Будем говорить, что $f(x) \in \tilde{H}_\alpha$, если $f(x) \in C([a, b])$ и $f(x)$ гильдерова какого-нибудь порядка $\lambda > \alpha$ вне концов $x=a$, $x=b$:

$$|f(x) - f(x+h)| \leq c(x) |h|^\lambda, \quad \lambda > \alpha, \quad x, x+h \in (a, b), \quad (13.54)$$

где $c(x)$ может расти при $x \rightarrow a$, $x \rightarrow b$, но так, что $c(x) \leq \text{const} (x-a)^{-\alpha} (b-x)^{-\alpha}$.

Определение 13.3. Будем говорить, что $f(x) \in \tilde{\tilde{H}}_\alpha$, если $f(x)$ гильдерова порядка $\lambda > \alpha$ внутри (a, b) и при $x \rightarrow a$ имеет вид

$$f(x) = f(a) + g(x) (x-a)^{-\alpha}, \quad (13.55)$$

где $g(x) \in H^\lambda([a, b])$, $\lambda > \alpha$, и $g(a) = 0$, и аналогично при $x \rightarrow b$.

Лемма 13.4. Классы $\tilde{H}_\alpha$ и $\tilde{\tilde{H}}_\alpha$ совпадают.

Доказательство. Пусть $f(x) \in \tilde{\tilde{H}}_\alpha$. Считая, что $a=0$, $f(a)=0$, для $f(x) = g(x) (x-a)^{-\alpha}$, где $g \in H^\lambda$, имеем $|f(x) - f(x+h)| \leq (x+h)^{-\alpha} \times |g(x+h) - g(x)| + |g(x)| x^{-\alpha} (x+h)^{-\alpha} [(x+h)^\alpha - x^\alpha]$. Отсюда оценка $|f(x+h) - f(x)| \leq cx^{-\alpha} |h|^\lambda$ получается простыми рассуждениями с учетом того, что $|g(x)| \leq cx^\lambda$. Аналогично получается требуемая оценка при $x \rightarrow b$, так что $\tilde{\tilde{H}}_\alpha \subseteq \tilde{H}_\alpha$. Обратно, пусть $f(x) \in \tilde{H}_\alpha$. Тогда при $x \rightarrow 0$ имеем

$$|f(x) - f(x+h)| \leq cx^{-\alpha} |h|^\lambda. \quad (13.56)$$

Устремляя здесь $h \rightarrow -x$, имеем

$$|f(x) - f(0)| \leq cx^{\lambda-\alpha}. \quad (13.57)$$

В таком случае

$$g(x) = x^\alpha [f(x) - f(0)] \in H^\lambda([0, b]). \quad (13.58)$$

Действительно, $g(x+h) - g(x) = [(x+h)^\alpha - x^\alpha] [f(x+h) - f(0)] + [f(x+h) - f(x)] x^\alpha$. Отсюда в силу (13.56) и (13.57) $|g(x+h) - g(x)| \leq c(x+h)^{\lambda-\alpha} [(x+h)^\alpha - x^\alpha] + ch^\lambda$, $h > 0$, что и дает после простых оценок утверждение (13.58). Из него и из аналогичного рассмотрения случая $x \rightarrow b$ следует, что $\tilde{H}_\alpha \subseteq \tilde{\tilde{H}}_\alpha$. Лемма 13.4 доказана.

В терминах класса $\tilde{H}_\alpha = \tilde{\tilde{H}}_\alpha$ мы и дадим эквивалентное описание класса (13.53). Справедлива

Лемма 13.5. Класс H_α^* состоит из функций вида

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^{1-\alpha-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\alpha-\varepsilon_2}}, \quad (13.59)$$

где $0 < \varepsilon_1 < 1 - \alpha$, $0 < \varepsilon_2 < 1 - \alpha$ и $f^*(x) \in \tilde{H}_\alpha$.

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой на основе определения класса $\tilde{H}_\alpha$.

Наконец, действие операторов I_{a+}^α , I_{b-}^α дробного интегрирования в классе H^* полностью описывается следующей теоремой.

Теорема 13.14. Оператор дробного интегрирования порядка α , $0 < \alpha < 1$, отображает класс H^* взаимно однозначно на класс H_α^* :

$$I_{a+}^\alpha(H^*) = I_{b-}^\alpha(H^*) = H_\alpha^*. \quad (13.60)$$

Доказательство. В силу теоремы 13.13

$$I_{a+}^\alpha[H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2)] = H_0^{\lambda+\alpha}(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

если $\lambda + \alpha < 1$, $0 < \varepsilon_i < 1 - \alpha - \lambda$, $i = 1, 2$. Тогда

$$I_{a+}^\alpha \left[\bigcup_{\substack{0 < \lambda < 1 - \alpha \\ 0 < \varepsilon_i < 1 - \alpha - \lambda}} H_0^\lambda(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \right] = \bigcup_{\substack{\alpha < \mu < 1 \\ 0 < \varepsilon_i < 1 - \mu}} H_0^\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

что ввиду (13.52), (13.53) означает равенство (13.60) для оператора I_{a+}^α . Аналогично с помощью той же теоремы 13.13 устанавливается равенство (13.60) для оператора I_{b-}^α .

6°. Дробные интегралы и производные функций с заданным модулем непрерывности. Проведенное в п. 4° исследование можно существенно развить, допуская к рассмотрению вместо гельдеровских функций классы функций, для которых

$$\omega(\varphi, h) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 < t < h} \sup_{x, x+t \in [a, b]} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| \leq c\omega(h),$$

где $\omega(h)$ — заданная непрерывная монотонная функция, $\omega(0) = 0$. Пространство таких функций обозначим через $H^\omega = H^\omega([a, b])$. Введем в нем норму $\|\varphi\|_{H^\omega} = \|\varphi\|_C + \sup_{h>0} [\omega(\varphi, h)/\omega(h)]$. Через H_0^ω будем обозначать подпространство функций из H^ω , обращающихся в нуль при $x = a$. Класс H^λ гельдеровских функций отвечает степенному случаю $\omega(t) = t^\lambda$. Функцию $\omega(t)$ называют иногда характеристикой или характеристической функцией обобщенного гельдеровского пространства H^ω .

Зададимся следующим вопросом: каково действие дробного интегрирования и дифференцирования в пространствах H^ω ? Теорема 13.13 утверждает, что $I_{a+}^\alpha(H_0^\lambda) = H_0^{\lambda+\alpha}$, $\lambda + \alpha < 1$. Можно ли получить аналогичное утверждение

$$I_{a+}^\alpha(H_0^\omega) = H_0^{\omega\alpha} \quad (13.61)$$

с априорным предположением, что $\omega_\alpha(t) = t^\alpha \omega(t)$, и для каких характеристических функций $\omega(t)$ справедливо это утверждение? Ответим и на этот вопрос, а также осветим более общую весовую ситуацию.

Используемое ниже понятие почти убывания функции $f(t)$ означает, что $f(t_1) \leq cf(t_2)$ для всех $t_1 \geq t_2$, где c не зависит от t_1, t_2 . Аналогично определяется почти возрастающая функция.

Следующие две теоремы дают оценку, которую можно назвать оценкой типа Зигмунда по аналогии с оценкой Зигмунда, известной в теории сингулярных интегралов, оценивающей модуль непрерывности $\omega(H\varphi, h)$ сопряженной функции $H\varphi$, см. (19.22), через модуль непрерыв-

ности $\omega(\varphi, h)$ самой функции $\varphi(x)$, см., например, работу Н. К. Бари, С. Б. Стечкина [1].

Теорема 13.15. Пусть $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\varphi(a) = 0$. Для дробного интеграла $I_{a+}^\alpha \varphi$, $0 < \alpha < 1$, справедлива оценка

$$\omega(I_{a+}^\alpha \varphi, h) \leq ch \int_h^{b-a} \frac{\omega(\varphi, t)}{t^{2-\alpha}} dt. \quad (13.62)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (3.4) для разности $f(x+h) - f(x)$ функции $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$. Оценим слагаемые J_1, J_2, J_3 . Имеем

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \int_0^h (h-t)^{\alpha-1} |\varphi(x+t) - \varphi(x)| dt \leq \int_0^h (h-t)^{\alpha-1} \omega(\varphi, t) dt = \\ &= h^\alpha \int_0^1 \frac{\omega(\varphi, h\xi)}{(1-\xi)^{1-\alpha}} d\xi = ch^\alpha \omega(\varphi, h), \end{aligned} \quad (13.63)$$

где $c = \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} d\xi$. При оценке J_2 различаем случаи 1) $x-a \geq h$ и 2) $x-a \leq h$. В первом случае

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq h^\alpha \int_0^1 |t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}| \omega(\varphi, th) dt + ch^\alpha \int_1^{\frac{x-a}{h}} t^{\alpha-2} \omega(\varphi, ht) dt \leq \\ &\leq ch^\alpha \omega(\varphi, h) + ch \int_h^{b-a} t^{\alpha-2} \omega(\varphi, t) dt; \end{aligned}$$

во втором —

$$|J_2| \leq ch^\alpha \omega(\varphi, h). \quad (13.64)$$

Оценим J_3 : $|J_3| \leq c\omega(\varphi, x-a) |(x+h-a)^\alpha - (x-a)^\alpha|$. При $x-a \leq h$ $|J_3| \leq ch^\alpha \omega(\varphi, h)$. Пусть $x-a \geq h$. Тогда

$$|J_3| \leq c\omega(\varphi, x-a) (x-a)^\alpha \left[\left(1 + \frac{h}{x-a}\right)^\alpha - 1 \right] \leq c \frac{\omega(\varphi, x-a)}{(x-a)^{1-\alpha}} h. \quad (13.65)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_h^{b-a} \frac{\omega(\varphi, t)}{t^{2-\alpha}} dt &\geq \int_{x-a}^{b-a} \frac{\omega(\varphi, t)}{t^{2-\alpha}} dt \geq \omega(\varphi, x-a) \int_{x-a}^{b-a} \frac{dt}{t^{2-\alpha}} \geq \\ &\geq c \frac{\omega(\varphi, x-a)}{(x-a)^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

из (13.65) следует, что $|J_3| \leq ch \int_h^{b-a} \frac{\omega(\varphi, t)}{t^{2-\alpha}} dt$. Из оценок для J_1, J_2, J_3

следует (13.62) с учетом того, что $h^\alpha \omega(\varphi, h)$ мажорируется правой частью в (13.62). Последнее легко получить в силу монотонности функции $\omega(\varphi, t)$.

Теорема 13.16. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) = 0$. Тогда для дробной производной $D_{a+}^\alpha f$, $0 < \alpha < 1$, справедлива оценка

$$\omega(D_{a+}^{\alpha} f, h) \leq c \int_0^h \frac{\omega(f, t)}{t^{1+\alpha}} dt \quad (13.66)$$

в предположении, что сходится интеграл в правой части.

Доказательство. Начнем с замечания о том, что для функции $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, справедлива оценка

$$\omega(F, h) \leq c \int_0^h \frac{\omega(f, t)}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (13.67)$$

Докажем (13.67). Считая, что $h > 0$, имеем $F(x+h) - F(x) = [f(x) - f(a)] \times [(x+h-a)^{-\alpha} - (x-a)^{-\alpha}] + (x+h-a)^{-\alpha} [f(x+h) - f(x)] = A_1 + A_2$.

Отсюда $|A_2| \leq (x+h-a)^{-\alpha} \omega(f, h) \leq h^{-\alpha} \omega(f, h) \leq c \int_0^h t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt$;

здесь в последнем неравенстве воспользовались почти убыванием функции $t^{-1} \omega(f, t)$, см., например, книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1, с. 50]. Далее для A_1 при $x-a \leq h$ также с учетом почти убывания функции имеем

$$|A_1| \leq (x-a)^{-\alpha} \omega(f, x-a) \leq c \int_0^{x-a} t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt \leq c \int_0^h t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt.$$

Если же $x-a \geq h$, то по теореме о среднем $|A_1| \leq ch(x-a)^{-1-\alpha} \omega(f, x-a) \leq ch^{-\alpha} \omega(f, h) \leq c \int_0^h t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt$. Собирая оценки для A_1 и A_2 , получаем неравенство (13.67).

Для доказательства теоремы достаточно в силу (13.67) рассмотреть только второе слагаемое в выражении (13.2) для дробной производной Маршо, т. е. функцию (13.10). Имеем для нее

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} [\psi(x+h) - \psi(x)] &= \int_0^{x-a} [f(x+h) - f(x+h-t) - f(x) + \\ &+ f(x-t)] t^{-1-\alpha} dt + \int_{x-a}^{x+h-a} [f(x+h) - f(x+h-t)] t^{-1-\alpha} dt = B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Пусть $x-a \leq h$. Тогда $|B_1| \leq 2 \int_0^{x-a} \omega(f, t) t^{-1-\alpha} dt \leq 2 \int_0^h t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt$.

В случае $x-a \geq h$ получаем

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq 2 \int_0^h \frac{\omega(f, t) dt}{t^{1+\alpha}} + 2 \int_h^{x-a} \frac{\omega(f, h)}{t^{1+\alpha}} dt \leq 2 \int_0^h t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt + \\ &+ 2\alpha^{-1} h^{-\alpha} \omega(f, h) \leq (2 + 4/\alpha) \int_0^h t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt. \end{aligned}$$

Оценим B_2 : $|B_2| \leq \int_{x-a}^{x+h-a} t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt$. Если $x-a \leq h$, то $|B_2| \leq \int_0^{2h} t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt \leq 2^{1-\alpha} \int_0^h t^{-1-\alpha} \omega(f, t) dt$. Если же $x-a \geq h$, то

после замены $t = \xi + x - a$ получаем с учетом почти убывания функции $t^{-1}\omega(f, t)$:

$$|B_2| \leq \int_0^h \frac{\omega(f, x-a+\xi)}{(x-a+\xi)^{1+\alpha}} d\xi \leq c \frac{\omega(f, h)}{h} \int_0^h \frac{d\xi}{(x-a+\xi)^\alpha} \leq \\ \leq c \frac{\omega(f, h)}{h^\alpha}.$$

Собирая оценки для B_1, B_2 , приходим к неравенству (13.66). Теорема 13.16 доказана.

Для того чтобы сформулировать утверждение типа (13.61), введем класс функций, в терминах которого будут даны условия на допускаемые характеристические функции $\omega(t)$.

Определение 13.4. Будем говорить, что

$$\omega(t) \in \Phi_\beta^\delta, \quad \beta \geq 0, \quad \delta \geq 0, \quad (13.68)$$

если

- 1) $\omega(t)$ непрерывна на $[0, b-a]$, $\omega(0) = 0$ и $\omega(t)$ почти возрастает;
- 2) $\int_0^t \left(\frac{t}{\xi}\right)^\delta \frac{\omega(\xi)}{\xi} d\xi \leq c\omega(t)$,
- 3) $\int_t^{b-a} \left(\frac{t}{\xi}\right)^\beta \frac{\omega(\xi)}{\xi} d\xi \leq c\omega(t)$.

Класс Φ_β^δ можно назвать двухпараметрическим классом типа Бари—Стечкина (ср. с классом Φ_β Бари—Стечкина, см., например, книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1], с. 78). Можно показать, что класс Φ_β^δ пуст при $\delta \geq \beta$, поэтому считаем, что $0 < \delta < \beta$.

Теорема 13.17. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\omega(t) \in \Phi_{1-\alpha}^0$. Тогда оператор I_{a+}^α изоморфно отображает пространство H_0^ω на $H_0^{\omega\alpha}$ с характеристикой $\omega_\alpha(t) = t^\alpha \omega(t)$.

Теорема 13.17 выводится из оценок типа Зигмунда, полученных в теоремах 13.15, 13.16, с учетом того, что функции $f \in H_0^{\omega\alpha}$ представимы дробными интегралами $f = I_{a+}^\alpha \varphi$ (от функций $\varphi \in H_0^\omega$) при условиях, наложенных на $\omega(t)$. Последнее доказывается с помощью теоремы 13.2 или 13.3. Доказательства несложны и предоставляются читателю (см. также подобную теорему 19.8, относящуюся к периодическому случаю).

Укажем, наконец, что имеется распространение этих результатов на весовой случай. Обозначим для этого через $H_0^\omega(\rho)$ пространство функций $f(x)$ таких, что $\rho(x)f(x) \in H_0^\omega$, $\|f\|_{H_0^\omega(\rho)} = \|\rho f\|_{H_0^\omega}$.

В случае $\rho(x) = (x-a)^\mu$, $0 \leq \mu < 2-\alpha$, для функций $\varphi(x)$ таких, что $\rho(x)\varphi(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 13.14, оценка типа Зигмунда (13.62) заменяется оценкой

$$\omega(\rho I_{a+}^\alpha \varphi, h) \leq ch^{\alpha+\gamma-1} \int_0^h \frac{\omega(\rho\varphi, t) dt}{t^\gamma} + ch \int_h^{b-a} \frac{\omega(\rho\varphi, t)}{t^{2-\alpha}} dt, \quad (13.69)$$

где $\gamma = \max(1, \mu)$. Справедлива также следующая

Теорема 13.18. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\rho(x) = (x-a)^\mu$, $0 \leq \mu < 2-\alpha$. Если $\omega(t) \in \Phi_{1-\alpha}^\delta$ при $\delta = \max(\mu-1, 0)$, то оператор I_{a+}^α изоморфно

отображает пространство $H_0^\omega(\rho)$ на $H_0^{\omega\alpha}(\rho)$ с тем же весом и характеристикой $\omega_\alpha(t) = t^\alpha \omega(t)$:

$$I_{a+}^\alpha [H_0^\omega(\rho)] = H_0^{\omega\alpha}(\rho). \quad (13.70)$$

Доказательство оценки (13.69) и теоремы 13.18 можно найти в работах Х. М. Мурдаева, С. Г. Самко [1—3], где содержится также случай веса $\rho(x) = (x-a)^\mu(b-x)^\nu$.

§ 14. РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В этом параграфе будут рассмотрены различные аспекты дробного интегродифференцирования в теории функций действительного переменного, не отраженные в предыдущих параграфах. Главные из них: 1) действие дробного интегродифференцирования на функциях, удовлетворяющих условию Гельдера по норме пространства L_p , 2) дробное дифференцирование абсолютно непрерывных функций с весом, 3) теорема Рисса о среднем и неравенства типа Колмогорова для дробных интегралов и производных, 4) связь с суммированием рядов и интегралов.

1°. **Липшицевы классы** $H_p^\lambda, \tilde{H}_p^\lambda$. Пусть $\omega_p(f, \delta)$ — интегральный модуль непрерывности (13.24) функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$ и продолженной нулем за пределы отрезка $[a, b]$.

Определение 14.1. Будем говорить, что $f(x) \in H_p^\lambda = \dot{H}_p^\lambda([a, b])$, где $0 < \lambda \leq 1$, если $f(x) \in L_p(a, b)$ и $\omega_p(f, \delta) \leq c\delta^\lambda$. Если при этом $\omega_p(f, \delta) = o(\delta^\lambda)$ при $\delta \rightarrow 0$, то будем говорить, что $f(x) \in h_p^\lambda = \dot{h}_p^\lambda([a, b])$.

Классы H_p^λ, h_p^λ обычно называют *липшицевыми классами* (класс H_p^λ часто обозначают $\text{lip}(\lambda, p)$).

Рассмотрим некоторые свойства функций из H_p^λ . Основное место здесь будет занимать теорема Харди—Литтлвуда о вложениях классов H_p^λ . Предварительно расшифруем определение 14.1, подчеркнув, что имеется в виду

$$\int_a^{b-\delta} |f(x+\delta) - f(x)| dx \leq c\delta^{\lambda p}, \quad (14.1)$$

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p dx \leq c\delta^{\lambda p} \text{ и } \int_{b-\delta}^b |f(x)|^p dx \leq c\delta^{\lambda p}, \quad \delta > 0. \quad (14.2)$$

Можно определить липшицев класс одним лишь условием (14.1), т. е. не заботясь о продолжении нулем функции $f(x)$ за пределы $[a, b]$. Так вводимый класс обозначим через $\tilde{H}_p^\lambda$:

$$\tilde{H}_p^\lambda = \left\{ f(x) : f(x) \in L_p(a, b), \int_a^{b-\delta} |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \leq c\delta^{\lambda p}, \delta > 0 \right\}, \quad (14.3)$$

так что $H_p^\lambda \subset \tilde{H}_p^\lambda$. Аналогично вводится класс $\tilde{h}_p^\lambda$ с заменой $O(\delta^{\lambda p})$ в (14.3) на $o(\delta^{\lambda p})$.

В пространствах $\tilde{H}_p^\lambda, H_p^\lambda$ вводятся нормы равенствами

$$\|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda} = \|f\|_p + \sup_{0 < \delta < b-a} \delta^{-\lambda} \left\{ \int_a^{b-\delta} |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad (14.4)$$

$$\|f\|_{H_p^\lambda} = \|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda} + \sup_{0 < \delta < b-a} \delta^{-\lambda} \left\{ \left(\int_a^{a+\delta} + \int_{b-\delta}^b \right) |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad (14.4')$$

относительно которых $\tilde{H}_p^\lambda, H_p^\lambda$ являются банаховыми пространствами.

Заметим, что $H^\lambda \rightarrow \tilde{H}_p^\lambda$ при $1 < p < \infty$ и $H^\lambda \rightarrow H_p^\lambda$ при $1 \leq p \leq 1/\lambda$. Справедливо также вложение $H_0^\lambda \rightarrow H_p^\lambda$ при всех $1 \leq p < \infty$. Здесь $H_0^\lambda = H_0^\lambda([a, b])$ — класс гельдеровских функций, обращающихся в нуль при $x = a, x = b$. Через $X \rightarrow Y$ обозначено непрерывное вложение пространства X в Y . Непосредственно проверяется, что $(x-a)^\mu \in H_p^\lambda$ и $(x-a)^\mu \in \tilde{H}_p^\lambda$ тогда и только тогда, когда $\mu \geq \lambda - 1/p$ при $0 < \lambda < 1$ и $\mu > \lambda - 1/p$ при $\lambda = 1$.

Естествен следующий вопрос. Если $f(x) \in H_p^\lambda$, то не приводит ли гладкость функции $f(x)$ («порядка λ ») к тому, что $f(x) \in L_r$ при $r > p$? И если это так, то не обладает ли $f(x)$ гладкостью в метрике L_r , т. е. возможно ли вложение $H_p^\lambda \rightarrow H_r^\mu$? Ответом на этот вопрос служит следующая теорема Харди—Литтлвуда, доказательство которой мы опускаем (см. литературные ссылки в § 17, п. 1°).

Теорема 14.1. Если $\lambda p \leq 1$, то $H_p^\lambda \rightarrow H_r^\mu, \tilde{H}_p^\lambda \rightarrow \tilde{H}_r^\mu$ при всех $p \leq r < q, q = p/(1 - \lambda p)$, где $\mu = \lambda - 1/p + 1/r$. Если $\lambda p > 1$, то $H_p^\lambda \rightarrow H_0^{\lambda-1/p}, \tilde{H}_p^\lambda \rightarrow H^{\lambda-1/p}$.

Здесь вложение в класс непрерывных функций при $\lambda p > 1$ понимается, как обычно, с точностью до эквивалентности функций.

Отметим, что из теоремы 14.1 вытекает

Следствие. Функции $f(x) \in H_p^\lambda$ или $\tilde{H}_p^\lambda$ интегрируемы в степени p с весом

$$\int_a^b \frac{|f(x)|^p dx}{(x-a)^{vp} (b-x)^{vp}} \leq c \|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda}^p, \quad (14.5)$$

где $v < \lambda$ для $f(x) \in H_p^\lambda$ и $v < \lambda \leq 1/p$ для $f(x) \in \tilde{H}_p^\lambda$.

Действительно, если $\lambda p \leq 1$, то в силу вложения $\tilde{H}_p^\lambda \rightarrow L_r, p \leq r < p/(1 - \lambda p)$, имеем при выборе $p/(v - vp) < r < p/(1 - \lambda p)$:

$$\int_a^b \frac{|f(x)|^p dx}{(x-a)^{vp} (b-x)^{vp}} \leq \|f\|_{L_r}^p \left\{ \int_a^b \frac{dx}{[(x-a)(b-x)]^{vp/(r-p)}} \right\}^{(r-p)/r} \leq c \|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda}^p.$$

Если же $\lambda p > 1$, то в силу теоремы 14.1 $|f(x)| \leq c(x-a)^{\lambda-1/p}$ при $x \rightarrow a$ и аналогично при $x \rightarrow b$, так что выполнимость неравенства (14.5) становится очевидной.

2°. Действие дробного интегрирования в H_p^λ . Покажем, что дробное интегрирование I_{a+}^α действует при $\lambda + \alpha < 1$ из H_p^λ в $H_p^{\lambda+\alpha}$, если отойти от левого конца $x=a$. Если же рассмотрение вести вплоть до точки $x=a$, то $I_{a+}^\alpha: H_p^\lambda \rightarrow H_p^{\lambda+\alpha-\varepsilon}, \varepsilon > 0$ (см. теорему 14.3). Предварительно рассмотрим более простой случай $\lambda = 0$, когда удастся получить действие I_{a+}^α из $H_p^0 = L_p$ в H_p^α на всем отрезке $[a, b]$ (ср. с теоремой 3.6).

Теорема 14.2. Операторы $I_{a+}^\alpha, I_{b-}^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, ограничено действуют из $L_p(a, b)$ в $\tilde{H}_p^\alpha([a, b])$ при любом $p \geq 1$ и в $H_p^\alpha([a, b])$ при $1 \leq p < 1/\alpha$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \Gamma(\alpha) I_{a+}^\alpha \varphi, \varphi \in L_p(a, b)$. Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_a^{b-\delta} |f(x+\delta) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \| \varphi \|_p \int_0^\delta (\delta - t)^{\alpha-1} dt + \\ &+ \| \varphi \|_p \int_0^{b-a} [t^{\alpha-1} - (t+\delta)^{\alpha-1}] dt \leq c \delta^\alpha \| \varphi \|_p, \end{aligned} \quad (14.6)$$

и тогда $\|f\|_{\tilde{H}_p^\lambda} \leq c \| \varphi \|_p$. Для оценки нормы $\|f\|_{H_p^\lambda}$ при $1 \leq p < 1/\alpha$ проверим условия (14.2). Имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_0^\delta dx \left| \int_0^x t^{\alpha-1} \varphi(x+a-t) dt \right|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \int_0^\delta t^{\alpha-1} \left(\int_t^\delta |\varphi(x+a-t)|^p dt \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

откуда

$$\left(\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \delta^\alpha \alpha^{-1} \| \varphi \|_p, \quad 1 \leq p < \infty, \alpha > 0 \quad (14.7)$$

(в связи с этой оценкой см. теорему 17.2). Далее, для $J(\delta) = \int_{b-\delta}^b |f(x)|^p dx$ имеем при $p > 1$ в силу неравенства Харди (3.18):

$$\frac{J(\delta)}{\delta^{\alpha p}} \leq \int_{b-\delta}^b \frac{|f(x)|^p dx}{(b-x)^{\alpha p}} \leq c \| \varphi \|_p^p,$$

что и требуется. Если же $p = 1$, то

$$J(\delta) \leq \int_a^{b-\delta} |\varphi(t)| dt \int_{b-\delta}^b (x-t)^{\alpha-1} dx + \int_{b-\delta}^b |\varphi(t)| dt \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} dx \leq c \delta^\alpha \| \varphi \|_p,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 14.1. Если $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in L_p$, то $\int_a^{a+\delta} |f(x)|^p dx \leq c \delta^{\alpha p}$ при всех $1 \leq p < \infty$. Если же $f = I_{b-}^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in L_p$, то $\int_{b-\delta}^b |f(x)|^p dx \leq c \delta^{\alpha p}$ при всех $1 \leq p < \infty$. Эти оценки для I_{a+}^α в окрестности точки b и для I_{b-}^α в окрестности точки a выполняются только при $1 \leq p < 1/\alpha$ (взять $\varphi(x) \equiv 1$).

Замечание 14.2. Ввиду вложения $\tilde{H}_p^\alpha \rightarrow H^{\alpha-1/p}$ при $\alpha > 1/p$, предоставляемого теоремой 14.1, теорема 14.2 является усилением теоремы 3.6 о том, что $I_{a+}^\alpha : L_p \rightarrow H^{\alpha-1/p}$ при $\alpha > 1/p$.

Теорема 14.3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\lambda + \alpha < 1$. Оператор I_{a+}^α осуществляет следующие непрерывные отображения:

$$\tilde{H}_p^\lambda([a, b]) \xrightarrow{I_{a+}^\alpha} \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha}([a_1, b]), \quad a_1 > a, \quad (14.8)$$

$$\tilde{H}_p^\lambda([a, b]) \xrightarrow{I_{a+}^\alpha} \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha-\varepsilon}([a, b]), \quad 1 \leq p \leq 1/\lambda. \quad (14.9)$$

Кроме того, если $\varphi \in H_p^\lambda$ и дополнительно выполняется условие

$$\int_{a+\delta}^b \frac{|\varphi(x)|^p dx}{(x-a)^{(1-\alpha)p}} \leq c \delta^{(\lambda+\alpha-1)p}, \quad (14.10)$$

то $I_{a+}^\alpha \varphi \in \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha}([a, b])$ и удовлетворяет первому из условий (14.2).

Доказательство. Для оценки разности $f(x+\delta) - f(x)$, где $f(x) = \Gamma(\alpha) I_{a+}^\alpha \varphi$, воспользуемся представлением (3.4): $f(x+\delta) - f(x) = J_1 + J_2 + J_3$, где слагаемые J_1, J_2, J_3 даны своими выражениями в (3.4) (с заменой $g(t)$ на $\varphi(t)$ и h на δ). Очевидно,

$$\begin{aligned} \left\{ \int_a^{b-\delta} |J_2|^p dx \right\}^{1/p} &\leq \int_0^\delta (\delta-t)^{\alpha-1} dt \left\{ \int_a^{b-\delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq c \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda} \int_0^\delta t^\lambda (\delta-t)^{\alpha-1} dt \leq c_1 \delta^{\lambda+\alpha} \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left\{ \int_a^b |J_3|^p dx \right\}^{1/p} &= \left\{ \int_0^{b-a-\delta} dx \left| \int_0^x [\varphi(x+a-t) - \varphi(x-a)] [t^{\alpha-1} - (t+\delta)^{\alpha-1}] dt \right|^p \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \int_0^{b-a-\delta} [t^{\alpha-1} - (t+\delta)^{\alpha-1}] dt \left\{ \int_{a+t}^b |\varphi(x-t) - \varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq c \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda} \int_0^{b-a} t^\lambda [t^{\alpha-1} - (t+\delta)^{\alpha-1}] dt = \\ &= c \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda} \delta^{\lambda+\alpha} \int_0^{(b-a)/\delta} t^\lambda [t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}] dt \leq c_1 \delta^{\lambda+\alpha} \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda}. \end{aligned}$$

Осложнения, связанные с левым концом, обусловлены слагаемым J_1 . Имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{a_1}^{b-\delta} |J_1|^p dx \right\}^{1/p} &\leq c \left\{ \int_{a_1}^{b-\delta} |\varphi(x)|^p (x-a)^{\alpha p} \left[\left(1 + \frac{\delta}{x-a} \right)^\alpha - 1 \right]^p dx \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq c_1 \delta \left\{ \int_{a_1}^b |\varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq c_1 \|\varphi\|_p \delta, \end{aligned} \quad (14.11)$$

где c_1 не зависит от δ (но зависит от a_1 и $c_1 \rightarrow \infty$ при $a_1 \rightarrow a$). Тем самым утверждение (14.8) доказано.

Для получения (14.9) проведем оценки в (14.11), захватывая левый конец отрезка $x=a$. Пользуясь неравенством $(1+y)^\alpha - 1 \leq c y (1+y)^{\alpha-1}$, получаем

$$\left\{ \int_a^{b-\delta} |J_1|^p dx \right\}^{1/p} \leq c \delta \left\{ \int_a^b \frac{|\varphi(x)|^p dx}{(x-a+\delta)^{(1-\alpha)p}} \right\}^{1/p}.$$

Так как $(x-a+\delta)^{(1-\alpha)p} \geq (x-a)^{(\lambda-\varepsilon)p} \delta^{(1-\lambda-\alpha+\varepsilon)p}$, где $0 < \varepsilon < \min(\lambda, 1-\lambda-\alpha)$, то тогда

$$\left\{ \int_a^{b-\delta} |J_1|^p dx \right\}^{1/p} \leq c \delta^{\lambda+\alpha-\varepsilon} \left\{ \int_a^b \frac{|\varphi(x)|^p dx}{(x-a)^{(\lambda-\varepsilon)p}} \right\}^{1/p} \leq c_1 \delta^{\lambda+\alpha-\varepsilon} \|\varphi\|_{\tilde{H}_p^\lambda}$$

в силу (14.5).

Пусть теперь $\varphi \in H_p^\lambda$ и выполнено (14.10). Оценку слагаемого J_1 производим следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\{ \int_a^{b-\delta} |J_1|^p dx \right\}^{1/p} &\leq c \left\{ \int_a^{a+\delta} |\varphi(x)|^p [(x-a+\delta)^\alpha - (x-a)^\alpha]^p dx \right\}^{1/p} + \\ &+ c \left\{ \int_{a+\delta}^b |\varphi(x)|^p [(x-a+\delta)^\alpha - (x-a)^\alpha]^p dx \right\}^{1/p} \leq c\delta^{\lambda+\alpha} \|\varphi\|_{H_p^\lambda} + \\ &+ c\delta \left\{ \int_{a+\delta}^b |\varphi(x)|^p (x-a)^{(\alpha-1)p} dx \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Применение неравенства (14.10) завершает оценку, так что $I_{a+}^\alpha \varphi \in \tilde{H}_p^{\lambda+\alpha}([a, b])$. Выполнение первого из условий (14.2) для $f = I_{a+}^\alpha \varphi$ проверяется непосредственно.

Замечание 14.3. Подобно следствию из теоремы 3.6, можно показать, что теорема 14.3 имеет место и для классов h_p^λ . В частности

$\tilde{h}_p^\lambda([a, b]) \xrightarrow{I_{a+}^\alpha} h_p^{\lambda+\alpha}([a_1, b]), a_1 > a$. Можно показать также, что и теорема 14.2 справедлива в виде $L_p(a, b) \xrightarrow{I_{a+}^\alpha} h_p^\alpha([a_1, b]), a_1 > a$.

Из теоремы 13.5 вытекает, что функции класса $H_p^\lambda, \lambda > \alpha$, представимы дробными интегралами порядка α от функций из L_p :

$$H_p^\lambda \subset I^\alpha [L_p(a, b)], \quad \lambda > \alpha, \quad 1 < p < 1/\alpha. \quad (14.12)$$

Если провести более аккуратную, чем в теореме 13.5, проверку условия (13.22):

$$\left\{ \int_{a+\varepsilon}^b |\psi_\varepsilon(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \int_\varepsilon^{b-a} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \left\{ \int_a^{b-t} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

то замечаем, что в силу теоремы 13.4 и

$$\tilde{H}_p^\lambda \subset I^\alpha [L_p(a, b)], \quad \lambda > \alpha, \quad 1 < p < 1/\alpha. \quad (14.13)$$

Уточним вложение (14.13), отметив следующую теорему:

Теорема 14.4. Пусть $f(x) \in \tilde{H}_p^\lambda([a, b]), \lambda > \alpha, 1 < p < 1/\alpha$. Тогда $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$, где $\varphi = D_{a+}^{\alpha+f} \in \tilde{H}_p^{\lambda-\alpha}([a, b])$ при $\lambda \leq 1/p$ и $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^\alpha} \in \tilde{H}_p^{\lambda-\alpha}([a, b])$ при $\lambda > 1/p$.

Доказательство этой теоремы копирует оценки при доказательстве леммы 13.1 с той лишь разницей, что слагаемые I_1, I_2, I_3 в представлении (13.38) нужно оценивать не равномерно, а по норме L_p , применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33). Соответствующие выкладки не сложны и мы их опустим. Следует учесть, что $(x-a)^{-\alpha} \in \tilde{H}_p^{\lambda-\alpha}$ только при $\lambda \leq 1/p$.

Следствие. Формула (2.64) дробного интегрирования по частям справедлива на функциях $f(x) \in \tilde{H}_p^\lambda, g(x) \in H_q^\lambda, \lambda > \alpha, 1/p + 1/q \leq 1 + \alpha$.

3°. Дробные интегралы и производные функций, заданных на всей прямой и принадлежащих H_p^λ на любом конечном отрезке. Рассмотрим теперь функции $\varphi(x)$, заданные на всей прямой, и изучим на них действие дробного интегрирования I_+^α в рамках пространств H_p^λ . При этом информация о H_p^λ -поведении функций φ и f будет локальной, а дробный интеграл будет

рассматриваться с бесконечным пределом интегрирования. Это позволит избежать влияния концов отрезка (ср. теоремы 14.6, 14.7 с теоремами 14.3, 14.4). Дробный интеграл $I_+^\alpha \varphi$ будет пониматься как условно сходящийся:

$$I_+^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x-N}^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (14.14)$$

Такое понимание интеграла вызвано тем, что мы будем допускать сейчас к рассмотрению не обязательно убывающие на бесконечности функции $\varphi(t)$ (в частности, они могут быть периодическими) и существование предела (14.14) ниже в теоремах 14.5—14.7 будет постулироваться (позже, в § 19 мы убедимся в том, что интеграл (14.14) существует как условно сходящийся на 2π -периодических функциях при выборе $N = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, если $\int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0$).

Теорема 14.5. Пусть Ω —произвольный отрезок длины l , пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq c, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (14.15)$$

где $c = c(l)$ не зависит от расположения Ω , и пусть $f(x) = I_+^\alpha \varphi$, $0 < \alpha < 1$, существует в смысле (14.14) почти для всех x . Тогда

$$\int_a^b |f(x) - f(x+h)|^p dx = o(h^{\alpha p}) \text{ при } h \rightarrow 0 \quad (14.16)$$

для любого отрезка $[a, b]$ длины $|b-a| \leq l$.

Доказательство. Имеем $\Gamma(\alpha) f(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt = \int_{x-dh}^x + \int_{x-Nh}^{x-dh} + \int_{-\infty}^{x-Nh} = f_1 + f_2 + f_3$, где $d > 0$, $N > 0$ —постоянные, выбором которых распорядимся позже. Пусть $\Delta f = f(x) - f(x+h)$. Достаточно показать, что

$$\int_a^b |\Delta f_2|^p dx = o(h^{\alpha p}) \quad (14.17)$$

при всех фиксированных d и N и что

$$\int_a^b |\Delta f_1|^p dx \leq \varepsilon h^{\alpha p}, \quad \int_a^b |\Delta f_3|^p dx \leq \varepsilon h^{\alpha p} \quad (14.18)$$

при всех $0 < h \leq 1$ и достаточно малых d и достаточно больших N . Имеем

$$\Delta f_2 = \int_{x-Nh}^{x-dh} (x-t)^{\alpha-1} [\varphi(t) - \varphi(t-h)] dt = O\left(h^{\alpha-1} \int_{x-Nh}^{x-dh} |\varphi(t) - \varphi(t-h)| dt\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_a^b |\Delta f_2|^p dx &\leq c h^{\alpha p-1} \int_a^b dx \int_{x-Nh}^{x-dh} |\varphi(t) - \varphi(t-h)|^p dt \leq \\ &\leq c h^{\alpha p-1} \int_{a-Nh}^{b-dh} |\varphi(t) - \varphi(t-h)|^p dt \int_{t+dh}^{t+Nh} dx = c_1 h^{\alpha p} \int_{a-Nh}^{b-dh} |\varphi(t) - \varphi(t+h)|^p dt. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Из условия (14.15) следует, что $\varphi(t), \varphi(t-h) \in L_p(a-Nh, b-dh)$ при фиксированных d, N и достаточно малых h . Тогда из (14.19) вытекает (14.17) ввиду свойства (1.34).

Далее, для получения первого из неравенств (14.18) достаточно показать, что $\int_a^b |f_1(x)|^p dx \leq \varepsilon h^{\alpha p}$ и аналогично для $f_1(x-h)$. С учетом (14.15) имеем $\left(\int_a^b |f_1(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq \int_0^{dh} t^{\alpha-1} dt \left(\int_a^b |f(x-t)|^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{(dh)^\alpha}{\alpha} \left(\int_{a-dh}^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \varepsilon^{1/p} h^\alpha$ при d достаточно малом. Интеграл $\int_a^b |f_1(x-h)|^p dx$ оценивается аналогично. Наконец,

$$\Delta f_3 = \int_{Nh+h}^{\infty} \varphi(x-t) [t^{\alpha-1} - (t-h)^{\alpha-1}] dt + \int_{Nh}^{Nh+h} \varphi(x-t) t^{\alpha-1} dt = I_1 + I_2.$$

С учетом (14.15) имеем $\left(\int_a^b |I_1|^p dx\right)^{1/p} \leq \int_{Nh+h}^{\infty} [(t-h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt \times \times \left(\int_a^b |\varphi(x-t)|^p dx\right)^{1/p} \leq ch^\alpha \int_{N+1}^{\infty} [(t-1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt \leq \varepsilon^{1/p} h^\alpha$ при N достаточно большим. Далее,

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |I_2|^p dx\right)^{1/p} &\leq (Nh)^{\alpha-1} h^{1-1/p} \left(\int_a^b dx \int_{Nh}^{Nh+h} |\varphi(x-t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \\ &\leq N^{\alpha-1} h^{\alpha-1/p} \left(\int_{a-Nh-h}^{b-Nh} |\varphi(t)|^p dt \int_{t+Nh}^{t+Nh+h} dx\right)^{1/p} = N^{\alpha-1} h^\alpha \left(\int_{a-Nh-h}^{b-Nh} |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Учитывая (14.15), получаем отсюда $\left(\int_a^b |I_2|^p dx\right)^{1/p} \leq cN^{\alpha-1} h^\alpha \leq \varepsilon^{1/p} h^\alpha$ при N достаточно большим, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 14.6. Пусть $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$ существует в смысле (14.14) почти для всех x и пусть $\varphi(x), \varphi(x-h) \in L_p(a, b)$ при некоторых a и b . Если

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-h)|^p dx \leq ch^{\lambda p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (14.20)$$

то при тех же a и b

$$\int_a^b |f(x) - f(x-h)|^p dx \leq ch^{(\lambda+\alpha)p}, \quad \lambda + \alpha < 1. \quad (14.21)$$

Доказательство. Для $\Delta f = f(x) - f(x-h)$ имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) \Delta f &= \int_h^\infty [\varphi(x) - \varphi(x-t)] [(t-h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt - \\ &- \int_0^h [\varphi(x) - \varphi(x-t)] t^{\alpha-1} dt = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Простые оценки дают:

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |J_1|^p dx \right)^{1/p} &\leq c \int_h^\infty [(t-h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt \left(\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-t)|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c \int_h^\infty t^\lambda [(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] dt = c_1 h^{\lambda+\alpha}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\left(\int_a^b |J_2|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_0^h t^{\alpha-1} dt \left(\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-t)|^p dx \right)^{1/p} \leq ch^{\lambda+\alpha},$$

что и доказывает теорему.

В следующей теореме дробная производная Маршо понимается как предел по норме $L_p(a, b)$:

$$\mathbf{D}_+^\alpha f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathbf{D}_{+, \varepsilon}^\alpha f)(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (14.22)$$

где $\mathbf{D}_{+, \varepsilon}^\alpha f$ — усеченная дробная производная Маршо (5.59).

Теорема 14.7. Пусть $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяет условию (14.15). Если

$$\int_a^b |f(x) - f(x-h)|^p dx \leq ch^{\lambda p}, \quad 0 < \alpha < \lambda < 1, \quad (14.23)$$

то предел (14.22) существует. Если, кроме того,

$$\int_{a-d}^{b-d} |f(x) - f(x-h)|^p dx \leq ch^{\lambda p} \quad (14.24)$$

при всех достаточно малых $d > 0$ с постоянной c , не зависящей от d , то

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi(x-h)|^p dx \leq ch^{(\lambda-\alpha)p}, \quad \varphi = \mathbf{D}_+^\alpha f. \quad (14.25)$$

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что $\mathbf{D}_{+, \varepsilon}^\alpha f \in L_p(a, b)$, что можно легко получить с учетом условия (14.15) для функции f и условия (14.23). Установим фундаментальность $\varphi_\varepsilon = \mathbf{D}_{+, \varepsilon}^\alpha f$ в $L_p(a, b)$. Имеем при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\begin{aligned} \int_a^b |\varphi_{\varepsilon_1}(x) - \varphi_{\varepsilon_2}(x)|^p dx &\leq \int_a^b dx \left(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |f(x) - f(x-t)| t^{-\alpha-1} dt \right)^p = \\ &= \int_a^b dx \left(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |f(x) - f(x-t)| t^{-\alpha-\delta-1/p} t^{\delta-1/p'} dt \right)^p \leq \\ &\leq \left(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} t^{-1+\delta p'} dt \right)^{p-1} \left(\int_a^b dx \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |f(x) - f(x-t)|^p t^{-p\alpha-1-p\delta} dt \right), \quad (14.26) \end{aligned}$$

где $\delta > 0$; (14.26) мажорируется с учетом (14.23) величиной

$$o(1) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} t^{-p\alpha-1-p\delta} dt \int_a^b |f(x) - f(x-t)|^p dx = o(1) \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} t^{p(\lambda-\alpha-\delta)-1} dt = o(1)$$

при выборе $0 < \delta < \lambda - \alpha$. Тем самым существование предела (14.22) установлено. Далее, для $\varphi = \mathbf{D}_+^\alpha f$ имеем

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} [\varphi(x) - \varphi(x-h)] = \int_h^\infty [f(x-t) - f(x-h)] [(t-h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}] dt + \\ + \int_h^\infty [f(x) - f(x-h)] t^{-\alpha-1} dt + \int_0^h [f(x) - f(x-t)] t^{-\alpha-1} dt = I_1 + I_2 + I_3.$$

Простые оценки с учетом (14.24) дают $\left(\int_a^b |I_1|^p dx\right)^{1/p} \leq \int_h^\infty [(t-h)^{-1-\alpha} - t^{-1-\alpha}] dt \times \\ \times \left(\int_a^b |f(x-h) - f(x-t)|^p dx\right)^{1/p} \leq c \int_h^\infty [(t-h)^{-1-\alpha} - t^{-1-\alpha}] (t-h)^\lambda dt = \\ = c_1 h^{\lambda-\alpha}$. Оценка для I_2 очевидна, а для I_3 с учетом (14.23) получаем

$$\left(\int_a^b |I_3|^p dx\right)^{1/p} \leq \int_0^h t^{-\alpha-1} dt \left(\int_a^b |f(x) - f(x-t)|^p dx\right)^{1/p} \leq ch^{\lambda-\alpha},$$

что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 14.4. В теоремах 14.6, 14.7 мы ограничились O -формой. Нетрудно показать, что теоремы 14.6, 14.7 верны и в o -форме.

4°. Дробные производные абсолютно непрерывных функций. Ранее, в § 2 было установлено, см. лемму 2.2, что абсолютно непрерывные функции $f(x)$ имеют почти всюду дробные производные порядков $\alpha \in (0, 1)$ и для них были доказаны формулы (2.24), (2.25). Здесь распространим эти утверждения на более широкий класс функций:

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-a)^\mu (b-x)^\nu}, \quad \mu \geq 0, \nu < 1-\alpha, \quad (14.27)$$

где $f^*(x) \in AC([a, b])$.

Теорема 14.8. *Функции вида (14.27) представимы дробным интегралом $f = I_{a+}^\alpha \varphi$ или $f = I_{b-}^\alpha \varphi$ от суммируемой функции $\varphi \in L_1(a, b)$.*

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем $\nu=0$ (общий случай сводится к этому). Так как $f^*(x) \in AC([a, b])$, то $f^*(x) = f^*(a) + \int_a^x \psi(t) dt$, где $\psi(t) \in L_1$. Так как функция $f^*(a)(x-a)^{-\mu}$ представима в виде дробного интеграла от функции $\text{const}(x-a)^{-\mu-\alpha} \in L_1$, то остается показать, что функция $(x-a)^{-\mu} \int_a^x \psi(t) dt$ представима таким образом. Положим

$$\varphi(x) = \int_a^x \psi(s) A(x, s) ds, \text{ где}$$

$$A(x, s) = \frac{\partial}{\partial x} \int_s^x (\xi-a)^{-\mu} (x-\xi)^{-\alpha} d\xi = \\ = (s-a)^{-\mu} (x-s)^{-\alpha} - \mu \int_0^{x-s} \frac{d\xi}{(x-a-\xi)^{1+\mu} \xi^\alpha},$$

и проверим, что

$$(x-a)^{-\mu} \int_a^x \psi(t) dt = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (14.28)$$

Прежде всего убеждаемся в том, что $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. Действительно, $\|\varphi\|_{L_1} \leq \int_a^b |\psi(s)| ds \int_s^b |A(x, s)| dx$. Покажем, что $\int_a^b |A(x, s)| dx \leq \text{const}$. Так

$$\begin{aligned} \text{как } A(x, a) &= (1 - \mu - \alpha) B(1 - \mu, 1 - \alpha) (x - a)^{-\mu - \alpha} \text{ и } \frac{\partial}{\partial s} A(x, s) = \\ &= \alpha (s - a)^{-\mu} (x - s)^{\alpha - 1} > 0, \text{ то } A(x, s) > 0 \text{ при всех } a < s < x. \text{ Поэтому} \\ \int_a^b A(x, s) dx &= (s - a)^{-\mu} \int_s^b (x - s)^{-\alpha} dx - \mu \int_s^b dx \int_s^x \frac{d\xi}{(\xi - s)^\alpha (x + s - a - \xi)^{1 + \mu}} = \\ &= \frac{(s - a)^{-\mu} (b - s)^{1 - \alpha}}{1 - \alpha} + \int_s^b \frac{(b + s - a - \xi)^{-\mu} - (s - a)^{-\mu}}{(\xi - s)^\alpha} ds - \\ &\quad - \int_s^b \frac{d\xi}{(\xi - s)^\alpha (b - a + s - \xi)^\mu} \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Переходя к проверке (14.28), имеем $\int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x - t)^{1 - \alpha}} = \int_a^x \psi(s) ds \int_s^x \frac{A(t, s)}{(x - t)^{1 - \alpha}} dt$.

Остается вычислить внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \int_s^x \frac{A(t, s) dt}{(x - t)^{1 - \alpha}} &= \frac{1}{(s - a)^\mu} \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} - \mu \int_s^x \frac{dt}{(x - t)^{1 - \alpha}} \int_s^t \frac{d\xi}{(t - \xi)^\alpha (\xi - a)^{1 + \mu}} = \\ &= \frac{1}{(s - a)^\mu} \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} - \mu \int_s^x \frac{d\xi}{(\xi - a)^{\mu + 1}} \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} (x - a)^{-\mu}, \end{aligned}$$

что и дает (14.28) и тем самым доказывает представимость функции $f(x)$ дробным интегралом.

Теорема 14.9. Для дробных производных функций вида (14.27) справедливы при $0 < \alpha < 1$ формулы

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)(x - a)} \int_a^x \frac{(1 - \alpha)f(t) + (t - a)f'(t)}{(x - t)^\alpha} dt, \quad (14.29)$$

$$\mathcal{D}_{b-}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)(b - x)} \int_x^b \frac{(1 - \alpha)f(t) - (b - t)f'(t)}{(t - x)^\alpha} dt. \quad (14.30)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi = \mathcal{D}_{a+}^\alpha f$. Согласно теореме 14.5, $\varphi \in L_1$ и $f = I_{a+}^\alpha \varphi$. Введем еще функцию $\varphi_1(x) = (x - a)\varphi(x)$ и рассмотрим дробный интеграл: $I_{a+}^\alpha \varphi_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(t - x)\varphi(t)}{(x - t)^{1 - \alpha}} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{(x - a)\varphi(t)}{(x - t)^{1 - \alpha}} dt =$
 $= -\alpha I_{a+}^{\alpha+1} \varphi + (x - a)(I_{a+}^\alpha \varphi)(x)$. Воспользовавшись полугрупповым свойством дробного интегрирования, получаем

$$(I_{a+}^\alpha \varphi_1)(x) = -\alpha \int_a^x f(t) dt + (x - a)f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x). \quad (14.31)$$

Здесь правая часть—абсолютно непрерывная функция на $[a, b-\delta]$, $\delta > 0$. Для первого слагаемого это очевидно, а для второго следует из равенства $(x-a)f(x) = (x-a)^{1-\nu}(b-x)^{-\nu}f^*(x)$, где все множители абсолютно непрерывны на $[a, b-\delta]$, $\delta > 0$. Но тогда, согласно лемме 2.2, равенство (14.31) разрешимо относительно φ_1 и мы получаем по формуле (2.24)

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'_1(t) dt}{(x-t)^\alpha}. \text{ Это и дает формулу (14.29). Аналогично}$$

доказывается и (14.30).

Замечание 14.5. Формулы (14.29), (14.30) распространяются на значения $\alpha > 1$:

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(x-a)^n} \int_a^x \frac{(t-a)^\alpha [(t-a)^{n-\alpha} f(t)]^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (14.32)$$

где $n = [\alpha] + 1$, $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$, что обосновывается подобно теореме 14.9.

5°. Теорема Рисса о среднем и неравенства для дробных интегралов и производных. Пусть функция $\varphi(x)$ задана на полуоси $x \geq a$. Справедлива следующая теорема, известная как *теорема Рисса о среднем для дробных интегралов*.

Теорема 14.10. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\varphi(x) \in L_1(a, b)$ и такова, что

$$f(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi)(x) \in C([a, b]), \quad f(a) = 0. \quad (14.33)$$

Тогда для любого $x > b$ существует $\tau \in [a, b)$ такое, что

$$\int_a^b (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \int_a^\tau (\tau-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \quad (14.34)$$

или, что то же,

$$(I_{a+}^\alpha \varphi)(x) - (I_{b+}^\alpha \varphi)(x) = (I_{a+}^\alpha \varphi)(\tau) \quad (14.35)$$

(последнее в предположении, что $\varphi(t)$ интегрируема вне $[a, b]$).

Доказательство. Справедливо тождество

$$\int_a^b \varphi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{(x-b)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \frac{f(u) du}{(x-u)(b-u)^\alpha}, \quad x > b. \quad (14.36)$$

Оно проверяется непосредственно после подстановки $I_{a+}^\alpha \varphi$ в правую часть, перестановки порядка интегрирования и вычисления образующего внутреннего интеграла по формуле (11.4). Так как функция $(x-u)^{-1}(b-u)^{-\alpha}$ не меняет знака для $u \in [a, b]$, то в силу первой теоремы о среднем интегрального исчисления (С. М. Никольский [5, с. 363]) из (14.36) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt = f(\tau_1) M(x), \quad a \leq \tau_1 \leq b, \quad (14.37)$$

где обозначено

$$M(x) = \frac{(x-b)^\alpha \sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^b \frac{du}{(x-u)(b-u)^\alpha} = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^{(b-a)/(x-a)} \frac{ds}{s^\alpha (1-s)^{1-\alpha}} \quad (14.38)$$

(замена $b - u = (x - b)s(1 - s)^{-1}$). Так как $0 < M(x) < 1$, а функция $f(x)$ непрерывна, то найдется точка $\tau \in [a, \tau_1]$ такая, что $f(\tau_1)M(x) = f(\tau)$. Тем самым доказано (14.34) или, что то же, (14.35). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 14.10. Тогда

$$\left| \int_a^b (x - t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \right| \leq \max_{\xi \in [a, b]} \left| \int_a^{\xi} (\xi - t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \right|, \quad x > b. \quad (14.39)$$

Следствие 2. Пусть $\varphi(t) \in L_1(a, b)$. Тогда

$$\left| \int_a^b (x - t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in [a, b]} \left| \int_a^{\xi} (\xi - t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \right|, \quad x > b. \quad (14.40)$$

Действительно, (14.39) следует немедленно из (14.34), а (14.40) вытекает из (14.36) без дополнительных условий (14.33), поскольку $\int_a^b |M'(t)| dt = - \int_a^b M'(t) dt = M(a) < 1$.

Докажем с помощью теоремы 14.10 некоторые неравенства для дробных интегралов.

Теорема 14.11. Пусть $\varphi(x) \in L_1(a, N)$ при любом $N > a$. Если

$$|\varphi(x)| \leq V(x), \quad |(I_{a+}^{\alpha} \varphi)(x)| \leq W(x), \quad x > a, \quad (14.41)$$

где $V(x), W(x)$ — неубывающие функции, то для любого $\beta, 0 < \beta < \alpha$, справедливо неравенство

$$|(I_{a+}^{\beta} \varphi)(x)| \leq c [V(x)]^{1-\beta/\alpha} [W(x)]^{\beta/\alpha}, \quad (14.42)$$

где c не зависит от x и β .

Доказательство. Пусть вначале $0 < \alpha < 1$. Имеем

$$\Gamma(\beta) (I_{a+}^{\beta} \varphi)(x) = \int_a^{\xi} (x - t)^{\beta-1} \varphi(t) dt + \int_{\xi}^x (x - t)^{\beta-1} \varphi(t) dt = I_1 + I_2, \quad (14.43)$$

где точку ξ выберем следующим образом:

$$\xi = \begin{cases} x - [W(x)/V(x)]^{1/\alpha}, & \text{если } x > a + [W(x)/V(x)]^{1/\alpha}, \\ a, & \text{если } x < a + [W(x)/V(x)]^{1/\alpha}, \end{cases} \quad (14.44)$$

так что $I_1 = 0$ при $x < a + [W(x)/V(x)]^{1/\alpha}$. Заметим, что всегда

$$0 < x - \xi \leq [W(x)/V(x)]^{1/\alpha}. \quad (14.45)$$

Ввиду монотонности $V(x)$ $|I_2| \leq \int_{\xi}^x V(t) (x - t)^{\beta-1} dt \leq \beta^{-1} V(x) (x - \xi)^{\beta}$ и тогда в силу (14.45)

$$|I_2| \leq \frac{1}{\beta} V(x) \left[\frac{W(x)}{V(x)} \right]^{\beta/\alpha} = \frac{1}{\beta} [V(x)]^{1-\beta/\alpha} [W(x)]^{\beta/\alpha}. \quad (14.46)$$

Далее, $I_1 = \int_0^{\xi} \varphi(t) (x - t)^{\alpha-1} (x - t)^{\beta-\alpha} dt$ и так как $(x - t)^{\beta-\alpha}$ возрастает на $[0, \xi]$ при фиксированном x , то, согласно второй теореме о среднем интегрального исчисления (С. М. Никольский [5, с. 368]), имеем

$$I_1 = (x - \xi)^{\beta-\alpha} \int_u^{\xi} \varphi(t) (x - t)^{\alpha-1} dt, \quad 0 \leq u \leq \xi. \quad (14.47)$$

Применяя к интегралу в (14.47) неравенство (14.40), получаем

$$|I_1| \leq (x - \xi)^{\beta - \alpha} \Gamma(\alpha) \operatorname{ess\,sup}_{y \in [u, \xi]} |(I_{a+}^\alpha \varphi)(y)| \leq \Gamma(\alpha) (x - \xi)^{\beta - \alpha} W(\xi).$$

Отсюда с учетом (14.44) и монотонности функции $W(\xi)$

$$|I_1| \leq \Gamma(\alpha) \left[\frac{W(x)}{V(x)} \right]^{(\beta - \alpha)/\alpha} W(x) = \Gamma(\alpha) [V(x)]^{1 - \beta/\alpha} [W(x)]^{\beta/\alpha}. \quad (14.48)$$

Таким образом, из (14.43) и следует в силу оценок (14.46), (14.48) неравенство (14.42) с постоянной $c = \frac{1}{\beta \Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}$, которая ввиду свойств

Γ -функции мажорируется постоянной, не зависящей от β .

Пусть теперь $\alpha > 1$. Выберем целое число n так, чтобы $\alpha/n < 1/2$, и пусть $\alpha_k = \alpha k/n$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Обозначим $f_\beta(x) = \max_{a \leq t \leq x} |(I_{a+}^\beta \varphi)(t)|$ и применим уже доказанную теорему для случая $0 < \alpha < 1$, заменяя V , I_{a+}^β , W на $f_{\alpha_{k-1}}$, f_{α_k} , $f_{\alpha_{k+1}}$:

$$f_{\alpha_k}(x) \leq c \sqrt{f_{\alpha_{k-1}}(x) f_{\alpha_{k+1}}(x)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

($f_{\alpha_0} = V$, $f_{\alpha_n} = W$). Возведем эти неравенства, отвечающие номерам $k = 1, 2, \dots, l-1, l, l+1, \dots, (n-2), (n-1)$, в степень порядка $(n-l), 2(n-l), \dots, (l-1)(n-l), l(n-l), l(n-l-1), \dots, 2l, l$ соответственно. После перемножения получим

$$f_{\alpha_l}(x) \leq c_1 [V(x)]^{1 - \alpha_l/\alpha} [W(x)]^{\alpha_l/\alpha}, \quad (14.49)$$

и тем самым неравенство (14.42) доказано для значений $\beta = \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. Так как для любого $\beta \in (0, \alpha)$ найдется такое $l = 1, 2, \dots, n-1$, что $0 < \beta - \alpha_l < 1$, то $I_{a+}^\beta \varphi = I_{a+}^{\beta - \alpha_l} I_{a+}^{\alpha_l} \varphi$, и, применяя еще раз теорему, доказанную для малых α , из (14.49) легко получим утверждение теоремы для произвольного $\beta \in (0, \alpha)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\varphi_\alpha(x)$ означает монотонную мажоранту дробного интеграла:

$$\varphi_\alpha(x) = \sup_{0 < t < x} |(I_{0+}^\alpha \varphi)(t)|, \quad \varphi(x) \in L_1(0, l), \quad \alpha \geq 0.$$

Тогда

$$\varphi_\beta(x) \leq c [\varphi_0(x)]^{1 - \beta/\alpha} [\varphi_\alpha(x)]^{\beta/\alpha}, \quad 0 < \beta < \alpha, \quad (14.50)$$

где c не зависит от $\varphi(x)$.

Замечание 14.6. Теорема 14.11 справедлива и в o -форме: если при $x \rightarrow \infty$ имеют место соотношения $\varphi(x)/V(x) \rightarrow 0$, $|(I_{a+}^\alpha \varphi)(x)| \leq W(x)$ или $|\varphi(x)| \leq V(x)$, $(I_{a+}^\alpha \varphi)(x)/W(x) \rightarrow 0$, то для $0 < \beta < \alpha$

$$(I_{a+}^\beta \varphi)(x)/[V(x)]^{1 - \beta/\alpha} [W(x)]^{\beta/\alpha} \rightarrow 0. \quad (14.51)$$

Доказательство этого утверждения содержится в работе М. Рисса (М. Riesz [1]).

Приведем важную перефразировку теоремы 14.11.

Теорема 14.11'. Пусть $f(x) \in I_{a+}^\alpha [L_1(a, N)]$, $\alpha > 0$, при любом $N > a$. Если

$$|f(x)| \leq W(x), \quad |(D_{a+}^\alpha f)(x)| \leq V(x), \quad x > a,$$

где $W(x)$, $V(x)$ — невозрастающие функции, то для любого $0 < \gamma < \alpha$

$$|(D_{a+}^\gamma f)(x)| \leq c [V(x)]^{\gamma/\alpha} [W(x)]^{1 - \gamma/\alpha}. \quad (14.52)$$

Утверждение этой теоремы получается из теоремы 14.11 после переобозначения $I_{\alpha+}^\alpha \varphi = f$, $\beta - \alpha = \gamma$.

Следствие. Пусть $f(x) \in I_{0+}^\alpha [L_1(0, N)]$ при любом $N > 0$. Если $f(x)$ и $\mathcal{D}_{0+}^\alpha f$ ограничены на полуоси $R_+^1 = (0, \infty)$, то при $0 \leq \gamma \leq \alpha$

$$\|\mathcal{D}_{0+}^\gamma f\|_{C(R_+^1)} \leq K \|f\|_{C(R_+^1)}^{1-\gamma/\alpha} \|\mathcal{D}_{0+}^\alpha f\|_{L_\infty(R_+^1)}^{\gamma/\alpha}. \quad (14.53)$$

Неравенства, оценивающие «промежуточные» производные через «старшую» производную и саму функцию, называют иногда *неравенствами Колмогорова*. Неравенство (14.53) является, таким образом, неравенством типа Колмогорова для дробных порядков.

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о точных постоянных в неравенстве (14.53); см. об этом, а также о других неравенствах для дробных интегралов и производных в § 17, п. 2°, а также в § 19, п. 8°.

6°. Дробное интегродифференцирование и суммирование рядов и интегралов. Имеется тесная связь обобщенного суммирования рядов (в терминах «дробных» средних или так называемых средних Рисса) с дробным интегрированием. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, не обязательно сходящийся. Известны различные методы суммирования расходящихся рядов (см. книгу Г. Харди [1]). Они основаны на том, что вместо частичных сумм

$$C(x) = \sum_{n=1}^{[x]} c_n \quad (14.54)$$

рассматривают те или иные их усреднения и *суммой расходящегося ряда* называют предел усреднения, если он существует. Один из таких способов использует усреднения вида

$$C^\alpha(x) = \frac{\alpha}{x^\alpha} \sum_{n=1}^{[x]} (x-n)^\alpha c_n, \quad \alpha > 0, \quad (14.55)$$

число

$$s = \lim_{x \rightarrow \infty} C^\alpha(x) \quad (14.56)$$

называется «суммой» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Средние (14.55) называются «*нормальными средними*» Рисса. Известно (Г. Харди [1, с. 115]), что этот способ суммирования рядов регулярен, т. е. он суммирует сходящийся ряд к его обыкновенной сумме. Справедливо следующее равенство

$$C^\alpha(x) = \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x C(t) (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad (14.57)$$

где $C(t)$ — частичная сумма (14.54). Равенство (14.57) проверяется интегрированием по частям:

$$\alpha \int_0^x C(t) (x-t)^{\alpha-1} dt = \int_0^x (x-t)^\alpha dC(t) = \sum_{n=1}^{[x]} (x-n)^\alpha c_n.$$

Таким образом, средние Рисса (14.55) представляют собой с точностью до множителя $x^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)$ дробный интеграл от частичной суммы ряда.

Средние (14.55) можно аналогично использовать для суммирования интегралов

$$\int_0^{\infty} f(t) dt \quad (14.58)$$

расходящихся на бесконечности, назвав значением этого интеграла предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x F(t) (x-t)^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0, \quad (14.59)$$

где $F(t) = \int_0^t f(s) ds$.

Аналогично суммируются интегралы

$$\int_0^a f(t) dt, \quad f(t) \in L_1(\varepsilon, a), \quad 0 < \varepsilon < a, \quad (14.60)$$

расходящиеся из-за неинтегрируемой особенности в точке $t=0$. Если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_t^a f(s) ds \quad (14.61)$$

при некотором $\alpha > 0$, то он называется *значением интеграла (14.60)*.

Указанный в (14.59), (14.61) метод суммирования расходящихся интегралов называется (C, α) -методом (интегрирование в смысле Чезаро—Лебега).

Имеется ряд исследований, в которых дробное интегрирование используется указанным способом при суммировании рядов и интегралов. Отметим основополагающую в этом вопросе работу Г. Харди, М. Рисса (G. H. Hardy, M. Riesz [1], 1915 г.) и работу L. S. Bosanquet [5], посвященную свойствам интегралов Чезаро—Лебега (14.60), (14.61). См. также книги Г. Г. Харди [1], К. Чандрасекхарана, С. Минакшисундарам (K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram [1]) и литературные указания в § 17, пп. 1, 2°.

§ 15. ОБОБЩЕННОЕ ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА

В этом параграфе классическое правило Лейбница

$$(fg)^{(\alpha)} = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} f^{(\alpha-n)} g^{(n)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (15.1)$$

обобщается на дифференцирование (и интегрирование) дробного порядка, при этом наряду с обобщением в виде бесконечного ряда (см. (15.12)) рассматривается и некоторый его интегральный аналог (см. (15.17)).

1°. **Дробное интегриродифференцирование аналитических функций на вещественной оси.** Установим предварительно некоторые вспомогательные факты о возможности почленного дробного интегрирования и дифференцирования функциональных рядов.

Лемма 15.1. Если ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in C([a, b])$, сходится равномерно на $[a, b]$, то допустимо его почленное дробное интегрирование по формуле

$$\left(I_{a+}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (I_{a+}^{\alpha} f_n)(x), \quad \alpha > 0, \quad a < x < b, \quad (15.2)$$

причем ряд справа сходится также равномерно на $[a, b]$.

Доказательство проводится простыми оценками величины $|I_{a+}^{\alpha} f - I_{a+}^{\alpha} (\sum_{n=0}^N f_n)|$ с учетом равномерной сходимости ряда.

Лемма 15.2. Пусть при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ существуют дробные производные $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f_n$, а ряды $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f_n$ сходятся равномерно на любом подынтервале $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$. Тогда первый ряд допускает почленное дробное дифференцирование по формуле

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f_n)(x), \quad \alpha > 0, \quad a < x < b. \quad (15.3)$$

Доказательство. Так как $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = (d/dx)^{[\alpha]+1} (I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f)(x)$, лемма 15.2 сводится к лемме 15.1 за счет возможности почленного применения оператора $(d/dx)^{[\alpha]+1}$ на основании известной теоремы математического анализа.

Напомним, см. (2.34), что $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ при $\alpha < 0$ означает дробный интеграл $I_{a+}^{-\alpha}$.

Докажем две леммы о представимости в виде ряда дробной производной аналитической в интервале (a, b) функции (т. е. функции, разложимой в степенной ряд в этом интервале).

Лемма 15.3. Если функция $f(x)$ аналитична в интервале (a, b) , то

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f^{(n)}(x), \quad x \in (a, b), \quad (15.4)$$

где $\binom{\alpha}{n}$ — биномиальный коэффициент (1.48).

Доказательство. Пусть $\alpha < 0$, $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt$. Функцию $f(t)$ можно представить в силу ее аналитичности в виде сходящегося степенного ряда: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(x)}{n!} (x-t)^n$.

Здесь, согласно лемме 15.1, возможно почленное дробное интегрирование, что приводит к (15.4). В силу (1.48) случай $\alpha = 0$ в (15.4) отвечает равенству $f(x) = f(x)$. Пусть $\alpha > 0$. Так как $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = (d/dx)^{[\alpha]+1} \mathcal{D}_{a+}^{\{\alpha\}-1} f(x)$, то, согласно формуле (15.4), $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \times \frac{(x-a)^{n-\{\alpha\}+1} f^{(n)}(x)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+n)}$. Осуществляя почленное дробное дифференцирование (возможность этого следует из леммы 15.2 ввиду равномерной сходимости соответствующих рядов), имеем

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} \frac{(x-a)^{n-\{\alpha\}+1} f^{(n)}(x)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+n)}.$$

В силу правила Лейбница (15.1) и равенства (1.49)

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \sum_{k=0}^{[\alpha]+1} \binom{[\alpha]+1}{k} \frac{(x-a)^{n-\alpha+k} f^{(n+k)}(x)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\{\alpha\}-1}{n} \binom{[\alpha]+1}{k} \frac{(x-a)^{n-\alpha+k} f^{(n+k)}(x)}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную суммирования $j = n + k$ и изменяя его порядок, получаем

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^j \binom{\{\alpha\}-1}{n} \binom{[\alpha]+1}{j-n} \right) \frac{(x-a)^{j-\alpha} f^{(j)}(x)}{\Gamma(j-\alpha+1)}. \quad (15.5)$$

Отсюда, согласно тождеству (1.53), вытекает соотношение (15.4).

Лемма 15.4. Если функция $f(x)$ в окрестности точки a имеет разложение вида

$$f(x) = (x-a)^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad (15.6)$$

то ее дробная производная $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$ представима по формуле

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = (x-a)^{\mu-\alpha} g(x), \quad (15.7)$$

где

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)} (x-a)^n. \quad (15.8)$$

При этом радиусы сходимости рядов (15.6) и (15.8) совпадают.

Доказательство. Согласно леммам 15.1 и 15.2, к ряду (15.6) можно применить почленное дробное интегрирование. Поэтому утверждения (15.7), (15.8) леммы вытекают из (2.44). Совпадение радиусов сходимости проверяется вычислением этих радиусов по обычной формуле Коши — Адамара с учетом того, что в силу (1.66)

$$\frac{c_n \Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\mu+1)} \sim c_n n^{\alpha}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (15.9)$$

Лемма доказана.

Следствие. Если $f(x)$ аналитична в (a, b) , то и $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^1$, аналитична в (a, b) .

Заметим, что полугрупповое свойство (2.65), обсуждавшееся в § 2 на произвольных функциях, в случае аналитических функций выполняется при более широких предположениях относительно параметров α и β . Именно из леммы 15.4 вытекает, что если функция f аналитична в правой окрестности точки a , то

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1, \quad \beta < 1. \quad (15.10)$$

2°. Обобщенное правило Лейбница. Распространение формулы Лейбница (15.1) на дробные значения α осуществим в двух формах.

Теорема 15.1. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ аналитичны на $[a, b]$. Тогда

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} f) g^{(k)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1; \quad (15.11)$$

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{\alpha}{k+\beta} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-k} f) (\mathcal{D}_{a+}^{\beta+k} g), \quad (15.12)$$

где $\binom{\alpha}{k+\beta}$ определяется равенством (1.50); $\alpha, \beta \in R^1$ и $\alpha \neq -1, -2, \dots$ при нецелом β .

Доказательство. В силу (15.4) имеем $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \times$
 $\times \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (fg)^{(k)}$. Пользуясь обычным правилом Лейбница (15.1),
 после перемены порядка суммирования получаем

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(k)}(x) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k+j} \binom{k+j}{k} \frac{(x-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+j+1-\alpha)} f^{(j)}(x). \quad (15.13)$$

Так как $\binom{\alpha}{k+j} \binom{k+j}{k} = \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha-k}{j}$, то (15.13) принимает вид

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{j} \frac{(x-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+j+1-\alpha)} g^{(k)}(x) f^{(j)}(x).$$

Отсюда, вновь применяя (15.4), приходим к (15.11).

Далее, случай целых β в (15.12) простой перенумерацией $\beta+k=j$ сводится, согласно (1.49), к (15.11). При нецелых же β благодаря такой перенумерации достаточно рассмотреть случай $\beta < 1$. Перепишем (15.11) в виде $\mathcal{D}_{a+}^{\beta}(gf) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} f^{(k)} \mathcal{D}_{a+}^{\beta-k} g$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta}$, имеем с учетом полугруппового свойства (15.10)

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta}(\mathcal{D}_{a+}^{\beta}(fg)) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} f^{(k)} \mathcal{D}_{a+}^{\beta-k} g \right). \quad (15.14)$$

Осуществляя почленное дробное дифференцирование (его возможность обосновывается в конце доказательства теоремы), используя (15.11) и снова (15.10), получаем $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} \binom{\alpha-\beta}{j} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-j+k} f \mathcal{D}_{a+}^{\beta-k+j} g$. Изменим порядок суммирования, положив $j-k=n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} \binom{\alpha-\beta}{n+k} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-n} f) (\mathcal{D}_{a+}^{\beta+n} g) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^0 \sum_{k=-n}^0 \binom{\beta}{k} \binom{\alpha-\beta}{n+k} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-n} f) (\mathcal{D}_{a+}^{\beta+n} g). \end{aligned} \quad (15.15)$$

Из формул (1.48), (1.72), (1.77) следует соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} \binom{\alpha-\beta}{n+k} &= \frac{\Gamma(\alpha-\beta-1)}{\Gamma(\alpha-\beta-n+1)n!} {}_2F_1(-\beta, \beta-\alpha+n; n+1; 1) = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n+1)}, \end{aligned}$$

а из (1.53) — $\sum_{k=-n}^0 \binom{\beta}{k} \binom{\alpha-\beta}{n+k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n+1)}$. Подставляя эти значения в (15.15) и учитывая (1.48), приходим к (15.12).

Для завершения доказательства теоремы обоснуем почленное дробное дифференцирование ряда в (15.14). Согласно лемме 15.4 и равенству (15.12), исходный и продифференцированный ряды можно представить в виде

$$(t-a)^{-\beta} g_1(t) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} (t-a)^k \text{ и } (t-a)^{-\alpha} g_2(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n+1)}$$

соответственно, где функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ аналитичны в окрестности точки a . Последние ряды сходятся равномерно по $t \in [a, x]$, при этом сходимость второго из них легко получается с помощью интегрального признака, если заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1) d\tau}{\Gamma(\tau+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-\tau+1)} = 2^{\alpha}, \quad (15.16)$$

см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.2.2.4]. Поэтому в силу леммы 15.2 допустимо почленное дифференцирование ряда в (15.14).

Интегральный аналог обобщенного правила Лейбница (15.12) отражает

Теорема 15.2. Если функции f и g аналитичны в окрестности точки a , то справедлива формула

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}(fg) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{\tau+\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\tau-\beta} f \mathcal{D}_{a+}^{\tau+\beta} g d\tau, \quad (15.17)$$

$\alpha, \beta \in R^1$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$ при нецелом β , где $\binom{\alpha}{\tau+\beta}$ определяется равенством (1.48).

Доказательство. В силу аналитичности функций f и g в окрестности точки a имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n, \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(a)}{m!} (x-a)^m. \quad (15.18)$$

На основании лемм 15.1 и 15.2, а также формулы (2.44) получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\tau-\beta} f)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a) (x-a)^{n-\alpha+\tau+\beta}}{\Gamma(\tau-\alpha+\beta+n+1)}, \\ (\mathcal{D}_{a+}^{\tau+\beta} g)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(a) (x-a)^{m-\tau-\beta}}{\Gamma(m-\tau-\beta+1)}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в правую часть (15.17):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{\tau+\beta} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\tau-\beta} f) (\mathcal{D}_{a+}^{\tau+\beta} g) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1) f^{(n)}(a) g^{(m)}(a) (x-a)^{n+m-\alpha} d\tau}{\Gamma(\tau+\beta+1) \Gamma(\alpha-\tau-\beta+1) \Gamma(\tau-\alpha+\beta+n+1) \Gamma(n-\beta-\tau+1)}. \end{aligned} \quad (15.19)$$

Непосредственными оценками показывается, что последний двойной ряд равномерно сходится по τ на всей вещественной оси. Поэтому воз-

можно его почленное интегрирование и, следовательно, равенство (15.19) принимает вид

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(\alpha + 1) f^{(n)}(a) g^{(m)}(a) (x - a)^{n+m-\alpha} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\Gamma(\tau + \beta + 1) \Gamma(\alpha - \tau - \beta + 1) \Gamma(\tau - \alpha + \beta + n + 1) \Gamma(n - \tau - \beta + 1)}.$$

Значение последнего интеграла известно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\Gamma(\alpha + \tau) \Gamma(\beta - \tau) \Gamma(\gamma + \tau) \Gamma(\delta - \tau)} = \\ = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 3)}{\Gamma(\alpha + \beta - 1) \Gamma(\alpha + \delta - 1) \Gamma(\gamma + \beta - 1) \Gamma(\gamma + \delta - 1)}, \quad (15.20) \\ \operatorname{Re}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) > 3,$$

см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.2.2.9]. Поэтому

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \frac{g^{(m)}(a)}{m!} \frac{\Gamma(n + m + 1)}{\Gamma(n + m - \alpha + 1)} (x - a)^{n+m-\alpha}$$

или в силу (2.44)

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \frac{g^{(m)}(a)}{m!} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} ((x - a)^{n+m}) = \\ = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(a)}{m!} (x - a)^m \right) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (fg),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что формулы (15.12) и (15.17) после простых замен переменных распространяются и на левостороннее дробное дифференцирование $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}$.

В заключение укажем, что имеется большое число обобщений и видоизменений правила Лейбница (15.1). Они касаются формул (15.12) и (15.17) как для лиувиллевской формы дробного интегродифференцирования, так и для других форм (см. об этом § 17, п. 2°).

§ 16. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В настоящем параграфе приводятся асимптотические представления дробных интегралов

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad (16.1)$$

при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow +\infty$, если известна асимптотика функции f вблизи этих точек. При этом наряду с асимптотикой, учитывающей степенные члены

разложений, рассматривается и асимптотика, учитывающая, кроме того, логарифмические и показательные члены.

1°. Определения и свойства асимптотических разложений. Приведем некоторые необходимые определения (более подробно см., например, в монографиях Ю. В. Сидорова, М. В. Федорюка, М. И. Шабунина [1, § 42], М. В. Федорюка [2, глава I] и Ф. Олвера [1, глава I]).

Определение 16.1. Пусть M — некоторое множество точек на действительной оси и a — его предельная точка. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, $n=0, 1, 2, \dots$, определенная при $x \in M$, называется асимптотической последовательностью (при $x \rightarrow a$, $x \in M$), если для любого n

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad (x \rightarrow a, x \in M). \quad (16.2)$$

Примерами асимптотических последовательностей являются последовательности 1) $\varphi_n(x) = x^{\mu_n}$, $x \rightarrow 0$; 2) $\varphi_n(x) = x^{-\mu_n}$, $x \rightarrow \infty$; 3) $\varphi_n(x) = (1/x)^{\mu_n}$, $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$, где $\{\mu_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty$.

Определение 16.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность (при $x \rightarrow a$, $x \in M$). Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где a_n — некоторые постоянные, называется асимптотическим разложением или асимптотическим рядом функции $f(x)$, если для любого $N \geq 0$

$$f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x) = o(\varphi_N(x)) \quad (x \rightarrow a, x \in M). \quad (16.3)$$

Для обозначения связи между асимптотическим рядом и функцией f будем использовать символ

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow a, x \in M). \quad (16.4)$$

Асимптотическое разложение по степенной асимптотической последовательности (см. примеры 1), 2)) будем называть *степенным асимптотическим рядом*.

В дальнейшем указание на множество M будем опускать. Отметим также, что хотя сходящиеся ряды являются асимптотическими, термин «асимптотический ряд» обычно употребляется по отношению к рядам, которые не обязательно сходятся.

Приведем некоторые свойства асимптотических разложений. Важнейшее из них — единственность: асимптотическое разложение данной функции по данной асимптотической последовательности единственно. Однако разные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение, например:

$$e^{-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^{-n} \text{ и } 0 \sim \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^{-n} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Со степенными асимптотическими рядами можно обращаться так же, как и со сходящимися степенными рядами: складывать, перемножать, почленно интегрировать и дифференцировать. Непосредственно, исходя из определения 16.2, доказываются следующие утверждения.

Лемма 16.1. Пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ — возрастающие последовательности, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = +\infty$ и при $x \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические разложения

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-\mu_n}, \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-\nu_n}.$$

Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) + g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\lambda_n}, \quad f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-\sigma_n},$$

где возрастающая последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$, получается перегруппировкой членов последовательностей $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$, а возрастающая последовательность $\{\sigma_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = +\infty$, — перегруппировкой произведений $\mu_k \nu_j$ по возрастающим значениям. В частности, $\lambda_0 = \min(\mu_0, \nu_0)$, $\sigma_0 = \mu_0 \nu_0$.

Лемма 16.2. Пусть $\{\mu_n\}$ — возрастающая последовательность, $\mu_n > 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$. Если функция $f(x)$ непрерывна на $(c, +\infty)$ и

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-\mu_n} \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad (16.5)$$

то этот ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_x^{\infty} f(t) dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n - 1} x^{-\mu_n + 1} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

З а м е ч а н и е 16.1. Утверждения, аналогичные леммам 16.1, 16.2, справедливы и для асимптотических рядов по последовательностям x^{μ_n} при $x \rightarrow 0$, т. е. для

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\mu_n} \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (16.6)$$

Нам понадобится также следующая лемма Ватсона.

Л е м м а 16.3. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, а функция $f(t)$ непрерывна при $0 \leq t \leq a$ и бесконечно дифференцируема в окрестности $t=0$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\int_0^a e^{-xt^\alpha} t^{\beta-1} f(t) dt \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^{-\frac{n+\beta}{\alpha}}. \quad (16.7)$$

Доказательство этой леммы см., например, в монографии Ю. В. Сидорова, М. В. Федорюка, М. И. Шабунина [1, с. 408].

2°. Случай степенной асимптотики. Пусть $\{\mu_n\}$ — возрастающая последовательность и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$. Будем искать асимптотические разложения дробных интегралов $I_{0+}^\alpha f$ при условии, что функция f имеет асимптотику вида (16.5) или (16.6).

Наиболее простой результат дает асимптотика (16.6). Именно верна

Теорема 16.1. Пусть $\{\mu_n\}$ — возрастающая последовательность, $\mu_n > -1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$. Если $f(x)$ удовлетворяет условию (16.6), то дробный интеграл $(I_{0+}^\alpha f)(x)$ при $x \rightarrow 0$ имеет асимптотическое представление вида

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\mu_n + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu_n + 1)} x^{\mu_n + \alpha}. \quad (16.8)$$

Доказательство. Согласно (16.6), $f(t) = \sum_{n=0}^N a_n t^{\mu_n} + R_N(t)$. Поэтому в силу формулы (2.44)

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(xt) dt = \sum_{n=0}^N \frac{a_n \Gamma(\mu_n + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu_n + 1)} x^{\mu_n + \alpha} + \\ + \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 R_N(xt) (1-t)^{\alpha-1} dt. \quad (16.9)$$

Согласно (16.4), $R_N(t) = o(t^{\mu_N})$ при $t \rightarrow 0$. Следовательно, для достаточно больших N $R_N(t) = t^{\mu_N} \alpha(t)$, где $\alpha(t)$ — бесконечно малая функция при $t \rightarrow 0$. Отсюда получаем $\int_0^1 R_N(xt) (1-t)^{\alpha-1} dt = o(x^{\mu_N})$ при $x \rightarrow 0$, и тогда из (16.9) вытекает утверждение теоремы.

Более сложным является случай, когда $f(t)$ имеет асимптотику (16.5). Здесь известны три основных способа нахождения асимптотического разложения дробного интеграла (16.1): метод последовательных разложений (Э. Я. Риекстыньш [1] и [2, т. 1, § 11]), метод, основанный на представлении $I_{0+}^{\alpha} f$ с помощью равенства Парсеваля для преобразования Меллина (Э. Я. Риекстыньш [2, т. 3, § 31.1—31.3], R. A. Handelsman, J. S. Lew [1, 2], R. Wong [2]) и метод, основанный на теории обобщенных функций (J. P. McClure, R. Wong [1]). Дадим асимптотическое представление (16.1) методом последовательных разложений, который является наиболее элементарным. Для простоты изложения предположим, что $f(t)$ имеет асимптотику

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n-\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (16.10)$$

Асимптотическое разложение для $I_{0+}^{\alpha} f$ будет различным в зависимости от того, что $0 < \beta < 1$ или же $\beta = 1$.

Теорема 16.2. Пусть функция f локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику (16.10) с $0 < \beta < 1$. Тогда дробный интеграл $(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет асимптотическое разложение вида

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-n-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-n-\beta)} a_n x^{\alpha-\beta-n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma(1+\alpha-n)} x^{\alpha-n}, \quad (16.11)$$

где постоянные b_n выражаются формулами

$$b_n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} f_n(t) t^{-\beta} dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16.12)$$

$$f_1(t) = t^{\beta} f(t) - a_0, \quad f_{n+1}(t) = t f_n(t) - a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.13)$$

Доказательство. Так как $f(t) = t^{-\beta} [a_0 + f_1(t)]$, где $f_1(t)$ — функция из (16.13), то в силу (2.44) имеем

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} I(x) + \frac{a_0 \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} x^{\alpha-\beta}, \quad (16.14)$$

где $I(x) = x^{-\beta} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f_1(xt) t^{-\beta} dt$. Обозначив $g_1(t) = (1-t)^{\alpha-1} - 1$ и приняв во внимание (16.13), придем к

$$\begin{aligned}
x^\beta I(x) &= \int_0^1 f_1(xt) g_1(t) t^{-\beta} dt + \int_0^1 f_1(xt) t^{-\beta} dt = \\
&= \frac{1}{x} \left(\int_0^1 f_2(xt) \frac{g_1(t)}{t} t^{-\beta} dt + a_1 \int_0^1 \frac{g_1(t)}{t} t^{-\beta} dt \right) + \int_0^1 f_1(xt) t^{-\beta} dt.
\end{aligned}$$

Продолжим этот процесс. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\frac{g_n(t)}{t} &= g_n^*(t), \quad g_n^*(t) - g_n^*(0) = g_{n+1}(t), \\
n &= 1, 2, \dots, \quad g_0^*(t) = (1-t)^{\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{16.15}$$

Тогда $x^\beta I(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
x^\beta I(x) &= \frac{1}{x^N} \int_0^1 f_{N+1}(xt) g_N^*(t) t^{-\beta} dt + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{x^n} \int_0^1 g_n^*(t) t^{-\beta} dt + \\
&+ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_n}{n! x^n} \int_0^1 f_{n+1}(xt) t^{-\beta} dt.
\end{aligned} \tag{16.16}$$

Заметим, что из (16.10), (16.13) и (16.15) вытекают соотношения

$$f_{n+1}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} t^{-k}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{16.17}$$

$$g_n^*(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(g_0^*)^{(k)}(0)}{k!} t^{k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} t^{k-n}, \quad g_n^*(0) = \frac{(1-\alpha)_n}{n!}. \tag{16.18}$$

Согласно (16.17) и лемме 16.2, при $x \rightarrow +\infty$ имеем оценку вида

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_{n+1}(xt) t^{-\beta} dt &= x^{\beta-1} \int_0^{\infty} f_{n+1}(t) t^{-\beta} dt - x^{\beta-1} \int_x^{\infty} f_{n+1}(t) t^{-\beta} dt \sim \\
&\sim x^{\beta-1} \int_0^{\infty} f_{n+1}(t) t^{-\beta} dt - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{(k+\beta-1)x^k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{16.19}$$

Тогда в силу (16.18) и (16.19) при $x \rightarrow +\infty$ находим

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_{N+1}(xt) g_N^*(t) t^{-\beta} dt &= \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \int_0^1 f_{N+1}(xt) t^{k-N-\beta} dt \sim \\
&\sim \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \left[x^{N+\beta-k-1} \int_0^{\infty} f_{N+1}(t) t^{k-N-\beta} dt - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+N}}{(n+N+\beta-k-1)x^n} \right],
\end{aligned}$$

или после некоторых преобразований с учетом (1.72) и (1.77)

$$\int_0^1 f_{N+1}(xt) g_N^*(t) t^{-\beta} dt \sim x^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{x^n}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

где

$$A_n = \frac{(1-\alpha)_{n+N}}{(n+N)!} \int_0^\infty f_{N+1}(t) t^{n-\beta} dt,$$

$$B_n = a_{n+N} \left[\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-n-N-\beta)}{\Gamma(1-n-N-\beta+\alpha)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! (n+N+\beta-k-1)} \right].$$

Отсюда вытекает оценка

$$\int_0^1 f_{N+1}(xt) g_N^*(t) t^{-\beta} dt = O(x^{\beta-1}) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (16.20)$$

Учитывая (16.19) и (16.20), для $I(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеем соотношение

$$I(x) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{x^{n+\beta}} \left(\int_0^1 g_n^*(t) t^{-\beta} dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! (n+\beta-k-1)} \right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_n}{n! x^{n+1}} \int_0^\infty f_{n+1}(t) t^{-\beta} dt + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right),$$

или в силу (16.18), (1.72) и (1.77)

$$I(x) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n \Gamma(\alpha) \Gamma(1-n-\beta)}{\Gamma(1-n-\beta+\alpha)} x^{-n-\beta} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_n}{n! x^{n+1}} \times$$

$$\times \int_0^\infty f_{n+1}(t) t^{-\beta} dt + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right).$$

Подставляя это выражение в (16.14) и учитывая равенство

$$(1-\alpha)_n = (-1)^n \Gamma(\alpha) / \Gamma(\alpha-n), \quad (16.21)$$

получаем доказываемую формулу (16.11).

Теорема 16.3. Пусть функция f локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику (16.10) с $\beta = 1$. Тогда дробный интеграл $(I_0^\alpha f)(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ имеет асимптотическое представление

$$(I_0^\alpha f)(x) \sim \ln x \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n a_n}{\Gamma(\alpha-n)} x^{\alpha-n-1} + \sum_{n=0}^\infty c_n x^{\alpha-n-1}, \quad (16.22)$$

где постоянные c_n находятся по формулам

$$c_0 = a_0 [\psi(1) - \psi(\alpha)] + d_1, \quad c_n = \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^\infty \frac{(1-\alpha)_k}{k! (k-n)} +$$

$$+ \frac{(-1)^n d_{n+1}}{\Gamma(\alpha-n) n!}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16.23)$$

$$d_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(t) dt + \int_1^\infty \left(f_{n+1}(t) - \frac{a_n}{t} \right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16.24)$$

$$f_1(t) = f(t), \quad f_{n+1}(t) = t f_n(t) - a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.25)$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 16.3. Используя обозначения (16.18) и (16.25), вместо (16.16) получаем представление

$$\Gamma(\alpha) x^{-\alpha} (I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{x^N} \int_0^1 f_{N+1}(xt) g_N^*(t) dt + \\ + \sum_{n=1}^N \frac{a_{n-1}}{x^n} \int_0^1 g_n^*(t) dt + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_n}{n! x^{n+1}} \int_0^1 f_{n+1}(xt) dt. \quad (16.26)$$

Соотношение (16.17) здесь заменяется на

$$f_{n+1}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k-1} t^{-k}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16.27)$$

Интеграл $\int_0^1 f_{n+1}(xt) dt$ с помощью (16.24) представим в виде $\int_0^1 f_{n+1}(xt) dt =$
 $= \frac{1}{x} \int_0^x f_{n+1}(t) dt = \frac{1}{x} \left[a_n \ln x - \int_x^{\infty} \left(f_{n+1}(t) - \frac{a_n}{t} \right) dt + d_{n+1} \right]$. Тогда в
 силу (16.27) и леммы 16.2 $\int_0^1 f_{n+1}(xt) dt \sim \frac{1}{x} \left(a_n \ln x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+n}}{k x^k} + \right.$
 $\left. + d_{n+1} \right)$, $x \rightarrow +\infty$. Подставляя эту оценку в (16.26) и учитывая (16.20)
 с $\beta = 0$, получаем при $x \rightarrow +\infty$ соотношения

$$x^{-\alpha} \Gamma(\alpha) (I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{n=1}^N \frac{a_{n-1}}{x^n} \int_0^1 g_n^*(t) dt + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_n}{n! x^{n+1}} \times \\ \times (a_n \ln x + d_{n+1}) - \sum_{n=0}^{N-2} \frac{(1-\alpha)_n}{n! x^{n+1}} \sum_{k=1}^{N-n-1} \frac{a_{k+n}}{k x^k} + O\left(\frac{\ln x}{x^{N+1}}\right) = \\ = \ln x \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_n a_n}{n! x^{n+1}} + \frac{1}{x} \left(a_0 \int_0^1 g_1^*(t) dt + d_1 \right) + \\ + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{x^{n+1}} \left[a_n \left(\int_0^1 g_{n+1}^*(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! (n-k)} \right) + \right. \\ \left. + d_{n+1} \frac{(1-\alpha)_n}{n!} \right] + O\left(\frac{\ln x}{x^{N+1}}\right).$$

Согласно (16.18) с учетом формулы 2.2.4.20 из справочника А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1], имеем

$$\int_0^1 g_1^*(t) dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1} - 1}{t} dt = \psi(1) - \psi(1-\alpha), \\ \int_0^1 g_{n+1}^*(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! (n-k)} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k! (k-n)}.$$

Отсюда на основании равенства (16.21) следует искомая формула (16.22).

3°. Случай степенно-логарифмической асимптотики. Пусть функция $f(t)$ имеет степенно-логарифмическую асимптотику

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\mu_n} (\ln t)^{m_n} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (16.28)$$

где $\{\mu_n\}$ — некоторая возрастающая последовательность, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$, m_n — произвольные действительные числа. В этом случае асимптотические разложения дробных интегралов $I_{0+}^\alpha f$ можно находить так же, как и в п. 2°, модифицированным методом последовательных разложений. Мы не станем на этом останавливаться (см. в § 17, п. 1°, исторические сведения к § 16, п. 3°), а рассмотрим только случай степенно-логарифмической асимптотики вида

$$f(t) \sim t^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\ln t)^{\gamma-n} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \quad (16.29)$$

где β — неотрицательное, а γ — произвольные фиксированные действительные числа. Асимптотическое разложение $I_{0+}^\alpha f$ в этом случае можно получить двумя способами: методом, основанным на представлении $I_{0+}^\alpha f$ в виде свертки Меллина (N. Bleistein [1]), и методом непосредственных оценок (R. Wong [1]). Воспользуемся вторым методом.

Рассмотрим сначала случай $0 \leq \beta < 1$.

Теорема 16.4. Пусть вещественнозначная неотрицательная функция $f(x)$ локально интегрируема на $[0, +\infty)$ и имеет разложение (16.29) с $0 \leq \beta < 1$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) \sim x^{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\ln x)^{\gamma-n}, \quad (16.30)$$

где постоянные B_n представимы по формулам

$$B_n = B_n(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n a_{n-k} \binom{\gamma+k-n}{k} \Omega_k(\alpha, \beta), \quad (16.31)$$

$$\Omega_k(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} (\ln t)^k dt. \quad (16.32)$$

Доказательство. Дробный интеграл $I_{0+}^\alpha f$ перепишем в виде

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sqrt{x}}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = J_1 f + J_2 f. \quad (16.33)$$

Покажем, что $J_1 f$ асимптотически мало по сравнению с $J_2 f$. Выберем $0 < \varepsilon < 1 - \beta$. Так как $(\ln t)^\gamma = O(t^\varepsilon)$ при $t \rightarrow +\infty$, то из (16.29) имеем $f(t) = O(t^{\beta-\varepsilon})$ при $t \rightarrow +\infty$ и, следовательно,

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt = O(x^{(1-\beta+\varepsilon)/2}) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (16.34)$$

Положим $M_\alpha = \max_{0 \leq t \leq 1/2} (1-t)^{\alpha-1}$. Тогда $\Gamma(\alpha) J_1 f \leq M_\alpha x^{\alpha-1} \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt$ и в силу (16.34) получаем оценку

$$(J_1 f)(x) = O(x^{\alpha-\beta-\delta}) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad (16.35)$$

где $\delta = (1 - \varepsilon - \beta)/2 > 0$.

Оценим $J_2 f$. Согласно (16.29),

$$f(t) = t^{-\beta} \sum_{n=0}^N a_n (\ln t)^{\gamma-n} + R_N(t),$$

$$R_N(t) = O(t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma-N-1}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (16.36)$$

Отсюда

$$(J_2 f)(x) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)} L(\alpha, \beta, \gamma-n; x) + r_N(x), \quad (16.37)$$

где обозначено

$$L(\alpha, \beta, \gamma; x) = \int_{\sqrt{x}}^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma} dt, \quad (16.38)$$

$$r_N(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sqrt{x}}^x (x-t)^{\alpha-1} R_N(t) dt.$$

Сделаем в (16.38) замену $t = x\tau$

$$L(\alpha, \beta, \gamma; x) = x^{\alpha-\beta} (\ln x)^{\gamma} \int_{x^{-1/2}}^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} \left(1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right)^{\gamma} d\tau. \quad (16.39)$$

Здесь $|\ln \tau / \ln x| \leq 1/2$. Следовательно, $\left(1 + \frac{\ln \tau}{\ln x}\right)^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} \left(\frac{\ln \tau}{\ln x}\right)^k$.

Подставив это в (16.39), осуществив почленное интегрирование, приняв во внимание (16.32) и непосредственно проверяемую оценку

$\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\beta} (\ln \tau)^k d\tau = O(x^{-\delta})$, $\delta > 0$, при $x \rightarrow +\infty$, получим асимптотическое равенство

$$L(\alpha, \beta, \gamma; x) \sim x^{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\gamma}{k} \Omega_k(\alpha, \beta) (\ln x)^{\gamma-k} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (16.40)$$

Согласно (16.36), существуют постоянные $k > 0$ и $c > 1$ такие, что $|R_N(t)| \leq k t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma-N-1}$ для $t \geq 1$. Отсюда $r_N(x) \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_{\sqrt{x}}^x (x-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma-N-1} dt$,

а далее, приняв во внимание (16.40), имеем $r_N(x) = O(x^{\alpha-\beta} (\ln x)^{\gamma-N-1})$ при $x \rightarrow +\infty$. Подставляя теперь (16.40) в (16.37) и учитывая последнюю оценку, получаем после перегруппировки членов асимптотическое разложение вида $(J_2 f)(x) \sim x^{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\ln x)^{\gamma-n}$ при $x \rightarrow +\infty$, где B_n выражается формулой (16.31). Отсюда, согласно (16.33) и (16.35), вытекает утверждение теоремы.

Случай $\beta=1$ характеризует

Теорема 16.5. Пусть функция f локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику (16.29) с $\beta=1$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\Gamma(\alpha) x^{1-\alpha} (I_{0+}^{\alpha} f)(x) \sim \int_0^x f(t) dt + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\ln x)^{\gamma-n}, \quad (16.41)$$

где

$$C_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \binom{\gamma+k-n}{k} \Lambda_k(\alpha), \quad (16.42)$$

$$\Lambda_h(\alpha) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1} - 1}{t} (\ln t)^h dt. \quad (16.43)$$

Доказательство осуществляется аналогично доказательству теоремы 16.4 после записи интеграла $I_{0+}^\alpha f$ в форме

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x [(x-t)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}] f(t) dt \quad (16.44)$$

и представления второго члена в правой части в виде суммы двух интегралов по интервалам $(0, \sqrt{x})$ и $(\sqrt{x}, x)$ (см. (16.33)).

Случай $\beta > 1$ в (16.29) исследуется с помощью разложения $(x-t)^{\alpha-1}$ в ряд Тейлора по степеням x и использования вместо (16.42) представления

$$\begin{aligned} (I_{0+}^\alpha f)(x) &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{[\beta]-1} (-1)^k \binom{\alpha-1}{k} \int_0^x f(t) \left(\frac{t}{x}\right)^k dt + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[(x-t)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{[\beta]-1} (-1)^k \binom{\alpha-1}{k} \left(\frac{t}{x}\right)^k \right] f(t) dt. \end{aligned} \quad (16.45)$$

4°. Случай степенно-показательной асимптотики. Нахождение асимптотического представления дробного интеграла $I_{0+}^\alpha f$ в случае, когда функция $f(t)$ имеет степенно-показательную асимптотику, основывается на лемме Ватсона (лемма 16.3). Ограничимся здесь рассмотрением случая простейшей степенно-показательной асимптотики в нуле, когда

$$f(t) \sim e^{-1/t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad \text{при } t \rightarrow +0. \quad (16.46)$$

Теорема 16.6. Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию (16.46), то дробный интеграл $(I_{0+}^\alpha f)(x)$ при $x \rightarrow +0$ имеет асимптотическое разложение

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) \sim e^{-1/x} \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^{n+2\alpha}, \quad (16.47)$$

где постоянные H_n имеют вид

$$H_n = H_n(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \Gamma(n-k+\alpha) a_k}{(n-k)! \Gamma(\alpha + k + 1)}. \quad (16.48)$$

Доказательство. Согласно (16.1) и (16.46), справедливо соотношение

$$(I_{0+}^\alpha f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{-1/t} t^n dt \quad \text{при } x \rightarrow +0. \quad (16.49)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_{\alpha,n}(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{-1/t} t^n dt. \quad (16.50)$$

Произведя замену переменной $t = x/(1+\tau)$, имеем

$$J_{\alpha,n}(x) = x^{\alpha+n} e^{-1/x} \int_0^{\infty} e^{-\tau/x} \tau^{\alpha-1} (1+\tau)^{-\alpha-n-1} d\tau.$$

Применив затем лемму 16.3, получаем

$$J_{\alpha, n}(x) \sim x^{2\alpha+n} e^{-1/x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha+n+1)_k \Gamma(k+\alpha)}{k!} x^k \quad (16.51)$$

при $x \rightarrow +0$. Подстановка этого разложения в (16.49) приводит к доказываемой формуле (16.47).

5°. Асимптотическое решение уравнения Абеля. В связи с задачами из приложений часто приходится искать не решение φ уравнения Абеля

$$(I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \quad (16.52)$$

а асимптотику φ в некоторой точке (обычно в нуле или на бесконечности), если известна асимптотика свободного члена f в этой точке. В связи с этим введем понятие асимптотического решения.

Определение 16.3. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность при $x \rightarrow a$, свободный член $f(x)$ уравнения (16.52) имеет асимптотику

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(x) \text{ при } x \rightarrow a \quad (b_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (16.53)$$

Если существует асимптотическая последовательность $\{\chi_n(x)\}$ при $x \rightarrow a$, такая, что

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n \chi_n(x) \text{ при } x \rightarrow a \quad (d_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (16.54)$$

и

$$(I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(x) \text{ при } x \rightarrow a,$$

то асимптотическое разложение (16.54) будем называть асимптотическим решением уравнения (16.52) при $x \rightarrow a$.

Отметим, что из свойства единственности асимптотического разложения (данной функции по данной асимптотической последовательности) вытекает единственность асимптотического решения. Однако из существования асимптотического решения, вообще говоря, не следует существование самого решения.

Зная асимптотические разложения дробных интегралов (16.1), можно находить асимптотические решения уравнения Абеля (16.52). Например, следствием теорем 16.1 и 16.4 являются следующие утверждения, характеризующие асимптотические решения уравнения (16.52) при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow +\infty$.

1. Если свободный член $f(x)$ имеет асимптотику

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\mu_n} \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (16.55)$$

где μ_n — некоторая возрастающая последовательность, причем $\mu_0 > \alpha - 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty$, то асимптотическое решение уравнения (16.52) выражается формулой

$$\varphi(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu_n + 1) a_n}{\Gamma(\mu_n - \alpha + 1)} t^{\mu_n - \alpha} \text{ при } t \rightarrow 0. \quad (16.56)$$

2. Пусть функция f локально интегрируема на $[0, +\infty)$, $0 < \alpha < 1$ и

$$f(x) \sim x^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\ln x)^{\gamma-n} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad (16.57)$$

где $0 \leq \beta < 1 - \alpha$, а γ — произвольное действительное число. Тогда локально интегрируемое на $[0, +\infty)$ асимптотическое решение уравнения (16.52) представимо в виде

$$\varphi(t) \sim t^{-\alpha-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\ln t)^{\gamma-m} \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (16.58)$$

где постоянные c_m находятся (по известным b_n) из рекуррентных формул

$$b_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^n c_{n-m} \binom{\gamma-n+m}{m} \Omega_k(\alpha, \alpha+\beta),$$

в которых $\Omega_k(\alpha, \beta)$ имеют вид (16.32). Например, $c_0 = -\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} b_0$,

$$c_1 = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \{b_1 + b_0 \gamma [\psi(1-\beta) - \psi(1-\alpha-\beta)]\} \text{ и т. д.}$$

§ 17. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 3

1°. Исторические сведения. К § 10, п. 1°. Вторые из соотношений (10.4), (10.5) иногда называются *первым индексным законом*, см. Э. Лав (E. R. Love [5], 1972 г.). Они характеризуют полугрупповое свойство операторов I_{a+}^{α} и I_{b-}^{α} , рассматриваемых обычно в $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$. Случай $p=1$ см. в теореме 2.5 и в § 4, п. 1° (к § 2, п. 7°), а также в работах Э. Лава (E. R. Love [2, с. 174; 3, с. 1058, 1060], 1967 г.). Последнее из утверждений теоремы 10.1 ранее не публиковалось.

Соотношения (10.4) рассматривали многие авторы. В случае $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$ их изучали Э. Лав и Л. Юнг (E. R. Love, L. C. Young [1], 1938 г.), Э. Хилле (E. Hille [1], 1939 г.), Х. Кобер (H. Kober [1], 1940 г.). Последний в работе H. Kober [2], 1941 г., исследовал также случай $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta = 0$, $a=0$ для функции $f(x)$, принадлежащей некоторому подпространству пространства $L_p(0, b)$, $p \geq 2$. М. Рисс (M. Riesz [6, с. 12], 1949 г.) эти соотношения распространил на случай отрицательных $\operatorname{Re} \alpha$ или $\operatorname{Re} \beta$, но при условии, что $f \in C^p([a, b])$, $p > \max(-\operatorname{Re} \alpha, -\operatorname{Re}(\alpha+\beta))$. Формулы (10.4) для всех значений α и β в различных классах обобщенных функций рассматривали И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов [2], 1959 г., и А. МакБрайд (A. C. McBride [2], 1975 г., [4], 1977 г.; [9], 1983 г.); причем последний использовал в основном классы $F_{p\mu}$ и $F'_{p\mu}$, см. § 8, п. 4°. В классе $L_1(a, b)$ или его подклассах, определяемых условиями существования соответствующих дробных производных, эти формулы при всех значениях α и β подробно исследовал Э. Лав (E. R. Love [5], 1972 г.).

О формулах (10.6), (10.7) см. ниже в подпункте «к § 10, п. 3°».

Частный случай формулы (10.12) при $\alpha_1 - \beta_1 = \pm 1$ имеется в работе Y. W. Chen [1, с. 309], 1959 г., но, по-видимому, эта формула была известна и ранее. На множестве аналитических функций она рассматривается в диссертации R. Tremblay [1, с. 292], 1974 г.

Теоремы 10.2—10.4 и леммы 10.1, 10.2 публикуются впервые. В случае $p=1$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ эти леммы установлены Э. Лавом (E. R. Love [2, с. 181, 184; 3, с. 1063, 1070], 1967 г.), который использовал весовые классы $Q_a = \{f(x); x^q f(x) \in L_1[0, d], d < \infty\}$ и $R_r = \{f(x); x^r f(x) \in L_1(a, \infty), a > 0\}$. В этих же работах подробно исследовались соответственно операторы (10.18), (10.19) и (10.20), (10.21), для которых были указаны композиционные разложения (10.22)—(10.29) лишь при таких значениях параметров, когда функция $f(x)$ принадлежит всему пространству Q_a или R_r . Значения параметров, для которых существование этих разложений может быть обеспечено лишь сужением этих пространств условиями представимости типа $f(x) = I_{0+}^{\mu} \psi(x)$, $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\psi \in L_p(0, d)$, автором не рассматривались, что несколько сузило глубину исследований.

К § 10, п. 2°. Теорема 10.5 публикуется впервые. Однако первое из соотношений (10.38) в другой форме получил Э. Лав (E. R. Love [7], 1985 г.). Он назвал это равенство *третьим индексным законом* и подробно исследовал условия его справедливости при всех значениях параметров в классе $L_1((0, \infty); x^{\mu}(x+1)^{\nu})$ или соответствующих

подклассах, определяемых условиями представимости, о которых говорилось выше и которые для своего цикла работ он здесь использовал впервые.

Отметим, что обращение оператора (10.39) для функции $f(t)$, у которой $f(t)=0$, $t>a>0$, впервые получили Н. И. Ахиезер, В. А. Щербина [1], 1957 г., см. § 39, п. 2°, 36.7, 36.8.

К § 10, п. 3°. Теоремы 10.6, 10.7 публикуются впервые. Однако соотношения (10.42), (10.43) и (10.6), (10.7), которые характеризуют второй индексный закон (по терминологии Э. Лава (E. R. Love [5], 1972 г.)), встречались и ранее. По-видимому, впервые частный случай соотношения (10.6) вида $\mathcal{D}^k x^{2k-1} \mathcal{D}^{k-1} f(x) = x^{k-1} \mathcal{D}^{2k-1} x^k f(x)$, $\mathcal{D} = d/dx$, с помощью формулы Лейбница получил Д. Уиддер (D. V. Widder [1, с. 17, лемма 3.11], 1938 г.). В терминах операторов Кобера $I_{\eta, \alpha}^+$, $K_{\eta, \alpha}^-$ (18.5), (18.6) для случаев $\alpha > 0$, $\beta > 0$ эти формулы установил Х. Кобер (H. Kober [1], 1940 г.), см. (18.16). Также формулы вида (10.6), (10.7) встречались в работах Т. Хиггинса (T. P. Higgins [4, с. 7–8], 1965 г.) и Э. Лава (E. R. Love [2, (3.9)], 1967 г.), причем последний в работе E. R. Love [5], 1972 г., осуществил подробное исследование формулы (10.6) в классе Q_q для всех значений параметров, получив результаты, аналогичные указанным в теореме 10.6. Подробные исследования второго индексного закона в некоторых классах обобщенных функций осуществили А. Эрдейи (A. Erdelyi [15], 1972 г.) и А. МакБрайд (A. C. McBride [1, 2, 4, 6, 9], 1975–1983 гг.), причем последний изучал его для более общих операторов $I_{0+; x^m}^\alpha$, $I_{-; x^m}^\alpha$, см. (18.41), и в пространствах $F_{p, \mu}$ и $F'_{p, \mu}$ см. § 8, п. 4°.

Оператор (10.47) в классах функций Q_q , R_r рассматривал О. И. Маричев [1, 2], 1972–1974 гг., а оператор (10.48) в случае $m=0$ — А. МакБрайд (A. C. McBride [7], 1982 г.) в пространстве $F_{p, \mu}$ и И. Димовски, В. Кирякова (I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova [2], 1985 г.).

К § 10, п. 4°. Теоремы 10.8, 10.9 публикуются впервые. Однако композиции вид

$\prod_{j=1}^n I_{a+}^{\alpha_j} e^{\lambda_j x} f(x)$ известны давно — они встречались в работах А. В. Летникова [9],

1888 г., и П. А. Некрасова [3], 1888 г., где в таком виде искались решения дифференциальных уравнений порядка n с двучленными коэффициентами. Такие композиции при $n=2$ и их обращения встречались в работе Н. Т. Дэйвиса [2, с. 137], 1927 г., но систематическое исследование таких операторов было проведено значительно позже в работах Т. Прабхакара (T. R. Prabhakar [1], 1969 г.; [2], 1971 г.) в связи с изучением обратимости оператора (10.55). Операторы (10.55) и (10.56) как частные случаи оператора (10.63) и его аналога рассматривались соответственно в работах Т. Р. Прабхакара [5], 1972 г.; [6], 1977 г.

Оператор из правой части (10.62) в случае $\lambda=1$ изучался в работе Ж. Белварда (J. A. Belward [1], 1972 г.), где было получено его обращение через дробные интегралы, использующее композиционную структуру (10.62) этого оператора.

К § 11, п. 1°. Теорема 11.1 принадлежит Я. Племелю (1908 г.) и И. И. Привалову (1916 г.) в невесовом случае (см. доказательство и ссылки в книге Н. И. Мусхелишвили [1]) и Р. В. Дудучаве [1, 2] в весовом случае. Теорема 11.2 получается из теоремы 11.1 несложными преобразованиями (например, отображением прямой на окружность). Теорема 11.3 принадлежит М. Риссу (M. Riesz, 1927 г.) в невесовом случае и К. И. Бабенко (1948 г.), Б. В. Хведелидзе (1957 г.) в весовом случае (см. литературные ссылки и доказательства, например, в книге И. Ц. Гохберга, Н. Я. Крупника [4]).

К § 11, пп. 2, 3°. Первой работой, содержащей, по крайней мере неявно, идею связи левостороннего и правостороннего дробного интегрирования через посредство сингулярного оператора была статья N. Zeilon [1], 1924 г. В этой работе для случая полуоси фактически имеется формализм, равносильный связи (11.30), а также одной из связей (12.8) (см. с. 9 и 7 указанной работы). Следует сказать, что работа (хотя и выполненная формально и с погрешностями в формулах, в том числе и на указанной с. 9) содержит интересные и оригинальные идеи, явно навеянные работами Т. Карлемана, но не замеченные ни современниками, ни последующими исследователями. В этой статье впервые было рассмотрено обобщенное интегральное уравнение Абеля, содержащее и левостороннее, и правостороннее дробное интегрирование (см. об этом уравнении в § 30). Эта содержательная работа оставалась неизвестной и авторам настоящей книги, обнаружившим ее по счастливой случайности в 1985 г.

Связи (11.10)–(11.12) получены независимо Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [1], 1965 г.) и С. Г. Самко [4], 1967 г., тождество (11.10) получено также Х. Кобером (H. Kober [5], 1967 г.). Следствия 1, 2 из теоремы 11.4 и замечание 11.2 даны в той же работе С. Г. Самко. Связи (11.16)–(11.19) установлены С. Г. Самко [1, 2], [3, 5], 1968 г., связи (11.18), (11.19) были получены и Л. фон Вольферсдорфом (L. von Wolfersdorf [2], 1965 г.). Можно указать также работы В. Кутнера [1], 1953 г., и Y. W. Chen [2], 1961 г., в которых была предпринята попытка отыскать связь (11.17), однако конкретные связи типа (11.16)–(11.19) там не были обнаружены. Позже связь (11.19) была переоткрыта в работах R. K. Juberg [1–3], 1972–1973 гг.

Модификация связей (11.16), (11.17) для значений $0 < \alpha < 2$ в виде (11.23), (11.24)

получена А. А. Килбасом [5], 1977 г. (см. также [7]), и Б. С. Рубиным [10], 1977 г. Модификация связей (11.18), (11.19) в виде (11.25), (11.26) установлена Б. С. Рубиным [11], 1980 г.; здесь же даны модификации связей (11.16)—(11.19) при любых $\alpha > 0$ (см. об этом ниже в § 17, п. 2°).

К § 11, п. 4°. Теорема 11.6 об урезании лиувилевского дробного интеграла на полуось и следствие 1 из нее фактически получены Б. С. Рубиным [1], 1972 г. Инвариантность пространства $I^{\alpha}(L_p)$ относительно умножения на характеристическую функцию полуоси другим способом показана также в работе С. Г. Самко [15], 1974 г. Теорема 11.8 доказана С. Г. Самко и ранее не публиковалась.

К § 12, п. 1°. Широкое использование оператора I^{α} начинается с работ М. Рисса (M. Riesz [2], 1936 г.; [4], 1938 г.; [5], 1939 г.), где этот оператор вводился в многомерном случае. Потенциал $H^{\alpha}\varphi$ как самостоятельный объект для исследования появляется в работах Ж. Окикиолу (G. O. Okikiolu [1], 1965 г.; [2], 1966 г.), хотя более общий потенциал I_{δ}^{α} , содержащий в качестве частного случая и потенциал Рисса $I^{\alpha}\varphi$, и потенциал $H^{\alpha}\varphi$, был введен ранее В. Феллером (W. Feller [1], 1952 г.). Связи (12.6), (12.7) доказывались в работах (G. O. Okikiolu [2], 1966 г.) и С. Г. Самко [4], 1968 г., см. также [13], 1971 г., но по крайней мере первая из них была известна еще Г. Торину (G. O. Thorin [1, с. 37], 1948 г.). Лемма 12.2 доказана в работах Н. Кober [6], 1968 г., С. Г. Самко [13], 1971 г. Теорема 12.1 получена С. Г. Самко [13]. Равенства (12.19)—(12.21) ранее отмечались в работе Н. Кober [6]. Утверждение (12.22) о полугрупповом свойстве операторов I_{δ}^{α} получено В. Феллером (W. Feller [1], 1952 г.). Потенциалы $I^{\alpha}\varphi$, $H^{\alpha}\varphi$ в форме интегралов Стильтьеса рассматривались в книге Р. L. Butzer, W. Trebels [2, с. 31—35], 1968 г., см. также [1].

К § 12, п. 2°. Результаты этого пункта получены С. Г. Самко и ранее не публиковались.

К § 12, п. 3°. Связи (12.46), (12.47) получены С. Г. Самко [1], 1967 г., см. также [3], 1968 г.

К § 13, пп. 1, 2°. Утверждение теоремы 13.1 получено Б. С. Рубиным [1], 1972 г. В связи со следствием из теоремы 13.1 отметим, что совпадение (почти всюду) дробных производных Римана—Лиувилля и Маршо на абсолютно непрерывных функциях отмечалось еще Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1, с. 222, лемма 1], 1930 г.). Описание дробных интегралов от функций из $L_p(a, b)$, указанное в теореме 13.2, получено Б. С. Рубиным [1], 1972 г.; [3], 1973 г. Утверждения теорем 13.3—13.5 ранее не отмечались. Близкое к теореме 13.5 утверждение содержится в работе А. Marcchaud [1, с. 385], 1927 г. Теорема 13.6 и более общая теорема 13.12 указаны С. Г. Самко и отмечаются впервые. Теорема 13.7 дана С. Г. Самко [14], 1973 г. Случай $p=1$ в этой теореме получен ранее М. М. Джрбашяном, А. Б. Нерсисяном [6, с. 17], 1968 г., при условии $a(x) \in H^1([a, b])$. В связи с теоремой 13.7 отметим, что мультипликаторы в весовом пространстве $x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha}[L_p(R_+^1; \rho)]$, $\rho=x^{\gamma}$, рассматривались в работе F. Penzel [1, с. 18—23].

К § 13, п. 3°. Результаты этого пункта получены Б. С. Рубиным [1], 1972 г., и здесь изложены с некоторыми добавлениями. В связи с представлением $I_{c+}^{\alpha}\varphi = I_{a+}^{\alpha}\psi$, указанным в следствии из теоремы 13.9, отметим, что на проходившей в 1974 г. конференции по дробному исчислению и его приложениям (США, Нью-Хейвен) Э. Лав (E. R. Love) поставил вопрос о существовании такой связи между дробными интегралами с разными нижними пределами интегрирования, см. статью Т. Ослера (T. J. Osler [9, с. 376], 1975 г.). Ответ на этот вопрос, таким образом, был известен в 1972 г. (Б. С. Рубин [1]).

К § 13, п. 4°. Результаты этого пункта получены Б. С. Рубиным [7], 1974 г. Отметим, что теорема 13.13 справедлива, как показано Б. С. Рубиным [22], 1986 г., при всех $\mu_1 < 1 + \lambda$. Это же относится к леммам 13.2, 13.3. Аналогично в (13.37) (соответственно в лемме 13.2') достаточно считать, что $\mu_1 < \lambda + 1$.

К § 13, п. 5°. Классы $\hat{H}_{\alpha}$, $\tilde{H}_{\alpha}$ и лемма 13.4 содержатся в работе С. Г. Самко [27, § 9], 1978 г. Там же доказана теорема 13.14. Близкое к теореме 13.14 утверждение в неявном виде содержится в работе Л. фон Вольферсдорфа (L. von Wolfersdorf [2], 1965 г.).

К § 13, п. 6°. Обобщенные классы Гельдера H^{ω} , по-видимому, впервые появляются в работе С. Б. Стечкина [1], 1951 г. Об оценках Зигмунда для сингулярных интегралов см. работу Н. К. Бари, С. Б. Стечкина [1], 1956 г., и книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1]. Теоремы 13.15—13.17 доказаны Х. М. Мурдаевым [1], 1985 г. Отметим обобщение теоремы 13.16 на многомерный случай в работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [2], 1985 г. Класс Φ_{β}^{δ} введен в работе Х. М. Мурдаева, С. Г. Самко [1], 1985 г., см. также [2]. Он известен в литературе (при $\beta \geq 1$) в случае $\delta=0$, см., например, книгу А. И. Гусейнова, Х. Ш. Мухтарова [1]. При целых $\beta=k$ этот класс вводился С. Г. Сам-

ко, А. Я. Якубовым [2], 1985 г. Класс Φ_B^δ в неявном виде использовался также в работе С. Г. Самко, А. Я. Якубова [1], 1984 г. Оценка (13.69) и теорема 13.18 получены Х. М. Мурдаевым, С. Г. Самко [1], 1985 г., см. также [2, 3], 1986 г.

К § 14, п. 1°. Теорема 14.1 установлена Г. Харди, Д. Литтлвудом (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [4], 1928 г.). Простое доказательство см. в работе В. П. Ильина [1], 1959 г.

К § 14, пп. 2, 3°. Теоремы 14.5—14.7 содержатся в работе Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.) в случае периодических функций. Здесь они даны в несколько более общем виде. Теоремы 14.2—14.4 являются их модификациями.

К § 14, п. 4°. Формулы (14.29), (14.30) установлены А. В. Летниковым [4, с. 20, 58], 1874 г., в случае достаточно хороших функций $f(x)$. Они отмечались в работе К. Мопперта (K. F. Morpert [1, с. 149], 1953 г.) на непрерывно дифференцируемых функциях. Теорема 14.9 об их справедливости на абсолютно непрерывных с весом функциях, а также теорема 14.8 установлены С. Г. Самко и ранее не отмечались.

К § 14, п. 5°. Теорема 14.10 о среднем для дробных интегралов доказана М. Риссом и впервые опубликована в работе G. H. Hardy, M. Riesz [1], 1915 г., а затем в работе M. Riesz [1], 1922 г. Приведенное здесь доказательство этой теоремы также принадлежит М. Риссу, оно изложено в книге K. Chandrasekharan, S. Minakshisundaram [1, лемма 1.41]. Оценка (14.40) в единственном предположении, что $\varphi(t) \in L_1(a, b)$, отмечена в работе S. Verblunsky [1, с. 173], 1931 г.

Теорема 14.11 и утверждение замечания 14.5 доказаны в работе M. Riesz [1], 1922 г. Неравенство типа Колмогорова (14.53) для функций $f(x) \in J_{0+}^\alpha(L_1^{\text{loc}})$ есть немедленное следствие теоремы Рисса 14.11. В других предположениях и на всей прямой такое неравенство доказано в работах Т. Банга (T. Bang [1], 1941 г.) и С. П. Гейсберга [3], 1968 г. Литературные указания в связи с другими неравенствами для дробных интегралов и производных см. в п. 2° этого параграфа и в § 19, п. 8°.

К § 14, п. 6°. Отмеченная здесь связь дробного интегрирования с суммированием рядов и интегралов указана в работе Г. Харди, М. Рисса (G. H. Hardy, M. Riesz [1, с. 21], 1915 г.), где суммирование рядов на основе метода нормальных средних Рисса развито применительно к рядам Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$. О других работах, использующих дробное интегрирование в вопросах суммирования, см. в п. 2° этого параграфа.

К § 15, пп. 1, 2°. Формула Лейбница (15.11) для дробного дифференцирования впервые появляется в работе Ж. Лиувилля (J. Liouville [2, с. 118], 1832 г.), где дробное дифференцирование определялось через разложение функций в ряд по экспонентам. На основе формы Римана—Лиувилля $\mathcal{D}_{a+}^\alpha$ дробного дифференцирования формула Лейбница доказывалась Х. Хольмгреном (Hj. Holmgren [1, с. 12—13], 1865—1866 гг.), где она дана с остаточным членом в интегральной форме. Год спустя формула Лейбница появляется в работе А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1, с. 466], 1867 г.), а затем у А. В. Летникова [1, с. 58], 1868 г., см. также А. В. Летников [4, с. 83], 1874 г. А. Грюнвальд исходил не из лиувиллевской или римановской формы дробного дифференцирования, а из другой (совпадающей с ней на достаточно хороших функциях) формы определения $\mathcal{D}^\alpha$ через предел разностных отношений. Такая форма излагается в § 20 (как дифференцирование по Грюнвальду—Летникову). Формула Лейбница для дробного дифференцирования рассматривалась также Н. Я. Сониным [2, с. 35], 1872 г.

Строгое доказательство формулы Лейбница (15.12) в терминах, близких к современным, дано Е. Ватанабе (Y. Watanabe [1, с. 12], 1931 г.) для аналитических функций. Приведенное в теореме 15.1 доказательство соотношения (15.12) следует идее Е. Ватанабе.

Серия статей Т. Ослера (T. J. Osler [1, 2, 4, 5, 7, 8], 1971—1973 гг.) посвящена уточнениям, обобщениям и другим формам формул Лейбница (15.12) и (15.17) для дробных производных. В этих работах дробное дифференцирование рассматривается в комплексной области и определяется как обобщение интегральной формулы Коши дифференцирования интеграла Коши (эта форма дробного дифференцирования рассматривается нами в § 22). При этом в отличие от более ранних работ Т. Ослером на этом пути получена точная область сходимости ряда в правой части (15.12). В работах (T. J. Osler [6, 7], 1972 г.) доказаны интегральные аналоги формулы Лейбница. Частным случаем этих аналогов является формула (15.17).

К § 16, п. 2°. Теорема 16.1 хорошо известна (см., например, Э. Я. Риекстыньш [2, т. 3, с. 271]). Теоремы 16.2 и 16.3 получаются фактически из результатов работы Э. Я. Риекстыньша [1], 1970 г., в которой была исследована асимптотика интеграла свертки с переменным верхним пределом

$$\Omega(x) = \int_0^x F(x-t) f(t) dt \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (17.1)$$

в предположении, что функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют при $t \rightarrow +\infty$ более общую, чем (16.10), асимптотику (см. далее обзор других результатов). При доказательстве теорем 16.2, 16.3 мы следовали методам этой работы. Заметим только, что в случае $\beta=1$ степенной асимптотики на бесконечности нами дана более точная асимптотика (16.22), чем она может быть найдена в указанной работе Э. Я. Риекстыньша (где вместо $\ln x$ стоит $\ln(x/2)$).

К § 16, п. 3°. В работе Э. Я. Риекстыньша [1], 1970 г., указано на возможность нахождения модифицированным методом последовательных разложений асимптотики более общих, чем дробный интеграл (16.1), интегралов свертки (17.1) в предположении, что входящие в него функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют степенно-логарифмическую асимптотику (16.28). Другие методы нахождения асимптотических разложений интеграла (17.1) можно найти в монографии Э. Я. Риекстыньша [2, пп. 11.3, 15.1, 22.8, 32.3].

Теоремы 16.4 и 16.5 доказаны в работе R. Wong [1], 1978 г. В этой же работе указано, что асимптотические разложения дробных интегралов (16.1) в случае, когда плотность имеет асимптотику (16.29), можно получить методом, развитым в работе N. Bleistein [1], 1975 г. Этот метод, основанный на равенстве Парсевала (1.116) для преобразования Меллина (1.112), позволяет находить асимптотические разложения интегралов, имеющих вид

$$I(x) = \int_0^a k(xt) f(t) dt \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (17.2)$$

в предположении, что $a=+\infty$, а функции $k(t)$ и $f(t)$ имеют логарифмическую асимптотику в нуле.

К § 16, п. 4°. Теорема 16.6 является частным случаем более общего результата Э. Я. Риекстыньша [1, теорема 5], позволяющего находить асимптотические разложения интеграла свертки (17.1) при $x \rightarrow 0$ в предположении, что функция $F(t)$ имеет асимптотику (16.6), а $f(t)$ — обобщающую (16.46) асимптотику.

2°. Обзор других результатов. 11.1. Связи (11.16)–(11.19) и (11.23)–(11.26) левостороннего и правостороннего дробного интегрирования друг с другом можно распространить на случай произвольного $\alpha > 0$. Именно справедливо (Б. С. Рубин [11, с. 919]) тождество

$$I_{b-}^\alpha \varphi = \cos \alpha \pi I_{a+}^\alpha \varphi + \sin \alpha \pi I_{a+}^\alpha \frac{1}{r_a^{\alpha-n}} S r_a^{\alpha-n} \varphi + P_n \varphi, \quad (17.3)$$

где $n = [\alpha]$, $P_n \varphi = \sum_{k=1}^n c_k (x-a)^{n-k}$,

$$c_k = (-1)^{n-k} [(n-k)! \Gamma(k+\alpha-n)]^{-1} \int_a^b (t-a)^{\alpha+k-1-n} \varphi(t) dt.$$

11.2. Пусть $x > 0$. Представления для композиций $\mathcal{D}_{0+}^\alpha x^\alpha I_{-}^\alpha x^{-\alpha}$ и $x^\alpha \mathcal{D}_{-}^\alpha x^{-\alpha} I_{0+}^\alpha$ через сингулярный оператор S и некоторые операторы вида (1.44) с однородным ядром получены в работе Н. Кober [4, с. 450]. Эти соотношения могут быть получены с помощью связей (11.27)–(11.29) и (3.15), (3.16). В указанной работе (с. 449) показано также, что операторы $x^{-\alpha} I_{0+}^\alpha$, $I_{-}^\alpha x^{-\alpha}$ имеют одинаковый образ при рассмотрении их в $L_p(R_+^1)$.

12.1. Полугрупповое свойство (12.17) для потенциалов Феллера в указанном в (12.17) общем виде — для M_{u_1, v_1}^α , M_{u_2, v_2}^β с произвольными коэффициентами u_i , v_i — выполняется при $\alpha + \beta < 1$ и лишено, вообще говоря, смысла в предельном случае $\alpha + \beta = 1$. При специальном же выборе u_2 , v_2 (по заданным u_1 , v_1) полугрупповое свойство имеет место и при $\alpha + \beta = 1$:

$$M_{u, v}^\alpha M_{u, -v}^{1-\alpha} \varphi = M_{a, -b}^1 \varphi = a \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt - b \int_x^\infty \varphi(t) dt,$$

где $0 < \alpha < 1$, $\varphi(t) \in L_1(R^1)$ и $a = u^2 + uv \cos \alpha \pi$, $b = v^2 + uv \cos \alpha \pi$. Из этой формулы вытекает формула обращения

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[u \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha} - v \frac{d}{dx} \int_x^\infty \frac{f(t) dt}{(t-x)^\alpha} \right]$$

для потенциала Феллера $M_{u,v}^\alpha \varphi = f$ в случае $\varphi(x) \in L_1(R^1)$, см. также формулы (30.68)

и (30.78). Обозначим еще $\omega_f(x) = u \int_{-\infty}^x f(t)(x-t)^{-\alpha} dt - v \int_x^{\infty} f(t)(t-x)^{-\alpha} dt$. Спра-

ведлива следующая

Теорема 17.1. Для того чтобы функция $f(x)$ была представима в виде потенциала Феллера $f = M_{u,v}^\alpha \varphi$ от функции $\varphi \in L_1(R^n)$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega_f(x) \in AC(R^1)$ и $(u^2 + uv \cos \alpha\pi) \omega_f(-\infty) + (v^2 + uv \cos \alpha\pi) \omega_f(+\infty) = 0$.

Здесь $AC(R^1)$ — класс абсолютно непрерывных на прямой функций (см., определение 6.1). Ср. также теорему 17.1 с теоремой 6.3. Приведенные здесь результаты получены в работе С. Г. Самко [13].

12.2. В работе G. O. Okikiolu [4] рассмотрены потенциалы I^α , H^α (см. (12.1), (12.2)) со степенными весами:

$$I_{\mu,v}^\alpha \varphi = \frac{|x|^{\mu-v-\alpha}}{2\Gamma(\alpha) \cos \alpha\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^v \frac{\varphi(t) dt}{|t-x|^{1-\alpha}},$$

$$H_{\mu,v}^\alpha \varphi = \frac{|x|^{\mu-v-\alpha}}{2\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \frac{\text{sign}(t-x)}{|t-x|^{1-\alpha}} \varphi(t) dt$$

и введены их модификации, отличающиеся от них одномерным оператором:

$$\tilde{I}_{\mu,v}^\alpha \varphi = \frac{|x|^{\mu-v-\alpha}}{2\Gamma(\alpha) \cos \alpha\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^v [|t-x|^{\alpha-1} - |t|^{\alpha-1}] \varphi(t) dt,$$

$$\tilde{H}_{\mu,v}^\alpha \varphi = \frac{|x|^{\mu-v-\alpha}}{2\Gamma(\alpha) \sin \alpha\pi/2} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left[\frac{\text{sign}(t-x)}{|t-x|^{1-\alpha}} - \frac{\text{sign } t}{|t|^{1-\alpha}} \right] \varphi(t) dt$$

(мы несколько изменили обозначения по сравнению с указанной работой). Для них доказаны формулы композиции типа (12.19) — (12.21).

$$\tilde{I}_{\sigma,v+\alpha-\mu}^\beta I_{\mu,v}^\alpha = \tilde{I}_{\mu+\sigma,v}^{\alpha+\beta}, \quad \tilde{H}_{\sigma,v+\alpha-\mu}^\beta H_{\mu,v}^\alpha = -\tilde{I}_{\mu+\sigma,v}^{\alpha+\beta},$$

$$\tilde{I}_{\sigma,v+\alpha-\mu}^\beta H_{\mu,v}^\alpha = \tilde{H}_{\sigma,v+\alpha-\mu}^\beta I_{\mu,v}^\alpha = \tilde{H}_{\mu+\sigma,v}^{\alpha-\beta}$$

и ограниченность операторов $\tilde{I}_{\mu,v}^\alpha$, $\tilde{H}_{\mu,v}^\alpha$ из $L_p(R^1)$ в $L_q(R^1)$ при условиях $p > 1$, $0 < \mu \leq \alpha < 1$ (или $0 < \alpha < 1$ при $\mu = 0$), $-1/p + 1/p < v < -\alpha + 1/p$, $1/r = -\mu + 1/p > 0$.

Отметим также, что в этой работе получено обращение операторов $I_{\mu,v}^\alpha$, $H_{\mu,v}^\alpha$ с помощью конструкций типа $\frac{d}{dx} \tilde{I}_{\sigma,v+\alpha-\mu}^{1-\alpha}$, $\frac{d}{dx} \tilde{H}_{\sigma,v+\alpha-\mu}^{1-\alpha}$.

В работе G. O. Okikiolu [5] исследована связь весового потенциала Рисса $I_{0,\mu}^\alpha$ с весовым преобразованием Фурье:

$$\mathcal{F}_\sigma^{(v)} \varphi = |x|^{v+\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^v e^{ixt} \varphi(t) dt.$$

Показано, в частности, что $\mathcal{F}_\sigma^{(\mu+\alpha)} I_{0,\mu}^\alpha \varphi = \mathcal{F}_\sigma^{(\mu)} \varphi$, $0 < \alpha < 1$, $-1 < \mu < -\alpha$, и $I_{0,v+\sigma}^\alpha \mathcal{F}_\sigma^{(v)} \varphi = \mathcal{F}_\sigma^{(v-\alpha)} \varphi$, $0 < \alpha < 1$, для достаточно хороших функций $\varphi(x)$.

12.3. Оператор (12.44) является положительно определенным:

$$2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2) (A^\alpha \varphi, \varphi) = \int_a^b \int_a^b |x-y|^{\alpha-1} \varphi(x) \varphi(y) dx dy > 0,$$

где $\varphi \in L_2(a, b)$, $\varphi(x) \not\equiv 0$ (F. G. Tricomi [1]).

13.1. Остановимся здесь на локальных свойствах дробных интегралов $f(x) = I_{a+}^\alpha \varphi$ от функций $\varphi(x)$ из $L_p(a, b)$. Для уточнения их поведения в $L_q(a, b)$, $q = p/(1-\alpha p)$, $1 < p < 1/\alpha$, или в $H^{\alpha-1/p}(a, b)$, $p > 1/\alpha$ (см. теоремы 3.5, 3.6), введем следующие величины:

$$\chi_{r,0}(f, \varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |f(x)|^r dx \right)^{1/r},$$

$$\chi_{r,c}(f, \varepsilon) = \left(\frac{1}{2\varepsilon} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} |f(x)|^r dx \right)^{1/r} \quad \text{при } 0 < c < e, 0 < \varepsilon < c$$

(для простоты взято $a=0, b=e$). Особое внимание будет уделено предельному случаю $p=1/\alpha$, о котором уже говорилось в § 4, п. 2°, 3.3. Приводимые здесь утверждения получены Н. К. Карапетянцем, Б. С. Рубиным [3].

Теорема 17.2. Пусть $f = I_{0+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(0, e)$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $p_\alpha = p(1-\alpha p)^{-1}$. Тогда

$$\chi_{r,0}(f, \varepsilon) \leq C_r \varepsilon^{\alpha-1/p} \left(\int_0^\varepsilon |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad (17.4)$$

где $1 \leq r < p_\alpha$, если $p=1$; $1 \leq r \leq p_\alpha$, если $1 < p < 1/\alpha$; $1 \leq r < \infty$, если $p=1/\alpha$; $1 \leq r \leq \infty$, если $1/\alpha < p \leq \infty$, и

$$\chi_{r,c}(f, \varepsilon) \leq C_r \omega_{\alpha,p}(\varepsilon) \|\varphi\|_p, \quad (17.5)$$

где

$$\omega_{\alpha,p}(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^{\alpha-1/p} & \text{при } 1 < p < 1/\alpha, \quad 1 \leq r \leq p_\alpha, \\ \varepsilon^{\alpha-1} & \text{при } p=1, \quad 1 \leq r < p_\alpha, \\ (1 + |\ln \varepsilon|)^{1/p'} & \text{при } p=1/\alpha, \quad 1 \leq r < \infty, \\ 1 & \text{при } 1/\alpha < p \leq \infty, \quad 1 \leq r \leq \infty. \end{cases}$$

Отметим, что постоянная C_r в (17.4) не зависит от e , а в (17.5) не зависит от $c \in [0, e]$. При $p < 1/\alpha$ постоянная C_r в (17.5) не зависит и от e . При $p \geq 1/\alpha$ постоянная C_r в (17.5) не может быть выбрана не зависящей от e . В случае $p=1/\alpha$ для константы C_r в (17.4), (17.5) справедлива асимптотическая оценка

$$C_r = O(r^{1/p'}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (17.6)$$

При $1 \leq p \leq 1/\alpha$ оценку (17.5) можно уточнить: $\chi_{r,c}(f, \varepsilon) = O(\omega_{\alpha,p}(\varepsilon))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда вытекает одна локальная характеристика дробных интегралов. Именно при $1 \leq p < \infty$ в условиях теоремы 17.2 для любого $\delta > 0$ справедливы соотношения

$$\operatorname{ess\,inf}_{0 < x < \delta} \frac{|f(x)|}{x^{\alpha-1/p}} = 0; \quad \operatorname{ess\,inf}_{|x-c| < \delta} \frac{|f(x)|}{\omega_{\alpha,p}(|x-c|)} = 0, \quad 1 \leq p \leq 1/\alpha. \quad (17.7)$$

Эти соотношения дают простые необходимые условия принадлежности функции $f(x)$ классу $I_{0+}^\alpha(L_p(0, e))$ дробных интегралов от функций из $L_p(0, e)$. Например, если функция $f(x)$ непрерывна на $(0, e)$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/p-\alpha} f(x) \neq 0$, то $f(x) \notin I_{0+}^\alpha(L_p(0, e))$. Поэтому же и $f(x) = \omega_{\alpha,p}(|x-c|) \notin I_{0+}^\alpha(L_p(0, e))$.

Заметим, что утверждения 1), 2) теоремы 17.2 точны в следующем смысле. Например, в случае $p=1/\alpha$ для функции $\varphi_\delta(x)$ из (4.14) с малым $\delta > 0$ дробный интеграл $f = I_{0+}^\alpha \varphi_\delta$ допускает оценку $f(x) \geq \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{2}{e} - x \right) \right]^{-\delta+1/p'}$ при $1/e < x < 2/e$ (см. § 4, п. 2°, 3.3). Поэтому для $c=2/e$ имеем

$$\chi_{1,c}(f, \varepsilon) \geq \frac{1}{4\varepsilon} \int_{c-\varepsilon}^c [\ln(c-x)^{-1}]^{-\delta+1/p'} dx \geq \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\delta+1/p'},$$

что и свидетельствует о точности оценки 2).

Пусть, далее, $m_I = \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx$, $I \subset (a, b)$, см. (4.16), и $\|f\|^*$ — норма (4.15) в пространстве ВМО (a, b) .

Теорема 17.3. Пусть $f = I_{a+}^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \alpha < 1+1/p$. Тогда

$$\sup_{I \subset (a,b)} |I|^{\frac{1}{p} - \alpha} m_I f \leq c \|\varphi\|_p. \quad (17.8)$$

Из неравенства (17.8), проверяемого прямыми оценками при $\alpha=1/p$, вытекает ограниченность I_{a+}^α из $L_p(a, b)$ в $\text{ВМО}(a, b)$ (и даже в ВМО), отмеченная в § 4, п. 2°, 3.3.

Отметим одно уточнение теоремы 17.3 при $\alpha=1/p$, учитывающее поведение $f(x)$ в окрестности конца $x=a$. Обозначим

$$\text{ВМО}_a^0(a, b) = \left\{ f: f \in \text{ВМО}(a, b), A = \sup_{0 < \varepsilon < b-a} \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_a^{a+\varepsilon} f(x) dx \right| < \infty \right\}.$$

Аналогично вводится класс $\text{ВМО}_b^0(a, b)$ с соответствующим условием на правом конце. Можно показать, что пространства $\text{ВМО}_a^0(a, b)$ и $\text{ВМО}_b^0(a, b)$ являются максимальными подклассами в $\text{ВМО}(a, b)$, состоящими из функций, продолжимых нулем до функций из классов $\text{ВМО}(-\infty, b)$ и $\text{ВМО}(a, \infty)$ соответственно.

Теорема 17.4. При $\alpha=1/p$ операторы I_{a+}^α и I_{b-}^α ограничены из $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, в $\text{ВМО}_a^0(a, b)$ и $\text{ВМО}_b^0(a, b)$ соответственно.

Так как $\text{ВМО}(a, b) \subset \bigcap_{r \geq 1} L_r(a, b)$, то из неравенства Джона—Ниренберга (Б. С. Кашин, А. А. Саакян [1, с. 210]) вытекает, что

$$\|f\|_r = O(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (17.9)$$

для $f \in \text{ВМО}(a, b)$.

Можно обобщить построения § 4, п. 2°, 3.3, рассмотрев пространства

$$X_{\gamma, \mu} = \{f: \|f\|_r = r^{-\gamma} \|f\|_r \in L_\mu(1, \infty)\}, \quad \gamma \geq 0, 1 \leq \mu \leq \infty,$$

введенные Н. К. Каралетянцем, Б. С. Рубиным в работе [1], где показано, что $I_{a+}^{1/p}(L_p) \subset \subset X_{1/p, \infty}$. Введем более узкие пространства $Y_{\gamma, \mu, \lambda}$, положив в основу их построения поведение локальных характеристик $\chi_{r,0}(f, \varepsilon)$, $\chi_{r,c}(f, \varepsilon)$ при $r \rightarrow \infty$.

Для $I \subset (0, 1)$ обозначим $\omega(I) = 1$, если $I = (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, и $\omega(I) = (1 + |\ln|I||)^\lambda$, $\lambda \geq 0$, для остальных интервалов. Положим

$$Y_{\gamma, \mu, \lambda}(0, 1) = \{f: \|f\| = \|r^{-\gamma} \sup_{I \subset (0,1)} \omega(I) \chi_r(f, I)\|_{L_\mu(1, \infty)} < \infty\}, \quad (17.10)$$

где $\gamma > 0$, $1 \leq \mu \leq \infty$, $\chi_r(f, I) = \chi_{r,0}(f, \varepsilon)$ для $I = (0, \varepsilon)$ и $\chi_r(f, I) = \chi_{r,c}(f, \varepsilon)$ для $I = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. В силу неравенства $\chi_r(f, I) \geq \chi_s(f, I)$, $r \geq s$, в определении (17.10) необходимо $\gamma > \mu^{-1}$ при $\mu < \infty$. Можно показать, что пространства $Y_{\gamma, \mu, \lambda}$ банаховы. Отметим также, что при $\lambda = 0$ пространства $Y_{\gamma, \mu, \lambda}(0, 1)$ совпадают с $L_\infty(0, 1)$.

Теорема 17.5. Пусть $\alpha=1/p$, $1 < p < \infty$. Тогда оператор I_{0+}^α ограничен из $L_p(0, 1)$ в пространства $X_{\gamma, \mu}(0, 1)$, $Y_{\gamma, \mu, \lambda}(0, 1)$, если $\lambda = 1/p'$, $\gamma > 1/p' + 1/\mu$ при $1 \leq \mu < \infty$ и $\gamma > 1/p$ при $\mu = \infty$.

Представляет интерес выяснение взаимосвязи между пространствами $Y_{\gamma, \mu, \lambda}$ и ВМО . Не останавливаясь на детальном исследовании этого вопроса, заметим лишь, что при $\lambda = \gamma = 1/p'$, $\mu = \infty$ справедливы соотношения

$$Y_{\gamma, \mu, \lambda}(0, 1) \not\subset \text{ВМО}(0, 1), \quad \text{ВМО}(0, 1) \not\subset Y_{\gamma, \mu, \lambda}(0, 1).$$

Первое утверждение проверяется на примере функции $Y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < x < 1/2 \text{ и} \\ \left(\ln \frac{1}{x-1/2}\right)^{1/p'}, & \text{при } 1/2 < x < 1 \end{cases} \notin \text{ВМО}(0, 1)$. Второе утверждение справедливо для произвольных допустимых значений γ, μ, λ . Действительно, в противном случае для $f \in \text{ВМО}(0, 1)$ будем иметь $\sup_{0 < \varepsilon < 1} \chi_{1,0}(f, \varepsilon) < \infty$, что дает $f \in \text{ВМО}_0^0(0, 1)$. Последнее не всегда возможно.

Заметим, что для пространств $Y_{\gamma, \mu}(0, 1)$ в отличие от $Y_{\gamma, \mu, \lambda}$ вложение $\text{ВМО}(0, 1) \subset \subset X_{\gamma, \mu}(0, 1)$ имеет место в силу (17.9), если $\gamma > 1 + 1/\mu$. (Внимание авторов на этот факт обратил Б. Макенхоупт (B. Muckenhoupt).)

13.2. Как установлено в § 13, п. 2°, образы дробных интегралов $I_{a+}^\alpha(L_p)$ и $I_{b-}^\alpha(L_p)$ совпадают при $1 < p < 1/\alpha$, см. (13.23). Они совпадают и с образом риссова потенциала $A^\alpha \varphi$ на отрезке $[a, b]$ (определяемого равенством (12.44)):

$$I_{a+}^\alpha(L_p) = I_{b-}^\alpha(L_p) = A^\alpha(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha.$$

Последнее равенство выводится из тождеств (12.46) или (11.16)—(11.19). В случае $p > 1/\alpha$ выполняется соотношение

$$I_{a+}^{\alpha}(L_p) \oplus R^1 = I_{b-}^{\alpha}(L_p) \oplus R^1$$

(Б. С. Рубин [11]; см. в связи с этим тождество (17.3)). В случае $\alpha = 1/p$ ни одно из указанных утверждений не имеет места, в чем можно убедиться с помощью локальных оценок теоремы 17.2. При $p > 1/\alpha$ отметим еще вложения

$$I_{a+}^{\alpha}(L_p) \subset A^{\alpha}(L_p), \quad 0 < \alpha < 2/p,$$

$$I_{a+}^{\alpha}(L_p) \subset A^{\alpha}(L_p) \oplus P_1, \quad 2/p < \alpha < 1,$$

$$A^{\alpha}(L_p) \subset I_{a+}^{\alpha}(L_p) \oplus P_0, \quad 1/p < \alpha < 1,$$

где P_j , $j=0, 1$, — пространства полиномов степени j . Эти вложения выводятся из связей операторов I_{a+}^{α} , I_{b-}^{α} , A^{α} друг с другом через посредство сингулярного оператора, см. (11.16)—(11.19), (12.46), (12.47). Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [3] указали другое доказательство первых двух из этих вложений с помощью представлений

$$A^{\alpha} = x^{\alpha/2} I_{0+}^{\alpha/2} x^{-\alpha} I_{1-}^{\alpha/2} x^{\alpha/2},$$

$$I_{0+}^{\alpha} = x^{\alpha/2} I_{0+}^{\alpha/2} x^{-\alpha} I_{0+}^{\alpha/2} x^{\alpha/2}.$$

13.3. Имеет место следующее обобщение теоремы 13.6 на случай пространства L_p с весом. Пусть $\rho(x) = (x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$. Справедлива (С. Г. Самко [27, § 8, теорема 8.6] и [5, с. 306] при более жестких ограничениях) следующая

Теорема 17.6. Если $f(x) \in I_{a+}^{\alpha}[L_p(\rho)]$, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, то и

$$(x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu} f(x) \in I_{a+}^{\alpha}[L_p(\rho_1)], \quad \rho_1(x) = \frac{\rho(x)}{(x-a)^{\mu p}(b-x)^{\nu p}},$$

при условиях $-1 < \mu < 1$, $\alpha - 1 < \nu < 1 - \alpha$, $\gamma < p - 1 + \min(0, \mu)$, $(\alpha + \nu)p - 1 < \delta < p - 1 + \min(0, \nu)$.

13.4. Теорема 13.18 распространяется на случай веса, «привязанного» к обоим концам отрезка $[a, b]$. Именно пусть $\rho(x) = (x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}$, $\mu \geq 0$, $\nu > 0$, $\mu + \alpha < 2$, $\mu + \nu < 2$. Справедлива (Х. М. Мурдаев, С. Г. Самко [1, 2]) следующая

Теорема 17.7. Оператор дробного интегрирования I_{a+}^{α} , $0 < \alpha < 1$, изоморфно отображает весовое обобщенное пространство Гельдера $H_0^{\omega}(\rho)$ на пространство $H_0^{\omega}(\rho)$:

$$I_{a+}^{\alpha}[H_0^{\omega}(\rho)] = H_0^{\omega}(\rho), \quad \omega_{\alpha}(\delta) = \delta^{\alpha} \omega(\delta),$$

если $\omega(\delta) \in \Phi_{\beta}^{\gamma-1}$, $\gamma = \max(1, \mu, \nu)$, $\beta = \min(1 - \alpha, \nu - \alpha)$, где $\Phi_{\beta}^{\gamma-1}$ — класс (13.68).

13.5. Изложенные в § 13, п. 3° теоремы о сужении, продолжении нулем и склеивании дробных интегралов распространены в работе А. И. Линкер, Б. С. Рубина [1] на свертки со степенно-логарифмическими ядрами.

14.1. Теорема Рисса о среднем в форме неравенства (14.40) справедлива в случае бесконечного предела интегрирования:

$$\left| \int_{-\infty}^b (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi < b} \left| \int_{-\infty}^{\xi} (\xi-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt \right|, \quad 0 < \alpha < 1,$$

при единственном предположении, что интеграл левой части сходится (G. L. Isaac [1]).

14.2. Имеет место следующее обобщение теоремы Рисса о среднем (14.40). Пусть $\varphi(x) \in L_1(0, l)$, $l > 0$. Тогда для $0 < \alpha < 1$ и $\lambda \leq 1 - \alpha$ $\operatorname{ess\,min}_{0 < t \leq l} t^{\lambda} (I_{0+}^{\alpha} \varphi)(t) \leq$

$$\leq \frac{x^{\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^l \varphi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt \leq \operatorname{ess\,sup}_{0 < t \leq l} t^{\lambda} (I_{0+}^{\alpha} \varphi)(t)$$

в предположении, что в этом неравенстве правая (левая) часть неотрицательна (неположительна) (L. S. Bosanquet [7]).

В работе J. Steinig [1] с помощью этой обобщенной теоремы Рисса о среднем исследован вопрос: как влияет наличие локальных экстремумов у дробного интеграла

$x^\lambda (I_{0+}^\alpha \varphi)(x)$ с весом x^λ на перемену знаков самой функции $\varphi(x)$ (дробный аналог простой теоремы о том, что функция меняет знак в точках локального экстремума своей первообразной)? В этой же работе рассмотрен также некоторый аналог теоремы Ролля для производных дробного порядка.

Отметим еще, что имеется распространение теоремы Рисса о среднем на значения $\alpha > 1$, см. Н. Türke, K. Zeller [1].

В указанной выше работе L. S. Bosanquet [7] имеется также обобщение теоремы Рисса о среднем на случай, когда степенное ядро $(x-t)^{\alpha-1}$ заменено более общим ядром $G(x-t)$ типа Н. Я. Сони́на (см. о последнем в § 4, п. 2°, 2.4).

14.3. Теорема Рисса о среднем (14.40) распространяется на функции, интегрируемые в смысле Данжуа—Перрона в работах S. Verblunsky [1], J. C. Burkill [1]. В последней работе, а также в работах W. L. G. Sargent [1—3] рассмотрено также интегрирование Чезаро—Перрона дробного порядка (так называемое C_α -интегрирование).

14.4. В работе L. S. Bosanquet [3] доказан дискретный аналог неравенства Рисса (14.40) в виде

$$\left| \sum_{v=0}^m A_{n-v}^{\alpha-1} a_v \right| \leq \max_{0 \leq \mu \leq m} \left| \sum_{v=0}^{\mu} A_{\mu-v}^{\alpha-1} a_v \right|,$$

где $A_k^\sigma = \binom{k+\sigma}{k}$, $n \geq m \geq 0$, a_v —произвольная последовательность (указанные суммы являются дискретным аналогом разностей дробного порядка).

Некоторые аналоги «интерполяционного» неравенства Рисса (14.42) для дискретных разностей дробного порядка доказаны в работе того же автора [6].

14.5. Для дробной производной Маршо $(D_+^\alpha f)(x)$, $x \in R^1$, $0 < \alpha < 1$, справедливо неравенство (типа Адамара)

$$\|D_+^\alpha f\|_C \leq k \|f\|_C^{1-\alpha/2} \|f'\|_{H^1}^{\alpha/2},$$

где $\|f\|_C = \sup_{x \in R^1} |f(x)|$, $\|g\|_{H^1} = \sup_{x, y \in R^1} |g(x) - g(y)|/|x - y|$ с точной постоянной $k = 2^{2-\alpha/2} (2^{1/(1-\alpha)} - 1)^{\alpha-1} / \Gamma(3-\alpha)$ (С. П. Гейсберг [1]).

14.6. Неравенство типа Колмогорова

$$\|I_-^\beta f\|_{L_p(R_+^1)} \leq k \|I_-^\alpha f\|_{L_p(R_+^1)}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|I_-^\gamma f\|_{L_p(R_+^1)}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}, \quad 1 < p < \infty,$$

где $-A < \alpha < \beta < \gamma < A$ и $k = k(p, A)$, доказано в работе G. H. Hardy, E. Landau, J. E. Littlewood [1]. Такое же неравенство для дробного интегродифференцирования I_{0+}^α (обобщающее неравенство (14.53)) доказано в работе R. J. Hughes [1]. Подобное неравенство

$$\|D_-^\alpha f\|_{C(R_+^1)} \leq k \|f\|_{L_2(R_+^1)}^{v_1} \|f^{(n)}\|_{L_2(R_+^1)}^{v_2}$$

для функций $f \in L_2(R_+^1)$, имеющих обобщенную производную $f^{(n)}(x) \in L_2(R_+^1)$, получено Г. Г. Магарил-Ильяевым, В. М. Тихомировым [1] вместе с точными границами его выполнения: $\alpha \in (-1/2, n-1/2)$, $v_1 = n^{-1}(n-\alpha-1/2)$, $v_2 = 1-v_1$ и точной постоянной k .

Распространение неравенства Колмогорова на дробные степени операторов в банаховом пространстве дано в работе W. Trebels, U. Westphal [1] в виде

$$\|(-A)^\beta f\| \leq k \|f\|^{1-\beta/\gamma} \|(-A)^\gamma f\|^{\beta/\gamma}, \quad 0 < \beta < \gamma,$$

где A — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, $(-A)^\beta$ определяется формулой (5.85).

14.7. Справедливо следующее неравенство «типа Опяла»:

$$\int_a^b |(I_{a+}^\alpha f)(x)|^p |(I_{a+}^\alpha f)(x)|^q x^{\gamma-\alpha p-\beta q-1} \omega(x) dx \leq c \int_a^b |f(x)|^r x^{\gamma-1} \omega(x) dx,$$

где $p > 0$, $q > 0$, $p+q=r \geq 1$, $\gamma < r$, $0 \leq a < b \leq \infty$, $\omega(x)$ убывает, $\omega(x) > 0$ при $a < x < b$ (E. R. Love [9]).

Отметим еще неравенство

$$\int_a^b s(x) \varphi \left[\frac{|(I_{a+}^\alpha f)(x)|}{(I_{a+}^\alpha g)(x)} \right] dx \leq \int_a^b G(x) \varphi \left[\frac{|f(x)|}{g(x)} \right] dx,$$

где $G = g I_{b-}^\alpha \left(\frac{s}{I_{a+}^\alpha g} \right)$, $\varphi(u)$ — положительная выпуклая возрастающая функция, $s(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ (Е. К. Годунова, В. И. Левин [1]). Имеются обобщения этого неравенства в работах Г. И. Розановой [1] и Р. Х. Садиковой [1]).

14.8. В работе R. Askey [1] отмечены интересные связи дробного интегрирования с методами получения различных неравенств для тригонометрических и алгебраических многочленов.

14.9. Пусть $c(t) = \sum_{n=1}^{[t]} c_n$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ суммируем к сумме s в смысле $s = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x c(t) (x-t)^{\alpha-1} dt$ при некотором $\alpha > 0$ (см. § 14, п. 6°), то он суммируем в этом смысле к той же сумме при любом $\alpha' > \alpha$ (G. H. Hardy, M. Riesz [1, с. 29]).

14.10. Пусть $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, $c(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} c_n$ и пусть

$$C_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} c(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{\lambda_n \leq x} (x-\lambda_n)^\alpha c_n, \quad \alpha > 0,$$

есть обобщение средних Рисса (14.55). В работе L. S. Bosanquet [4] доказано, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$ и $C_\alpha(x) = o(x^\gamma)$, $\gamma > -1$, при $x \rightarrow +\infty$, то $C_\beta(x) = o(x^{\beta-\alpha+\gamma})$ для $0 \leq \beta \leq \alpha$. Случай $\gamma = \alpha$, $\beta = 0$ был ранее рассмотрен в работе G. H. Hardy, M. Riesz [1].

14.11. Дробное интегрирование можно использовать для исследования предела функции в точке подобно тому, как оно используется для суммирования рядов (см. § 14, п. 6°). Именно пусть функция $\varphi(t)$ задана при $t > 0$. Будем говорить, что $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \alpha]{} 0$ в смысле

(C, α)-метода, если $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x \varphi(t) (x-t)^{\alpha-1} dt = 0$. Пусть теперь функция $f(x)$ такова, что существует предел

$$2S = \alpha \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^\alpha} \int_0^\xi [f(x_0+t) + f(x_0-t)] (\xi-t)^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0.$$

Число S назовем обобщенным значением функции f в точке x_0 . Обозначив $\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S$ скажем, что $f(x)$ имеет в точке x_0 значение S в смысле (C, α)-метода, если $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ в смысле этого метода. Исследование функций, имеющих конечные значения, в указанном смысле проведено в работе S. Verblunsky [1].

14.12. В терминах дробного интегрирования имеются (L. S. Bosanquet [2]) достаточные условия (A)-суммируемости ряда Фурье (ряд $\sum a_n$ называется (A)-суммируемым к сумме S , если $\sum a_n x^n$ сходится при $|x| < 1$ к сумме $A(x)$ с ограниченной вариацией в $[0, 1]$, имеющей конечный предел $\lim_{x \rightarrow 1-0} A(x) = S$). Пусть $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$ и $2\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S$. В указанной работе доказано, что ряд Фурье функции $f(x)$ (A)-суммируем к сумме S в точке x_0 , если найдутся такие $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$, что

$$\int_0^\varepsilon t^{-1-\alpha} |(I_{0+}^\alpha \varphi)(t)| dt < \infty.$$

Более слабое условие $\int_t^1 t^{-1-\alpha} |(I_{0+}^\alpha \varphi)(t)| dt = o\left(\log \frac{1}{t}\right)$, $\alpha \geq 0$, используется при суммировании интеграла Фурье (R. N. Mohapatra [1]).

14.13. В работах W. Beekmann [1, 2] показано, что интегральное преобразование

$$(C^\alpha \varphi)(x) = \frac{\alpha}{x^\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad x > 0,$$

является «совершенным» в том смысле, что множество всех функций из некоторых линейных пространств B , имеющих конечный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$, плотно в множестве тех функций из B , для которых существует $\lim_{x \rightarrow \infty} (C^\alpha \varphi)(x)$ (более точные формулировки см. в указанных работах).

14.14. В работе J. Cossar [1] исследована суммируемость интегралов вида $\int_0^\infty f(x) \varphi(x) dx$ (C, α) -методом, приводящая к сходящемуся интегралу $\int_0^\infty (I_{0+}^\alpha f)(x) \times \times (\mathcal{D}_{-}^\alpha \varphi)(x) dx$, $\alpha > 1$ (формула дробного интегрирования по частям), где $\mathcal{D}_{-}^\alpha \varphi$ — дробная производная Коссара (9.1).

14.15. Отмеченная в § 14, п. 6° связь дробного интегрирования с методами суммирования рядов имеется не только в случае метода средних Рисса, но и в случае других методов. Так, в работе B. Kuttner, N. Tripathy [1] исследована связь дробного интегрирования с методами суммирования Хаусдорфа. Отметим также, что в статье L. S. Bosanquet, E. H. Linfoot [1] использованы «обобщенные» средние Рисса со степенно-логарифмическим ядром, что приводит к «дробным интегралам» со степенно-логарифмическим ядром.

Упомянем, наконец, в связи с дробным интегрированием в вопросах суммируемости рядов работы Т. М. Flett [1, 2], Sulaxana K. Gupta [1], G. H. Hardy, W. W. Rogosinski [1], S. Minakshisundaram [1], M. Mikolás [1—3, 7], F. T. Wang [1, 2], R. E. A. C. Paley [1], C.-T. Loo [1].

14.16. Известна связь между дифференцируемостью функций и скоростью приближения ее алгебраическими или тригонометрическими многочленами (см., например, книгу А. Ф. Тимана [3]). Первой работой, содержащей исследование дробного интегрирования методами конструктивной теории функций, была работа Р. Монтеля [1]. В ней доказано обобщение теоремы С. Н. Бернштейна на случай дробных производных, утверждающее, что скорость приближения функции $f(x)$ алгебраическими многочленами, задаваемая неравенством $|f(x) - P_n(x)| \leq A n^{-\gamma}$, $-1 \leq x \leq 1$, $\gamma > 0$, влечет существование у функции $f(x)$ всех дробных производных $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(x)$, $a = -1$, порядка $\alpha < \gamma$. Уже в работе П. Монтеля дано распространение этой теоремы на случай функций двух переменных, см. о дробных производных функций многих переменных в § 24 и упомянутое обобщение теоремы С. Н. Бернштейна в § 29, п. 2°, 24.8.

Имеется большое число исследований, связанных с приближением тригонометрическими многочленами периодических функций, имеющих производные дробного порядка, см. указания об этом в § 23, п. 2°, 19.6. В неперiodическом случае такие исследования проводились в работах И. И. Ибрагимова [1, 2], Ф. Г. Насибова [1], где рассматривалось приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами (см. также некоторое распространение результатов последней работы на случай функций двух переменных в работе [2] того же автора). В работах А. П. Старовойтова [1—4] исследовалось приближение интегралов дробного порядка рациональными функциями.

15.1. Наряду с формулой Лейбница (15.11) для дробной производной имеет место формула Лейбница с остаточным членом:

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha (uv) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k} u v^{(k)} + R_n, \quad (17.11)$$

$$R_n = \frac{(-1)^n}{\Gamma(-\alpha)(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} u(t) dt \int_t^x (x-\xi)^{n-1} v^{(n)}(\xi) d\xi$$

(Hj. Holmgren [1, с. 12], Y. Watanabe [1, с. 16], M. A. Al-Bassam [1]). Формула (17.11) имеет то преимущество по сравнению с (15.11), что не требует бесконечной дифференцируемости функции $v(x)$.

15.2. В работе E. L. Post [2, с. 755] формула (15.11) распространена на обобщенные дробные производные вида (20.10) (см. § 23, п. 2°, 20.6). В работе Y. Watanabe [1] доказана более общая, чем (15.12), формула

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha (fg) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{\beta+n} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-n} f \mathcal{D}_{a+}^{\beta+n} g \quad (17.12)$$

методом разложения функций f и g в степенные ряды.

15.3. Т. J. Osler [1, 5, 7, 8] получил ряд обобщений правил Лейбница (17.12) и (15.17) с помощью обобщения интегральной формулы Коши для дробных производных (см.

(22.4)). В работах Т. J. Osler [1, 8] формула (17.12) перенесена на дробные производные (и интегралы) от функции f по функции φ вида

$$\mathcal{D}_{\varphi}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{\varphi^{-1}(0)}^x f(t) [\varphi(x) - \varphi(t)]^{-\alpha-1} \varphi'(t) dt$$

(см. далее § 18, п. 2°) и дано обобщение формулы (17.12) вида

$$\mathcal{D}_{\varphi}^{\alpha} f(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \binom{\alpha}{\beta+n} \mathcal{D}_{\varphi(x), \psi(x)}^{\alpha-\beta-n} f(x, t)|_{t=x}, \quad (17.13)$$

где $\mathcal{D}_{\varphi, \psi}^{\alpha, \beta} f$ означает смешанную дробную производную от $f(x, t)$ по функции φ по первой переменной и по функции ψ по второй переменной порядков α и β соответственно. В работах Т. J. Osler [5, 8] отмечена связь соотношения (17.12) с равенством Парсеваля, известным в теории рядов Фурье, с помощью чего даны дальнейшие обобщения формулы (17.13). Эти результаты были применены в указанных работах к разложению в ряд некоторых специальных функций. В работе Т. J. Osler [7] доказан общий интегральный аналог правила Лейбница, частными случаями которого являются (15.17) и интегральные аналоги правил (17.12), (17.13). Отметим также, что в работе J. L. Lavoie, R. Tremblay, T. J. Osler [1] обобщающая (17.12) формула

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (x^{p+q} f(x)) g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c \binom{\alpha}{cn+\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta-cn} (x^p f(x)) \mathcal{D}_{a+}^{\beta+cn} (x^q g(x)), \quad 0 < c \leq 1,$$

и ее интегральный аналог были доказаны с помощью вычисления дробных производных через так называемые интегралы Похгаммера (см. § 22) при более слабых ограничениях, чем в указанных выше работах Т. J. Osler.

15.4. В работе Т. J. Osler [10] следующие обобщения формулы Лейбница — формула Уокера (J. J. Walker)

$$\mathcal{D}^N [f^N uv] = \sum_{n=0}^N W(N, n),$$

$$W(\alpha, \omega) = \binom{\alpha}{\omega} \mathcal{D}^{\alpha-\omega} (f^{\alpha-\omega} v) \mathcal{D}^{\omega-1} (f^{\omega} u')$$

и формула Коши

$$\mathcal{D}^{N-1} [f^N \mathcal{D}(uv)] = \sum_{n=0}^N C(N, n),$$

$$C(\alpha, \omega) = \binom{\alpha}{\omega} \mathcal{D}^{\alpha-\omega-1} (f^{\alpha-\omega} v') \mathcal{D}^{\omega-1} (f^{\omega} u'),$$

где $\binom{\alpha}{\omega}$ — биномиальные коэффициенты (1.50), распространены со значений $N=1, 2, 3, \dots$ на произвольные значения $N \in \mathbb{C}$.

15.5. В работах W. A. Al-Salam, A. Verma [2], R. P. Agarwal [3] правило Лейбница (15.11) перенесено на так называемые дробные q -производные (см. § 23, п. 2°, 18.15).

15.6. В работе J. C. Polking [1] установлен аналог правила Лейбница для многомерного оператора дифференцирования дробного порядка $\mathcal{D}_{p,q}^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, вида

$$(\mathcal{D}_{p,q}^{\alpha} f)(x) = \left[\int_0^{\infty} \left(\int_{|y| \leq 1} \left| \frac{f(x+py) - f(x)}{\rho^{\alpha}} \right|^p dy \right)^{q/p} \frac{d\rho}{\rho} \right]^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$(\mathcal{D}_{p,\infty}^{\alpha} f)(x) = \sup_{0 < \rho < \infty} \rho^{-\alpha} \left(\int_{|y| \leq 1} |f(x+py) - f(x)|^p dy \right)^{1/p}, \quad q = \infty.$$

15.7. В работе M. C. Gaer, L. A. Rubel [2] получены правило Лейбница (15.1) и его обобщения для дробной производной, специфически определяемой в комплексной плоскости в терминах некоторой целой функции экспоненциального типа (см. § 23, п. 2°, 22.9).

15.8. Обобщенное правило Лейбница (15.11) применено в работах H. L. Manocha [3],

Н. Л. Маносча, В. Л. Sharma [1] для установления ряда соотношений, связывающих функции гипергеометрического типа.

16.1. В работе Э. Я. Риекстыньша [1] получены асимптотические разложения более общего, чем дробный интеграл (16.1), интеграла свертки (17.1) в следующих случаях: 1) при $x \rightarrow +0$ в предположении, что функции $F(t)$ и $f(t)$ имеют обобщающую (16.6) и

(16.46) асимптотику $f(t) \sim e^{-a/t^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\mu_n}$ при $t \rightarrow +0$, где $a \geq 0$, $\alpha > 0$, μ_n — монотонно возрастающая последовательность, $\mu_0 > -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$; 2) при $x \rightarrow +\infty$, когда $F(t)$ и $f(t)$ имеют обобщающее (16.10) асимптотическое представление

$$f(t) \sim \sum_{m=0}^M b_m t^{\lambda_m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-n-\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots \quad (17.14)$$

Отметим, что Э. Я. Риекстыньш использовал модификацию метода последовательных разложений, впервые примененного в работе А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [1], для нахождения асимптотики при $x \rightarrow +\infty$ интеграла (17.2) (см. также монографию Э. Я. Риекстыньша [2, т. 1, § 11]).

16.2. В работе N. Berger, R. A. Handelsman [1] даны асимптотические разложения дробного интеграла $(I_{0+}^{\alpha}; x^p f)(x)$ по функции x^p (см. (18.41)) в следующих двух случаях: а) при $x \rightarrow +0$ в предположении, что функция $f(t)$ имеет при $t \rightarrow +0$ разложение (16.6); б) при $x \rightarrow +\infty$ с условием, что $f(t)$ имеет асимптотику

$$f(t) \sim e^{-at} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{-\mu_n}, \quad a \geq 0, \quad (17.15)$$

где μ_n — возрастающая последовательность, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \mu_n = +\infty$. Исследование опирается на развитые в работах R. A. Handelsman, J. S. Lew [1, 2] методы, основанные на использовании равенства Парсеваля (1.116) для преобразования Меллина (1.112). Эти методы позволяют находить асимптотические разложения интегралов (17.2) при условии, что функции $k(t)$ и $f(t)$ алгебраически определены при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$ (см. также монографию Э. Я. Риекстыньша [2, т. 3, § 31.1–31.3]). В указанной работе N. Berger, R. Handelsman [1] были получены следующие результаты: 1) если $f(t)$ при $x \rightarrow +0$ имеет асимптотику (16.6), то при $x \rightarrow +0$

$$(I_{0+}^{\alpha}; x^p f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(1 + \mu_n/p)}{\Gamma(1 + \alpha + \mu_n/p)} x^{\mu_n + p\alpha}, \quad (17.16)$$

2) если $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ обладает асимптотическим представлением (17.15), то при $x \rightarrow +\infty$

$$(I_{0+}^{\alpha}; x^p f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathfrak{M}\{f; p(n+1)\}}{n! \Gamma(\alpha - n)} x^{p(\alpha - n - 1)}, \quad \text{если } a > 0 \quad (17.17)$$

($\mathfrak{M}$ — преобразование Меллина (1.112)), и

$$\begin{aligned} (I_{0+}^{\alpha}; x^p f)(x) &\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathfrak{M}\{f; p(n+1)\}}{n! \Gamma(\alpha - n)} x^{p(\alpha - n - 1)} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \Gamma(1 - \mu_m/p)}{\Gamma(1 + \alpha - \mu_m/p)} x^{p\alpha - \mu_m}, \end{aligned} \quad (17.18)$$

если $a = 0$, $\mu_m \neq p(n+1)$ для любых $n, m = 0, 1, 2, \dots$

В частности, когда f имеет асимптотику (16.10) с $0 < \beta < 1$, из (17.18) вытекает равносильное (16.11) асимптотическое разложение дробного интеграла (16.1) при $x \rightarrow +\infty$:

$$(I_{0+}^{\alpha}; f)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(1 - \beta - n)}{\Gamma(1 + \alpha - \beta - n)} x^{\alpha - \beta - n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathfrak{M}\{f; n+1\}}{n! \Gamma(\alpha - n)} x^{\alpha - n - 1}. \quad (17.19)$$

В работе N. Berger, R. Handelsman [1] даны также приложения этих результатов к нахождению асимптотических представлений решений краевых задач для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу и осесимметричной теории потенциала (см. § 40, 41).

16.3. В случае, когда $f(t)$ осциллирует при $t \rightarrow \infty$, для нахождения асимптотического представления дробного интеграла $I_{0+}^{\alpha} f$ можно использовать один из методов, приведенных в п. 32.2 монографии Э. Я. Риекстыньша [2, т. 3].

16.4. В работе А. Erdelyi [16] получены асимптотические разложения при $x \rightarrow +\infty$ интегралов

$$\int_a^{+\infty} e^{-x(t-a)} (\mathcal{D}_{0+}^{1-\lambda} f)(t) dt, \quad \int_0^a e^{-xt} (\mathcal{D}_{0+}^{1-\alpha} f)(t) dt, \quad 0 < a < +\infty,$$

где $\mathcal{D}_{0+}^{1-\lambda} f$, $0 < \lambda < 1$, — дробная производная (2.22).

16.5. В работе R. Wong [1] найдены пять первых членов асимптотического разложения дробного интеграла $(I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ в предположении, что $\varphi(t)$ имеет степенно-логарифмическую асимптотику вида

$$\varphi(t) \sim t^{-\beta} (\ln t)^{\gamma} \left[c_0 + c_1 \frac{\ln \ln t}{\ln t} + c_2 \frac{(\ln \ln t)^2}{(\ln t)^2} + \dots \right] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}^1$ (ср. с (16.29)). Этот результат и теоремы 16.4, 16.5 применены для получения асимптотических решений $\varphi(x)$ нелинейных интегральных уравнений

$$\sqrt[n]{\varphi(x)} = \int_0^x (x-t)^{-1/2} [f(t) - \varphi^n(t)] dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17.20)$$

в предположении, что известная функция $f(t)$ имеет при $t \rightarrow +\infty$ степенную асимптотику (16.5).

Отметим, что ранее в работах R. A. Handelsman, W. E. Olmstead [1], W. E. Olmstead, R. A. Handelsman [1] даны главные члены асимптотики решений $\varphi(x)$ уравнений (17.20) (в этих и других случаях) и указано приложение к одной задаче теории теплопроводности.

16.6. Задачу об асимптотике дробных интегралов $I_{0+}^{\alpha} \varphi$ при заданной асимптотике функций φ можно поставить при фиксированном числе членов асимптотики. Именно пусть $\varphi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^1$, — асимптотическая последовательность и пусть функция $\varphi(x)$ такова, что (16.3) выполняется при $x \rightarrow \infty$ для некоторого фиксированного N (и не обязательно выполняется для номера $N+1$). Какова тогда асимптотика $I_{0+}^{\alpha} \varphi$ при $x \rightarrow \infty$? В случае $\varphi_n(x) = x^{-n}$ вопрос об асимптотике в такой постановке рассматривался в работах М. А. Бетилгириева [1, 2] в связи с решением интегрального уравнения свертки на полуоси (уравнения Винера — Хопфа), символ которого имеет вещественные нули дробного порядка.