С.Г. Самко/А.А. Килбас/О.И. Маричев

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1987

УДК 517.3

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. **Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.** Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Книга посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования функций одной и многих переменных с целых порядков на дробные, действительные и комплексные, а также приложениям теории дробного интегрирования и дифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям, теории функций. В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты указанной теории. В конце каждой главы приводятся исторические сведения и обзоры работ по тематике главы. Книга носит энциклопедический характер, охватывает самые разнообразные известные формы дробного интегрирования и дифференцирования и огромное число публикаций в этой области вплоть до 1986 г.

Включение в книгу необходимых предварительных сведений и подробное изложение доказательств делают ее доступной студентам физико-математических факультетов, а также технических вузов.

Предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся математическим анализом и его приложениями.

Табл. 11. Ил. 6. Библиогр.: 1421 назв.

Редактор
академик АН СССР С. М. Никольский

Рецензенты:
П. И. Лизоркин, д-р физ.-мат. наук,
М. М. Смирнов, д-р физ.-мат. наук,
А. П. Прудников, д-р физ.-мат. наук,
Ю. А. Брычков, канд. физ.-мат. наук

$$С\frac{1702050000-088}{М316(03)-87}55-87$$

От редактора

Понятия дробного дифференцирования и интегрирования обычно связывают с именем Лиувилля. Но на самом деле еще творцы дифференциального и интегрального исчисления задумывались над производными не только целого, но и дробного порядка.

Читая эту книгу, мы узнаем, что дробные производные были предметом некоторого внимания Лейбница. Эйлер интересовался дробными производными. Лиувилль, Абель, Риман, Летников, Вейль, Адамар и многие другие известные математики прошлого и настоящего столетий оказали влияние на развитие дробного интегродифференцирования, ставшего теперь целым направлением в математическом анализе.

Дробные интегралы и производные целого порядка — это обычные интегралы и производные. Однако в случае дробного порядка эти понятия имеют своеобразную специфику, которая проявляется, например, в том, что для них в разных ситуациях совершенно естественно возникают их различные модификации. Взаимоотношения между этими модификациями приходится изучать.

Дробные производные и интегралы имеют много приложений — они и выросли из нужд приложений.

В настоящее время по дробным производным и интегралам имеется очень большая литература. Но она разрозненна — объединяющих монографических исследований в этом направлении нет или почти нет. Этот пробел восполняет данная книга, написанная крупным специалистом математического анализа профессором Ростовского университета С. Г. Самко вместе с доцентами Белорусского университета А. А. Килбасом и О. И. Маричевым.

Книга эта представляет собой обширную монографию, в которой в компактной форме излагается современное состояние математических исследований по дробному интегродифференцированию.

Авторы сами внесли серьезный вклад в вопросы дробного интегрирования и дифференцирования, поэтому естественно, что в монографии их собственные результаты занимают достаточно видное место.

Книга построена следующим образом. Основные главы вводят читателя в курс вопроса. При этом устанавливаются общие теоремы, которые, как правило, доказываются полностью, впрочем иногда со ссылкой на литературный источник.

Все главы снабжены историческими экскурсами, указывающими не только на источники излагаемых фактов, но и на примыкающую к ним литературу. При этом приводится уже без доказательств много дополняющих основной текст формулировок.

Часть материала посвящена одной переменной, другая часть — многим переменным. Многомерный случай особенно интересен. Далеко не всегда он сводится к комбинированию известных одномерных фактов. Для многих переменных изучается дробное интегродифференцирование по М. Риссу, гиперсингулярные интегралы, бесселево дробное интегродифференцирование, дробные степени гиперболических, параболических дифференциальных операторов и другие.

Книга содержит главу, посвященную интегральным уравнениям со степенными и степенно-логарифмическими ядрами. Здесь уже рассмотренные дробные интегродифференциальные операторы применяются к решению достаточно общих интегральных уравнений. В процессе этих рассуждений появляется необходимость в использовании известных, ставших уже классическими результатов Н. И. Мусхелишвили и Ф. Д. Гахова. Авторы монографии, выросшие в школе Ф. Д. Гахова, прекрасно владеют этими результатами, но не только владеют, а и существенно их развивают.

В книге рассмотрено также большое число интегральных уравнений первого рода со специальными функциями в ядрах, решение которых получается с помощью дробного интегродифференцирования. В заключительной главе даны приложения к некоторым задачам для дифференциальных уравнений.

Изложение монографии ведется на живом простом языке, требующем для понимания знания дифференциального и интегрального исчисления в пределах программ физико-математических и инженерных факультетов. Это делает ее доступной широкому кругу читателей. Книга эта будет интересна всем, кто имеет дело с математическим анализом. Она может служить для начального изучения вопросов, связанных с понятиями дробного интегрирования и дифференцирования. Специалистам она, безусловно, будет полезна не только как настольная книга с обширной библиографией, но зачастую и как предмет для изучения.

Думаю, что эта книга будет иметь успех. Во всяком случае я его ей желаю.

АКАДЕМИК С. М. НИКОЛЬСКИЙ

Предисловие

Область математического анализа, называемая дробным исчислением и посвященная исследованию и применению производных и интегралов произвольного (вещественного или комплексного) порядка, имеет давнюю историю (см. далее «Краткий исторический очерк») и богатое содержание, обусловленное проникновением и взаимосвязями с самыми разнообразными вопросами теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и др. Она находится в постоянном развитии, которое питается идеями и результатами различных направлений в математическом анализе. Дробное исчисление функций одной и многих переменных продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время, свидетельством чему служит как большой поток публикаций (сотни наименований за последние годы, см. список литературы в конце книги), так и международные конференции, специально посвященные вопросам дробного исчисления. Первая такая конференция проходила в 1974 г. (США, Нью-Хейвен), а вторая — в 1984 г. (Англия, Глазго) *.

Удивительным обстоятельством является отсутствие за всю долгую историю развития теории дробного исчисления монографий по этому направлению. В мировой математической литературе не было ни одной такой книги, которая бы содержательно отражала достижения в этой теории. Единственная книга К. Олдхэма, Дж. Спаниера (K. B. Oldham, J. Spanier [1], 1974 г.), посвященная дробному исчислению, написана специалистами в прикладных задачах химических наук и содержит лишь изложение некоторых классических вопросов теории, причем основное внимание в ней уделено вычислению дробных интегралов и производных конкретных функций и приложениям к задачам диффузии. Можно указать еще книги, имеющие главу или параграф, в которых рассматриваются отдельные вопросы дробного интегродифференцирования: А. Зигмунд [2], М. М. Джрбашян [2], И. Снеддон (I. N. Sneddon [3, 6]), П. Бутцер, Р. Нессел (P. L. Butzer, R. J. Nessel [1]), П. Бутцер, В. Требелс (P. L. Butzer, W. Trebels [2]),

* Труды этих конференций опубликованы соответственно в сборниках «Fractional calculus and its applications» / Ed. B. Ross // Lect. Notes Math. 1975. Vol. 457. 381 p.; «Fractional calculus» / Eds. A. C. McBride, G. F. Roach // Res. Notes Math. 1985. Vol. 138. 214 p.

Х. Дэвис (H. T. Davis [3, 4]), Ж. Окикиолу (G. O. Okikiolu [7]), С. Г. Самко [31], С. Фенью, Х. Столле (S. Fenyö, H. W. Stolle [1]). Определенный интерес для специалистов представляет также малоизвестная публикация копенгагенским университетом диссертации П. Марке (P. W. Marke [1], 1942 г.) на датском языке. Можно отметить, наконец, работы, содержащие краткие исторические очерки развития тех или иных разделов дробного исчисления. Первый такой очерк появился еще в работе А. В. Летникова [2], 1868 г. Имеются также исторические очерки в работах H. T. Davis [3, 4], M. Mikolàs [6], B. Ross [1—3], R. Tremblay [1, с. 12—19]. Они посвящены в основном классическому периоду развития дробного интегродифференцирования.

Возможно, что именно постоянное развитие теории дробного интегродифференцирования, а в последние десятилетия ее большая разветвленность, особенно в случае функций многих переменных, являются причиной отсутствия монографий по этой теории.

Между тем это обстоятельство не могло не служить тормозом в развитии дробного исчисления. Ряд результатов, очень существенных и фундаментальных, опубликован в оригинальных статьях, многие из которых труднодоступны и мало известны. Это приводило к тому, что порой в исследованиях затрачивались большие усилия для получения утверждений или уже известных, или легко вытекающих из известных, а некоторые работы содержали серьезные ошибки, связанные с неправильным толкованием основных понятий этой теории.

История развития дробного интегродифференцирования знает немало работ, в которых в разное время переоткрывались уже известные результаты, иногда теми же самыми средствами, что и у предшественников, иногда на основе других методов. Это обстоятельство усугублялось тем, что существует большое число различных подходов к дробному интегродифференцированию и, следовательно, различных направлений в дробном исчислении. Сопоставление этих подходов и направлений проводилось редко и было сравнительно мало известно. Перед начинающим исследователем постоянно возникали психологические затруднения, связанные с необходимостью ориентироваться в разнообразных определениях дробного интегродифференцирования и огромном потоке публикаций.

Авторы настоящей книги, интересы которых лежат в области интегральных операторов, теории функций, интегральных и дифференциальных уравнений и специальных функций, использовали аппарат дробного интегродифференцирования в своих исследованиях с 1967 г. В процессе работы перед авторами возникала необходимость получения результатов в самой теории дробного интегродифференцирования и постепенно интересы, по крайней мере у первого из авторов, существенно переместились уже в область дробного исчисления вначале функций одного переменного, а с 1974 г.— функций многих переменных.

Работая в этой области, авторы постепенно пришли к мысли о написании книги по дробному интегродифференцированию, которая в достаточной мере отражала бы современное состояние теории и освещала бы ее приложения в теории интегральных операторов, интегральных и дифференциальных уравнений. Большой библиографический поиск, проведенный авторами, и анализ огромного числа работ укрепили их в этой мысли. Существенную роль сыграло также то обстоятельство, что первый из авторов с 1968 г. читал лекции по дробному интегродифференцированию функций одной и многих переменных студентам Ростовского университета.

Соблазн изложить с полными доказательствами все важные результаты теории, известные по сей день, был велик. Однако такой подход потребовал бы не одного тома. Поэтому более целесообразным оказалось выделение из основного текста специальных обзорно-исторических параграфов, которые завершают каждую главу. Авторы стояли перед трудной задачей отбора материала, и здесь не смогли не сказаться их вкусы. В основном тексте результаты даются, как правило, с полными доказательствами. В обзорно-исторических параграфах (§ 4, 9, 17, 23, 29, 34, 39, 43) приведены исторические комментарии к материалу главы и результаты, примыкающие к ней по тематике, но не вошедшие в основной текст. Эти комментарии и результаты выделены в подпункты, номера которых включают указания на соответствующие параграфы главы, к которым привязаны подпункты *.

Первые пять глав книги содержат изложение теории дробного интегродифференцирования, причем главы 1—4 относятся к функциям одного переменного, а глава 5 — к функциям многих переменных. Главы 6—8 включают приложения к интегральным и дифференциальным уравнениям. В данной книге нет приложений интегродифференцирования функций многих переменных к многомерным интегральным уравнениям; некоторые из них можно найти в книге С. Г. Самко [31] и работе С. Г. Самко, С. М. Умарханджиева [3].

Обратим внимание читателя на то, что в § 9, п. 3° содержатся таблицы дробных интегралов и производных ряда элементарных и специальных функций, а в § 23, п. 3° приведены ответы на некоторые открытые вопросы, поставленные на конференции по дробному исчислению (Нью-Хейвен, 1974 г.).

Книга содержит большой список литературы. Он охватывает практически все публикации по дробному исчислению и рассмотренным приложениям, по крайней мере в случае функций одной переменной.

Авторы не излагают в книге вопросов теории дробных степеней операторов, что увело бы текст далеко в сторону, хотя эпизодически затрагивают некоторые понятия этой теории (см., например, § 5, п. 7°). Также в книге совершенно не упоминаются аспекты, связанные с символическим исчислением (Буль, Хевисайд и др.). и использованием понятий G- и H-функций многих переменных — теория последних находится в стадии формирования.

Особо следует сказать о прикладном значении дробных интегралов и производных, или, что то же, интегрального уравнения Абеля и его обобщений. Этот аппарат используется в самых различных областях — в физике, механике, химии и др. После известной задачи Абеля о таутохроне (N. H. Abel [1], 1823 г.) первые приложения были даны Лиувиллем (J. Liouville [1], 1832 г.) к задачам геометрии, физики и механики. Среди них задача Лапласа о влиянии бесконечного прямолинейного проводника на магнит, задача Ампера о взаимодействии двух таких проводников, задачи, связанные с притяжением тел, задача о распределении тепла в шаре, задача Гаусса о приближенных квадратурах и др. (см. обзор задач, рассмотренных Лиувиллем, также в работе А. В. Летникова [4], с. 21—44, 1874 г.).

Имеется большое число работ прикладного характера, использующих методы дробного интегрирования. Такого рода вопросы в книге не рассматриваются. Излагаемые в главах 6—8 приложения дробного интегродифференцирования к интегральным и дифференциальным уравнениям носят теоретический характер. Читателю, интересующемуся прикладными аспектами дробного исчисления, назовем указанную выше книгу (K. B. Oldham, J. Spanier [1]), содержащую главу «Приложения к задачам диффузии», работу [2], 1978 г., тех же авторов, в которой имеется большой список литературы по приложениям к химической физике, гидрологии, случайным процессам, вязкоупругости, теории гравитации

---

* Например, в § 4, п. 1°, содержащем исторические сведения к главе 1, имеются подпункты «К § 2, пп. 1, 2°», ..., «К § 3, п. 2°», а в § 4, п. 2°, содержащем обзор других результатов по тематике главы 1, — подпункты 2.1—2.16 и 3.1—3.3. При ссылках на первые из этих подпунктов используются обозначения типа «см. § 4, п. 1° (к § 2, пп. 1, 2°)», а при ссылках на вторые — «см. § 4, п. 2°, 2.1».

и т. п., сборник «Инверсия Абеля и ее обобщения» (Новосибирск, 1978 г.), в частности вводную статью Н. Г. Преображенского [1] в этом сборнике и уже упомянутые в начале предисловия труды конференции в Нью-Хейвене. Можно отметить также книги А. И. Цейтлина [1], 1984 г. (см., в частности, с. 275—276); Ю. И. Бабенко [1], 1986 г.; статьи Я. В. Быкова, А. И. Боташева [1], 1965 г.; В. П. Федосова [1], 1978 г.; W. C. Brenke [1], 1922 г.; R. Rothe [1], 1931 г.; M. I. Gomes, D. D. Pestana [1], 1978 г.; M. Zâgânescu [1, 2], 1982 г.; R. C. Koeller [1], 1986 г., и др.

Заметим, наконец, что в книге применяется термин «дробное» интегродифференцирование. Иногда его употребление вызывает возражения, поскольку порядок «дробного» интегродифференцирования является произвольным числом, а не только дробным. Однако авторы не считают целесообразным менять этот исторически сложившийся термин.

Авторы надеются, что им удалось не только изложить различные подходы к дробному интегродифференцированию, но и дать читателю представление о взаимосвязях между ними или решить во многих случаях вопрос о полном совпадении некоторых из этих подходов, включая совпадение их областей определения.

В книге § 2, 4—6, 7 (п. 1°), 8, 9, 12—14, 17, 18 (пп. 2—6°), 19, 20, 22—27, 28 (пп. 1—3°), 29—31, а также «Краткий исторический очерк» написаны С. Г. Самко, § 15, 16, 21, 28 (п. 4°), 32, 33 — А. А. Килбасом, § 7 (пп. 2, 3°), 10, 35—38, 40—42 — О. И. Маричевым, § 3, 11, 34— С. Г. Самко и А. А. Килбасом, § 18 (п. 1°), 39, 43 — А. А. Килбасом и О. И. Маричевым, § 1 — С. Г. Самко, А. А. Килбасом и О. И. Маричевым.

При подготовке книги авторам большую и квалифицированную помощь оказал Б. С. Рубин, вычитавший значительную часть рукописи и внесший ряд ценных предложений. Такую же работу по некоторым разделам выполнил Ву Ким Туан. При написании § 38 использовались материалы, подготовленные Н. А. Вирченко, § 36 — Ву Ким Туаном, § 37 (пп. 5, 6°) — С. Б. Якубовичем, § 42 — В. С. Адамчиком и А. В. Диденко. При подготовке рукописи большую работу проделали также В. А. Ногин и Б. Г. Вакулов. Полезную информацию и помощь авторам в отыскании ряда редких работ предоставили Х.-Ю. Глеске (H.-J. Glaeske, ГДР), И. Димовски (I. H. Dimovski, НРБ), Б. Макенхоупт, Р. Виден, Р. Джонсон, Б. Росс, Р. Бушман (B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, R. Johnson, B. Ross, R. G. Buschman, США), К. Нишимото, Ш. Оува, М. Сайго (K. Nishimoto, S. Owa, M. Saigo, Япония), К. Колбиг (K. S. Kölbig, Швейцария), Б. Фишер, А. МакБрайд (B. Fisher, A. C. McBride, Англия), С. Калла (S. L. Kalla, Венесуэла), Э. Лав (E. R. Love, Австралия), М. Миколаш (M. Mikolàs, Венгрия). Всем им авторы выражают свою признательность.

Краткий исторический очерк

Мысль об обобщении понятия дифференцирования $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ на нецелые значения p возникала с самого зарождения дифференциального исчисления. Первая зафиксированная историей попытка обсуждения такой идеи содержится в переписке Г. Лейбница. В одном из писем Г. Лейбницу по поводу теоремы о дифференцировании произведения двух функций Я. Бернулли спрашивал о значении, которое может иметь эта теорема в случае нецелого порядка дифференцирования. Г. Лейбниц в письмах Г. Лопиталю (1695 г.) и Уоллису (1697 г.), см. G. W. Leibniz [1, с. 301—302; 2, с. 25], сделал несколько замечаний о возможности рассматривать дифференциалы и производные порядка 1/2.

Первый шаг был сделан Л. Эйлером [1, с. 56], 1738 г., заметившим, что результату вычисления производной $\frac{d^p x^a}{dx^p}$ от степенной функции можно придать смысл при нецелом p. П. Лаплас (P. S. Laplace [1, с. 85, 156], 1812 г.) высказал идею о возможности дифференцирования нецелого порядка функций, представимых интегралом $\int T(t)t^{-x}dt$. В трактате С. Лякруа (S. F. Lacroix [1, с. 409—410], 1820 г.) повторена мысль Л. Эйлера и уже приведена явная формула вычисления производной $\frac{d^{1/2} x^a}{dx^{1/2}}$ от степенной функции.

Следующий шаг сделан Ж. Фурье (J. Fourier [1], 1822 г.), который предложил использовать равенство

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(tx - t\lambda + p\pi/2)\, dt \qquad (1)$$

для определения производной нецелого порядка. Это было первое определение производной любого положительного порядка и от любой (достаточно «хорошей») функции.

Описанные эпизоды можно отнести к предыстории дробного интегродифференцирования. Собственно историю дробного исчисления следует вести с работ Н. Абеля и Ж. Лиувилля. В работах Н. Абеля (N. H. Abel [1], 1823 г.; [2], 1826 г.) в связи с задачей о таутохроне решено интегральное уравнение

$$\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^\mu} = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \mu < 1. \qquad (2)$$

В обеих работах решение дано для произвольного $\mu \in (0, 1)$, хотя задача о таутохроне приводит к случаю $\mu=1/2$. Мы подчеркиваем это обстоятельство из-за широко распространенного заблуждения, что сам Н. Абель решил уравнение (2) только при $\mu=1/2$. Хотя работы Н. Абеля и не были выполнены в русле идей обобщения понятия дифференцирования, они сыграли огромную роль в их развитии. Это связано с тем, что левая часть уравнения Н. Абеля представляет собой, как выяснится позже, операцию дробного интегрирования порядка $1-\mu$, а обращение этого уравнения — операцию дробного дифференцирования. Однако в такой форме понятия дробного интегродифференцирования сформировались позже.

В 1832—1837 гг. появляется серия работ Ж. Лиувилля (J. Liouville [1—8]), сделавших его по праву создателем уже достаточно полноценной теории дробного интегродифференцирования. Она еще не достигла той формы, которую ей придало дальнейшее развитие другими исследователями, но в ней уже высказаны и далеко продвинуты важные идеи. Исходное определение Ж. Лиувилля, предложенное им в работе [1], 1832 г., основано на формуле дифференцирования показательной функции и относится к функциям $f(x)$, представимым в виде ряда $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$. Для них, по определению Ж. Лиувилля,

$$D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p e^{a_k x} \tag{3}$$

при любом (комплексном) p. Ограничительность этого определения, очевидно, связана со сходимостью ряда. Исходя из определения (3), Ж. Лиувилль получает в работе [1, с. 7] формулу дифференцирования степенной функции. Более того, в этой же работе на с. 8 Ж. Лиувилль выводит (не совсем строго с современной точки зрения) формулу

$$D^{-p} f(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^{\infty} \varphi(x+t)\, t^{p-1} dt, \quad -\infty < x < \infty, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{4}$$

называемую теперь (без множителя $(-1)^p$) лиувиллевской формой дробного интегрирования. В работе [1] на с. 11—69 содержится также большое число приложений к задачам геометрии, физики, механики и др., о чем уже упоминалось в предисловии к книге.

В дальнейших работах Ж. Лиувилля (J. Liouville [2—8]) дается развитие и применение введенных понятий. Среди полученных там результатов особо следует отметить содержащуюся в [2, с. 106], 1832 г., идею определения дробной производной через предел разностного отношения $\Delta_h^p f/h^p$, где $\Delta_h^p f$ — разность дробного порядка. Однако эта идея не находит у Ж. Лиувилля развития, если не считать эпизода в работе J. Liouville [6, с. 224], 1835 г., где на основе такого подхода доказана формула Фурье (1) при нецелых p и вычислены дробные производные некоторых элементарных функций (она будет реализована в последующем в работах А. Грюнвальда (A. K. Grünwald [1], 1867 г.) и А. В. Летникова [1], 1868 г.). В работах Ж. Лиувилля (J. Liouville [3], 1832 г.; [8], 1837 г.) впервые содержится применение дробного интегродифференцирования к решению некоторых типов обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. В другой работе (J. Liouville [7], 1835 г.) Ж. Лиувилль рассматривает замену переменной в дробных интегралах и производных. Здесь в зародыше содержится идея дробного интегродифференцирования одной функции по другой функции — понятие, отчетливо сформировавшееся через 30 лет в работе Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1], 1865 г.).

Рядом с работами Ж. Лиувилля по значимости следует поставить работы Б. Римана [1] (см. также B. Riemann [1]) и Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1]). Работа Б. Римана, выполненная им в 1847 г. в студенческие годы, была опубликована только в 1876 г.— спустя 10 лет после его смерти. Б. Риман пришел к конструкции дробного интегрирования

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x>0, \tag{5}$$

служащей с тех пор наряду с конструкцией (4) Ж. Лиувилля одной из основных форм дробного интегрирования. (Нужно сказать, что и Ж. Лиувилль, и Б. Риман имели дело с так называемыми «дополнительными» функциями, возникающими при попытке трактовать дробное дифференцирование порядка α как дробное интегрирование порядка $-\alpha$, см. по этому поводу также исторические сведения в § 4, п. 1°, и § 5, п. 2°.)

Особо следует сказать о работе Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 г.). В ней до публикации статьи Б. Римана выражение (5) было использовано как исходное определение дробного интегрирования. На этой основе проведено обстоятельное исследование интегралов (5) и даны их приложения к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Заслуга Х. Хольмгрена и в том, что он первым отказался от «дополнительных» функций и впервые сознательно предложил рассматривать дробное дифференцирование как операцию, обратную дробному интегрированию. Несколько позже А. В. Летников [1—4], 1868—1874 гг., не знакомый с работой Х. Хольмгрена, изложил теорию дробного интегродифференцирования с таких же позиций. Работа Х. Хольмгрена оставалась мало известной и современникам, и последующим поколениям математиков, а потому была незаслуженно мало цитируемой. Между тем Х. Хольмгрен первый после несколько формальных рассуждений Ж. Лиувилля дал строгий вывод формулы Г. Лейбница для дробной производной $D^{\alpha}(uv)$ произведения двух функций. Им впервые введено понятие дробного интегрирования одной функции по другой функции и проведено обстоятельное исследование композиций вида

$$D^{\lambda_1}_{\theta_1(x)} f_1(x)\, D^{\lambda_2}_{\theta_2(x)} \ldots D^{\lambda_n}_{\theta_n(x)} f_n(x)\, u(x), \tag{6}$$

где $f_j(x)$ означает операцию умножения на функцию $f_j(x)$. Более того, он первый рассмотрел частные и смешанные дробные интегралы функций двух переменных. Им же ([2], 1867 г.) продвинуто применение дробных интегралов к обыкновенным дифференциальным уравнениям, начатое Ж. Лиувиллем (J. Liouville [3], 1832 г.).

В 1867 г. А. Грюнвальд (А. К. Grünwald [1]) и в 1868 г. А. В. Летников [1] развивают подход к дробному интегродифференцированию, основанный на распространении формулы Б. Римана $f^{(n)}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n}$ на случай нецелых n:

$$D^{\alpha} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}}. \tag{7}$$

Если у первого автора рассуждения еще формальны, то работа второго содержит строгое и обстоятельное построение теории дробного интегродифференцирования на таком исходном определении. А. В. Летников, в частности, показал, что так определенное выражение $D^{-\alpha} f$ совпадает при $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ с конструкцией Ж. Лиувилля (4), а при надлежащем толковании разности $(\Delta_h^{\alpha} f)(x)$ — с конструкцией Б. Римана (5). (См. § 20 книги, где излагается подход Грюнвальда—Летникова и дается сопоставление его с другими определениями дробного интегродифференцирования.) Им же доказано полугрупповое свойство в рамках определения (7).

Работа А. В. Летникова [2], 1868 г., была первой работой, содержащей обстоятельный исторический обзор развития дробного исчисления.

В большой работе А. В. Летникова [4], 1874 г., завершенная теория дробного интегродифференцирования построена уже на основе конструкций (4), (5). Дано развернутое и обстоятельное изложение применения дробного интегродифференцирования к решению дифференциальных уравнений. Восходящее к этой работе А. В. Летникова решение некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений см. далее в § 42, п. 5°.

Между публикациями Ж. Лиувилля и Б. Римана, Х. Хольмгрена, А. Грюнвальда, А. В. Летникова вышло из печати немало других работ. Одни из них содержали полемику с предшественниками, другие, хотя и не носили фундаментального значения, развивали или уточняли отдельные вопросы. Упомянем, например, работы G. Peacock [1], 1833 г., S. S. Greatheed [1, 2], 1839г., P. Kelland [1—3], 1840—1851 гг., R. W. Center [1—4], 1848—1849 гг., P. Tardy [1], 1858 г., и М. Е. Ващенко-Захарченко [1], 1861 г.

Следующий период в истории дробного исчисления связан с формулой Коши

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{p+1}} \tag{8}$$

для аналитических функций в комплексной плоскости. Непосредственное распространение этой формулы на нецелые p приводит к затруднениям, вызванным ветвлением функции $(t-z)^{-p-1}$, и потому зависит, вообще говоря, от расположения кривой $\mathcal{L}$, охватывающей точку z, и разреза C, определяющего ветвь функции $(t-z)^{-p-1}$. Такое распространение впервые было сделано Н. Я. Сониным [1, 2], 1872 г., показавшим, что в случае аналитических функций этот новый подход совпадает при $\operatorname{Re} p<0$ с подходом Б. Римана (5):

$$f^{(p)}(z)=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{1+p}}, \tag{9}$$

где интегрирование ведется по отрезку $[z_0, z]$ в комплексной плоскости, z_0 — точка пересечения кривой $\mathcal{L}$ с разрезом C. А. В. Летников [3], 1872 г., делает важное замечание о том, что при выборе окружности в качестве кривой $\mathcal{L}$ формула Коши—Сонина (8) принимает вид

$$f^{(p)}(z)=\frac{\Gamma(1+p)}{2\pi r^{p}}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{-ip\theta}f(z+re^{i\theta})\,d\theta,\quad r=|z-z_0| \tag{10}$$

(о последующих работах, связанных с подходом (8), см. в § 23, п.1° (к § 22)).

Отметим также, что в работе [2] Н. Я. Сонин продолжил исследование формулы Г. Лейбница для дробной производной $D^{\alpha}(uv)$, начатое Ж. Лиувиллем и Х. Хольмгреном.

Подчеркнем приоритет А. В. Летникова и Н. Я. Сонина в перечисленных выше вопросах, где заслуга часто приписывалась другим математикам. Насколько известно авторам данной книги, приоритет Н. Я. Сонина в распространении формулы Коши (8) на нецелые p отмечается вообще впервые. Отметим, что П. А. Некрасов [1—4], 1888—1891 гг., дал приложения дробного интегродифференцирования в форме (8) к интегрированию дифференциальных уравнений высокого порядка. Он впервые указал также формулы приведения некоторых многократных интегралов к двойным, основанные на вычислении композиций вида (6), через которые выражаются решения исследованных им дифференциальных уравнений.

Н. Я. Сонин наряду с разработкой различных форм дробного интегродифференцирования положил начало исследованию более общих, чем дробные интегралы, конструкций и их применению к интегральным уравнениям со специальными функциями в ядрах. В работах [4, 5], 1884 г., он получил решение интегрального уравнения типа Абеля

$$\int\limits_{a}^{x}\mathrm{k}(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x),\quad x>a,$$

с произвольным, не обязательно степенным, ядром $\mathrm{k}(x)$ и нашел, в частности, решение часто встречающегося в приложениях уравнения с функцией Бесселя в ядре, переоткрытое много лет спустя, см. об этом в § 4, п.2°, 2.4, и в § 39, п.1° (к § 37 пп.1, 2°), § 39, п. 2°, 37.3.

Накануне XX в. выходит содержательная работа Ж. Адамара (J. Hadamard [1], 1892 г.). Идея дробного дифференцирования аналитической функции через почленное дифференцирование ее ряда Тейлора:

$$D^{\alpha}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)}c_k(z-z_0)^{k-\alpha},\quad c_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \tag{11}$$

хотя и известная до Ж. Адамара, используется в этой работе как эффективно работающий математический аппарат, осознанный как дробное дифференцирование аналитической в круге функции по радиусу. С тех пор подход (11) принято называть подходом Адамара. В этой же работе, по-видимому, впервые появляется конструкция дробного интегрирования (9) в форме

$$I^{\alpha} f(z) = \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} f(z\xi)\, d\xi, \tag{12}$$

удобная тем, что выбор однозначной ветви в (12) связан только с фиксированной точкой $z=0$ (в (9) точка ветвления $t=z$ переменна), и пригодная для произвольных функций, заданных и интегрируемых в звездообразной области. Конструкция (12) натолкнула Ж. Адамара рассматривать обобщенные дробные интегралы вида

$$\int_0^1 v(\xi) f(z\xi)\, d\xi. \tag{13}$$

Однако такая идея Ж. Адамаром далее не развивалась, хотя он и рассмотрел случай $v(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-\ln\xi)^{\alpha-1}$; этот случай подробно исследован нами в § 18, п. 3°. Спустя много лет содержательная теория обобщенного дробного интегрирования типа (13) создается в работах М. М. Джрбашяна [4], 1967 г.; [5], 1968 г.

В 1915 г. Г. Харди, М. Рисс (G. H. Hardy, M. Riesz [1]) используют дробное интегрирование при суммировании расходящихся рядов. Вошедшие с тех пор в математический обиход «нормальные средние» Рисса являются не чем иным, как дробным интегралом от частичной суммы ряда (см. об этом в § 14, п. 8°).

Развитие математического анализа и теории функций приводит к появлению новых форм дробного интегродифференцирования. Г. Вейль (H. Weyl [1], 1917 г.) определяет дробное интегрирование, приспособленное для периодических функций:

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pm ik)^{-\alpha}\varphi_k e^{ikx}, \quad \varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0 = 0, \tag{14}$$

которое реализуется в виде свертки

$$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{15}$$

с некоторой специальной функцией $\Psi_{\pm}^{\alpha}(x)$. Он показал, что дробный интеграл (14), (15) можно записать в виде

$$I_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad I_{-}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \tag{16}$$

при условии, что интегралы (16) по бесконечному промежутку от периодической функции понимаются как условно сходящиеся. Ввиду этого во многих последующих работах дробные интегралы по бесконечному промежутку интегрирования, т. е. интегралы (16), стали называть интегралами Вейля даже в том случае, когда они рассматриваются как абсолютно сходящиеся. Это обстоятельство является историческим недоразумением. Дробное интегрирование по бесконечному промежутку введено Ж. Лиувиллем, см. (4). Г. Вейль же пришел от конструкции (14), (15) к дробному интегралу (16), специфически понимаемому на периодических функциях (см. его точное толкование в § 19, лемма 19.3).

Таким образом, дробные интегралы по бесконечному промежутку, рассматриваемые на произвольных (непериодических) функциях, не имеют отношения к идеям Г. Вейля. Поэтому, отдавая дань этим глубоким идеям и их воздействию на дальнейшее развитие дробного дифференцирования, мы все-таки считаем целесообразным конструкции (16) называть дробными интегралами Лиувилля, соответственно левосторонним и правосторонним.

В 1918 г. выходит из печати работа П. Монтеля (P. Montel [1]). Она содержит ряд важных моментов. Здесь впервые дан некоторый аналог неравенства С. Н. Бернштейна для дробных производных алгебраических многочленов на конечном отрезке.

Такое неравенство в комплексной плоскости установит позже В. Сьюелл (W. E. Sewell [1], 1935 г.; [2], 1937 г.), см. об этом § 23, п. 2°. П. Монтель получил также обобщение теоремы С.Н. Бернштейна о скорости приближения дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на случай дробной дифференцируемости. В его работе содержатся также в зародыше аналогичные утверждения для функций двух переменных.

В 1922—1923 гг. М. Рисс (M. Riesz [1]) доказывает теорему о среднем для дробных интегралов (см. § 14, теорема 14.10) и вытекающее из нее важное следствие о том, что если

$$|\varphi(x)| \leqslant v(x), \quad \left|\int_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt\right| \leqslant w(x), \quad x>a,$$

где $v(x)$, $w(x)$ — монотонно возрастающие функции, то

$$\left|\int_a^x \varphi(t)(x-t)^{\beta-1}dt\right| \leqslant c\,[v(x)]^{1-\beta/\alpha}\,[w(x)]^{\beta/\alpha}, \tag{17}$$

$$0<\beta<\alpha$$

(свойство логарифмической выпуклости монотонной мажоранты дробного интеграла, см. (14.50)).

Особо следует сказать о работе А. Маршо (A. Marchaud [1], 1927 г.), в которой введена новая форма дробного дифференцирования:

$$(\mathbf{D}^\alpha f)(x) = c\int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \quad \alpha>0, \tag{18}$$

де $(\Delta_t^l f)(x)$ — конечная разность порядка $l>\alpha$, $l=1, 2, \ldots$, c — некоторая постоянная. Эта форма совпадает с лиувиллевской формой:

$$(\mathbf{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{-\infty}^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n-1}}, \quad n=[\alpha]+1, \tag{19}$$

на достаточно «хороших» функциях, но, что весьма существенно, конструкция (18) применима к функциям со значительно более «плохим» поведением на бесконечности. В частности, в (18) для $f(x)$ допускается рост на бесконечности (порядка меньше α), что невозможно в (19). Конструкции (18) принято называть дробными производными Маршо (отметим, что разностная форма (18) в случае $l=1$, $0<\alpha<1$ встречалась ранее у Г. Вейля (H. Weyl [1, с. 302], 1917 г.)).

Трудно переоценить результат Г. Харди, Д. Литтлвуда (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.), доказавших теорему о том, что оператор дробного интегрирования порядка α, $0<\alpha<1$, непрерывно действует из пространства L_p в пространство L_q, где $1<p<1/\alpha$, $1/p+1/q=\alpha$. Это утверждение, легко устанавливаемое в случае $1/p+1/q<\alpha$ (на конечном отрезке), но трудно доказываемое при $1/p+1/q=\alpha$, известно под названием теоремы Харди—Литтлвуда с предельным показателем. Эта теорема была распространена теми же авторами [5], 1932 г., на пространства H_p аналитических в круге функций и С. Л. Соболевым [1], 1938 г., на многомерный случай. Такие теоремы с предельным показателем существенно повлияли на развитие не только дробного интегродифференцирования, но и вообще теории функций и функционального анализа.

Бурное развитие теории интеграла Лебега в начале века не могло не сказаться и на дробном исчислении. В 1928 г. Л. Тонелли (L. Tonelli [1]) обращает внимание на роль абсолютной непрерывности при отыскании интегрируемых по Лебегу решений уравнений Абеля (2). В окончательном виде эта роль выявлена Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.) в форме необходимых и достаточных условий разрешимости уравнения Абеля (см. теоремы 2.1 и 2.3 в § 2).

В 1930 г. далеко идущее обобщение упоминавшегося выше подхода Грюнвальда—Летникова через разности дробного порядка предложил Э. Пост (E. L. Post [2], 1930 г.).

В 1934 г. А. Зигмунд (A. Zygmund [1]) для дробных интегралов Вейля периодических функций доказывает аналог теоремы Харди—Литтлвуда с предельным показателем для $p=1$, установив действие дробного интегрирования из $L_1(\log^+ L_1)^{1-\alpha}$ в L_1.

Через два года М. Рисс (M. Riesz [2, 3], 1936 г., см. также [4], 1938 г.; [6], 1949 г.) вводит дробное интегрирование функций многих переменных, построив операторы типа потенциала, широко известные с тех пор как потенциалы Рисса. Один из этих потенциалов является отрицательной дробной степенью $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots$ $\ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, другой — такой же степенью гиперболического дифференциального оператора в частных производных (см. об этом в § 28). Последние оказались эффективным средством решения задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений (о важной роли первого см. в § 25).

В указанных работах М. Рисса (см. также M. Riesz [7], 1961 г.) находит конструктивную реализацию идея построения дробного интегродифференцирования с помощью аналитического продолжения по параметру α.

Оказавшаяся весьма полезной формула дробного интегрирования по частям

$$\int_a^b (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x)\, dx$$

(обозначения см. в § 2) установлена в работе E. R. Love, L. C. Young [1], 1938 г.

Б. Надь (B. S. Nagy [1], 1938 г.) в периодическом случае доказывает теорему типа С. Н. Бернштейна о скорости приближения дробных интегралов тригонометрическими многочленами, а для тригоиометрических сумм $f(x) = \sum_{|k| \geqslant m} f_k e^{ikx}$ получает неравенство типа Ж. Фавара (J. Favard [1], 1937 г.)

$$\| I_{\pm}^{(\alpha)} f \|_{L_\infty} \leqslant \frac{c}{m^{\alpha}} \| f \|_{L_\infty}.$$

Т. Банг (T. Bang [1], 1941 г.) для тригонометрических сумм вида $f(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k e^{i\lambda_k x}$ доказывает подобное неравенство

$$\| I_{\pm}^{(\alpha)} f \|_{L_\infty} \leqslant c \left(\min_{1 \leqslant k \leqslant N} |\lambda_k| \right)^{-\alpha} \| f \|_{L_\infty},$$

а также неравенство С. Н. Бернштейна

$$\| \mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)} \|_{L_\infty} \leqslant \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\lambda_k| \right)^{\alpha} \| f \|_{L_\infty}.$$

Последнее в более общей ситуации, но с худшей постоянной независимо получил П. Сайвин (P. Civin [1], 1940 г.; [2], 1941 г.).

Как видно из перечисления этих важных результатов, дробное интегродифференцирование давно перестало быть «вещью в себе» и стало неотъемлемым содержанием теории функций и функционального анализа.

В 1940 г. появляются работы А. Эрдейи, Х. Кобера (A. Erdelyi [4]; A. Erdelyi, H. Kober [1]), в которых вводится модификация дробного интегродифференцирования

$$\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} \varphi(t)\, dt,$$

$$\frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{\alpha-1} t^{1-2\alpha-2\eta} \varphi(t)\, dt,$$

что оказалось очень полезным в приложениях к интегральным операторам, интегральным уравнениям и в других вопросах. Эти объекты и их обобщения получили название дробных интегралов Эрдейи—Кобера, см. § 18, п. 1°.

В указанных работах и в статье (H. Kober [1], 1940 г.) А. Эрдейи и Х. Кобер исследовали действие интегрального преобразования Меллина на дробные интегралы, положив начало еще одному подходу к дробному интегродифференцированию, основанному на соответствии между оператором (5) и умножением на $\Gamma(1-\alpha-s)/\Gamma(1-s)$ в образах Меллина. Впрочем, идея использования такого рода соответствия, но по отношению к преобразованию Фурье отмечалась еще Ж. Фурье (J. Fourier [1], 1822 г.), см. формулу (1). Она была развита значительно позже Х. Кобером (H. Kober [3], 1941 г.), впервые обосновавшим тот факт, что операторам дробного интегрирования $I_{\pm}^{\alpha}$ (16) соответствует умножение на $(\mp ix)^{-\alpha}$. Указанная идея по отношению к преобразованию Лапласа в конце XIX и начале XX в. послужила основой для создания операционного исчисления, в котором оператору дробного интегродифференцирования I_{0+}^{α} соответствует умножение на $p^{-\alpha}$ в образах Лапласа.

Х. Кобер (H. Kober [2], 1941 г.) вводит интегрирование чисто мнимого порядка и выясняет его действие в рамках пространства L_2.

В этом же году Ж. Коссар (J. Cossar [1], 1941 г.) вводит полезную модификацию дробного дифференцирования Лиувилля в виде

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\lim_{N\to\infty}\frac{d}{dx}\int\limits_x^N (t-x)^{-\alpha} f(t)\,dt,$$

применимую подобно дробной производной Маршо к функциям с «не очень хорошим поведением» на бесконечности.

Здесь мы поставим точку, ограничившись историей вопроса в довоенный период. Мы указали главные, с нашей точки зрения, вехи в этой истории. Для перечисления даже самого краткого, важных результатов, полученных за 45 лет после 1941 г., потребовалось бы слишком много места. Поэтому мы предпочли отразить их в обзорно-исторических параграфах в связи с конкретным содержанием каждой из глав книги. Отдавая дань глубокого уважения исследователям этих лет, мы закончим наш исторический очерк, упомянув в добавление к перечисленным в этом очерке математикам имена тех, кто внес большой вклад в развитие теории дробного интегродифференцирования после 1941 г. Это С. Г. Гиндикин, М. М. Джрбашян, И. А. Киприянов, П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, И. И. Огиевецкий, А. Ф. Тиман среди советских математиков и П. Бутцер (P. L. Butzer), А. Эрдейи (A. Erdelyi), Э. Лав (E. R. Love), А. МакБрайд (A. C. McBride), М. Миколаш (M. Mikolàs), Т. Ослер (T. J. Osler), И. Снеддон (I. N. Sneddon), У. Вестфаль (U. Westphal) среди зарубежных математиков.

Введение

Предмет настоящей книги составляют операции дифференцирования D^α и интегрирования I^α произвольного порядка и некоторые их приложения в теории дифференциальных и интегральных уравнений. Бóльшая часть теории таких операций относится к функциям одного переменного, а глава 5 посвящена различным формам дробного интегро-дифференцирования функций многих переменных. Изложение ведется в основном для функций вещественного переменного, но и функциям комплексного переменного уделено внимание (§ 22).

Учитывая интересы читателя, авторы на протяжении всей книги шли от частного к общему, начиная с более простых свойств и утверждений. Из этих соображений авторы часто целенаправленно освещали «модельные» ситуации, прежде чем рассмотреть вопрос в бóльшей общности. Во многих случаях, особенно в начальной части книги, предпочтение отдавалось более простым по форме и по доказательству утверждениям, информация же о более сложных ситуациях либо отодвигалась в последующие главы, либо выносилась в заключительные параграфы соответствующих глав.

Характерной чертой книги является освещение фактически всех известных форм дробного интегродифференцирования и их сравнение друг с другом. Во многих случаях прослежено не только совпадение различных форм друг с другом на тех или иных классах функций, но и совпадение их областей определения.

Другое отличительное свойство книги заключается в акценте, сделанном на вопросе о представимости функций $f(x)$ дробным интегралом $f=I^\alpha\varphi$, $\alpha>0$, от функции φ из некоторого заданного класса X. Этот вопрос исследуется во всех рассматриваемых в книге ситуациях: для функций одного и многих переменных, в периодическом и непериодическом случаях, на всей прямой (или во всем пространстве) и на конечном отрезке, для всех содержащихся в книге форм. В качестве X берется, как правило, пространство L_p, или L_p с весом, или гельдеровское пространство H^λ, или же H^λ с весом.

Изучаемая в книге представимость функции $f(x)$ дробным интегралом $f=I^\alpha\varphi$ порядка α—понятие более сильное, вообще говоря, чем существование у функции $f(x)$ дробной производной порядка α. Выявляются общие ситуации, когда существование (в том или ином смысле) дробной производной $D^\alpha f$ у функции $f(x)$ равносильно представимости последней дробным интегралом. Тогда легко решается, в частности, вопрос, почему из существования той или иной конструкции $D^\alpha f$ дробной производной вытекает существование производной $D^\beta f$, $\beta<\alpha$, той же конструкции.

Наконец, еще одна отличительная особенность книги состоит в попытке авторов унифицировать обозначения всевозможных форм дробного интегродифференцирования. Без такой унификации невозможно обойтись в тексте, содержащем многие варианты дробных производных и интегралов. Читатель может сразу обратить внимание на наличие знаков $\pm$ в обозначениях и дробных интегралов, и дробных производных функций одного переменного. Эти знаки означают выбор левостороннего или правостороннего интегродифференцирования, связанного соответственно с левосторонним и правосторонним сдвигом $f(x\mp t)$. Рассмотрение обеих этих форм вызвано не столько стремлением к общности изложения, сколько существованием интересных связей между указанными формами и одновременной потребностью в них в приложениях, содержащихся в книге.

Обозначения основных форм дробных интегралов и производных

$I_{+}^{\alpha}\varphi$	— (левосторонний) дробный интеграл Лиувилля (5.2)
$I_{-}^{\alpha}\varphi$	— (правосторонний) дробный интеграл Лиувилля (5.3)
$I_{a+}^{\alpha}\varphi$	— (левосторонний) дробный интеграл Римана—Лиувилля (2.17)
$I_{b-}^{\alpha}\varphi$	— (правосторонний) дробный интеграл Римана—Лиувилля (2.18)
$I_{a+;g}^{\alpha}\varphi$,	$I_{a+;x^\sigma}^{\alpha}\varphi$ — дробные интегралы от функции по другой функции (18.24), (18.38)—(18.41)
$I_{a+;\sigma,\eta}^{\alpha}\varphi$	— (левосторонний) оператор типа Эрдейи — Кобера (18.1), (18.2)
$I_{b-;\sigma,\eta}^{\alpha}\varphi$	— (правосторонний) оператор типа Эрдейи — Кобера (18.3), (18.4)
$I_{\eta,\alpha}^{+}\varphi$,	$K_{\eta,\alpha}^{-}\varphi$ — операторы Кобера (18.5), (18.6)
$I_{\eta,\alpha}\varphi$,	$K_{\eta,\alpha}\varphi$—операторы Эрдейи—Кобера (18.8)
$I^{\alpha}\varphi$	— потенциал Рисса (12.1), (25.1)
$I_{\pm}^{(\alpha)}\varphi$	— дробный интеграл Вейля периодических функций (19.5), (19.7)
$\mathfrak{J}_{\pm}^{\alpha}\varphi$	— дробное интегрирование Адамара (18.42)—(18.44)
$J_{a+}^{\alpha}\varphi$	— дробный интеграл Грюнвальда—Летникова (20.46)
$I_{c}^{\alpha}\varphi$	— дробный интеграл Чженя (18.80)
$I_{z_0}^{\alpha}\varphi$,	$I_{\pm,\theta}^{\alpha}\varphi$ — дробные интегралы Римана — Лиувилля в комплексиой плоскости (22.8), (22.17)—(22.20)
$G^{\alpha}\varphi$	— бесселево дробное интегрирование (18.61), (27.8)
$G_{\pm}^{\alpha}\varphi$	— его модификация (18.63)
$\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha}f$	— дробные производные Лиувилля (5.6), (5.7)
$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f$,	$\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f$ — дробные производные Римана—Лиувилля (2.22), (2.23), (2.32), (2.33)
$\mathcal{D}_{a+;g}^{\alpha}f$	— дробная производная от функции по другой функции (18.29)
$\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha}f$	— дробные производные Маршо (5.57), (5.58), (5.80)
$\mathbf{D}^{\alpha}f$	— риссова дробная производная (25.59)
$\mathbf{D}_{a+}^{\alpha}f$,	$\mathbf{D}_{b-}^{\alpha}f$ — аналоги производной Маршо на отрезке (13.2), (13.5)
$\mathfrak{D}_{\pm}^{\alpha}f$	— дробные производные Адамара (18.56), (18.57)
$\mathcal{D}_{\pm}^{(\alpha)}f$	— дробные производные Вейля периодических функций (19.17)
$\mathbf{D}_{\pm}^{(\alpha)}f$	— дробные производные Вейля—Маршо периодических функций (19.18)
$f_{\pm}^{\alpha)}$	— дробные производные Грюнвальда—Летникова (20.7)
$\mathcal{D}_{z_0}^{\alpha}f$,	$\mathcal{D}_{\pm,\theta}^{\alpha}f$ — дробные производные Римана—Лиувилля в комплексной плоскости (22.3), (22.21)
$\mathcal{D}_{c}^{\alpha}f$	— дробная производная Чженя (18.87)
$(E\pm\mathcal{D})^{\alpha}$,	$(E\pm\mathbf{D})^{\alpha}$ —модификации бесселева дробного дифференцирования (18.71), (18.72)

ГЛАВА 1

Дробные интегралы и производные на отрезке вещественной оси

Настоящая глава имеет основополагающий характер. Исходя из решения интегрального уравнения Абеля, вводятся интегралы и производные дробного порядка, рассматриваемые еще Б. Риманом и Ж. Лиувиллем и поэтому называемые дробными интегралами и производными Римана — Лиувилля. Такие конструкции обобщают операции обычного интегрирования и дифференцирования и являются одними из основных форм одномерного дробного интегродифференцирования в данной книге.

Доказываются простейшие свойства дробных интегралов и производных Римана — Лиувилля. Важнейшими из них являются взаимная обратимость операторов дробного интегрирования и дифференцирования и полугрупповое свойство для них, справедливые на функциях из определенных классов. Эти свойства, как увидим далее, будут выполняться и для других типов одномерных и многомерных операторов дробного интегродифференцирования. Исследуется также действие операторов дробного интегрирования в пространствах Гельдера H^λ и в пространствах L_p, а также в подобных пространствах $H_0^\lambda(\rho)$, $L_p(\rho)$ с весом.

В начальном параграфе главы, носящем вспомогательный характер, приводятся различные понятия и утверждения некоторых разделов математического анализа, неоднократно используемые по всей книге.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь приводятся необходимые для дальнейшего понятия и утверждения из таких разделов анализа, как весовые пространства $H_0^\lambda(\rho)$ гельдеровских функций, весовые пространства $L_p(\rho)$ суммируемых функций, специальные функции и интегральные преобразования.

1°. Классы H^λ и $\mathrm{H}^\lambda(\rho)$. Пусть $\Omega=[a, b]$, где $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, так что Ω может быть конечным отрезком, полуосью или всей осью. В случае оси и полуоси будем, как обычно, обозначать $R^1=(-\infty, \infty)$, $R^1_+=[0, \infty)$, а через $\dot{R}^1$ обозначим прямую, пополненную одной бесконечно удаленной точкой. Введем здесь необходимые в дальнейшем классы гельдеровских функций на конечном отрезке, на полуоси и оси, хотя в этой главе они будут использоваться только в случае конечного отрезка.

Пусть вначале Ω — конечный отрезок. Говорят, что функция $f(x)$, заданная на Ω, удовлетворяет на Ω *условию Гельдера (порядка λ)*, если

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A|x_1 - x_2|^\lambda \tag{1.1}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$, где A — постоянная, а λ — показатель Гельдера. Очевидно, функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Гельдера, непрерывна на Ω.

Определение 1.1. *Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$, где Ω—отрезок, обозначается класс всех (вообще говоря, комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на Ω условию Гельдера фиксированного порядка λ.*

Нетрудно видеть, что при таком определении интересен лишь случай $0 < \lambda \leqslant 1$, так как при $\lambda > 1$ класс H^λ содержит только постоянные $f(x) \equiv \equiv \text{const}$ (из (1.1) следует, что $f'(x) \equiv 0$ при $\lambda > 1$). В связи с этим (см. далее определение 1.6) будем полагать $H^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Нам понадобится также класс

$$h^\lambda = h^\lambda(\Omega) \tag{1.2}$$

функций, удовлетворяющих более сильному, чем (1.1), условию:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{|x_2 - x_1|^\lambda} \to 0 \quad \text{при } x_2 \to x_1 \tag{1.3}$$

для всех $x_1 \in \Omega$. Очевидно, что $h^\lambda \subset H^\lambda$.

Класс $H^1(\Omega)$ называют часто липшицевым классом. Приведем еще определение несколько более широкого, чем $H^1(\Omega)$, класса $AC(\Omega)$ абсолютно непрерывных функций.

Определение 1.2. *Функция $f(x)$ называется абсолютно непрерывной на отрезке Ω, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \ldots, n$, такой, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, справедливо неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$. Класс всех таких функций обозначается $AC(\Omega)$.*

Известно (см., например, книгу А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1, с. 338] или С. М. Никольского [6, с. 368—369]), что класс $AC(\Omega)$ совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций:

$$f(x) \in AC(\Omega) \Longleftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt, \qquad \int_a^b |\varphi(t)|\,dt < \infty. \tag{1.4}$$

Поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $f'(x)$ (обратно, из существования почти всюду суммируемой производной еще не вытекает абсолютная непрерывность; это обстоятельство скажется и в теории дробного интегродифференцирования, см. об этом в § 2, п. 6°).

Очевидно, что $H^1(\Omega) \subset AC(\Omega)$; обратное вложение неверно. Так, например, $f(x) = (x - a)^\alpha \in AC(\Omega)$, но $(x - a)^\alpha \notin H^1(\Omega)$ при $0 < \alpha < 1$, так как в точке $x = a$ условие (1.1) с $\lambda = 1$ не выполняется.

Определение 1.3. *Через $AC^n(\Omega)$, где $n = 1, 2, \ldots$, и Ω — отрезок, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на Ω до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$.*

Очевидно, $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$ и класс $AC^n(\Omega)$ состоит, подобно (1.4), из функций, представимых n-кратным интегралом Лебега с переменным верхним пределом от суммируемой функции с заменой постоянной в (1.4) на многочлен порядка $n-1$ (см. лемму 2.4 в § 2).

Позже, в § 6, п. 3°, будет указана модификация класса $AC(\Omega)$ применительно к случаю, когда Ω — ось.

Пусть теперь Ω — ось или полуось. В этом случае при определении класса $H^\lambda(\Omega)$ дополнительно оговаривается «гельдеровское» поведение на бесконечности. Именно говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера в окрестности бесконечно удаленной точки, если

$$\left|f\left(\frac{1}{x_1}\right)-f\left(\frac{1}{x_2}\right)\right|\leqslant A\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|^\lambda \tag{1.5}$$

для всех x_1, x_2, достаточно больших по абсолютной величине.

Определение 1.1′. *Пусть Ω—ось или полуось. Через $H^\lambda=H^\lambda(\Omega)$ обозначается класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера (1.1) на любом конечном отрезке в Ω и условию (1.5) в окрестности бесконечно удаленной точки.*

Заметим, что совокупность двух условий (1.1) и (1.5), определяющих класс $H^\lambda(\Omega)$ для бесконечного интервала Ω, равносильна одному условию

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A\,\frac{|x_1-x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda(1+|x_2|)^\lambda} \tag{1.6}$$

(*«глобальное» условие Гельдера*). В этой равносильности можно убедиться непосредственной проверкой.

Справедлива следующая лемма, утверждающая, что «склейка» двух гельдеровских функций является также гельдеровской функцией.

Лемма 1.1. *Пусть $\Omega_1=[a,c]$, $\Omega_2=[c,b]$, $-\infty\leqslant a<c<b\leqslant\infty$, и $\Omega=[a,b]$. Если $f(x)\in H^\lambda(\Omega_1)$, $f(x)\in H^\lambda(\Omega_2)$ и $f(c-0)=f(c+0)$, то $f(x)\in H^\lambda(\Omega)$.*

Доказательство леммы 1.1 можно найти, например, в книге Н. И. Мусхелишвили [1, с. 21].

Нам понадобятся также следующие весовые классы Гельдера.

Определение 1.4. *Пусть $\rho(x)$—неотрицательная функция. Через $H^\lambda(\rho)=H^\lambda(\Omega;\rho)$ будем обозначать класс функций $f(x)$, таких, что $\rho(x)f(x)\in H^\lambda(\Omega)$.*

Всюду в дальнейшем весовая функция $\rho(x)$ будет степенной и «привязанной» к конечному числу точек:

$$\rho(x)=\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}, \tag{1.7}$$

где μ_k — действительные числа, а $x_k\in\Omega$. Наиболее распространенным будет случай

$$\rho(x)=(x-a)^\alpha(b-x)^\beta,\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{1.8}$$

Если Ω содержит бесконечно удаленную точку, то вес (1.7) целесообразно брать в виде

$$\rho(x)=(1+x^2)^{\mu/2}\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}, \tag{1.9}$$

т. е. «привязывать» его к точке $x=\infty$. При рассмотрении веса (1.9) будем использовать обозначение

$$\mu_0=-\mu-\sum_{k=1}^{n}\mu_k \tag{1.10}$$

(показатель веса на бесконечности). По определению класса $H^\lambda(\rho)$ функции этого класса представимы в виде

$$f(x)=\frac{f_0(x)}{\rho(x)},\quad f_0(x)\in H^\lambda. \tag{1.11}$$

Нам понадобится еще один подкласс в $H^\lambda(\rho)$.

Определение 1.5. *Пусть $\rho(x)$ — вес (1.7) или (1.9). Через $H_0^\lambda(\rho) = H_0^\lambda(\Omega;\ \rho)$ будем обозначать множество всех тех функций из $H^\lambda(\rho)$, для которых $f_0(x_k) = 0$ и $f_0(\infty) = 0$ (в случае, если Ω содержит бесконечно удаленную точку) в представлении (1.11). Через H_0^λ обозначим класс функций из H^λ, обращающихся в нуль при $x = a$, $x = b$.*

Заметим, что мы будем часто писать H^λ, $H^\lambda(\rho)$, $H_0^\lambda(\rho)$ вместо $H^\lambda(\Omega)$, $H^\lambda(\Omega;\ \rho)$, $H_0^\lambda(\Omega;\ \rho)$ в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

Будем пользоваться также весовым классом

$$h_0^\lambda(\rho) = \{f(x) : \rho(x) f(x) \in h^\lambda,\ \rho(x) f(x)|_{x=a} = \rho(x) b(x)|_{x=b} = 0\}, \quad (1.12)$$

где h^λ — класс (1.2), (1.3), а $\rho(x)$ — вес (1.8).

Введенные классы являются линейными пространствами. В них можно естественным образом определить норму. Так, в случае, когда Ω — отрезок, полагают

$$\|f\|_{H^\lambda} = \max_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \Omega \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}. \quad (1.13)$$

Заметим, что второе слагаемое в (1.13) есть инфинум всех возможных значений постоянной A в (1.1). Пространство H^λ полно относительно нормы (1.13), т. е. является банаховым пространством; доказательство этого можно найти, например, в книге Н. И. Мусхелишвили [1, с. 173]. В случае, когда Ω — ось или полуось, норму вводят на основании (1.6) равенством

$$\|f\|_{H^\lambda} = \max_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \Omega \\ x_1 \neq x_2}} (1 + |x_1|)^\lambda (1 + |x_2|)^\lambda \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}. \quad (1.14)$$

Можно убедиться в полноте $H^\lambda(\Omega)$ относительно нормы (1.14), например, отображая ось (полуось) дробно-линейным преобразованием на окружность (полуокружность) и пользуясь полнотой пространства H^λ на произвольной ограниченной кривой (см. книгу Н. И. Мусхелишвили [1, с. 173]). Известно также, что класс (1.2) есть замкнутое подпространство в H^λ, см., например, книгу С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [1, с. 269].

В весовом случае норма вводится на основании представления (1.11) равенством

$$\|f\|_{H^\lambda(\rho)} = \|f_0\|_{H^\lambda}, \quad (1.15)$$

при этом полнота $H^\lambda(\rho)$ относительно этой нормы очевидна в силу изометрии (1.15) между пространствами $H^\lambda(\rho)$ и H^λ.

Отметим следующее полезное свойство: если $f(x) \in H^\lambda([a, b])$ и $0 < \alpha < \lambda$, то

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{|x - c|^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha}([a, b]),\ a \leqslant c \leqslant b;\ \|g\|_{H^{\lambda-\alpha}} \leqslant \varkappa \|f\|_{H^\lambda}, \quad (1.16)$$

где $\varkappa$ не зависит от $f(x)$ (доказательство см., например, в книге Н. И. Мусхелишвили [1, с. 22]).

Пусть $L_1(\Omega)$ — класс функций, интегрируемых по Лебегу на Ω. В случае, когда Ω — конечный отрезок и $\rho(x)$ — вес (1.7), справедливы вложения

$$C^1(\Omega) \subset H_0^\lambda(\Omega;\ \rho) \subset L_1(\Omega) \quad (1.17)$$

вместе с неравенствами для норм

$$\varkappa_1 \|f\|_{L_1} \leqslant \|f\|_{H_0^\lambda(\rho)} \leqslant \varkappa_2 \|f\|_{C^1} \tag{1.18}$$

при условии, что $\lambda \leqslant \mu_k < \lambda+1$, $k=1, 2, \ldots, n$ (определение $\|f\|_{L_1}$ см. в (1.26) при $p=1$). Здесь и ниже $C^m(\Omega)$ означает класс функций, m раз непрерывно дифференцируемых на Ω с нормой

$$\|f\|_{C^m} = \max_{x\in\Omega} \sum_{k=1}^{m} |f^{(k)}(x)|, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \|f\|_{C^0} \equiv \|f\|_C. \tag{1.19}$$

Через $C_0^\infty = C_0^\infty(R^1)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых финитных функций на R^1.

Распространением класса $H^\lambda(\Omega)$ на значения $\lambda > 1$ служит класс, вводимый следующим образом.

Определение 1.6. *Пусть* $\lambda = m+\sigma$, *где* $m=0, 1, 2, \ldots,$ *а* $0<\sigma\leqslant 1$. *Говорят, что* $f(x)\in H^\lambda(\Omega)$, *если* $f(x)\in C^m(\Omega)$ *и* $f^{(m)}(x)\in H^\sigma(\Omega)$; *при этом*

$$\|f\|_{H^\lambda} = \|f\|_{C^m} + \|f^{(m)}\|_{H^\sigma}. \tag{1.20}$$

Очень часто при целых значениях λ приходится иметь дело с несколько более широким классом функций, когда условие Гельдера (Липшица) содержит логарифмический множитель (см., например, теоремы 3.1, 3.2 в § 3). Дадим в связи с этим следующее

Определение 1.7. *Пусть* $\lambda = m+\sigma$, *где* $m=0, 1, 2, \ldots,$ и $0<\sigma\leqslant 1$ *Будем говорить, что* $f(x)\in H^{\lambda,k} = H^{\lambda,k}(\Omega)$, $k\in R_+^1$, *если* $f(x)\in C^m(\Omega)$ *и*

$$|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)| \leqslant A|h|^\sigma \left(\ln\frac{1}{|h|}\right)^k, \quad |h| < \frac{1}{2}, \tag{1.21}$$

при этом

$$\|f\|_{H^{\lambda,k}} = \|f\|_{C^m} + \sup_{\substack{x,\, x+h\in\Omega\\ |h|<1/2}} \frac{|f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)|}{|h|^\sigma \left(\ln\frac{1}{|h|}\right)^k}. \tag{1.22}$$

Аналогично (1.2) введем класс $h^{\lambda,k} = h^{\lambda,k}(\Omega)$ функций, удовлетворяющих более сильному, чем (1.21), условию:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(m)}(x+h) - f^{(m)}(x)}{|h|^\sigma \left(\ln\frac{1}{|h|}\right)^k} = 0, \quad x,\ x+h\in\Omega, \quad 0<|h|<\frac{1}{2}, \tag{1.23}$$

а также аналогичные определению 1.5, (1.11) и (1.12) весовые классы функций $H_0^{\lambda,k}(\rho)$, $H^{\lambda,k}(\rho)$ и $h_0^{\lambda,k}(\rho)$.

Замечание 1.1. Хотя гельдеровские классы очень удобно использовать в самых разных вопросах (и они широко применяются в данной книге), у них один существенный недостаток: они не сепарабельны. В H^λ и в $H^\lambda(\rho)$ не существует «хороших» плотных подмножеств: функцию $f(x)\in H^\lambda$ нельзя приблизить по норме пространства H^λ более «хорошими» функциями, так как замыкание «хороших» функций по норме H^λ дает h^λ, а не H^λ, см., например, книгу С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [1, с. 269]. Всюду в нашем изложении это «отрицательное» свойство пространства H^λ не будет нигде проявляться. Однако его следует иметь в виду, если попытаться строить приближенные методы решения изучаемых в главах 6, 7 уравнений (в тех случаях, когда они рассматриваются в H^λ или $H^\lambda(\rho)$).

Ниже, в § 14 будут рассмотрены интегральные гельдеровские классы H_p^λ (близость значений $f(x_1)$ и $f(x_2)$ будет оцениваться не в равномерной метрике, как в (1.1), а в интегральной метрике).

2°. Классы L_p и $L_p(\rho)$. Будем предполагать знакомство читателя с измеримостью функций по Лебегу и с интегралом Лебега. Пусть по-прежнему $\Omega = [a, b]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Через $L_p = L_p(\Omega)$ обозначается множество всех измеримых на Ω функций $f(x)$, вообще говоря комплекснозначных, для которых $\int\limits_\Omega |f(x)|^p\, dx < \infty$, где $1 \leqslant p < \infty$. Положим

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left\{\int\limits_\Omega |f(x)|^p\, dx\right\}^{1/p}. \tag{1.24}$$

Для $p = \infty$ пространство $L_p(\Omega)$ вводится как совокупность всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|, \tag{1.25}$$

где $\operatorname{ess\,sup} |f(x)|$ — существенный супремум функции $|f(x)|$, см. об этом подробнее в книге С. М. Никольского [4, с. 12—13].

Всюду в дальнейшем $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Как обычно, две эквивалентные, т. е. отличающиеся на множестве меры нуль, функции считаются равными одному элементу пространства $L_p(\Omega)$ (не различаются как элементы этого пространства).

Для норм (1.24), (1.25) будем использовать также обозначения

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \|f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.26}$$

Приведем некоторые свойства пространств L_p:

а) *неравенство Минковского*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1.27}$$

с учетом которого $L_p(\Omega)$ является нормированным пространством. Известно также, что $L_p(\Omega)$ — полное пространство;

б) *неравенство Гельдера*

$$\int\limits_\Omega |f(x)\, g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}, \quad p' = p/(p-1), \tag{1.28}$$

где $f(x) \in L_p(\Omega)$, $g(x) \in L_{p'}(\Omega)$. Показатель p', связанный с p равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{1.29}$$

называется сопряженным с p. Заметим, что (1.28) справедливо при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ($p' = \infty$, если $p = 1$, и $p' = 1$, если $p = \infty$).

Из (1.28) следует обобщенное неравенство Гельдера

$$\int\limits_\Omega |f_1(x) \ldots f_m(x)|\, dx \leqslant \|f_1\|_{L_{p_1}(\Omega)} \ldots \|f_m\|_{L_{p_m}(\Omega)}, \tag{1.30}$$

где $f_k(x) \in L_{p_k}(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\sum\limits_{k=1}^m 1/p_k = 1$.

Заметим, что из неравенства Гельдера (1.28) вытекает вложение

$$L_{p_1}(\Omega) \subset L_{p_2}(\Omega), \quad \|f\|_{L_{p_2}(\Omega)} \leqslant c\, \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)}, \quad p_1 > p_2 \geqslant 1, \tag{1.31}$$

в случае, когда Ω — конечный отрезок;

в) *теорема Фубини*, позволяющая менять порядок интегрирования в повторных интегралах:

Теорема 1.1. *Пусть* $\Omega_1=[a, b]$, $\Omega_2=[c, d]$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, $-\infty\leqslant c<d\leqslant\infty$, *и пусть* $f(x, y)$ — *определенная на* $\Omega_1\times\Omega_2$ *измеримая функция. Если сходится (абсолютно) хотя бы один из интегралов*

$$\int\limits_{\Omega_1} dx\int\limits_{\Omega_2} f(x, y)\,dy,\quad \int\limits_{\Omega_2} dy\int\limits_{\Omega_1} f(x, y)\,dx,\quad \iint\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x, y)\,dxdy,$$

то они совпадают.

Имеет место следующий частный случай теоремы Фубини:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_a^x f(x, y)\,dy=\int\limits_a^b dy\int\limits_y^b f(x, y)\,dx \tag{1.32}$$

в предположении, что абсолютно сходится один из этих интегралов. Последнее равенство называется *формулой Дирихле.*

Справедливо также *обобщенное неравенство Минковского:*

$$\left\{\int\limits_{\Omega_1} dx\left|\int\limits_{\Omega_2} f(x, y)\,dy\right|^p\right\}^{1/p}\leqslant\int\limits_{\Omega_2} dy\left\{\int\limits_{\Omega_1}|f(x, y)|^p\,dx\right\}^{1/p}, \tag{1.33}$$

примыкающее к утверждению теоремы Фубини;

г) свойство непрерывности в среднем функций из L_p.

Лемма 1.2. *Пусть* $f(x)\in L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Omega}|f(x+h)-f(x)|^p dx\to 0 \tag{1.34}$$

при $h\to 0$ (*для значений* $x+h\notin\Omega$ *функция* $f(x)$ *продолжается нулем*);

д) пусть $C_0^\infty(\Omega)$ — класс всех бесконечно дифференцируемых функций, финитных в Ω. Финитность в Ω означает, что $f(x)\equiv 0$ в окрестности концов $x=a$, $x=b$ множества $\Omega=[a, b]$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$. В случае, когда Ω — конечный отрезок, множество всех многочленов плотно в $L_p(\Omega)$, $1\leqslant p<\infty$;

е) так называемая *мажорантная теорема Лебега* о предельном переходе под знаком интеграла:

Теорема 1.2. *Пусть функция* $f(x, h)$ *имеет суммируемую мажоранту*: $|f(x, h)|\leqslant F(x)$, *где* $F(x)$ *не зависит от параметра* h *и* $F(x)\in L_1(\Omega)$. *Если существует почти для всех* x *предел* $\lim\limits_{h\to 0} f(x, h)$, *то*

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\Omega} f(x, h)\,dx=\int\limits_{\Omega}\lim_{h\to 0} f(x, h)\,dx. \tag{1.35}$$

Доказательства приведенных свойств а)—е) можно найти, например, в книгах А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1], С. М. Никольского [6], И. П. Натансона [1].

Нам понадобится также следующая

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathcal{K}(t)\in L_1(R^1)$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)\,dt=1$. *Тогда усреднение*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(t)f(x-\varepsilon t)\,dt=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)f(x-t)\,dt \tag{1.36}$$

функции $f(x)\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<\infty$, *сходится при* $\varepsilon\to 0$ *к* $f(x)$ *по норме* $L_p(R^1)$. *Если, кроме того,* $|\mathcal{K}(t)|\leqslant A(|t|)$, *где* $A(r)\in L_1(R_+^1)$ *и монотонно убывает, то усреднение (1.36) сходится к* $f(x)$ *и почти всюду.*

Доказательство сходимости по норме L_p в этой теореме общеизвестное и простое. Доказательство сходимости почти всюду см., например, в книге И. Стейна [1, с. 77].

Упомянем также нужный нам в дальнейшем периодический аналог теоремы 1.3.

Теорема 1.3'. *Пусть функция* $\mathrm{k}_\varepsilon(t)$ *удовлетворяет условиям:* 1) $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{k}_\varepsilon(t)\,dt = 2\pi$; 2) $\int\limits_0^{2\pi} |\mathrm{k}_\varepsilon(t)|\,dt \leqslant M$, *где* M *не зависит от* ε; 3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\delta^{2\pi} |\mathrm{k}_\varepsilon(t)|\,dt = 0$ *при любом* $\delta > 0$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{k}_\varepsilon(t)\,\varphi(x-t)\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(x)$$

для $\varphi(x) \in L_p(0, 2\pi)$, $1 \leqslant p < \infty$ (*или* $\varphi(x) \in C([0, 2\pi])$), *по норме* L_p (*или* C).

Утверждение теоремы 1.3' общеизвестно в теории рядов Фурье и легко доказывается с помощью неравенства Минковского:

$$\left\| \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{k}_\varepsilon(t)\,[\varphi(x-t)-\varphi(x)]\,dt \right\| \leqslant 2\|\varphi\| \int\limits_\delta^{2\pi} |\mathrm{k}_\varepsilon(t)|\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^{\delta} |\mathrm{k}_\varepsilon(t)|\,\|\varphi(x-t)-\varphi(x)\|\,dt \leqslant (2\|\varphi\| + M)\,\eta \to 0$$

за счет выбора δ во втором слагаемом и ε в первом.

Теоремы 1.3 и 1.3' называют иногда *теоремами об аппроксимации единицы.*

Определение 1.8. *Пусть* $\rho(x)$ — *неотрицательная функция. Через* $L_p(\rho) = L_p(\Omega; \rho)$ *будем обозначать класс измеримых на* Ω *функций* $f(x)$, *для которых*

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \left\{ \int\limits_\Omega \rho(x)\,|f(x)|^p\,dx \right\}^{1/p} < \infty.$$

Мы будем иметь дело только с весами вида (1.7), (1.9).

Пространство $L_p(\rho)$ банахово ввиду изометрии

$$\|f\|_{L_p(\rho)} = \|\rho^{1/p} f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.37}$$

В силу изометрии (1.37) из (1.28) вытекает *аналог неравенства Гельдера* для весовых пространств

$$\int\limits_\Omega |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_{L_p(\rho)}\,\|g\|_{L_{p'}(\rho^{1-p'})},\quad 1 < p < \infty. \tag{1.38}$$

В дальнейшем будут встречаться следующие *интегральные операторы типа свертки:*

$$h * \varphi = (h * \varphi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.39}$$

(очевидно, $h * \varphi = \varphi * h$). Для них имеет место теорема об ограниченности в пространствах L_p, известная как *теорема Юнга.*

Теорема 1.4. *Если* $h(t) \in L_1(R^1)$, $\varphi(t) \in L_p(R^1)$, *то* $(h * \varphi)(x) \in L_p(R^1)$ *и справедливо неравенство*

$$\|h * \varphi\|_p \leqslant \|h\|_1 \|\varphi\|_p. \tag{1.40}$$

Приведем еще теорему об ограниченности в пространствах L_p операторов с однородным ядром. Напомним, что *функция* $\mathrm{k}(x, t)$, $x > 0$, $t > 0$, *называется однородной степени* α, *если справедливо соотношение*

$$k(\lambda x,\ \lambda t) = \lambda^{\alpha} k(x,\ t), \quad \lambda > 0. \tag{1.41}$$

В частности, положив здесь $\lambda = t^{-1}$, приходим к заключению, что всякая однородная степени α функция представима в виде

$$k(x,\ t) = t^{\alpha} k_0\left(\frac{x}{t}\right). \tag{1.42}$$

Теорема 1.5. *Пусть функция* $k(x,\ t)$ *однородна степени* -1. *Если*

$$\kappa = \int_0^{\infty} |k(x,\ 1)|\, x^{-1/p'}\, dx = \int_0^{\infty} |k(1,\ t)|\, t^{-1/p} dt < \infty, \tag{1.43}$$

то интегральный оператор

$$K\varphi = (K\varphi)(x) = \int_0^{\infty} k(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1.44}$$

ограничен в $L_p(0,\ \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, *и при этом* $\|K\varphi\|_{L_p} \leqslant \kappa \|\varphi\|_{L_p}$, *где* κ *имеет вид* (1.43).

Доказательство. Прежде всего заметим, что интегралы (1.43) совпадают. В этом можно убедиться с помощью замены $t = 1/x$ и свойства однородности $k(1,\ x^{-1}) = x\,k(x,\ 1)$. Преобразовав далее (1.44) к виду $K\varphi = \int_0^{\infty} k(1,\ t)\,\varphi(tx)\,dt$ и применив обобщенное неравенство Минковского (1.33), получим

$$\|K\varphi\|_{L_p} \leqslant \int_0^{\infty} |k(1,\ t)|\, dt \left\{\int_0^{\infty} |\varphi(tx)|^p dx\right\}^{1/p} = \kappa \|\varphi\|_{L_p}.$$

Последняя теорема принадлежит Г. Харди, Д. Литтлвуду, Г. Полиа (G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya [1]), см. также русское издание книги этих авторов [1, с. 276].

Приведем еще теорему об ограниченности в $L_p(R^1)$ операторов свертки (1.39), известную как *теорему о фурье-мультипликаторах* (С. Г. Михлин [2, с. 239], см. ее доказательство также в книгах С. М. Никольского [4, с. 59], И. Стейна [1, с. 128]). Она формулируется в терминах преобразования Фурье $\hat{h}(x)$ ядра $h(x)$. О преобразовании Фурье см. далее в п. 4°.

Теорема 1.6. *Пусть функция* $m(x) = \hat{h}(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$|m(x)| \leqslant c, \quad |xm'(x)| \leqslant c, \quad x \in R^1. \tag{1.41'}$$

Тогда оператор (1.39) *ограничен в пространстве* $L_p(R^1)$, $1 < p < \infty$.

Следствие. *Пусть*

$$A\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} a(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad B\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} b(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Если функции $\hat{a}(x)/\hat{b}(x)$, $\hat{b}(x)/\hat{a}(x)$ *удовлетворяют условиям* (1.41′), *то*

$$A(L_p) = B(L_p), \quad 1 < p < \infty.$$

Приведем, наконец, *теорему Банаха.*

Теорема 1.7. *Пусть* A, B — *линейные ограниченные операторы в банаховом пространстве* X. *Если* $A\varphi \equiv B\varphi$ *для* φ *из плотного в* X *множества, то* $A\varphi \equiv B\varphi$ *для всех* $\varphi \in X$.

3°. Некоторые специальные функции. Дадим здесь определения и простейшие свойства ряда специальных символов и функций, более подробную информацию о которых читатель может найти в книгах Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1—3], а также в справочниках А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1—3].

А. *Символ Похгаммера* $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (z)_0 \equiv 1. \tag{1.45}$$

Очевидно, что

$$(z)_n = (-1)^n (1-n-z)_n, \quad (1)_n = n!, \tag{1.46}$$

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \tag{1.47}$$

где $\Gamma(z)$ задается формулой (1.54). Равенство (1.47) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при комплексных n.

Б. *Биномиальные коэффициенты определяются по формуле*

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}. \tag{1.48}$$

В частности, при целых $\alpha = m$, $m = 1, 2, \dots$, имеем равенства

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \text{ при } m \geqslant n \text{ и } \binom{m}{n} = 0 \text{ при } 0 \leqslant m < n. \tag{1.49}$$

В случае произвольных (комплексных) β и α, $\alpha \neq -1, -2, \dots$, полагают

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)} = \frac{\sin(\beta-\alpha)\pi}{\pi}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{1.50}$$

Из (1.66) и (1.50) вытекает, что

$$\left|\binom{\alpha}{\beta}\right| \leqslant \frac{c}{\beta^{1+\operatorname{Re}\alpha}} \tag{1.51}$$

при любом фиксированном α $(\neq -1, -2, \dots)$ и вещественном $\beta \to +\infty$.

Отметим также формулы

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j} = \binom{j-\alpha-1}{j}, \tag{1.52}$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{k-j} = \binom{\alpha+\beta}{k}, \tag{1.53}$$

см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 4.2.5.13].

В. *Гамма-функцией* $\Gamma(z)$ называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{1.54}$$

который, очевидно, сходится при всех $z \in \mathbf{C}$, для которых $\operatorname{Re} z > 0$. Здесь $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$. На полуплоскость $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$, гамма-функция доопределяется с помощью аналитического продолжения этого интеграла. Так, получаемая из (1.54) интегрированием по частям формула понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \tag{1.55}$$

после многократного применения приводит к равенству

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)}, \tag{1.56}$$

$$\operatorname{Re} z > -n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots,$$

позволяющему осуществить такое аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}\, z > -n$ при любом n. Существуют и другие способы аналитического продолжения (на основе формул Коши—Заальшютца, Эйлера—Гаусса и др.).

Из (1.56) следует, что $\Gamma(z)$ аналитична в комплексной плоскости всюду, кроме точек $z=0, -1, -2, \ldots$, где она имеет простые полюса и разлагается по формуле

$$\Gamma(z) = (-1)^k [k!\,(z+k)]^{-1} [1 + O(z+k)], \quad z \to -k, \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.57}$$

(последняя получается из (1.56) при $z \to 1-n$ после замены $n-1$ на k; более точные представления $O(z+k)$ см. в книге О. И. Маричева [10, с. 42]). Здесь и всюду в дальнейшем равенство $f(z) = O(g(z))$, $z \to a$, означает, как обычно, что $|f(z)/g(z)| < M < \infty$ при $|z-a| < \varepsilon$. Соотношение $f(z) = o(g(z))$, $z \to a$, будет означать $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 0$, а соотношение эквивалентности $f(z) \sim g(z)$, $z \to a$, — $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = 1$.

Коэффициент при $(z+k)^{-1}$ в окрестности полюса $z=-k$ из формулы (1.57) называется вычетом гамма-функции, а связь между этой функцией и ее вычетом обозначается через равенство

$$\operatorname*{res}_{z=-k} \Gamma(z) = (-1)^k / k!, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.58}$$

Отметим очевидное свойство $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n = 1, 2, \ldots$, $\Gamma(1) = 1$ и перечислим другие соотношения:

а) *обобщенные формулы понижения и повышения* вида

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z), \quad \Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n} \Gamma(z); \tag{1.59}$$

б) *формула дополнения*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin z\pi, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \tag{1.60}$$

в) *формула удвоения* (формула Лежандра)

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{1.61}$$

и более общая *формула Гаусса—Лежандра*

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-1/2}}{(2\pi)^{(m-1)/2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right), \quad m = 2, 3, \ldots; \tag{1.62}$$

г) асимптотическая *формула Стирлинга*

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2} e^{-z} [1 + O(1/z)], \quad |\arg z| < \pi, \quad z \to \infty, \tag{1.63}$$

и ее следствия

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, (n/e)^n [1 + O(1/n)], \quad n \to \infty, \tag{1.64}$$

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi}\, |y|^{x-1/2} e^{-\pi|y|/2} [1 + O(1/y)], \quad y \to \infty; \tag{1.65}$$

д) разложение отношения двух гамма-функций на бесконечности

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b} \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{z^k} + z^{a-b} O(z^{-N-1}),$$
$$c_0 = 1, \ |\arg(z+a)| < \pi, \quad |z| \to \infty, \tag{1.66}$$

где коэффициенты c_k выражаются через обобщенные многочлены Бернулли по формуле $c_k = \frac{(-1)^k (b-a)_k}{k!} B_k^{a-b+1}(a)$, см. книгу Ю. Люка [1, с. 20] (относительно обобщенных многочленов Бернулли см. книгу А. О. Гельфонда [1, гл. IV]).

В некоторых случаях будет использоваться также логарифмическая производная гамма-функции, называемая еще *пси-функцией Эйлера*:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{1.67}$$

Г. *Бета-функцией* называется интеграл

$$\mathrm{B}(z, w) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} w > 0 \tag{1.68}$$

(эйлеров интеграл первого рода). Он выражается через гамма-функцию по формуле

$$\mathrm{B}(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.69}$$

Интегралу (1.68) можно придать смысл и при $\operatorname{Re} z = 0$ или $\operatorname{Re} w = 0$ ($z \neq 0$, $w \neq 0$), понимая его как условно сходящийся. В частности, существует предел

$$\mathrm{B}(z, i\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} x^{z-1} (1-x)^{i\theta-1} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \theta \neq 0, \tag{1.70}$$

совпадающий с аналитическим продолжением $\mathrm{B}(z, w)$ по w на значения $\operatorname{Re} w = 0$, $w \neq 0$.

Приведем значение полезного в дальнейшем интеграла

$$\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{\beta-1} dt = (x-y)^{\alpha+\beta-1} \mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha-\beta), \tag{1.71}$$

$$x > y, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1 - \operatorname{Re} \beta,$$

который сводится к интегралу (1.68) заменой $t = y + (x-y)\xi^{-1}$.

Д. *Гипергеометрическая функция Гаусса* определяется при $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \tag{1.72}$$

Его параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными (причем $c \neq 0, -1, -2, \ldots$), а $(a)_k$ — символ Похгаммера (1.45). Ряд сходится при $|z| < 1$ и при $|z| = 1$, $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда. Один из способов такого продолжения—использование *интегрального представления Эйлера*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt, \tag{1.73}$$

$$0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c, \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

в котором правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла. Условие $|\arg(1-z)| < \pi$ означает, что функция рассматривается в комплексной плоскости z с разрезом по лучу $(1, \infty)$, который соединяет особые точки $z=1$ и $z=\infty$ функции Гаусса. Отметим еще, что в (1.73) выбирается главное значение ветви $(1-tz)^{-a}=e^{-a\ln(1-tz)}$, где $\ln(1-tz)$ имеет вещественное значение при $z\in[0, 1]$.

Наиболее полный перечень частных случаев и свойств функции Гаусса можно найти в справочниках Г. Бейтмена, А. Эрдейи [1] и А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3]. Здесь же укажем лишь некоторые простейшие свойства этой функции:

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1(b, a; c; z), \tag{1.74}$$

$$ {}_2F_1(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}, \tag{1.75}$$

$$ {}_2F_1(a, b; c; 0) = {}_2F_1(0, b; c; z) = 1, \tag{1.76}$$

$$ {}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b)>0, \tag{1.77}$$

$$ \frac{d^k}{dz^k}\,{}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\,{}_2F_1(a+k, b+k; c+k; z) \tag{1.78}$$

и отметим, что через функцию Гаусса определяются многие важные специальные функции. Так, присоединенная функция Лежандра $P_\nu^\mu(z)$ представляется в виде

$$ P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right), \quad z\notin[-1, 1], \tag{1.79}$$

$$ P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad -1<x<1, \tag{1.80}$$

а с помощью предельных переходов из функции Гаусса получаются вырожденная гипергеометрическая функция и функции Бесселя, определяемые в п. Е, Ж.

Е. *Вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера)* определяется по формуле

$$ {}_1F_1(a; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} = \lim_{b\to\infty}{}_2F_1\left(a, b; c; \frac{z}{b}\right), \quad |z|<\infty. \tag{1.81}$$

Ж. *Функции Бесселя* $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ определяются на основе функции

$$ {}_0F_1(c; z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(c)_k\,k!} = \lim_{a\to\infty}{}_1F_1\left(a; c; \frac{z}{a}\right), \quad |z|<\infty, \tag{1.82}$$

по следующим формулам:

$$ J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}{}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!} \tag{1.83}$$

(функция Бесселя 1-го рода),

$$ I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)\,k!} = e^{-\pi i\nu/2}J_\nu(iz) \tag{1.84}$$

(модифицированная функция Бесселя),

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.85}$$

$$K_n(z) = \lim_{\nu\to n} K_\nu(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(функция Макдональда). Очевидно, что $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$.

Отметим здесь нужную нам в дальнейшем формулу

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{\nu+1} J_\nu(\rho a)}{(\rho^2+1)^\mu} d\rho = \frac{(a/2)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} K_{\nu-\mu+1}(a), \tag{1.86}$$

$$a > 0, \quad -1 < \operatorname{Re}\nu < 2\operatorname{Re}\mu - 1/2$$

(см., например, справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [2, 2.12.4.28]).

3. *Обобщенная дзета-функция Римана* (функция Римана—Гурвица) определяется рядом

$$\zeta(s, a) = \sum_{m=0}^\infty (a+m)^{-s}, \quad \operatorname{Re}s > 1. \tag{1.87}$$

Аналитическое продолжение этого ряда на остальные значения s осуществляется формулой Гурвица

$$\zeta(s, a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}}\left[\sin\frac{s\pi}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{\cos 2\pi ma}{m^{1-s}} + \cos\frac{s\pi}{2}\sum_{m=1}^\infty \frac{\sin 2\pi ma}{m^{1-s}}\right] \tag{1.88}$$

(см. книгу Э. Т. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона [1, с. 63], где также можно подробнее познакомиться со свойствами этой функции). В случае $s = 0, -1, -2, \ldots$ функция с точностью до постоянного множителя совпадает с многочленами Бернулли $B_n(z)$:

$$\zeta(-n, a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.89}$$

И. *Функцией Миттаг-Леффлера* называется целая функция, определяемая рядом

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0. \tag{1.90}$$

Также функцией Миттаг-Леффлера называют сумму более общего ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{1.91}$$

Таким образом, $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Известно соотношение

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z)\, dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \tag{1.92}$$

(см. справочник Г. Бейтмена, А. Эрдейи [3, 18.1 (26)]), приводящее к формуле для преобразования Лапласа функции $z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)$:

$$\int_0^\infty e^{-p\xi}\xi^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\xi^\alpha)\, d\xi = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^\alpha - 1}, \quad \operatorname{Re}p > 1 \tag{1.93}$$

(о преобразовании Лапласа см. п. 4°). В частности, при $\beta = 1$

$$\int_0^\infty e^{-p\xi} E_\alpha(\xi^\alpha)\, d\xi = \frac{1}{p - p^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re}p > 1. \tag{1.94}$$

Подробнее о функции Миттаг-Леффлера см. в справочнике Г. Бейтмена, А. Эрдейи [3, гл. 18] и в монографии М. М. Джрбашяна [2, гл. III, IV].

К. *G-функцией Мейера* порядка (m, n, p, q), где $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина—Барнса

$$G_{pq}^{mn}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right) = G_{pq}^{mn}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-s)}{\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+s)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)} z^{-s}ds, \tag{1.95}$$

где бесконечный контур L отделяет все левые полюса числителя $s = -b_j-k$, $j=1, 2, \ldots, m$, $k=0, 1, 2, \ldots$, от правых $s=1-a_j+k$, $j=1, 2, \ldots, n$, $k=0, 1, 2, \ldots$, и при соответствующих условиях может быть одного из трех типов $L=L_{-\infty}$, $L_{+\infty}$ или $L_{i\infty}$ (в частности, даже прямолинейным $L=(\gamma-i\infty, \gamma+i\infty)$). Описание контуров $L_{\pm\infty}$, $L_{i\infty}$ и наиболее полный перечень свойств и частных случаев G-функции можно найти в справочнике А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3], см. также книги Ю. Люка [1] и Y. L. Luke [1]. Здесь же мы приведем лишь несколько формул:

$$G_{pq}^{mn}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right) = G_{qp}^{nm}\left(\frac{1}{z} \,\middle|\, \begin{matrix}1-(b_q)\\1-(a_p)\end{matrix}\right), \tag{1.96}$$

$$z^{\alpha}G_{pq}^{mn}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right) = G_{pq}^{mn}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)+\alpha\\(b_q)+\alpha\end{matrix}\right), \tag{1.97}$$

$$G_{01}^{10}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\cdot\\0\end{matrix}\right) = e^{-z}, \quad G_{22}^{11}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}0, & 1/2\\0, & 1/2\end{matrix}\right) = \frac{1}{\pi(1-x)}, \tag{1.98}$$

$$G_{11}^{10}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right) = \frac{(1-x)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad G_{11}^{01}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right) = \frac{(x-1)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{1.99}$$

где y_+^{α} — символ усеченной степенной функции:

$$y_+^{\alpha} = y^{\alpha}, \quad y>0; \quad y_+^{\alpha}=0, \quad y<0. \tag{1.100}$$

Отметим также, что функции (1.72), (1.79)—(1.85), а также (1.90), (1.91) (при рациональных α) и многие другие важные специальные функции являются частными случаями G-функции Мейера.

4°. **Интегральные преобразования.** Как известно, классические одномерные интегральные преобразования имеют вид

$$(\mathrm{K}\varphi)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{k}(x, t)\varphi(t)\,dt = g(x), \tag{1.101}$$

где $\mathrm{k}(x, t)$—некоторая заданная функция (ядро преобразования), $\varphi(t)$— оригинал из некоторого класса функций, а $g(x)$—образ или значение преобразования функции $\varphi(t)$. Важнейшими интегральными преобразованиями являются преобразования Фурье ($\mathrm{k}(x, t)=e^{ixt}$) и Меллина (при $\mathrm{k}(x, t)=t^{x-1}$ в формуле (1.44)). Они связаны между собой заменами переменных и функций (см. книгу О. И. Маричева [10, с. 31]) и имеют обширные приложения.

Все другие классические интегральные преобразования можно разбить на два класса — преобразования типа свертки (с однородными ядрами типа (1.44), (1.42)) и преобразования по индексам (или параметрам) специальных функций, входящих в ядра. В каждом из этих классов были построены и частично исследованы преобразования с G-функцией Мейера в ядрах или с еще более общей H-функцией Фокса в ядрах, которые являются самыми общими из преобразований классического типа.

В классе преобразований типа свертки наиболее известны следующие преобразования вида (1.44) (определения приводимых далее специальных функций см., например, в справочнике А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3]): преобразование Лапласа ($\mathrm{k}(x, t) = e^{-xt}$), синус- и косинус-преобразования Фурье ($\mathrm{k}(x, t) = \sin xt$ и $\cos xt$), преобразование Ханкеля ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\, J_\nu(xt)$), преобразование Стилтьеса ($\mathrm{k}(x, t) = \Gamma(p)(x+t)^{-p}$), преобразование Гильберта (сингулярный интеграл) ($\mathrm{k}(x, t) = \pi^{-1}(t-x)^{-1}$ в (1.101)), преобразование Мейера ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\, K_\nu(xt)$), преобразование с функцией Неймана в ядре ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\, Y_\nu(xt)$), преобразование с функцией Струве в ядре ($\mathrm{k}(x, t) = \sqrt{xt}\ \mathbf{H}_\nu(xt)$), обобщенное преобразование Лапласа с функцией параболического цилиндра в ядре ($\mathrm{k}(x, t) = 2^{-\nu/2} e^{-xt/2} D_\nu(\sqrt{2xt})$), ${}_1F_1$-преобразование ($\mathrm{k}(x, t) = {}_1F_1(a; c; -xt)$), обобщенное преобразование Мейера ($\mathrm{k}(x, t) = (xt)^{\mu-1/2} e^{-xt/2} W_{\varkappa,\mu}(xt)$), гипергеометрическое преобразование Гаусса $\left(\mathrm{k}(x, t) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\, x}\, {}_2F_1\left(a,\ b;\ c;\ -\dfrac{t}{x}\right)\right)$, преобразование Лава $\left(\mathrm{k}(x, t) = \dfrac{(x-t)_+^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a, b; c; 1-\dfrac{t}{x}\right)\right)$, преобразование Бушмана $\left(\mathrm{k}(x, t) = (x^2-t^2)_+^{-\lambda/2} P_\nu^\lambda\left(\dfrac{t}{x}\right)\right)$, G-преобразование Нараина $\left(\mathrm{k}(x, t) = G_{pq}^{mn}\left(xt \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)\right)$ и др. К этому классу также относятся и основные предметы исследования данной монографии—интегралы дробного порядка α Римана — Лиувилля: левосторонний ($\mathrm{k}(x, t) = (x-t)_+^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$) и правосторонний ($\mathrm{k}(x, t) = (t-x)_+^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$).

Класс преобразований по индексам содержит преобразования Конторовича—Лебедева ($\mathrm{k}(x, t) = K_{ix}(t)$), Мелера—Фока ($\mathrm{k}(x, t) = P^k_{ix-1/2}(t)$, $t>1$; $\mathrm{k}(x, t) = 0$, $t<1$), Уимпа $\left(\mathrm{k}(x, t) = G^{m,n+2}_{p+2,q}\left(t \,\middle|\, \begin{matrix}1-\nu+ix,\ 1-\nu-ix,\ (a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)\right)$ и др.

Изложение теории интегральных преобразований читатель может найти, например, в книгах В. А. Диткина, А. П. Прудникова [1], М. М. Джрбашяна [2], Н. Н. Лебедева [3], Е. Титчмарша [1]. Нам же в дальнейшем понадобятся лишь простейшие сведения из этой теории, приводимые ниже.

А. *Преобразование Фурье* функции $\varphi(x)$ действительного аргумента $-\infty<x<\infty$ определяется формулой

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \mathcal{F}\{\varphi(t); x\} = \hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\varphi(t)\, dt. \tag{1.102}$$

Ее полезно иногда записывать в виде

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}-1}{it}\,\varphi(t)\, dt. \tag{1.103}$$

Обратное преобразование Фурье осуществляется формулой

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) = \frac{1}{2\pi}\,\hat{g}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} g(t)\, dt, \tag{1.104}$$

имеющей незначительные отличия от (1.102). Интегралы (1.102) и (1.104) абсолютно сходятся на функциях φ, $g\in L_1(R^1)$ и в среднем по норме пространства $L_2(R^1)$ для φ, $g\in L_2(R^1)$ (хорошо известны L_1-теория и L_2-теория интеграла Фурье, см. книги А. Н. Колмогорова, С. В. Фомина [1], С. М. Никольского [6] и И. Стейна, Г. Вейса [1]).

Преобразование Фурье функции $\varphi(x)\in L_1(R^1)$ ограничено, непрерывно и стремится к нулю при $|x|\to\infty$ (теорема Римана—Лебега). Скорость убывания $(\mathscr{F}\varphi)(x)$ на бесконечности при этом связана с гладкостью функции $\varphi(x)$. Эта связь выражается простыми формулами

$$\mathscr{F}\{D^n\varphi(t);\ x\} = (-ix)^n(\mathscr{F}\varphi)(x), \tag{1.105}$$

$$D^n(\mathscr{F}\varphi)(x) = \mathscr{F}\{(it)^n\varphi(t);\ x\}, \tag{1.106}$$

где $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$, $n = 1, 2, \ldots$, которые справедливы на достаточно хороших функциях (например, непрерывно дифференцируемых до порядка n и таких, что $\varphi^{(k)}(x)\in L_1(R^1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Особо отметим действие преобразования Фурье на оператор свертки (1.39). Если $h(x)$, $\varphi(x)\in L_1(R^1)$, то $(h*\varphi)(x)\in L_1(R^1)$ и справедливо равенство

$$\mathscr{F}\{(h*\varphi)(t);\ x\} = (\mathscr{F}h)(x)(\mathscr{F}\varphi)(x), \tag{1.107}$$

называемое *теоремой о свертке Фурье*. Оно сохраняет силу и при $h(x)\in L_1(R^1)$, $\varphi(x)\in L_2(R^1)$ (тогда $h*\varphi\in L_2(R^1)$) или $h(x)$, $\varphi(x)\in L_2(R^1)$ (тогда $(h*\varphi)(x)$ непрерывна, ограничена и исчезает на ∞).

Б. *Синус- и косинус-преобразования Фурье* функции $\varphi(x)$, $x>0$, определяются формулами

$$\mathscr{F}_c\varphi = (\mathscr{F}_c\varphi)(x) = \int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\,dt, \tag{1.108}$$

$$\mathscr{F}_s\varphi = (\mathscr{F}_s\varphi)(x) = \int_0^\infty \varphi(t)\sin xt\,dt, \tag{1.109}$$

а обратные им преобразования соответственно имеют вид

$$(\mathscr{F}_c^{-1}g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(t)\cos xt\,dt, \tag{1.110}$$

$$(\mathscr{F}_s^{-1}g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(t)\sin xt\,dt. \tag{1.111}$$

В. *Преобразование Меллина* функции $\varphi(x)$, $x>0$, определяется формулой

$$\varphi^*(s) = \mathfrak{M}\{\varphi(t);\ s\} = \int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)\,dt, \tag{1.112}$$

а обратное преобразование Меллина осуществляется с помощью равенства

$$\varphi(x) = \mathfrak{M}^{-1}\{\varphi^*(s);\ x\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\varphi^*(s)x^{-s}ds, \quad \gamma = \operatorname{Re}s. \tag{1.113}$$

Эти формулы получаются из (1.102), (1.104) заменой $\varphi(t)$ на $\varphi(e^t)$ и ix на s. Поменяв еще $h(t)$ и x на $h(e^t)$ и $\ln x$, из свертки Фурье (1.39) получим свертку Меллина

$$(h\circ\varphi)(x) = \int_0^\infty h\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}. \tag{1.114}$$

Теорема о свертке (1.107) по отношению к (1.114) принимает вид

$$(h \circ \varphi)^* (s) = h^* (s)\, \varphi^* (s). \tag{1.115}$$

Подставив в (1.113) вместо $\varphi^* (s)$ значение (1.115), с учетом (1.114) придем к равенству Парсеваля

$$\int_0^\infty h\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} h^* (s)\, \varphi^* (s)\, x^{-s} ds. \tag{1.116}$$

Если знаком $\longleftrightarrow$ обозначить соответствие между функцией и ее преобразованием Меллина, то легко установить формулы общего вида:

$$\varphi(ax) \longleftrightarrow a^{-s} \varphi^* (s); \quad x^\alpha \varphi(x) \longleftrightarrow \varphi^* (s + \alpha);$$

$$\varphi(x^p) \longleftrightarrow |p|^{-1} \varphi^* (s/p), \quad p \neq 0; \quad \varphi(x^{-1}) \longleftrightarrow \varphi^* (-s); \tag{1.117}$$

$$(x^n \varphi(x))^{(n)} \longleftrightarrow (1 - s)_n \varphi^* (s), \quad x_1^{s+k} \varphi^{(k)} (x_1) = 0, \ k = 0, \ 1, \ \ldots, \ n-1, \ x_1 = 0, \ \infty,$$

а также формулы преобразований Меллина ряда важных функций

$$e^{-x} \longleftrightarrow \Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0;$$

$$\frac{(1 - x)_+^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s + \alpha)}, \quad \operatorname{Re} \alpha, \ \operatorname{Re} s > 0;$$

$$\frac{(x - 1)_+^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \longleftrightarrow \frac{\Gamma(1 - \alpha - s)}{\Gamma(1 - s)}, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1 - \operatorname{Re} s;$$

$$\Gamma(p)(1 + x)^{-p} \longleftrightarrow \Gamma(s)\, \Gamma(p - s), \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p;$$

$$\frac{1}{\pi(1 - x)} \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\, \Gamma(1 - s)}{\Gamma(s + 1/2)\, \Gamma(1/2 - s)} = \operatorname{ctg} s\pi, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1;$$

$$J_\nu(2\sqrt{x}) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s + \nu/2)}{\Gamma(\nu/2 + 1 - s)}, \quad -\operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < 3/4; \tag{1.118}$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\, {}_1F_1(a; \ c; \ -x) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\, \Gamma(a - s)}{\Gamma(c - s)}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a;$$

$$\frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b)}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1(a, \ b; \ c; \ -x) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\, \Gamma(a - s)\, \Gamma(b - s)}{\Gamma(c - s)},$$

$$0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a, \ \operatorname{Re} b;$$

$$\frac{(1 - x)_+^{c - 1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1(a, \ b; \ c; \ 1 - x) \longleftrightarrow \frac{\Gamma(s)\, \Gamma(s + c - a - b)}{\Gamma(s + c - a)\, \Gamma(s + c - b)},$$

$$\operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re} s > 0, \ \operatorname{Re}(s + c - a - b) > 0.$$

Сопоставив соотношения (1.95), (1.113) и (1.118), несложно заметить что если в качестве L в (1.95) можно взять вертикальную прямую $L = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, не потеряв сходимости интеграла, то преобразование Меллина G-функции является отношение произведений гамма-функци общего вида, стоящее под интегралом (1.95). Частные случаи такого отношения приведены в правых частях формул (1.118); значит, левы части — частные случаи G-функции (см. (1.98), (1.99)).

Более подробно со свойствами преобразования Меллина и его табли цами можно ознакомиться в книгах О. И. Маричева [10] и А. П. Пру никова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [3].

Г. *Преобразование Лапласа* функции $\varphi(x)$, $0<x<\infty$, определяется формулой

$$L\varphi=(L\varphi)(p)=L\{\varphi(t);\ p\}=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt, \tag{1.119}$$

а обратное преобразование Лапласа имеет вид

$$(L^{-1}g)(x)=L^{-1}\{g(p);\ x\}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{px}g(p)\,dp,\quad \gamma=\operatorname{Re}p>p_0. \tag{1.120}$$

С помощью преобразования Меллина можно получить и другую форму обратного преобразования Лапласа (см. (8.29) в книге О. И. Маричева [10])

$$(L^{-1}g)(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{x^{-s}}{\Gamma(1-s)}g^*(1-s)\,ds,\quad \operatorname{Re}s=\gamma<1. \tag{1.121}$$

Сверткой для преобразования Лапласа является интеграл

$$[h*\varphi]=[h*\varphi](x)=\int\limits_0^x h(x-t)\varphi(t)\,dt. \tag{1.122}$$

Теорема о свертке (1.107) по отношению к (1.122) приобретает вид

$$L[h*\varphi](p)=(Lh)(p)(L\varphi)(p). \tag{1.123}$$

Преобразование Лапласа получается из преобразования Фурье (1.102) сужением функций (условием $\varphi(t)=0$ при $t<0$) и заменой переменной ix на комплексную переменную p. Его свойства подробно изложены, например, в книгах В. А. Диткина, А. П. Прудникова [1].

Укажем еще формулу преобразования Лапласа производной

$$(L\varphi^{(n)})(p)=p^n(L\varphi)(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-k-1}\varphi^{(k)}(0), \tag{1.124}$$

которая легко получается интегрированием по частям при условии существования соответствующих интегралов.

§ 2. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ И ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Понятие дробного интегрирования тесно связано с интегральным уравнением Абеля. Поэтому удобно начать с решения этого уравнения. Сначала дадим формальное решение уравнения Абеля, а затем приведем обоснование этого решения в классе интегрируемых функций. Располагая же обращением уравнения Абеля, можно конструктивно реализовать дробное дифференцирование как операцию, обратную дробному интегрированию. Исходя из этого, изложим соответствующие определения и приведем простейшие свойства дробного интегродифференцирования.

1°. Интегральное уравнение Абеля. Интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x),\qquad x>a, \tag{2.1}$$

где $0<\alpha<1$, называется *уравнением Абеля*. Будем считать, что $a>-\infty$ и что уравнение рассматривается на конечном отрезке $[a, b]$. Множитель $1/\Gamma(\alpha)$ в (2.1) нам удобно брать из соображений, которые проясняются ниже.

Уравнение (2.1) решается следующим приемом. Поменяв в (2.1) x на t и t на s соответственно, умножив обе части равенства на $(x-t)^{-\alpha}$ и проинтегрировав, получим

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha} \int_a^t \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \qquad (2.2)$$

Поменяв порядок интегрирования в левой части по формуле Дирихле (1.32), придем к равенству

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Внутренний интеграл легко вычисляется после замены $t=s+\tau(x-s)$ и использования формул (1.68), (1.69):

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = \mathrm{B}(\alpha,\ 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Поэтому

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \qquad (2.3)$$

Отсюда после дифференцирования

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \qquad (2.4)$$

Таким образом, если уравнение (2.1) имеет решение, то это решение необходимо имеет вид (2.4) и, следовательно, единственно.

Мы рассматривали в (2.1) для простоты случай $0<\alpha<1$. Случай $\alpha=1$ очевиден, а случай $\alpha>1$ сводится, вообще говоря, к $0<\alpha<1$ дифференцированием обеих частей (2.1). Решение уравнения Абеля при $\alpha>1$ практически содержится в теореме 2.4.

Совершенно аналогично рассматривается уравнение Абеля вида

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x<b, \qquad (2.5)$$

но вместо (2.4) при $0<\alpha<1$ получается формула обращения

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^\alpha}. \qquad (2.6)$$

2°. Обоснование решения уравнения Абеля в классе интегрируемых функций. Выясним, при каких условиях на правую часть $f(x)$ уравнение Абеля действительно разрешимо. Чтобы сформулировать основной результат этого пункта (теорему 2.1), введем обозначение

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \qquad (2.7)$$

Очевидно, что

$$\int_a^b |f_{1-\alpha}(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^b |f(t)|\,(b-t)^{1-\alpha}dt, \qquad (2.8)$$

так что если $f(x)\in L_1(a,\ b)$, то и $f_{1-\alpha}(x)\in L_1(a,\ b)$.

Теорема 2.1. *Для того чтобы уравнение Абеля* (2.1), $0<\alpha<1$, *было разрешимо в* $L_1(a, b)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b]) \text{ и } f_{1-\alpha}(a) = 0. \tag{2.9}$$

При выполнении этих условий уравнение имеет единственное решение, определяемое формулой (2.4).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение (2.1) разрешимо в $L_1(a, b)$. Тогда справедливы все рассуждения предыдущего пункта (при этом возможность перестановки порядка интегрирования в (2.2) обосновывается с помощью теоремы Фубини 1.1) и, следовательно, справедливо (2.3). Отсюда в силу (1.4) следуют условия (2.9).

Достаточность. Так как $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b])$, то $f'_{1-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x) \in$ $\in L_1(a, b)$. Поэтому функция, представляемая формулой (2.4), существует почти всюду и принадлежит $L_1(a, b)$. Покажем, что она действительно дает решение уравнения (2.1). Для этого подставим ее в левую часть и результат обозначим через $g(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f'_{1-\alpha}(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt = g(x). \tag{2.10}$$

Покажем, что почти всюду $g(x) = f(x)$, что и докажет теорему. Равенство (2.10) есть уравнение (2.1) относительно $f'_{1-\alpha}(t)$. Оно заведомо разрешимо, поэтому в силу (2.4) $f'_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}$, т. е. $f'_{1-\alpha}(x) =$ $= g'_{1-\alpha}(x)$. Функции $f_{1-\alpha}(x)$ и $g_{1-\alpha}(x)$ абсолютно непрерывны: первая по предположению, а вторая в силу равенства (2.3) с $g(x)$ в правой части. Поэтому $f_{1-\alpha}(x) - g_{1-\alpha}(x) = c$ (заметим, что требование абсолютной непрерывности в этом рассуждении существенно: его нельзя ослабить просто до непрерывности, так как известны функции непрерывные, но не абсолютно непрерывные, отличные от тождественной постоянной и имеющие почти всюду производную, равную нулю, см. книгу И. П. Натансона [1, с. 201]). У нас по предположению $f_{1-\alpha}(a) = 0$, а $g_{1-\alpha}(a) = 0$, потому что (2.10) — разрешимое уравнение. Поэтому $c = 0$, так что $\int_a^x \frac{f(t) - g(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt = 0$. Последнее равенство есть уравнение вида (2.1). В силу единственности решения $f(t) - g(t) \equiv 0$. Теорема 2.1 доказана.

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения Абеля нами сформулированы в терминах вспомогательной функции $f_{1-\alpha}(x)$. Следующая лемма и следствие из нее дают простое достаточное условие в терминах самой функции $f(x)$.

Лемма 2.1. *Если* $f(x) \in AC([a, b])$, *то и* $f_{1-\alpha}(x) \in AC([a, b])$, *при этом*

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[f(a)(x-a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x-t)^{1-\alpha} dt \right]. \tag{2.11}$$

Доказательство. Подставляя на основании (1.4) функцию $f(t) =$ $= f(a) + \int_a^t f'(s)\,ds$ в (2.7), получаем

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{f(a)}{\Gamma(2-\alpha)} (x-a)^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}} \int_a^t f'(s)\,ds. \tag{2.12}$$

Здесь первое слагаемое — абсолютно непрерывная функция, так как $(x-a)^{1-\alpha}=(1-\alpha)\int\limits_a^x (t-a)^{-\alpha}dt$. Поскольку

$$\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\int\limits_a^t f'(s)\,ds=\int\limits_a^x\left(\int\limits_a^t \frac{f'(s)\,ds}{(t-s)^{\alpha}}\right)dt \tag{2.13}$$

(что проверяется непосредственной перестановкой порядка интегрирования в обеих частях равенства), то и второе слагаемое в (2.12) является первообразной от суммируемой функции и, следовательно, абсолютно непрерывно. Представление (2.11) следует из (2.12) после перестановки порядка интегрирования. Лемма доказана.

Следствие. *Если $f(x)\in AC([a,b])$, то уравнение Абеля (2.1) разрешимо при $0<\alpha<1$ в $L_1(a, b)$, при этом решение (2.4) можно представить также в виде*

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}+\int\limits_a^x \frac{f'(s)\,ds}{(x-s)^{\alpha}}\right]. \tag{2.14}$$

Действительно, условия разрешимости (2.9) выполнены в силу леммы 2.1 и формул (2.12), (2.13). Так как $\varphi(x)=\frac{d}{dx}f_{1-\alpha}(x)$, то формула (2.14) получается дифференцированием равенства (2.11), при этом дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу (2.13).

Подчеркнем, что одновременно мы получили новую форму (2.14) обращения уравнения Абеля, применимую к абсолютно непрерывным правым частям $f(x)$.

Совершенно аналогично теореме 2.1 показывается, что уравнение (2.5) разрешимо в $L_1(a, b)$ для тех и только тех правых частей, для которых $\tilde{f}_{1-\alpha}(x)\in AC([a, b])$ и $\tilde{f}_{1-\alpha}(b)=0$, где

$$\tilde{f}_{1-\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1.$$

Решение (2.6) уравнения (2.5) в случае $f(x)\in AC([a, b])$ аналогично (2.14) можно записать в виде

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-t)^{\alpha}}-\int\limits_t^b \frac{f'(s)\,ds}{(s-t)^{\alpha}}\right]. \tag{2.15}$$

Заметим, что в § 14 будет дана и другая форма обращения уравнения Абеля (см. (14.29), (14.30)).

3°. Определение дробных интегралов и производных и простейшие свойства. Для n-кратного интеграла известна формула

$$\int\limits_a^x dx\int\limits_a^x dx\,\ldots\int\limits_a^x \varphi(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt, \tag{2.16}$$

доказательство которой легко осуществить методом математической индукции. Заметив, что $(n-1)!=\Gamma(n)$, видим, что правой части в (2.16) можно придать смысл и при нецелых значениях n. Поэтому естественно определять интегрирование нецелого порядка следующим образом.

Определение 2.1. *Пусть $\varphi(x)\in L_1(a, b)$. Интегралы*

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \quad x > a, \tag{2.17}$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad x < b, \tag{2.18}$$

где $\alpha > 0$, называются интегралами дробного порядка α. Первый из них называют иногда левосторонним, а второй — правосторонним. Операторы I_{a+}^{α}, I_{b-}^{α} называют операторами дробного интегрирования. Таким образом, дробный интеграл — это конструкция, уже знакомая нам по уравнению Абеля.

Интегралы (2.17), (2.18) принято называть также дробными интегралами Римана—Лиувилля.

Чаще всего нам придется иметь дело с левосторонним дробным интегрированием, для которого будем иногда использовать обозначение типа (2.7): $f_{\alpha}(x) = (I_{a+}^{\alpha} f)(x)$.

Дробные интегралы (2.17), (2.18), очевидно, определены на функциях $\varphi(x) \in L_1(a, b)$, существуя почти всюду. Далее в теореме 2.6 и в § 3 более подробно рассмотрим действие операторов I_{a+}^{α}, I_{b-}^{α} в классах $L_p(a, b)$ суммируемых функций, а также в классах гельдеровских функций.

Отметим простую связь между операторами I_{a+}^{α} и I_{b-}^{α}:

$$QI_{a+}^{\alpha} = I_{b-}^{\alpha}Q, \qquad QI_{b-}^{\alpha} = I_{a+}^{\alpha}Q, \tag{2.19}$$

где Q — *оператор «отражения»*: $(Q\varphi)(x) = \varphi(a+b-x)$.

Справедлива формула

$$\int_a^b \varphi(x)\, (I_{a+}^{\alpha}\psi)(x)\, dx = \int_a^b \psi(x)\, (I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)\, dx, \tag{2.20}$$

называемая иногда *формулой дробного интегрирования по частям* (см. также (2.64)). Она доказывается непосредственной перестановкой порядка интегрирования, например, в левой части по формуле Дирихле (1.32). Формула (2.20) справедлива, если

$$\varphi(x) \in L_p, \quad \psi(x) \in L_q, \quad 1/p + 1/q \leqslant 1 + \alpha, \quad p \geqslant 1, \quad q \geqslant 1,$$

но $p \neq 1$, $q \neq 1$ в случае $1/p + 1/q = 1 + \alpha$. Обоснование соотношения (2.20) при этих условиях будет дано в § 3, п. 3°.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi, \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta}\varphi = I_{b-}^{\alpha+\beta}\varphi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{2.21}$$

Тождества (2.21) выполняются в каждой точке, если $\varphi(t) \in C([a, b])$, и почти всюду, если $\varphi(t) \in L_1(a, b)$ (если $\alpha + \beta \geqslant 1$, то и для $\varphi(t) \in L_1(a, b)$ они справедливы в каждой точке). Доказательство свойства (2.21) получаем непосредственной проверкой:

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_a^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}};$$

меняя порядок интегрирования и делая после этого во внутреннем интеграле замену $t = \tau + s(x-\tau)$, находим

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}},$$

что и доказывает (2.21). Перестановка порядка интегрирования здесь обосновывается с помощью теоремы Фубини.

Свойство (2.21) называется *полугрупповым свойством* дробного интегрирования. В п. 7° этого параграфа мы рассмотрим это свойство и для дробного дифференцирования.

Что касается дробного дифференцирования, то его естественно ввести как операцию, обратную дробному интегрированию. С учетом полученного выше обращения уравнения Абеля (2.1) или уравнения (2.5) приходим к следующему определению.

Определение 2.2. *Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, каждое из выражений*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{2.22}$$

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{2.23}$$

называется дробной производной порядка α, $0<\alpha<1$, соответственно левосторонней и правосторонней.

Дробные производные (2.22), (2.23) называют обычно производными Римана — Лиувилля.

Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка $\alpha>0$, а дробные производные — пока только для порядка $0<\alpha<1$. Прежде чем перейти к случаю $\alpha\geqslant 1$, дадим простой достаточный признак существования дробных производных.

Лемма 2.2. *Если $f(x)\in AC([a, b])$, то функция $f(x)$ имеет почти всюду производные $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ и $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f$, $0<\alpha<1$, причем $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f\in L_r(a, b)$, $1\leqslant r<1/\alpha$, и их можно представить также в виде*

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \tag{2.24}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int\limits_x^b \frac{f'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right]. \tag{2.25}$$

Утверждение леммы вытекает из следствия леммы 2.1 (принадлежность $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f$ классу L_r, $1\leqslant r<1/\alpha$, проверяется непосредственно).

Отметим, что в § 14 приводятся формулы типа (2.24), (2.25) для дробных производных в случае, когда производная $f'(t)$ не обязательно интегрируема в точке $t=a$ или $t=b$ соответственно (см. (14.29), (14.30)).

Позже в § 13, пп. 2, 3° будут даны и другие достаточные условия для существования дробных производных, более полезные в приложениях и допускающие, в частности, интегрируемые особенности у функции $f(x)$. Отметим в связи с этим пример функции $f(x)=(x-a)^{-\mu}$, $0<\mu<1$, на которой $(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)$ определена. Непосредственное вычисление с учетом свойств бета- и гамма-функций приводит к формуле Эйлера

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(1-\mu-\alpha)} \frac{1}{(x-a)^{\mu+\alpha}}, \tag{2.26}$$

в частности

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x) \equiv 0, \text{ если } f(x) = \frac{1}{(x-a)^{1-\alpha}}. \tag{2.27}$$

Дробная производная (2.26) будет интегрируемой функцией, если $\mu+\alpha<1$. Эта ситуация будет характерной (см. § 13, пп. 2, 3°) в том смысле, что функция $f(x)$ с интегрируемой особенностью будет иметь интегрируемую дробную производную $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$, если порядок особенности у $f(x)$ меньше чем $1-\alpha$.

Замечание 2.1. Утверждение (2.27) означает, что функция $(x-a)^{\alpha-1}$ играет для дробной производной $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ ту же роль, что и постоянная для обычного дифференцирования.

Перейдем, наконец, к дробным производным больших порядков $\alpha\geqslant 1$. Будем пользоваться стандартными обозначениями: $[\alpha]$ — целая часть числа α, $\{\alpha\}$ — дробная часть числа α, $0\leqslant\{\alpha\}<1$, так что

$$\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}. \tag{2.28}$$

Если α — целое число, то под дробной производной порядка α будем понимать обычное дифференцирование:

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}=\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha},\quad \mathcal{D}^{\alpha}_{b-}=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha},\quad \alpha=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{2.29}$$

Если же α — не целое, то естественно ввести $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f$ по формулам

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f\overset{\text{def}}{=}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathcal{D}^{\{\alpha\}}_{a+}f=\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f, \tag{2.30}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f\overset{\text{def}}{=}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\mathcal{D}^{\{\alpha\}}_{b-}f=\left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1}I^{1-\{\alpha\}}_{b-}f. \tag{2.31}$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1, \tag{2.32}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f=\frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int\limits_{x}^{b}\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\quad n=[\alpha]+1. \tag{2.33}$$

Будем пользоваться также обозначениями

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f=I^{-\alpha}_{a+}f=(I^{\alpha}_{a+})^{-1}f,\quad \alpha>0, \tag{2.34}$$

понимая под каждым из них производную (2.22), (2.32) (аналогично истолковываются и символы $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f = I^{-\alpha}_{b-}f$). Отметим, что иногда (см. § 42) вместо $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}$ используется обозначение $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}f(x)=(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f)(x)$.

Достаточное условие существования производных (2.32), (2.33) состоит в том, чтобы

$$\int\limits_{a}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}}\in AC^{[\alpha]}([a,\ b]),$$

где $AC^{[\alpha]}([a,\ b])$ — класс, введенный определением 1.3. Для выполнения этого условия достаточно, чтобы $f(x)\in AC^{[\alpha]}([a,\ b])$.

Нетрудно проверить, что формула (2.26) имеет место при произвольных $\alpha>0$ и аналогично (2.27)

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)\equiv 0,\ \text{если}\ f(x)=(x-a)^{\alpha-k},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 1+[\alpha]. \tag{2.35}$$

4°. Дробные интегралы и производные комплексного порядка. Введенным при вещественных $\alpha>0$ в п. 3° операциям дробного интегрирования I^{α}_{a+}, I^{α}_{b-} и дробного дифференцирования $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$, $\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}$ можно придать смысл и при комплексных значениях α таких, что $\operatorname{Re}\alpha>0$ (о случае $\operatorname{Re}\alpha=0$ скажем особо). Для этого во всех определениях достаточно пояснить выбор значения многозначной степенной функции $\tau^{\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbf{C}$. Договоримся, что всюду в дальнейшем

$$\tau^{\alpha}=\tau^{\alpha_0}[\cos(\theta\ln\tau)+i\sin(\theta\ln\tau)],\qquad \alpha=\alpha_0+i\theta,\qquad \tau>0. \tag{2.36}$$

При этом сохраняются утверждения леммы 2.1, формулы (2.24), (2.25) (при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$), формулы (2.26), (2.27), (2.34) и только в определениях (2.30) — (2.33) следует заменить $[\alpha]$ на $[\operatorname{Re}\alpha]$.

Очевидно, что интегралы (производные) комплексного порядка α ($\operatorname{Re}\alpha\neq0$) являются аналитическим продолжением по параметру α дробных интегралов (производных), определенных первоначально при $\operatorname{Im}\alpha=0$.

В случае чисто мнимого порядка дробные производные, определенные, подобно (2.22), по формуле

$$\mathcal{D}^{i\theta}_{a+}f=\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x(x-t)^{-i\theta}f(t)\,dt, \tag{2.37}$$

имеют смысл. Использовать же (2.17) для определения дробных интегралов чисто мнимого порядка нельзя ввиду расходимости интеграла при $\alpha=i\theta$. Поэтому дробные интегралы чисто мнимого порядка принято определять как $I^{i\theta}_{a+}f=\dfrac{d}{dx}I^{1+i\theta}_{a+}f$. Таким образом,

$$I^{i\theta}_{a+}f\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\Gamma(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x(x-t)^{i\theta}f(t)\,dt, \tag{2.38}$$

$$I^{i\theta}_{b-}f\overset{\text{def}}{=}-\frac{1}{\Gamma(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^b(t-x)^{i\theta}f(t)\,dt. \tag{2.39}$$

Чтобы завершить определение дробного интегродифференцирования при всех $\alpha\in\mathbf{C}$, остается при $\alpha=0$ ввести единичный оператор:

$$\mathcal{D}^{0}_{a+}\varphi\overset{\text{def}}{=}I^{0}_{a+}\varphi=\varphi. \tag{2.40}$$

Как и следовало ожидать, между интегралами и производными чисто мнимого порядка нет существенного различия (ср. (2.37) и (2.38)) (в отличие от случая $\operatorname{Re}\alpha\neq0$). Операторы $I^{i\theta}_{a+}$ и $\mathcal{D}^{i\theta}_{a+}$ по своей природе примыкают скорее к сингулярным операторам, так что название «операции интегрирования и дифференцирования» для них чисто условное.

Лемма 2.3. *Если $f(x)\in AC([a,b])$, то $\mathcal{D}^{i\theta}_{a+}f$ существует почти для всех x и может быть представлена в виде (2.24) при $\alpha=i\theta$.*

Доказательство леммы 2.3 совершенно аналогично доказательству леммы 2.1 и следствия из нее.

Условие $f(x)\in AC([a,b])$ для существования дробных интегралов (производных) чисто мнимого порядка является избыточным, см. об этом в § 4, п. 2°, 2.10. Позже в лемме 8.2 § 8 увидим, что $\mathcal{D}^{i\theta}_{a+}f$ допускает доопределение на функциях $f\in L_p$, $p>1$, и оператор $\mathcal{D}^{i\theta}_{a+}$ ограничен в пространстве L_p, $p>1$.

Приведем в следующей далее теореме достаточные условия для существования дробных производных произвольного комплексного порядка α, $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$ (более простые случаи $0<\alpha<1$ и $\operatorname{Re}\alpha=0$ выделены в леммы 2.2 и 2.3). Поскольку теорема будет формулироваться в терминах класса AC^n (см. определение 1.3), предварительно дадим одно описание этого класса.

Лемма 2.4. *Классу $AC^n([a, b])$ принадлежат те и только те функции $f(x)$, которые представимы в виде*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\, dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \qquad (2.41)$$

где $\varphi(t) \in L_1(a, b)$, а c_k — произвольные постоянные.

Доказательство леммы вытекает непосредственно из определения класса AC^n $([a, b])$, свойства (1.4) и формулы (2.16).

Заметим, что в (2.41)

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), \qquad c_k = f^{(k)}(a)/k!. \qquad (2.42)$$

Теорема 2.2. *Пусть $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$ и $f(x) \in AC^n([a, b])$, $n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1$. Тогда $\mathcal{D}^\alpha_{a+}f$ существует почти всюду и может быть представлена в виде*

$$\mathcal{D}^\alpha_{a+}f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)\, dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \qquad (2.43)$$

Доказательство. Так как $f(x) \in AC^n$, то имеет место представление (2.41). Подставляя его с учетом (2.42) в (2.32), после несложных преобразований получим (2.43).

Завершим этот пункт замечанием о том, что полученные в п. 1° свойства (2.20), (2.21) сохраняются, как это нетрудно видеть, и при комплексных значениях α, β, если $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ (и $1/p+1/q \leqslant 1+\operatorname{Re}\alpha$ для (2.20)). Это же относится и к теореме 2.1, лемме 2.1 и следствию из последней при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. Отметим также справедливость следующей леммы.

Лемма 2.5. *Пусть $\varphi(t) \in L_1(a, b)$. Однородное интегральное уравнение Абеля $I^\alpha_{a+}\varphi = 0$ имеет только тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$ (почти всюду) при любом α таком, что $\operatorname{Re}\alpha > 0$.*

Доказательство. Обозначим $m = [\operatorname{Re}\alpha]$. Пусть вначале $\operatorname{Re}\alpha \neq 1, 2, \ldots$ Дифференцируя равенство $I^\alpha_{a+}\varphi = 0$ m раз, получаем $I^{\alpha-m}_{a+}\varphi = 0$. Здесь $0 < \operatorname{Re}(\alpha - m) < 1$ и тогда $\varphi \equiv 0$ в силу теоремы 2.1 (с учетом уже отмеченной ее справедливости в случае комплексного показателя). Если же $\alpha = m + i\theta$, то равенство $I^\alpha_{a+}\varphi = 0$ дифференцируем $m-1$ раз, придя в итоге к $\int_a^x (x-t)^{i\theta}\varphi(t)\, dt = 0$. Случай $\theta = 0$ ясен. Если же $\theta \neq 0$, то, действуя подобно (2.2), имеем $\int_a^{x-\varepsilon} \frac{dt}{(x-t)^{1-i\theta}} \int_a^s (t-s)^{i\theta}\varphi(s)\, ds = 0$, $\varepsilon > 0$. Меняя порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и совершая после этого замену $t = s + \xi(x-s)$, получаем $\int_a^{x-\varepsilon} \varphi(s) ds \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{x-s}} \xi^{-i\theta} \times (1-\xi)^{i\theta-1} d\xi = 0$. Так как $\varphi(s) \in L_1$, то здесь возможен предельный переход под знаком первого интеграла при условии сходимости при $\varepsilon \to 0$ внутреннего интеграла. Последний сходится в силу (1.70). Устремляя поэтому $\varepsilon \to 0$, получаем, что $B(1-i\theta,\ i\theta)\int\limits_a^x \varphi(s)\,ds = 0$, откуда $\varphi(x) \equiv 0$ почти всюду. Лемма доказана.

5°. Дробные интегралы некоторых элементарных функций. В следующих ниже формулах полагаем $\alpha \in \mathbf{C}$ и $I_{a+}^{\alpha}\varphi = \mathcal{D}_{a+}^{-\alpha}\varphi$ при $\operatorname{Re}\alpha < 0$.

1. Для степенных функций $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}$, $\varphi(x) = (b-x)^{\beta-1}$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, имеем соответственно

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}, \quad \alpha \in \mathbf{C}, \tag{2.44}$$

$$I_{b-}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta-1}, \quad \alpha \in \mathbf{C}. \tag{2.45}$$

Эти формулы примыкают к (2.26) и устанавливаются простым вычислением.

2. В более общем случае $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$ появляется гипергеометрическая функция Гаусса (1.72):

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = (b-a)^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\,{}_2F_1\left(1-\gamma,\ \beta;\ \alpha+\beta;\ \frac{x-a}{b-a}\right),$$
$$a < x < b, \tag{2.46}$$

где $\operatorname{Re}\beta > 0$, а γ — произвольное. Формула (2.46) получается простыми преобразованиями из представления Эйлера (1.73). Подобную формулу можно записать также и для функции $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}$, где $c < a$:

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = (a-c)^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}{}_2F_1\left(1-\gamma,\ \beta;\ \alpha+\beta;\ -\frac{x-a}{a-c}\right),$$
$$c < a < x, \tag{2.47}$$

где $\operatorname{Re}\beta > 0$, а γ — произвольное. Отметим также полезные частные случаи формул (2.46), (2.47), получаемые с учетом (1.75):

$$I_{a+}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}\right] = \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-x)^{\beta}}, \quad a < x < b, \tag{2.48}$$

$$I_{a+}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(x-c)^{\alpha+\beta}}\right] = \frac{1}{(a-c)^{\alpha}}\,\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(x-c)^{\beta}}, \quad c < a < x. \tag{2.49}$$

3. Пусть $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$, $\operatorname{Re}\beta > 0$. Тогда

$$I_{a+}^{\alpha}[(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[\psi(\beta)-\psi(\beta+\alpha)+$$
$$+\ln(x-a)], \tag{2.50}$$

где $\psi(z)$ — пси-функция Эйлера (1.67). Действительно, после замены $t = a + s(x-a)$ в интеграле (при $\operatorname{Re}\alpha > 0$)

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{(t-a)^{\beta-1}\ln(t-a)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt$$

получаем $I^{\alpha}_{a+}\varphi=[\Gamma(\alpha)]^{-1}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[c_1+c_2\ln(x-a)]$, где $c_1=$ $=\int\limits_0^1\frac{s^{\beta-1}\ln s}{(1-s)^{1-\alpha}}ds$, $c_2=\int\limits_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds$. Очевидно, $c_2=\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$, а c_1 вычисляется дифференцированием равенства $c_2=\mathrm{B}(\alpha,\ \beta)$ по параметру β.

4. Для функции $\varphi(x)=\cos\sqrt{x-a}\,/\sqrt{x-a}$ имеем

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi=2^{\alpha-1/2}\sqrt{\pi}\,(x-a)^{(2\alpha-1)/4}J_{\alpha-1/2}(\sqrt{x-a}),\quad \operatorname{Re}\alpha\geqslant 0, \tag{2.51}$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя (1.83). Формула (2.51) получается разложением $\cos x$ в ряд Тейлора. Соотношение (2.51) представляет собой известную в теории бесселевых функций формулу Пуассона, имеющую в равносильной форме вид

$$J_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}}\int\limits_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}dt. \tag{2.52}$$

Равенства (2.51), (2.52) получаются друг из друга простыми заменами переменных.

5. Также разложением в ряд получаются формулы

$$I^{\alpha}_{a+}[(x-a)^{\alpha-1}\cos A(x-a)]=\sqrt{\pi}\left(\frac{x-a}{A}\right)^{\alpha-1/2}\times$$
$$\times\cos\frac{A(x-a)}{2}J_{\alpha-1/2}\left(\frac{A(x-a)}{2}\right),\quad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{2.53}$$

$$I^{\alpha}_{a+}[(x-a)^{\mu/2}J_\mu(\sqrt{x-a})]=2^{\alpha}(x-a)^{(\mu+\alpha)/2}J_{\mu+\alpha}(\sqrt{x-a}), \tag{2.54}$$
$$\alpha\in\mathbf{C},\quad \operatorname{Re}\mu>-1.$$

При $\mu=-1/2$ из (2.54) следует соотношение (2.51).

Мы не останавливаемся здесь на дробном интегродифференцировании показательной функции $e^{\gamma x}$ и тригонометрических функций. Это связано с существом дела: «римановская» форма дробного интегрирования, используемая при $a\neq-\infty$ (или $b\neq+\infty$), не дает естественной формулы типа $I^\alpha(e^{\gamma x})=\gamma^{-\alpha}e^{\gamma x}$. Такой результат получится, если вместо I^α_{a+} использовать «лиувиллевскую» форму дробного интегродифференцирования, отвечающую случаю $a=-\infty$ (или $b=+\infty$). Поэтому на дробном интегрировании показательной и тригонометрических функций мы остановимся в § 5, п. 1°, см. также § 9, п. 3°, где наряду с краткими таблицами дробных интегралов различных элементарных и специальных функций приводится информация о других таких таблицах и методах вычисления этих интегралов.

6°. Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции. Хорошо известно, что обычное дифференцирование d/dx и интегрирование $\int\limits_a^x\ldots dt$ являются взаимно обратными операциями, если дифференцирование применяется слева, т. е. $(d/dx)\int\limits_a^x\varphi(t)\,dt=\varphi(x)$. Однако, вообще говоря, $\int\limits_a^x\varphi'(t)\,dt\neq\varphi(x)$ (так как добавляется постоянная — $\varphi(a)$). Точно так же $(d/dx)^n I^n_{a+}\varphi\equiv\varphi$, но $I^n_{a+}\varphi^{(n)}\neq\varphi$, отличаясь от φ многочленом порядка $n-1$. Подобным же образом для дробного дифференцирования всегда будет $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi\equiv\varphi$, но $I^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}\varphi$ не всегда совпадает с $\varphi(x)$

(так как вмешиваются функции $(x-a)^{\alpha-k}$, $k=1, 2, \ldots, [\mathrm{Re}\,\alpha]-1$, играющие роль многочленов для дробного дифференцирования, см. (2.35)). Доказываемая ниже теорема 2.4 проясняет ситуацию. Предварительно нам удобно ввести

Определение 2.3. *Через* $I^{\alpha}_{a+}(L_p)$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, *обозначим класс функций* $f(x)$, *представимых левосторонним дробным интегралом порядка* α *от суммируемой функции:* $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_p(a, b)$, $1\leqslant p<\infty$.

Описание класса $I^{\alpha}_{a+}(L_1)$ дает следующая теорема, обобщающая теорему 2.1.

Теорема 2.3. *Для того чтобы* $f(x)\in I^{\alpha}_{a+}(L_1)$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{n-\alpha}(x)\overset{\mathrm{def}}{=}I^{n-\alpha}_{a+}f\in AC^n([a, b]), \tag{2.55}$$

где $n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1$, *и чтобы*

$$f^{(k)}_{n-\alpha}(a)=0, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.56}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f=I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_1(a, b)$. Тогда в силу полугруппового свойства (2.21) $I^{n-\alpha}_{a+}f=I^{n}_{a+}\varphi$, $\varphi\in L_1(a, b)$, и выполнимость условий (2.55), (2.56) вытекает из леммы 2.4.

Достаточность. При выполнении условий (2.55), (2.56) можем представить $f_{n-\alpha}(x)$, согласно лемме 2.4, в виде $f_{n-\alpha}(x)=I^{n}_{a+}\varphi$, где $\varphi\in L_1(a, b)$. Следовательно, $I^{n-\alpha}_{a+}f=I^{n}_{a+}\varphi=I^{n-\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi$ в силу полугруппового свойства (2.21). Отсюда $I^{n-\alpha}_{a+}(f-I^{\alpha}_{a+}\varphi)=0$. На основании леммы 2.5 $f-I^{\alpha}_{a+}\varphi=0$, поскольку $\mathrm{Re}(n-\alpha)>0$. Теорема доказана.

В связи с определением 2.3 подчеркнем, что представимость функции $f(x)$ дробным интегралом порядка α и существование у $f(x)$ дробной производной этого порядка — не одно и то же. Так, для знакомой нам функции $f(x)=(x-a)^{\alpha-1}$, $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$, дробная производная $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ существует и тождественно равна нулю, см. (2.35). Однако функция $(x-a)^{\alpha-1}$ не представима дробным интегралом порядка α ни от какой суммируемой функции (для нее $f_{1-\alpha}(a)\neq0$, так что нарушено условие (2.56)). Читателю, знакомому с теорией обобщенных функций, ясно, что функция $(x-a)^{\alpha-1}$ может рассматриваться лишь как интеграл порядка α от обобщенной функции, а именно от дельта-функции Дирака $\delta(x-a)$ (см. § 8, п. 1°).

Далее подробнее остановимся на самом понятии существования дробной производной. Пусть для простоты $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$. Говоря, что $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f=(d/dx)I^{1-\alpha}_{a+}f$ существует почти всюду, мы должны учитывать следующее. Известно, что существование у функции $g(x)$ суммируемой производной $g'(x)$ почти для всех x еще не обеспечивает восстановления $g(x)$ через первообразную, т. е. $\int\limits_a^x g'(t)\,dt\neq g(x)+c$ (см., например, книгу И. П. Натансона [1, с. 199]). Более того, существует (см. там же, с. 201) монотонная непрерывная функция $g(x)\neq\mathrm{const}$, для которой $g'(x)=0$ почти всюду (мы уже говорили об этом при доказательстве теоремы 2.1). Эти «экзотические» явления устраняются, если иметь дело с абсолютно непрерывными функциями (напомним, что и интегрирование по частям в интеграле Лебега возможно, вообще говоря, лишь на абсолютно непрерывных функциях; это уже использовалось при доказательстве теоремы 2.3).

Из сказанного ясно, что предположения «дробная производная $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ существует почти всюду и суммируема» недостаточно для построения удовлетворительной теории, т. е. недостаточно для представимости $f(x)$

в виде дробного интеграла порядка α. Нужно вложить в это предположение более сильный смысл. Для этого введем

Определение 2.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Будем говорить, что функция* $f(x) \in L_1(a, b)$ *имеет суммируемую дробную производную* $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$, *если* $I_{a+}^{n-\alpha} f \in AC^n([a, b])$, $n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1$.

Другими словами, этим определением введено понятие, использующее только первое из двух условий (2.55), (2.56), описывающих класс $I_{a+}^{\alpha}(L_1)$.

Замечание 2.2. Если $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = (d/dx)^n I_{a+}^{n-\alpha} f$ существует в обычном смысле, т. е. $I_{a+}^{n-\alpha} f$ дифференцируема до порядка n в каждой точке, то, очевидно, $f(x)$ имеет производную $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$ в смысле определения 2.4.

Мы сочли необходимым подробно остановиться на приведенных соображениях и, в частности, на определении 2.4, поскольку смешение двух понятий (существование дробной производной и представимость функции дробным интегралом), а также нечеткое толкование первого из этих понятий приводило к ошибкам в работах многих авторов.

Следующая теорема, основная в этом пункте, отражает вопрос, вынесенный в заголовок.

Теорема 2.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Тогда равенство*

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \varphi(x) \tag{2.57}$$

выполняется для любой суммируемой функции $\varphi(x)$, *а равенство*

$$I_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = f(x) \tag{2.58}$$

— *для функции*

$$f(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_1). \tag{2.59}$$

Если вместо (2.59) предположить, что функция $f(x) \in L_1(a, b)$ *имеет суммируемую производную* $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$ *(в смысле определения 2.4), то (2.58), вообще говоря, неверно и заменяется формулой*

$$I_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a), \tag{2.60}$$

де $n = [\operatorname{Re}\alpha] + 1$ *и* $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f$. *В частности, при* $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$

$$I_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}. \tag{2.61}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \int_a^t \frac{\varphi(s)\, ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Меняя порядок интегрирования, после вычисления внутреннего интеграла получаем

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \varphi(s)(x-s)^{n-1} ds \tag{2.62}$$

и тогда из (2.62) ввиду (2.16) следует (2.57).

Далее, (2.58) при условии (2.59) вытекает незамедлительно из (2.57) (отметим также, что (2.58) фактически было получено при доказательстве достаточной части теоремы 2.3). Остается доказать (2.60). Для этого нужно произвести те же рассуждения, что и при доказательстве достаточности в теореме 2.3, только на этот раз внеинтегральные слагаемые не будут исчезать и дадут дополнительную сумму в (2.60).

Следствие 1. *Справедлив следующий аналог формулы Тейлора:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+j} f)(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j} + R_n(x), \quad \operatorname{Re}\alpha > 0, \tag{2.63}$$

где $R_n(x) = (I_{a+}^{\alpha+n} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+n} f)(x)$, *в предположении, что* $f(x)$ *имеет суммируемую производную* $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+n} f$ *(в смысле определения 2.4).*

Действительно, формула (2.63) есть очевидная перефразировка свойства (2.60).

Отметим еще, что некоторое обобщение формулы (2.60) приведено в § 4, п. 2°, 2.8.

Следствие 2. *Справедлива формула*

$$\int_a^b f(x) (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g)(x)\, dx = \int_a^b g(x) (\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x)\, dx, \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1, \tag{2.64}$$

называемая, как и (2.20), формулой дробного интегрирования по частям Предполагается, что $f(x) \in I_{b-}^{\alpha}(L_p)$, $g(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_q)$, $p^{-1} + q^{-1} \leqslant 1 + \alpha$.

Действительно, (2.64) следует из (2.20), если положить $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f = \varphi(x)$, $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g = \psi(x)$ и учесть (2.58).

Простое достаточное условие на функции $f(x)$, $g(x)$ для выполнимости (2.64) состоит в том, чтобы $f(x)$, $g(x) \in C([a, b])$, а $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} g)(x)$, $(\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f)(x)$ существовали в каждой точке $x \in [a, b]$ и были непрерывны. Позже, в § 14 в следствии из теоремы 14.4 укажем менее ограничительные достаточные условия.

7°. Формулы композиции. Связь с полугруппами операторов. В следующей теореме нам удобно воспользоваться единообразным обозначением (2.34) и для дробных интегралов, и для дробных производных, считая, что $I_{a+}^{\alpha} = \mathcal{D}_{a+}^{-\alpha}$ при $\operatorname{Re}\alpha < 0$.

Теорема 2.5. *Равенство*

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} \varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta} \varphi \tag{2.65}$$

выполняется в каждом из следующих случаев:

1) $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 0$, $\varphi(x) \in L_1(a, b)$;

2) $\operatorname{Re}\beta < 0$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\varphi(x) \in I_{a+}^{-\beta}(L_1)$;

3) $\operatorname{Re}\alpha < 0$, $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < 0$, $\varphi(x) \in I_{a+}^{-\alpha-\beta}(L_1)$

(допустимы также случаи $\alpha = 0$, $\beta = 0$ *и* $\alpha + \beta = 0$ *при вещественных* α *и* β*).*

Доказательство. 1) В случае $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$ *полугрупповое свойство* (2.65) уже установлено в (2.21). Рассмотрим случай $\operatorname{Re}\alpha = 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, положив $\alpha = i\theta$. Тогда

$$I_{a+}^{i\theta} I_{a+}^{\beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(s)\, ds \int_s^x (x-t)^{i\theta} (t-s)^{\beta-1} dt =$$

$$= \frac{B(1+i\theta, \beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(s)(x-s)^{i\theta+\beta} ds = \frac{d}{dx} I_{a+}^{i\theta+\beta+1} \varphi. \tag{2.66}$$

Так как $\operatorname{Re}(i\theta + \beta + 1) = 1 + \operatorname{Re}\beta > 1$, а равенство (2.65) уже доказано при $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, то $I_{a+}^{i\theta+\beta+1}\varphi = I_{a+}^{1} I_{a+}^{i\theta+\beta}\varphi = \int_a^x (I_{a+}^{i\theta+\beta}\varphi)(t)\, dt$, и поэтому из (2.66) следует (2.65), когда $\alpha = i\theta$.

Теперь в случае 1) осталось рассмотреть возможность $\operatorname{Re}\alpha<0$. Имеем

$$I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi=\mathcal{D}^{-\alpha}_{a+}I^{-\alpha+\beta+\alpha}_{a+}\varphi=\mathcal{D}^{-\alpha}_{a+}I^{-\alpha}_{a+}I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi. \tag{2.67}$$

Последний переход справедлив ввиду (2.65), поскольку $\operatorname{Re}(-\alpha)>0$ и $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)>0$. Применив далее (2.57), из (2.67) получаем (2.65) и в случае $\operatorname{Re}\alpha<0$.

2) В случае $\operatorname{Re}\beta<0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$ по предположению имеем: $\varphi=I^{-\beta}_{a+}\psi$, где $\psi\in L_1$, поэтому $I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi=I^{\alpha+\beta}_{a+}I^{-\beta}_{a+}\psi$. Так как $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+(-\beta))>0$, то согласно случаю 1) отсюда следует, что $I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi=I^{\alpha}_{a+}\psi=I^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{-\beta}_{a+}\varphi=$ $=I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi$.

3) В оставшемся случае по предположению $\varphi=I^{-\alpha-\beta}_{a+}\psi$, $\psi\in L_1$, и тогда $I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi=I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}I^{-\alpha-\beta}_{a+}\psi=I^{\alpha}_{a+}I^{-\alpha}_{a+}\psi$ согласно случаю 1). Таким образом, $I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi=\mathcal{D}^{-\alpha}_{a+}I^{-\alpha}_{a+}\psi$, откуда в силу (2.57) и следует (2.65).

Остается заметить, что случаи $\alpha=0$, $\beta=0$ тривиальны, а случай $\alpha+\beta=0$ совпадает с (2.57) или (2.58). Теорема доказана.

Замечание 2.3. В теореме 2.5 остались неохваченными случаи: 1) $\operatorname{Re}\beta=0$, $\operatorname{Re}\alpha>0$; 2) $\operatorname{Re}(\alpha+\beta)=0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ (но случай $\alpha+\beta=0$, $\operatorname{Re}\beta>0$ содержится в теореме 2.4); 3) $\operatorname{Re}\alpha=0$, $\operatorname{Re}\beta<0$. Можно показать, что утверждения теоремы 2.5 выполняются и в этих случаях, если сузить класс допускаемых функций соответственно условиями: 1) существует суммируемая производная мнимого порядка $\mathcal{D}^{-\beta}_{a+}\varphi$; 2) существует суммируемая производная мнимого порядка $\mathcal{D}^{-\alpha-\beta}_{a+}\varphi$; 3) существуют суммируемые производные $\mathcal{D}^{-\beta}_{a+}\varphi$ и $\mathcal{D}^{-\alpha-\beta}_{a+}\varphi$. Все эти условия и условия теоремы 2.5 после объединения приводят к следующему утверждению: *пусть $\varphi\in L_1(a, b)$, причем существуют и суммируемы $I^{\beta}_{a+}\varphi$ и $I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi$; тогда существует и суммируема композиция $I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi$ и при* $\operatorname{Re}\beta\geqslant 0$ *выполняется равенство (2.65)*, см. теорему 10.1 ниже.

Замечание 2.4. В случае 2) теоремы 2.5 при нарушении условия $\varphi\in I^{-\beta}_{a+}(L_1)$ равенство (2.65) не выполняется. Если вместо этого условия потребовать лишь, что функция $\varphi(x)$ имеет суммируемую дробную производную $\mathcal{D}^{-\beta}_{a+}\varphi$ (в смысле определения 2.4), то равенство (2.65) заменится на соотношение

$$I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi=I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(n-k-1)}_{n+\beta}(a)}{\Gamma(\alpha-k)}(x-a)^{\alpha-k-1}, \tag{2.68}$$

где $n=[-\operatorname{Re}\beta]+1$ и $\varphi_{n+\beta}(x)=I^{n+\beta}_{a+}\varphi$, которое выводится из (2.60) помощью свойства (2.65).

Доказанное свойство (2.65) дробных интегралов и производных называется *полугрупповым свойством.* Этот термин связан с понятием полугруппы операторов. Приведем соответствующее определение, считая для простоты параметр α вещественным.

Определение 2.5. *Однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов T_α, $\alpha\geqslant 0$, в банаховом пространстве X образует полугруппу, если*

$$T_\alpha T_\beta=T_{\alpha+\beta},\quad \alpha\geqslant 0,\quad \beta\geqslant 0, \tag{2.69}$$

$$T_0\varphi=\varphi,\quad \varphi\in X. \tag{2.70}$$

Полугруппа операторов называется сильно непрерывной, если

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\|T_\alpha\varphi-T_{\alpha_0}\varphi\|_X=0,\quad 0\leqslant\alpha_0<\infty, \tag{2.71}$$

для каждого $\varphi \in X$. Полугруппа называется непрерывной в равномерной (операторной) топологии, если предел (2.71) существует в операторной топологии, т. е. $\lim \| T_\alpha - T_{\alpha_0} \| = 0$ *при* $\alpha \to \alpha_0$.

Легко видеть в силу (2.69), что если полугруппа сильно непрерывна при $\alpha = 0$, то она неизбежно сильно непрерывна при всех $\alpha \geqslant 0$.

Теорема 2.6. *Операторы дробного интегрирования образуют в* $L_p(a, b)$, $p \geqslant 1$, *полугруппу, непрерывную в равномерной топологии для всех* $\alpha > 0$ *и сильно непрерывную для всех* $\alpha \geqslant 0$.

Доказательство. Прежде всего отмечаем, что операторы дробного интегрирования ограничены в $L_p(a, b)$, т. е. имеют место следующие оценки:

$$\| I_{a+}^\alpha \varphi \|_{L_p(a, b)} \leqslant \frac{(b-a)^{\mathrm{Re}\,\alpha}}{\mathrm{Re}\,\alpha \, |\Gamma(\alpha)|} \| \varphi \|_{L_p(a, b)}, \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \tag{2.72}$$

$$\| I_{b-}^\alpha \varphi \|_{L_p(a, b)} \leqslant \frac{(b-a)^{\mathrm{Re}\,\alpha}}{\mathrm{Re}\,\alpha \, |\Gamma(\alpha)|} \| \varphi \|_{L_p(a, b)}, \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0. \tag{2.73}$$

Это проверяется несложными преобразованиями с помощью обобщенного неравенства Минковского (1.33). Свойство (2.69), т. е. равенство (2.65), доказано в теореме 2.5. Остается выяснить характер непрерывности полугруппы. Пусть $\alpha_0 > 0$. Имеем

$$I_{a+}^{\alpha_0} \varphi - I_{a+}^\alpha \varphi = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right] \int_a^x \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha_0}} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [(x-t)^{\alpha_0 - 1} - (x-t)^{\alpha-1}] \varphi(t)\, dt = A\varphi + B\varphi.$$

Оценим $\| A\varphi \|_{L_p}$, $\| B\varphi \|_{L_p}$. В силу (2.72)

$$\| A\varphi \|_{L_p} \leqslant \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} \| \varphi \|_{L_p}. \tag{2.74}$$

Продолжая $\varphi(x)$ нулем за пределы $[a, b]$, получим

$$| B\varphi | \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha - \alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}} |\varphi(x-t)|\, dt.$$

Следовательно, в силу неравенства Минковского (1.33)

$$\| B\varphi \|_{L_p} \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha-\alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}}\, dt \left(\int_a^b |\varphi(x-t)|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha-\alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}}\, dt \, \| \varphi \|_{L_p}. \tag{2.75}$$

Собирая оценки (2.74), (2.75), получаем

$$\frac{\| (I_{a+}^\alpha - I_{a+}^{\alpha_0}) \varphi \|}{\| \varphi \|} \leqslant \left| 1 - \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha)} \right| \frac{(b-a)^{\alpha_0}}{\Gamma(1+\alpha_0)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{b-a} \frac{|1 - t^{\alpha-\alpha_0}|}{t^{1-\alpha_0}}\, dt.$$

Замечая, что в интеграле справа можно перейти к пределу при $\alpha \to \alpha_0$ и что функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывна при $\alpha > 0$ и $\Gamma(\alpha) \neq 0$, приходим к равенству $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \| I_{a+}^\alpha - I_{a+}^{\alpha_0} \| = 0$.

Пусть $\alpha_0 = 0$. Покажем, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \| I_{a+}^{\alpha}\varphi - \varphi \|_{L_p} = 0. \tag{2.76}$$

Имеем

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi - \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt - \varphi(x) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x-a} \frac{\varphi(x-t)-\varphi(x)}{t^{1-\alpha}}\,dt + \varphi(x)\left[\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1\right] = U\varphi + V\varphi,$$

так что $\| I_{a+}^{\alpha}\varphi - \varphi \|_{L_p} \leqslant \| U\varphi \|_{L_p} + \| V\varphi \|_{L_p}$. Очевидно,

$$\| V\varphi \|_{L_p}^p \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|^p \left| \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - 1 \right|^p dx.$$

В последнем интеграле возможен предельный переход под знаком интеграла при $\alpha \to 0$ в силу мажорантной теоремы Лебега 1.2. Поэтому $\lim\limits_{\alpha\to 0+} \| V\varphi \|_{L_p} = 0$. Далее, для оценки $U\varphi$ приблизим функцию $\varphi(x)$ многочленом $P(x)$ по норме пространства L_p (см. свойство д) пространства L_p в § 1, п. 2°). Тогда

$$\| U\varphi \|_{L_p} \leqslant \| U(\varphi - P) \|_{L_p} + \| UP \|_{L_p}. \tag{2.77}$$

Применяя в первом слагаемом обобщенное неравенство Минковского (при обычном продолжении нулем функции $\varphi(x)$ за пределы $[a, b]$), получаем

$$\| U(\varphi - P) \|_{L_p} \leqslant \frac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \| \varphi - P \|_{L_p} < \text{const}\,\varepsilon.$$

Для второго слагаемого в (2.77)

$$| UP | \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{b-a} t^{\alpha} \max |P'(t)|\,dt \underset{\alpha\to 0}{\to} 0,$$

что и завершает оценки. Теорема доказана.

Непрерывность полугруппы I_{a+}^{α} в точке $\alpha = 0$ можно сформулировать не только в терминах сходимости по норме пространства L_p, но и в терминах сходимости почти всюду. Дадим следующее

Определение 2.6. *Точка x_0 называется точкой Лебега функции $\varphi(x) \in L_1(a, b)$, если*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t [\varphi(x_0 - s) - \varphi(x_0)]\,ds = 0. \tag{2.78}$$

Известно (см., например, книгу А. Зигмунда [2, с. 111]), что почти все точки $x_0 \in [a, b]$ являются точками Лебега функции $\varphi(x) \in L_1(a, b)$.

Теорема 2.7. *Пусть $\varphi(x) \in L_1(a, b)$. Тогда в каждой точке Лебега функции $\varphi(x)$ и, следовательно, почти всюду на $[a, b]$ справедливо равенство*

$$\lim_{\alpha\to 0+} (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \varphi(x). \tag{2.79}$$

Доказательство. Пусть x_0 — точка Лебега функции $\varphi(x)$. Обозначим

$$\Phi(t) = \int_{x_0-t}^{x_0} \varphi(s)\,ds = \int_0^t \varphi(x_0 - s)\,ds. \tag{2.80}$$

Имеем

$$\frac{\Phi(t)}{t} - \varphi(x_0) = \frac{1}{t}\int_0^t [\varphi(x_0 - s) - \varphi(x_0)]\,ds \to 0$$

в силу (2.78). Следовательно, $\Phi(t) = t[\varphi(x_0) + b(t)]$, где $b(t)$ — ограниченная функция, причем $|b(t)| < \varepsilon$ как только $0 < t < \delta = \delta(\varepsilon)$. Имеем

$$I^\alpha_{a+}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a} t^{\alpha-1}\varphi(x_0 - t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a} t^{\alpha-1}d\Phi =$$

$$= \frac{\Phi(x_0 - a)}{\Gamma(\alpha)(x_0 - a)^{1-\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Phi(t)}{t^{1-\alpha}}\Bigg|_{t=0} + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x_0-a}\frac{\Phi(t)\,dt}{t^{2-\alpha}} =$$

$$= \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{x_0-a} t^{\alpha-1}b(t)\,dt + \frac{\Phi(x_0 - a)}{\Gamma(\alpha)(x_0 - a)^{1-\alpha}} +$$

$$+ \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\varphi(x_0)\int_0^{x_0-a} t^{\alpha-1}dt + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\delta t^{\alpha-1}b(t)\,dt.$$

Отсюда

$$(I^\alpha_{a+}\varphi)(x_0) - \varphi(x_0) = \frac{\Phi(x_0 - a)}{\Gamma(\alpha)(x_0 - a)^{1-\alpha}} + \varphi(x_0)\left[\frac{1-\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_0 - a)^\alpha - 1\right] +$$

$$+ \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\delta t^{\alpha-1}b(t)\,dt + \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_\delta^{x_0-a} t^{\alpha-1}b(t)\,dt.$$

В последнем интеграле можно перейти к пределу при $\alpha \to 0$, поэтому

$$\lim_{\alpha\to0+}|(I^\alpha_{a+}\varphi)(x_0) - \varphi(x_0)| \leqslant |\varphi(x_0)|\lim_{\alpha\to0+}\left|\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(x_0 - a)^\alpha - 1\right| +$$

$$+ \lim_{\alpha\to0+}\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^\delta t^{\alpha-1}b(t)\,dt\right| \leqslant \lim_{\alpha\to0+}\frac{1-\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\delta^\alpha\varepsilon = \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε мы получаем отсюда (2.79). Теорема 2.7 доказана.

Замечание 2.5. Можно указать более точно характер приближения оператора I^α_{a+} к единичному при $\alpha \to +0$:

$$(I^\alpha_{a+}\varphi)(x) = \varphi(x) + \alpha\left[-\Gamma'(1)\varphi(x) + \frac{d}{dx}\int_a^x \ln(x-t)\varphi(t)\,dt\right] + o(\alpha),$$

где $o(\alpha)/\alpha \to 0$ почти для всех x. Эта формула получается заменой отношения $[I^\alpha_{a+}\varphi - \varphi]/\alpha$ его пределом при $\alpha \to +0$, который легко находится по правилу Лопиталя (об этом пределе, известном в теории полугрупп операторов под названием производящего оператора, см. в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, с. 677]).

§ 3. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ГЕЛЬДЕРОВСКИХ И СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим действие операторов дробного интегрирования в пространствах гельдеровских и суммируемых функций. Теоремы этого параграфа показывают, что дробное интегрирование не только сохраняет, но и существенно улучшает свойства функций. Результаты формулируются и доказываются для дробных интегралов $I^{\alpha}_{a+}\varphi$. Читатель легко может переформулировать их для дробных интегралов $I^{\alpha}_{b-}\varphi$ на основании перехода (2.19).

Подчеркнем, что излагаемые в пп. 1, 2° этого параграфа результаты о действии операторов дробного интегрирования из H_0^{λ} в $H_0^{\lambda+\alpha}$ или в весовом варианте из $H_0^{\lambda}(\rho)$ в $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ распространяются в § 13, п. 6° на обобщенные классы Гельдера H_0^{ω}, когда условие гельдеровости имеет вид

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant c\omega(h),$$

где $\omega(h)$ — заданная непрерывная неубывающая функция, $\omega(0)=0$.

Здесь и всюду в дальнейшем c, c_1, c_2, ... обозначают абсолютные постоянные, не зависящие от переменных величин x, h и т. д. Различные такие постоянные могут обозначаться одной буквой.

Всюду в этом параграфе $[a, b]$ — конечный отрезок, за исключением п. 4°, где в теореме 3.7 и леммах 3.2, 3.3, 3.7 допускается и случай полуоси: $-\infty<a<b\leqslant\infty$.

1°. Действие в пространстве H^{λ}. Следующие ниже теоремы 3.1—3.4 показывают, что дробное интегрирование улучшает, вообще говоря, порядок гельдеровости λ на порядок α дробного интеграла. Случай, когда $\lambda+\alpha$ — целое число, играет особую роль, приводя к классу $H^{\lambda,1}$ (см. определение 1.7). Начнем с основного случая $0\leqslant\lambda\leqslant 1, 0<\alpha<1$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi(x)\in H^{\lambda}([a, b])$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0<\alpha<1$. *Тогда дробный интеграл* $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ *имеет вид*

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi=\frac{\varphi(a)}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\alpha}+\psi(x), \tag{3.1}$$

где $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha}$, *если* $\lambda+\alpha\neq 1$, *и* $\psi(x)\in H^{\lambda+\alpha,1}$, *если* $\lambda+\alpha=1$, *при этом*

$$|\psi(x)|\leqslant A(x-a)^{\lambda+\alpha}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Представляя $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ в виде

$$I^{\alpha}_{a+}\varphi=\frac{\varphi(a)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,$$

получаем равенство (3.1), в котором

$$\psi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Очевидно,

$$|\psi(x)|\leqslant\|\varphi\|_{H^{\lambda}}\Gamma^{-1}(\alpha)\int_a^x(t-a)^{\lambda}(x-t)^{\alpha-1}dt.$$

Отсюда после замены $t = a + s(x-a)$ вытекает оценка (3.2).

Покажем, что $\psi(x) \in H^{\lambda+\alpha}$ или $\psi(x) \in H^{\lambda+\alpha, 1}$. Рассмотрим случай $\lambda + \alpha \leqslant 1$. Обозначим для краткости $g(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$, так что

$$|g(x)| \leqslant A(x-a)^{\lambda}. \tag{3.3}$$

Пусть $h > 0$; x, $x + h \in [a, b]$. Имеем

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_{-h}^{x-a} \frac{g(x-t)\,dt}{(t+h)^{1-\alpha}} - \int_0^{x-a} \frac{g(x-t)}{t^{1-\alpha}}\,dt\right) =$$

$$= \frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)}\left[(x-a+h)^{\alpha} - (x-a)^{\alpha}\right] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0} \frac{g(x-t)-g(x)}{(t+h)^{1-\alpha}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} \left[(t+h)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}\right]\left[g(x-t) - g(x)\right] dt = J_1 + J_2 + J_3. \tag{3.4}$$

Если $h \geqslant x - a$, то с учетом (3.3) находим

$$|J_1| \leqslant \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\lambda}|(x-a+h)^{\alpha} - (x-a)^{\alpha}| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Если же $0 < h < x - a$, то в силу (3.3) и неравенства $(1+t)^{\alpha} - 1 \leqslant \alpha t$, $t > 0$, имеем

$$|J_1| \leqslant \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^{\lambda+\alpha}\left|\left(1 + \frac{h}{x-a}\right)^{\alpha} - 1\right| \leqslant ch(x-a)^{\lambda+\alpha-1} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Далее,

$$|J_2| \leqslant \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_{-h}^{0} \frac{|t|^{\lambda}dt}{(t+h)^{1-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Оценим, наконец, J_3:

$$|J_3| \leqslant \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-a} t^{\lambda}\left[t^{\alpha-1} - (t+h)^{\alpha-1}\right] dt = \frac{Ah^{\lambda+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{x-a}{h}} t^{\lambda}\left[t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}\right] dt. \tag{3.5}$$

Отсюда оценка ясна при $x - a \leqslant h: |J_3| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$, $\lambda + \alpha \leqslant 1$. Если же $x - a > h$, то при $\lambda + \alpha < 1$ также имеем $|J_3| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$ в силу сходимости интеграла в (3.5) на бесконечности $\left(\text{поскольку } |t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}| = t^{\alpha-1}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right] \leqslant ct^{\alpha-2} \text{ при } t > 1\right)$. Если же $\lambda + \alpha = 1$, то из (3.5) при $0 < h < 1/2$ получим

$$|J_3| \leqslant Ah^{\lambda+\alpha}\left(c + \int_1^{\frac{x-a}{h}} t^{\lambda+\alpha-2}dt\right) \leqslant c_1 h + c_2 h \ln \frac{x-a}{h} \leqslant ch \ln \frac{1}{h}$$

с учетом того, что $x - a \geqslant h$. Собирая оценки для J_1, J_2, J_3, получаем утверждение теоремы при $\lambda + \alpha \leqslant 1$.

Доказательство оставшегося случая $\lambda + \alpha > 1$ нам удобнее дать в другом месте, после того как будут введены и исследованы так называемые дробные производные Маршо. Поэтому за доказательством при $\lambda+\alpha>1$ отсылаем читателя к § 13, п. 4° (см. текст после леммы 13.1).

Далее в теореме 3.3 будет рассмотрен случай любых $\alpha>0$, $\lambda>0$. Предварительно отметим следствия из теоремы 3.1.

Следствие 1. *Оператор*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt,\ 0<\alpha<1,$$

ограниченно действует из пространства H^λ, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, в пространство $H^{\lambda+\alpha}$, если $\lambda+\alpha\neq 1$, и в пространство $H^{\lambda+\alpha,1}$, если $\lambda+\alpha=1$.

Следствие 2. *Оператор I_{a+}^{α} ограниченно действует из пространства $C=H^0$ в $H_{\ast}^{\alpha}$.*

Нетрудно видеть, что в действительности I_{a+}^{α} ограничен даже из L_∞ в H^α:

$$\Gamma(\alpha)\,|f(x+h)-f(x)|\leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left\{\int_a^x [(x-t)^{\alpha-1}-(x+h-t)^{\alpha-1}]\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}dt\right\}\|\varphi\|_{L_\infty}\leqslant ch^\alpha\|\varphi\|_{L_\infty},$$

где $f(x)=I_{a+}^{\alpha}\varphi$ и $h>0$.

Теорема 3.2. *Пусть $\varphi(x)\in H^\lambda$, $\lambda\geqslant 0$. Тогда дробный интеграл $I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $\alpha>0$, имеет вид*

$$I_{a+}^{\alpha}\varphi=\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(x-a)^{\alpha+k}+\psi(x), \tag{3.6}$$

где m — наибольшее целое число, такое, что $m<\lambda$, а

$$\psi(x)\in\begin{cases}H^{\lambda+\alpha}, & \text{если } \lambda+\alpha \text{ — нецелое или если } \lambda,\ \alpha \text{ — целые},\\ H^{\lambda+\alpha,1}, & \text{если } \lambda+\alpha \text{ — целое, но } \lambda,\ \alpha \text{ — нецелые}.\end{cases}$$

Теорема 3.2 выводится из теоремы 3.1, если учесть, что функция

$$\psi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left[\varphi(t)-\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right](x-t)^{\alpha-1}dt$$

имеет производную порядка $m+[\alpha]$:

$$\psi^{(m+[\alpha])}(x)=\frac{1}{\Gamma(\{\alpha\})}\int_a^x[\varphi^{(m)}(t)-\varphi^{(m)}(a)]\,(x-t)^{\{\alpha\}-1}dt.$$

2°. Действие в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$. Напомним, что принадлежность функции $\varphi(x)$ классу $H_0^\lambda(\rho)$ означает, что $\rho(x)\varphi(x)\in H^\lambda$ и что $\rho(x)\varphi(x)|_{x=x_k}=0$ во всех точках x_k, к которым «привязан» вес $\rho(x)$, имеющий вид (1.7). Начнем исследование с основных случаев $\rho(x)=(x-a)^\mu$ или $\rho(x)=(b-x)^\nu$.

Замечание 3.1. Всюду в дальнейшем при рассмотрении дробного интегрирования I_{a+}^{α} в пространстве $H_0^\lambda(\rho)$ договоримся о том, что $\rho(x)\varphi(x)|_{x=a}=0$ независимо от того, «привязан» или нет вес $\rho(x)$ к точке $x=a$.

Теорема 3.3. *Пусть* $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$. *Оператор* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\lambda}(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, *если* $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$, $\mu<\lambda+1$, *или если* $\rho(x)=(b-x)^{\nu}$, $\nu>\lambda+\alpha$.

Доказательство. Подчеркнем, что μ может быть отрицательным, а ν не ограничено сверху.

1. Случай веса $\rho(x)=(x-a)^{\mu}$, $\mu<\lambda+1$. Пусть $\varphi(x)\in H_0^{\lambda}(\rho)$, так что $\varphi(x)=(x-a)^{-\mu}g(x)$, где $g(x)\in H^{\lambda}$, $g(a)=0$. Нужно показать, что

$$G(x)=\int_a^x\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{\mu}\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\in H_0^{\lambda+\alpha} \quad \text{и} \quad \|G\|_{H^{\lambda+\alpha}}\leqslant c\,\|g\|_{H^{\lambda}}.$$

Представляем $G(x)$ в виде

$$G(x)=\int_a^x\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\int_a^x\frac{(x-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt=G_1(x)+G_2(x).$$

Здесь $G_1(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}$ в силу теоремы 3.1. Для $G_2(x)$ имеем

$$G_2(x+h)-G_2(x)=\int_x^{x+h}\frac{(x+h-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt+$$
$$+[(x+h-a)^{\mu}-(x-a)^{\mu}]\int_a^x\frac{g(t)\,dt}{(t-a)^{\mu}(x+h-t)^{1-\alpha}}+$$
$$+\int_a^x\frac{(x-a)^{\mu}-(t-a)^{\mu}}{(t-a)^{\mu}}[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]\,g(t)\,dt=J_1+J_2+J_3. \tag{3.7}$$

Ниже при оценках нам понадобятся неравенства

$$|x^{\mu}-y^{\mu}|\leqslant c\,(x-y)\,x^{\mu-1}, \quad x\geqslant y>0, \quad \mu\geqslant 0, \tag{3.8}$$

$$|x^{\mu}-y^{\mu}|\leqslant|\mu|\,(x-y)\,y^{\mu-1}, \quad x\geqslant y>0, \quad \mu\leqslant 1, \tag{3.9}$$

где постоянная c не зависит от x и y. Неравенства (3.8), (3.9) доказываются, например, с помощью теоремы о среднем.

Оценим J_1. Используя неравенство $|g(t)|\leqslant\|g\|_{H^{\lambda}}(t-a)^{\lambda}$ и неравенство (3.9), при $\mu\leqslant 1$ находим

$$|J_1|\leqslant c\,\|g\|_{H^{\lambda}}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{\alpha}dt}{(t-a)^{1-\lambda}}\leqslant$$
$$\leqslant c\,\|g\|_{H^{\lambda}}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{\alpha}dt}{(t-x)^{1-\lambda}}=c_1\,\|g\|_{H^{\lambda}}\,h^{\lambda+\alpha}.$$

Если же $\mu\geqslant 1$, то оцениваем J_1 с помощью (3.8):

$$|J_1|\leqslant c\,(x+h-a)^{\mu-1}\int_x^{x+h}\frac{(x+h-t)^{\alpha}dt}{(t-a)^{\mu-\lambda}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{ch^{\alpha}}{(x+h-a)^{1-\mu}}\int_x^{x+h}\frac{dt}{(t-a)^{\mu-\lambda}}.$$

Отсюда с учетом (3.8)

$$|J_1| \leqslant ch^{\alpha}(x+h-a)^{\mu-1}[(h+x-a)^{\lambda+1-\mu}-(x-a)^{\lambda+1-\mu}] \leqslant$$
$$\leqslant ch^{\alpha+1}(x+h-a)^{\lambda-1} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}. \tag{3.10}$$

Для J_2 имеем при $x-a \leqslant h$ и $\mu > 0$

$$|J_2| \leqslant ch^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant ch^{\mu}\int_a^{x+h} \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant ch^{\mu}(x+h-a)^{\lambda+\alpha-\mu} \leqslant ch^{\lambda+\alpha},$$

а при $\mu < 0$

$$|J_2| \leqslant c(x-a)^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant c(x-a)^{\mu}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant c(x-a)^{\lambda+\alpha} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

В случае же $x-a > h$ при $\mu \leqslant 1$ с учетом (3.9)

$$|J_2| \leqslant \frac{ch}{(x-a)^{1-\mu}}\int_a^x \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{ch}{(x-a)^{1-\lambda-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha},$$

а при $\mu > 1$ с учетом (3.8)

$$|J_2| \leqslant \frac{ch}{(h+x-a)^{1-\mu}}\int_a^{x+h} \frac{(t-a)^{\lambda-\mu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{ch}{(h+x-a)^{1-\lambda-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Далее, после замены $t = a + s(x-a)$

$$|J_3| \leqslant \|g\|_{H^\lambda}(x-a)^{\lambda+\alpha}\int_0^1 |s^{\lambda-\mu}-s^{\lambda}| \left|\left(1-s+\frac{h}{x-a}\right)^{\alpha-1}-(1-s)^{\alpha-1}\right| ds.$$

Если $x-a \leqslant h$, то $|J_3| \leqslant c\|g\|_{H^\lambda}h^{\lambda+\alpha}$, а при $x-a > h$

$$|J_3| \leqslant c\|g\|_{H^\lambda}(x-a)^{\lambda+\alpha-1}h\int_0^1 \frac{|s^{\lambda-\mu}-s^{\lambda}|}{(1-s)^{2-\alpha}}ds \leqslant c\|g\|_{H^\lambda}h^{\lambda+\alpha}.$$

Собирая оценки для J_1, J_2, J_3, имеем

$$|G_2(x+h)-G_2(x)| \leqslant c\|g\|_{H^\lambda}h^{\lambda+\alpha}.$$

Отсюда и из неравенства $|G_1(x)| \leqslant c\|g\|_{H^\lambda}(x-a)^{\lambda+\alpha}$ заключаем, что $G(x) \in H_0^{\lambda+\alpha}$.

2. Случай веса $\rho(x) = (b-x)^{\nu}$, $\nu > \lambda+\alpha$. Теперь $\varphi(x) = (b-x)^{-\nu}g(x)$, где $g(x) \in H^{\lambda}$ и $g(a) = g(b) = 0$ в соответствии с замечанием 3.1. Нужно показать, что

$$G(x) = \int_a^x \left(\frac{b-x}{b-t}\right)^{\nu}\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \in H^{\lambda+\alpha},$$

$$\|G\|_{H^{\lambda+\alpha}} \leqslant c\,\|g\|_{H^\lambda}$$

и что $G(a)=G(b)=0$. Так как $|G(x)|\leqslant c\int\limits_a^x (t-a)^{\lambda}(x-t)^{\alpha-1}dt$ при $x\to a$, то условие $G(a)=0$ становится очевидным. Далее, при $x\to b$

$$|G(x)|\leqslant (b-x)^{\nu}\int\limits_{b-x}^{b-a} t^{\lambda-\nu}(t+x-b)^{\alpha-1}dt.$$

Отсюда после замены $t=(b-x)\xi$

$$|G(x)|\leqslant (b-x)^{\lambda+\alpha}\int\limits_1^{\frac{b-a}{b-x}} t^{\lambda-\nu}(t-1)^{\alpha-1}dt\leqslant (b-x)^{\lambda+\alpha}\int\limits_1^{\infty}\frac{dt}{t^{\nu-\lambda}(1-t)^{1-\alpha}},$$

так что и $G(b)=0$. Для доказательства гельдеровости функции $G(x)$ представим ее в виде

$$G(x)=\int\limits_a^x\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\int\limits_a^x\frac{(b-x)^{\nu}-(b-t)^{\nu}}{(b-t)^{\nu}(x-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt=G_1(x)+G_2(x).$$

Здесь $G_1(x)\in H^{\lambda+\alpha}$ и $\|G_1\|_{H^{\lambda+\alpha}}\leqslant c\|g\|_{H^{\lambda}}$ в силу теоремы 3.1. Для $G_2(x)$ имеем (считая, что $x+h\in(a,b)$):

$$G_2(x+h)-G_2(x)=J_1+J_2+J_3,$$

где

$$J_1=\int\limits_x^{x+h}\frac{(b-x-h)^{\nu}-(b-t)^{\nu}}{(b-t)^{\nu}(x+h-t)^{1-\alpha}}\,g(t)\,dt,$$

$$J_2=[(b-h-x)^{\nu}-(b-x)^{\nu}]\int\limits_a^x\frac{g(t)\,dt}{(b-t)^{\nu}(x+h-t)^{1-\alpha}},$$

$$J_3=\int\limits_a^x\frac{(b-x)^{\nu}-(b-t)^{\nu}}{(b-t)^{\nu}}\,[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]\,g(t)\,dt.$$

Используя оценку $|g(t)|\leqslant\|g\|_{H^{\lambda}}(b-t)^{\lambda}$ и неравенство (3.8), получаем

$$|J_1|\leqslant c\int\limits_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha}(b-t)^{\lambda-1}dt=c\int\limits_0^h\xi^{\alpha}(b-x-h+\xi)^{\lambda-1}d\xi,$$

откуда после замены $\xi=(b-x-h)s$ следует

$$|J_1|\leqslant c(b-x-h)^{\lambda+\alpha}\int\limits_0^{h/(b-x-h)}s^{\alpha}(1+s)^{\lambda-1}ds.$$

Если $b-x-h\leqslant h$, то

$$|J_1|\leqslant c(b-x-h)^{\lambda+\alpha}\left[1+\int\limits_1^{h/(b-x-h)}s^{\lambda+\alpha-1}ds\right]\leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Если же $b-x-h\geqslant h$, то

$$|J_1|\leqslant c(b-x-h)^{\lambda+\alpha}\int\limits_0^{h/(b-x-h)}s^{\alpha}ds\leqslant ch^{\lambda+\alpha}.$$

Далее, для J_2 имеем, также применяя (3.8):

$$|J_2| \leqslant ch(b-x)^{\nu-1} \int_a^x \frac{(b-t)^{\lambda-\nu}dt}{(x+h-t)^{1-\alpha}} \leqslant ch(b-x)^{\nu-1} \int_a^x \frac{(b-t)^{\lambda-\nu}dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Сделаем замену $x-t=(b-x)\xi$. Тогда $|J_2| \leqslant ch(b-x)^{\lambda+\alpha-1} \int_0^\infty \xi^{\alpha-1}(1+\xi)^{\lambda-\nu}d\xi$ с учетом того, что $\nu > \lambda + \alpha$. Таким образом, $|J_2| \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$.

Остается оценить слагаемое J_3. После замены $t = b - s(b-x)$ имеем

$$|J_3| \leqslant c \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{|1-s^\nu|}{s^{\nu-\lambda}} (b-x)^{\lambda+\alpha} \left| \left(s-1+\frac{h}{b-x}\right)^{\alpha-1} - (s-1)^{\alpha-1} \right| ds \, \|g\|_{H^\lambda}.$$

Применяя неравенство (3.9), получаем

$$|J_3| \leqslant c\|g\|_{H^\lambda}(b-x)^{\lambda+\alpha} \frac{h}{b-x} \int_1^{\frac{b-a}{b-x}} \frac{|1-s^\nu|\,ds}{s^{\nu-\lambda}(s-1)^{2-\alpha}} \leqslant ch^{\lambda+\alpha}$$

с учетом того, что $b-x \geqslant h$ и $\lambda+\alpha<1$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.3 легко выводится аналогичное утверждение для веса $\rho(x) = (x-a)^\mu (b-x)^\nu$. Справедлива

Теорема 3.3′. *Пусть* $0<\lambda<1$, $\lambda+\alpha<1$. *Оператор* I^α_{a+} *ограниченно действует из* $H_0^\lambda(\rho)$ *в* $H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$, $\rho(x)=(x-a)^\mu(b-x)^\nu$, $\mu<\lambda+1$, $\nu>\lambda+\alpha$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in H_0^\lambda(\rho)$. Выберем произвольную точку $c \in (a, b)$ и введем функции

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \leqslant c, \\ \varphi(c), & x \geqslant c, \end{cases} \qquad \varphi_b(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant c, \\ \varphi(x)-\varphi(c), & x \geqslant c, \end{cases}$$

так что $\varphi(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x)$. Здесь $\varphi_a(x) \in H_0^\lambda(\rho_a)$, $\varphi_b(x) \in H_0^\lambda(\rho_b)$, где обозначено для краткости

$$\rho_a(x) = (x-a)^\mu, \quad \rho_b(x) = (b-x)^\nu.$$

Действительно, проверяя, например, что $\varphi_a(x) \in H_0^\lambda(\rho_a)$, имеем

$$\rho_a(x)\varphi_a(x) = \begin{cases} g(x)/\rho_b(x), & x \leqslant c, \\ \rho_a(x)\varphi(c), & x \geqslant c, \end{cases}$$

где $g(x) = \rho(x)\varphi(x) \in H^\lambda([a, c])$, $g(a) = 0$. Так как функции $[\rho_b(x)]^{-1}$ и $\rho_a(x)\varphi(c)$ бесконечно дифференцируемы на $[a, c]$, $[c, b]$ соответственно, то $g(x)/\rho_b(x) \in H^\lambda([a, c])$, $\rho_a(x) \in H^\lambda([c, b])$. Тогда $\rho_a(x)\varphi(x)$ как непрерывная «склейка» функций из $H^\lambda([a, c])$, $H^\lambda([c, b])$ принадлежит $H^\lambda([a, b])$. Из приведенных рассуждений очевидно также, что $\|\varphi_a\|_{H^\lambda(\rho_a)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}$, $\|\varphi_b\|_{H^\lambda(\rho_b)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}$. В силу теоремы 3.3

$$\|I^\alpha_{a+}\varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} \leqslant c\|\varphi_a\|_{H^\lambda(\rho_a)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}$$

и

$$\|I^\alpha_{a+}\varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_b)} \leqslant c\|\varphi_b\|_{H^\lambda(\rho_b)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^\lambda(\rho)}.$$

Замечая, что $(I^{\alpha}_{a+}\varphi_b)(x) \equiv 0$ при $x \leqslant c$, находим $\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leqslant$ $\leqslant c_1 \|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_b)}$. Учитывая также, что $\rho_b(x) \in H^{\lambda+\alpha}$ и $\nu > \lambda+\alpha$, получаем $\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leqslant c_2 \|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)}$. Но тогда

$$\|I^{\alpha}_{a+}\varphi\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho)} \leqslant c\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_a\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_a)} + c\|I^{\alpha}_{a+}\varphi_b\|_{H^{\lambda+\alpha}(\rho_b)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^{\lambda}(\rho)},$$

что и требовалось.

Распространим, наконец, теорему 3.3 и теорему 3.3′ на случай общего веса (1.7). Для этого докажем предварительно лемму, дающую утверждение типа теоремы 3.3 для интегралов с ядром $(x+t)^{\alpha-1}$, $x>0$, $t>0$. Естественно, что оно будет выполняться при более слабых предположениях.

Лемма 3.1. *Пусть функция* $\varphi(x)$, $0<x\leqslant l$, *допускает оценку* $|\varphi(x)| \leqslant kx^{-\gamma}$, $\alpha<\gamma<1$. *Тогда*

$$f(x) = \int_0^l \frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}} \in H^{\alpha+\beta}([0, l];\ x^{\gamma+\beta}) \tag{3.11}$$

для любых $\beta \geqslant 0$ *таких, что* $\alpha+\beta \leqslant 1$, *при этом* $\|f\|_{H^{\alpha+\beta}(x^{\gamma+\beta})} \leqslant ck$, *где* c *не зависит от* $\varphi(x)$.

Доказательство. Нужно показать, что $\Phi(x) = x^{\gamma+\beta}\int_0^l \varphi(t) \times$ $\times (t+x)^{\alpha-1}dt \in H^{\alpha+\beta}([0, l])$. Имеем, считая, что $l=1$ и $h>0$: $|\Phi(x+h)-$ $-\Phi(x)| \leqslant k|(x+h)^{\gamma+\beta}-x^{\gamma+\beta}|\int_0^1 (x+h+t)^{\alpha-1}t^{-\gamma}dt + kx^{\gamma+\beta}\int_0^1 t^{-\gamma}[(t+x)^{\alpha-1}-$ $-(t+x+h)^{\alpha-1}]\,dt = k(\Phi_1+\Phi_2)$. Неравенство (3.8) и замена $t=(x+h)s$ дают

$$\Phi_1 \leqslant c_1 h(x+h)^{\alpha+\beta-1}\int_0^{1/(x+h)} s^{-\gamma}(1+s)^{\alpha-1}ds \leqslant ch(x+h)^{\alpha+\beta-1} \leqslant ch^{\alpha+\beta}.$$

Далее, используя неравенство (3.9), имеем

$$\Phi_2 \leqslant cx^{\gamma+\beta}h\int_0^1 t^{-\gamma}(t+x)^{\alpha-2}dt = cx^{\alpha+\beta-1}h\int_0^{1/x}(t+1)^{\alpha-2}t^{-\gamma}dt$$

и при $x \geqslant h$ получаем, что $\Phi_2 \leqslant ch^{\alpha+\beta}$. Если же $x \leqslant h$,

$$\Phi_2 \leqslant 2x^{\gamma+\beta}\int_0^1 t^{-\gamma}(t+x)^{\alpha-1}dt = 2x^{\alpha+\beta}\int_0^{1/x} s^{-\gamma}(s+1)^{\alpha-1}ds \leqslant ch^{\alpha+\beta}.$$

Собирая оценки для Φ_1 и Φ_2, получаем утверждение леммы.

Наконец, следующая теорема относится к случаю общего веса вида

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\mu_k}, \quad a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b. \tag{3.12}$$

Теорема 3.4. *Пусть* $\rho(x)$ — *вес* (3.12), $\lambda+\alpha<1$ *и выполнены условия:*

1) $\mu_1 < \lambda+1$;

2) $\lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1$, $k=2, \ldots, n-1$;

3) $\lambda+\alpha<\mu_n<\lambda+1$ *при* $x_n<b$ и $\lambda+\alpha<\mu_n$ *при* $x_n=b$. *Тогда оператор* I^{α}_{a+} *ограниченно действует из* $H^{\lambda}_0(\rho)$ *в* $H^{\lambda+\alpha}(\rho)$.

Доказательство этой теоремы подготовлено теоремами 3.3, 3.3′ и леммой 3.1. Нам удобно обозначить $\tilde{n}=\begin{cases} n-1, & \text{если} \quad x_n=b, \\ n \quad, & \text{если} \quad x_n<b. \end{cases}$

Пусть

$$\varphi_k(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}, \\ 0 \quad, & x\notin[x_k, x_{k+1}], \end{cases} \quad k=1, 2, \ldots, \tilde{n},$$

так что $\varphi(x)=\sum\limits_{k=1}^{\tilde{n}}\varphi_k(x)$. Очевидно:

1) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x)\equiv 0$ при $x<x_k\ (k\geqslant 2)$,

2) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int\limits_{x_k}^{x}\varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt$ при $x_k<x<x_{k+1}\ (1\leqslant k\leqslant\tilde{n})$,

3) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt$ при $x_{k+1}<x<x_{k+2}(1\leqslant k\leqslant\tilde{n}-1)$,

4) $(I_{a+}^{\alpha}\varphi_k)(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция при $x\geqslant x_{k+2}$. Учитывая то, что множители $|x-x_k|^{\mu_k}$ бесконечно дифференцируемы вне точек x_k, легко получаем $I_{a+}^{\alpha}\varphi_k\in H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$ на $[a, b]$, при этом в 2) применяем теорему 3.3′ (при $k=1, \ldots, n-1$) и теорему 3.3 (при $k=n$ и $x_n<b$), а в 3) — лемму 3.1 (после замены $t=x_{k+1}-\xi$ в 3)).

Замечание 3.2. Условие $\lambda+\alpha<\mu_k$, $k=2, \ldots, n$, в теореме 3.4 нельзя ослабить. При $\lambda+\alpha\geqslant\mu_k$ теорема 3.4 неверна. Пусть, например, $\rho(x)=(b-x)^{\mu}$, $\mu\leqslant\lambda+\alpha$. Для функции $\varphi(x)=(x-a)^{\lambda}(b-x)^{\lambda-\mu}\in H_0^{\lambda}(\rho)$ непосредственно проверяется, что

$$(b-x)^{\mu}(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{(b-x)^{\mu}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{a}^{x}\frac{(t-a)^{\lambda}dt}{(b-t)^{\mu-\lambda}(x-t)^{1-\alpha}}\neq O\left((b-x)^{\lambda+\alpha}\right)$$

при $x\to b$,

так что $I_{a+}^{\alpha}\varphi\notin H_0^{\lambda+\alpha}(\rho)$.

3°. **Действие в пространстве** L_p. Мы знаем, что дробные интегралы по крайней мере сохраняют пространство $L_p(a, b)$, см. (2.72), (2.73). Более содержательны утверждения, показывающие, насколько дробный интеграл $I_{a+}^{\alpha}\varphi$ «лучше» функции $\varphi(x)\in L_p$. Картина здесь такова, что при $0<\alpha<1/p$ дробный интеграл принадлежит L_q с $q>p$, а при $\alpha>1/p$ он оказывается даже непрерывной (гельдеровской) функцией (класса $H^{\alpha-1/p}$ или $H^{\alpha-1/p, 1/p'}$, см. определения 1.6, 1.7). Следующая теорема известна под названием теоремы Харди — Литтлвуда с предельным показателем.

Теорема 3.5. *Если $0<\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$, то оператор дробного интегрирования I_{a+}^{α} ограниченно действует из пространства L_p в пространство L_q, где $q=p/(1-\alpha p)$.*

Доказательство этой теоремы требует более тонких методов, чем те, что использовались до сих пор. Изложение необходимого для этого математического аппарата увело бы нас далеко в сторону. Поэтому мы ограничимся доказательством более простого факта: I_{a+}^{α} ограниченно действует из L_p, $1\leqslant p<1/\alpha$, в L_r, где $1\leqslant r<q=p/(1-\alpha p)$ (читателя, интересующегося доказательством в случае $r=q$, а также случаями $p=1$ и $p=1/\alpha$, не содержащимися в теореме 3.5, мы отсылаем к литературным ссылкам в § 4, 9, см. также § 4, п. 2°, 3.2, 3.3). В силу (1.31) достаточно взять $r>p$. Обозначим $\varepsilon=(1/r-1/q)/2$. Тогда

$$|I_{a+}^{\alpha}\varphi|\leqslant\int\limits_{a}^{x}\left(|\varphi(t)|^{\frac{p}{r}}(x-t)^{\varepsilon-\frac{1}{r}}\right)|\varphi(t)|^{1-\frac{p}{r}}(x-t)^{\varepsilon-\frac{1}{p'}}dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Гельдера (1.30) с $n=3$, $p_1=r$, $p_2=rp/(r-p)$, $p_3=p'$, находим

$$|I_{a+}^{\alpha}\varphi|\leqslant\Big(\int_a^x|\varphi(t)|^p(x-t)^{r\varepsilon-1}dt\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_a^x|\varphi(t)|^pdt\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\times$$

$$\times\Big(\int_a^x(x-t)^{\varepsilon p'-1}dt\Big)^{\frac{1}{p'}}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}}\Big(\int_a^x|\varphi(t)|^p(x-t)^{r\varepsilon-1}dt\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Отсюда

$$\|I_{a+}^{\alpha}\varphi\|_{L_r}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}}\Big(\int_a^x|\varphi(t)|^pdt\int_a^b|x-t|^{r\varepsilon-1}\,dx\Big)^{\frac{1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}^{1-\frac{p}{r}}\|\varphi\|_{L_p}^{\frac{p}{r}}=c\,\|\varphi\|_{L_p},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Формула дробного интегрирования по частям (2.20) справедлива при* $\varphi(x)\in L_p$, $\psi(x)\in L_q$, $1/p+1/q\leqslant 1+\alpha$, *но* $p\neq 1$, $q\neq 1$ *в случае* $1/p+1/q=1+\alpha$.

Действительно, рассмотрим с учетом вложения (1.31) случай $1/p+1/q=1+\alpha$. В силу теоремы 3.5 интегралы в левой и правой частях в (2.20) сходятся абсолютно (применить неравенство Гельдера). Поэтому перестановка порядка интегрирования, с помощью которой получено (2.20), обосновывается теоремой Фубини.

Теорема 3.6. *Если* $\alpha>0$, $p>1/\alpha$, *то оператор дробного интегрирования* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из* $L_p(a,b)$ *в* $H^{\alpha-1/p}(a,\ b)$, *если* $\alpha-1/p\neq 1,\ 2,\ \ldots$, *и в* $H^{\alpha-1/p,1/p'}(a,\ b)$, *если* $\alpha-1/p=1,\ 2,\ \ldots$ *Кроме того,*

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=o\big((x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}\big)\ \text{при}\ x\to a. \tag{3.13}$$

Доказательство. Оценку (3.13) получаем с помощью неравенства Гельдера:

$$|I_{a+}^{\alpha}\varphi|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_a^x|\varphi(t)|^pdt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_a^x(x-t)^{(\alpha-1)p'}dt\Big)^{\frac{1}{p'}}\leqslant$$

$$\leqslant c\,(x-a)^{\alpha-\frac{1}{p}}\Big(\int_a^x|\varphi(t)|^pdt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее, рассмотрим случай $\alpha-1/p\leqslant 1$. Для x, $x+h\in[a,\ b]$ имеем

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x+h)-(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{x+h}(x+h-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x[(x+h-t)^{\alpha-1}-(x-t)^{\alpha-1}]\,\varphi(t)\,dt=I_1+I_2. \tag{3.14}$$

Применяя неравенство Гельдера, находим

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Big(\int_x^{x+h}|\varphi(t)|^pdt\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_x^{x+h}(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}dt\Big)^{\frac{1}{p'}}\leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L_p},$$

$$|I_2| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{L_p}}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^x |(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant [\Gamma(\alpha)]^{-1} h^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L_p} \left(\int_0^{\frac{x-a}{h}} |s^{\alpha-1} - (s+1)^{\alpha-1}|^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

При $x-a \leqslant h$ оценка для I_2 очевидна. Если же $x-a > h$, то, применяя неравенство (3.9) и неравенство $(A+B)^{1/p'} \leqslant A^{1/p'} + B^{1/p'}$, получаем

$$|I_2| \leqslant h^{\alpha-1/p} \|\varphi\|_{L_p} \left[c_1 + c_2 \int_1^{(x-a)/h} s^{(\alpha-2)p'} ds \right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant h^{\alpha-1/p} \|\varphi\|_{L_p} \left[c_3 + c_4 \left(\frac{h}{x-a} \right)^{1-\alpha+1/p} \right]$$

с добавлением $\left(\ln \frac{x-a}{h} \right)^{1/p'}$ при c_4 в случае $\alpha - \frac{1}{p} = 1$. Отсюда вытекает оценка

$$|I_2| \leqslant \begin{cases} c h^{\alpha-1/p} \|\varphi\|_{L_p} & \text{при } \alpha - 1/p < 1, \\ ch \left| \ln \frac{1}{h} \right|^{1/p'} \|\varphi\|_{L_p} & \text{при } \alpha - 1/p = 1. \end{cases}$$

Собирая оценки для I_1, I_2, завершаем доказательство теоремы при $\alpha - 1/p \leqslant 1$.

Пусть $\alpha - 1/p > 1$. Тогда $k < \alpha - 1/p \leqslant k+1$, $k = 1, 2, \ldots$, и этот случай сводится к рассмотренному непосредственным дифференцированием: $\frac{d^k}{dx^k} I_{a+}^{\alpha} \varphi = I_{a+}^{\alpha-k} \varphi$, $0 < \alpha - k \leqslant 1$, с учетом определения классов H^λ и $H^{\lambda, k}$ при $\lambda > 1$.

Следствие. *Теорема 3.6 справедлива и в более сильной форме:* $I_{a+}^{\alpha} : L_p(a, b) \to h^{\alpha-1/p}([a, b])$, $0 < 1/p < \alpha < 1 + 1/p$, *где* h^λ — *класс (1.2).*

Доказательство. Для $\varphi \in L_p(a, b)$ при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\varphi = P_\varepsilon + \varphi_\varepsilon$, где P_ε — многочлен, а $\|\varphi_\varepsilon\|_{L_p} < \varepsilon$ (свойство д) пространства L_p см. § 1, п. 2°). Отсюда по доказанной теореме 3.6 имеем

$$|(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)| \leqslant |(I_{a+}^{\alpha}P_\varepsilon)(x+t) - (I_{a+}^{\alpha}P_\varepsilon)(x)| + |(I_{a+}^{\alpha}\varphi_\varepsilon)(x+t) -$$

$$- (I_{a+}^{\alpha}\varphi_\varepsilon)(x)| \leqslant c_1 |t|^\alpha + c_2 |t|^{\alpha-1/p} \|\varphi_\varepsilon\|_p = o(|t|^{\alpha-1/p}).$$

Замечание 3.3. Случаю $p = \infty$ в теореме 3.6 отвечает утверждение об ограниченности I_{a+}^{α} из L_∞ в H^α, уже отмеченное выше (см. следствие из теоремы 3.1).

4°. Действие в пространстве $L_p(\rho)$. Рассмотрим теперь действие операторов дробного интегрирования в пространстве $L_p(\rho)$ с весом (3.12), где $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Оказывается, даже в случае простейшего веса $\rho(x) = |x-d|^\mu$, сосредоточенного в одной точке d отрезка $[a, b]$, ограничения на показатель существенно различны в зависимости от того, совпадает ли точка d с концами или же является внутренней точкой отрезка $[a, b]$. Нам удобно допускать здесь и полуось, т. е. считать, что $-\infty < a < b \leqslant \infty$.

Начнем рассмотрение с веса $\rho(x) = (x-a)^\mu$. Следующая лемма о коммутации дробных интегралов со степенными функциями позволит непосредственно перейти от «невесовых» теорем об ограниченности операторов дробного интегрирования к их весовым аналогам. В леммах 3.2, 3.3 и теоремах 3.7, 3.8 в отличие от вышеприведенного будем использовать обозначение $\rho^{\mu}(x)=(x-a)^{\mu}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $0<\alpha<1$, $\varphi\in L_p(0,\ l)$, $0<l\leqslant\infty$, $1<p<\infty$, $\mu>-1+1/p$. *Тогда справедливы соотношения*

$$I_{0+}^{\alpha}\rho^{\mu}\varphi=\rho^{\mu}I_{0+}^{\alpha}(\varphi+A_1\varphi), \tag{3.15}$$

$$\rho^{\mu}I_{0+}^{\alpha}\varphi=I_{0+}^{\alpha}\rho^{\mu}(\varphi+A_2\varphi), \tag{3.16}$$

где A_i — *ограниченные в* $L_p(0,\ l)$ *операторы вида* $A_i\varphi=\pi^{-1}\mu\sin\alpha\pi\times\times\int\limits_0^x A_i(x,\ t)\varphi(t)\,dt$, $i=1,\ 2$,

$$A_1(x,\ t)=\frac{1}{t-x}\int\limits_t^x\left(\frac{y-t}{x-y}\right)^{\alpha}\left(\frac{t}{y}\right)^{\mu}\frac{dy}{y},$$

$$A_2(x,\ t)=\frac{1}{x-t}\int\limits_t^x\left(\frac{y-t}{x-y}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu}\frac{dy}{y}.$$

(Случай $p=1$, $\mu>0$ см. далее в лемме 10.1, из которой следует, что при условиях $\varphi\in L_1(0,\ l)$ (для (3.15)) и $(|\ln x|+1)\varphi(x)\in L_1(0,\ l)$ (для (3.16)) указанные соотношения сохраняют силу, причем тогда операторы из (3.15) и (3.16) ограничены и $(|\ln x|+1)(\varphi(x)+A_1\varphi(x))\in L_1(0,\ l)$, $\varphi(x)+A_2\varphi(x)\in L_1(0,\ l)$, $0<l<\infty$.)

Доказательство. Покажем ограниченность операторов A_i. Ядро $A_1(x,\ t)$ однородно порядка -1, причем

$$|A_1(1,\ t)|=t^{\mu}\int\limits_0^1\frac{\xi^{\alpha}(1-\xi)^{-\alpha}d\xi}{[t+\xi(1-t)]^{1+\mu}}\leqslant ct^{\lambda},\quad \lambda=\begin{cases}\mu, & \mu<\alpha,\\ \alpha-\varepsilon, & \mu\geqslant\alpha,\end{cases}$$

где $0<\varepsilon<\alpha$. В силу этой оценки оператор A_1 ограничен в $L_p(0,\ l)$ по теореме 1.5. Аналогично доказывается ограниченность оператора A_2. Проверим теперь равенство (3.15):

$$x^{\mu}I_{0+}^{\alpha}(\varphi+A_1\varphi)=x^{\mu}I_{0+}^{\alpha}\varphi-\frac{\mu\sin\alpha\pi}{\pi\Gamma(\alpha)}x^{\mu}\int\limits_0^x t^{\mu}\varphi(t)\,dt\times$$

$$\times\int\limits_t^x\frac{(y-t)^{\alpha}dy}{y^{1+\mu}}\int\limits_y^x\frac{(x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-y)^{-\alpha}}{\tau-t}\,d\tau.$$

Вычисляя внутренние интегралы в правой части с помощью формулы (11.4) из § 11, получаем требуемое соотношение. Равенство (3.16) доказывается аналогично.

Следующее утверждение обобщает лемму 3.2 на случай весовых пространств и произвольных $\alpha>0$.

Лемма 3.3. *Пусть* $\alpha>0$, $\alpha\neq1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, $\varphi\in L_p([0,\ l],\ \rho^{\beta})$, $0<l\leqslant\infty$, $1<p<\infty$, $m=[\alpha]$, $\beta<p-1+\min(\mu p,\ 0)$. *Тогда справедливы соотношения (3.15), (3.16), в которых* A_i — *ограниченные в* $L_p([0,\ l],\ \rho^{\beta})$ *операторы, определяемые равенствами*

$$A_1\varphi=A_1^{(\mu,\alpha)}\varphi=\sum_{j=0}^{m}c_j\int\limits_0^x A_{1j}(x,\ \tau)\varphi(\tau)\,d\tau,\quad A_2\varphi=\rho^{-\mu}A_1^{(-\mu,\alpha)}\rho^{\mu}\varphi,$$

$$A_{1j}(x,\ \tau)=\tau^{\mu}(x-\tau)^{m-j}\int\limits_0^1 \frac{\xi^{\alpha+m-j}}{(1-\xi)^{\{\alpha\}}}\,[\tau+\xi\,(x-\tau)]^{j-\mu-m-1}\,d\xi,$$

$$c_j=\binom{m+1}{j}\frac{m!\,(j-m-\mu)_{m-j+1}}{(m-j)!\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\{\alpha\})}.$$

Соотношение (3.15) проверяется при этом непосредственным применением оператора дробного дифференцирования $\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}$ к выражению $\rho^{-\mu}I^{\alpha}_{0+}\rho^{\mu}\varphi$. Соотношение (3.16) вытекает из (3.15). Ограниченность операторов A_i, $i=1,\ 2$, следует из теоремы 1.5.

Перейдем к рассмотрению дробных интегралов.

Теорема 3.7. *Пусть* $\alpha>0$, $-\infty<a<b\leqslant\infty$, $p\geqslant 1$, $\mu<p-1$, $0<\alpha<m+1/p$, $q=p/[1-(\alpha-m)p]$; $0\leqslant m\leqslant\alpha$ *при* $p\neq 1$ *и* $0<m\leqslant\alpha$ *при* $p=1$. *Тогда оператор* I^{α}_{a+} *ограничен из* $L_p([a,\ b],\ \rho^{\mu})$ *в* $L_q\left([a,\ b],\ \rho^{\left(\frac{\mu}{p}-m\right)q}\right)$.

Доказательство. Пусть вначале $1<p<\infty$. Положим $\varphi=\rho^{-\frac{\mu}{p}}\varphi_0$, $\varphi_0\in L_p$. Если $m<\alpha$, то с учетом (3.15) имеем (можно считать $a=0$):

$$|\rho^{\frac{\mu}{p}-m}I^{\alpha}_{0+}\varphi|\leqslant c\rho^{\frac{\mu}{p}}I^{\alpha-m}_{0+}\rho^{-\frac{\mu}{p}}\varphi_0=I^{\alpha-m}_{0+}\psi,\quad \|\psi\|_{L_p}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p},$$

и остается применить теорему 3.5 (см. также теорему 5.3). Если $\alpha=m$, то $\rho^{\frac{\mu}{p}-\alpha}I^{\alpha}_{0+}\rho^{-\mu/p}$ есть оператор с однородным ядром порядка -1 и требуемое утверждение следует из теоремы 1.5. В случае $p=1$ утверждение теоремы получается применением неравенства Гельдера (1.28). Действительно,

$$|I^{\alpha}_{0+}\varphi|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x\{(x-y)^{\alpha-1}\,y^{-\frac{\mu}{q'}}|\varphi(y)|^{\frac{1}{q}}\}\,\{y^{\mu}|\varphi(y)|\}^{\frac{1}{q'}}dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_0^x(x-y)^{(\alpha-1)q}\,y^{-\mu(q-1)}|\varphi(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^x y^{\mu}|\varphi(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q'}},$$

откуда

$$\|\rho^{\mu-m}I^{\alpha}_{0+}\varphi\|_{L_q}\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|\rho^{\mu}\varphi\|^{\frac{1}{q'}}_{L_1}\left(\int\limits_0^l x^{(\mu-m)q}dx\,\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^x(x-y)^{(\alpha-1)q}y^{-\mu(q-1)}|\varphi(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|\rho^{\mu}\varphi\|^{\frac{1}{q'}}_{L_1}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^l y^{\mu}\mathrm{k}(y)|\,\varphi(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant c\,\|\rho^{\mu}\varphi\|_{L_1},$$

поскольку

$$\mathrm{k}(y)=y^{-\mu q}\int\limits_y^{\infty}x^{(\mu-m)q}(x-y)^{(\alpha-1)q}dx=\int\limits_1^{\infty}\xi^{(\mu-m)q}(\xi-1)^{(\alpha-1)q}d\xi<\infty.$$

Теорема доказана.

Отметим важный частный случай $\mu=0$ и $q=p$ в теореме 3.7:

$$\left\{\int\limits_a^b(x-a)^{-\alpha p}|(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p},\quad 1<p<\infty,$$

$$-\infty<a<b\leqslant\infty. \tag{3.17}$$

Справедливо также неравенство

$$\left\{\int_a^b (b-x)^{-\alpha p}|(I_{a+}^\alpha\varphi)(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p}, \quad 1<p<1/\alpha, \quad -\infty<a<b<\infty. \tag{3.18}$$

Его можно доказать непосредственно, но проще сослаться на доказываемое ниже неравенство (5.45), из которого оно легко следует.

Неравенства (3.17), (3.18) не имеют места при $p=1$. Например, первое из них в случае $p=1$ заменяется неравенством

$$\int_a^b (x-a)^{-\alpha}|(I_{a+}^\alpha\varphi)(x)|\,dx \leqslant c\int_a^b |\varphi(x)|\ln\frac{b-a}{x-a}\,dx, \tag{3.17$'$}$$

что получается простыми оценками.

Отметим еще частный случай теоремы 3.7, относящийся к $p=1$, $a=0$ $(\alpha=m,\ \mu=-\varepsilon)$:

$$\int_0^b x^{-\alpha-\varepsilon}|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)|\,dx \leqslant c\int_0^b x^{-\varepsilon}|\varphi(x)|\,dx, \quad b>0,\ \alpha>0,\ \varepsilon>0,$$

где $c=c(\varepsilon)$. Это неравенство не имеет места при $\varepsilon=0$ $(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)=\infty)$. Случаю $\varepsilon=0$ отвечают неравенства

$$\int_0^b x^{-\alpha}\ln^\lambda\frac{b+1}{x}|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)|\,dx \leqslant c\int_0^b \ln^{\lambda+1}\frac{b+1}{x}|\varphi(x)|\,dx, \tag{3.17$''$}$$

$$\int_b^\infty x^{-1}\ln^\lambda\frac{b+1}{b}x\,|I_{-}^\alpha x^{1-\alpha}\varphi(x)|\,dx \leqslant c\int_b^\infty \ln^{\lambda+1}\frac{b+1}{b}x\,|\varphi(x)|\,dx, \tag{3.17$'''$}$$

где $\alpha>0$, $\lambda\geqslant 0$, $b>0$. Первое из них получается простыми оценками после перестановки порядка интегрирования в левой части. Второе выводится из первого заменой x на x^{-1}, b на b^{-1} и $\varphi(x)$ на $x^{-2}\varphi(x^{-1})$.

Следующая теорема уточняет теорему 3.7 для конечного отрезка $[a, b]$ в случае $p>1/\alpha$.

Теорема 3.8. *Пусть* $-\infty<a<b<\infty$. *Если* $1<p<\infty$, $0<\alpha-1/p<1$, *то оператор* I_{a+}^α *ограниченно действует из* $L_p(\rho^\mu)$ *в* $H_0^{\alpha-1/p}(\rho^{\mu/p})$, $\mu<p-1$, *при этом*

$$(I_{a+}^\alpha\varphi)(x)=o\left((x-a)^{\alpha-\frac{1+\mu}{p}}\right), \text{ если } x\to a. \tag{3.19}$$

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера к $I_{a+}^\alpha\varphi$, где $\varphi(x)=(x-a)^{-\mu/p}\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x)\in L_p([a, b])$, получаем оценку (3.19):
$|I_{a+}^\alpha\varphi| \leqslant \left(\int_a^x|\varphi_0(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_a^x (t-a)^{-\mu/(p-1)}(x-t)^{(\alpha-1)p'}dt\right)^{1/p'} \leqslant c(x-a)^{\alpha-(1+\mu)/p}\times$
$\times\left(\int_a^x|\varphi_0(t)|^p dt\right)^{1/p}$. Для доказательства ограниченности оператора I_{a+}^α из $L_p(\rho^\mu)$ в $H_0^{\alpha-1/p}(\rho^{\mu/p})$ воспользуемся коммутационным соотношением (3.15): $\rho^{\mu/p}I_{a+}^\alpha\rho^{-\mu/p}\varphi_0=I_{a+}^\alpha\psi$, $\|\psi\|_{L_p}\leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p}$, что в силу теоремы 3.6 дает нужный результат.

Следствие. *Теорема 3.8 справедлива и в более сильной форме:*

$$I_{a+}^{\alpha}: L_p(\rho^{\mu}) \to h_0^{\alpha-\frac{1}{p}}(\rho^{\frac{\mu}{p}}), \quad 0 < \frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p} + 1,$$

где $h_0^{\lambda}(r)$ — *весовое пространство (1.12).*

Доказательство. Всякую функцию из L_p можно приблизить бесконечно дифференцируемыми функциями, финитными в (a, b) (см. свойство д) функций из L_p в § 1, п. 2°). Отсюда следует, что для $\varphi \in L_p(\rho^{\mu})$ имеет место представление $\varphi = a_{\varepsilon} + \varphi_{\varepsilon}$, где a_{ε} — бесконечно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, а $\|\varphi_{\varepsilon}\|_{L_p(\rho^{\mu})} < \varepsilon$. Обозначая $\Delta f = f(x+t) - f(x)$, $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$, имеем

$$|\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} f)| \leqslant |\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} I_{a+}^{\alpha} a_{\varepsilon})| + |\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon})|. \tag{3.20}$$

Из теоремы 3.8 вытекает оценка $|\Delta(\rho^{\mu/p} I_{a+}^{\alpha}\varphi_{\varepsilon})| \leqslant c\,\|\varphi_{\varepsilon}\|_{L_p(\rho^{\mu})} h^{\alpha-1/p}$. Так как $a_{\varepsilon} \in L_q(\rho^{\mu})$ при любом $q > p$, то опять, согласно теореме 3.8:

$$|\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} I_{a+}^{\alpha} a_{\varepsilon})| \leqslant c h^{\alpha-\frac{1}{q}} \|a_{\varepsilon}\|_{L_q(\rho^{\mu})} = o(h^{\alpha-\frac{1}{p}})$$

при $h \to 0+$. Подставляя найденные оценки в (3.20), получаем $|\Delta(\rho^{\frac{\mu}{p}} f)| \leqslant h^{\alpha-\frac{1}{p}}(c\varepsilon + o(1))$, что доказывает следствие.

Перейдем к случаю веса $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, $a < d \leqslant b < \infty$.

Теорема 3.9. *Пусть* $1 < p < 1/\alpha$ *и* $\mu < p - 1$ *(последнее при* $d < b$*). Тогда оператор* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, в $L_q(r)$, где $q = p/(1-\alpha p)$, $r(x) = |x-d|^{\nu}$ и

$$\begin{aligned} &\nu > -1 \ \text{при} \ \mu \leqslant \alpha p - 1, \\ &\nu = \mu q/p \ \text{при} \ \mu > \alpha p - 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = |t-d|^{-\mu/p}\psi(t)$, $\psi(t) \in L_p(a, b)$ (функции φ, ψ можно считать неотрицательными). Тогда для $x \in (a, d)$ имеем

$$\Gamma(\alpha)(d-x)^{\frac{\nu}{q}}(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = A_1 + A_2,$$

где $A_1 = (d-x)^{\nu/q-\mu/p}\int\limits_a^x \frac{\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$, $A_2 = (d-x)^{\nu/q}\int\limits_a^x [(d-t)^{-\mu/p} - (d-x)^{-\mu/p}](x-t)^{\alpha-1}dt$. Из (3.21) следует, что $\nu/q - \mu/p \geqslant 0$, поэтому по теореме 3.5

$$\|A_1\|_{L_q(a,d)} \leqslant c\,\|\psi\|_{L_p(a,d)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{L_p([a,b];\rho)}. \tag{3.22}$$

Докажем аналогичную оценку для A_2. Если $\mu \geqslant 0$, то

$$A_2 = (d-x)^{\nu/q}\int\limits_a^x \left[\left(\frac{d-x}{d-t}\right)^{\mu/p} - 1\right]\frac{\psi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \leqslant 2A_1,$$

и остается воспользоваться оценкой (3.22). В случае $\mu < 0$ имеем

$$A_2 = (d-x)^{\nu/q}\int\limits_a^x [(d-t)^{\frac{|\mu|}{p}} - (d-x)^{\frac{|\mu|}{p}}](x-t)^{\alpha-1}\psi(t)\,dt.$$

Если $\mu \leqslant \alpha p - 1$, то в силу (3.8) получаем

$$A_2 \leqslant c(d-x)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \int_a^x (d-t)^{-\frac{\varepsilon}{q}+\frac{|\mu|}{p}-1} (x-t)^\alpha \psi(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c(d-x)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \int_a^d (d-t)^{-\frac{\varepsilon}{q}+\frac{|\mu|}{p}+\alpha-1} \psi(t)\, dt \leqslant c(d-x)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \|\psi\|_{L_p(a,d)} \in L_q(a, d),$$

где $0 < \varepsilon < \nu + 1$. В случае $\mu > \alpha p - 1$ представим A_2 в виде

$$A_2 = \frac{|\mu|}{p}(d-x)^{\frac{\mu}{p}} \int_a^x (d-\xi)^{\frac{|\mu|}{p}-1} d\xi \int_a^\xi \frac{\psi(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant c \int_a^x \left(\frac{d-x}{d-\xi}\right)^{\frac{\mu}{p}} \frac{g(\xi)\, d\xi}{d-\xi}, \tag{3.23}$$

где $g = I_{a+}^\alpha \psi \in L_q(a, d)$, $\|g\|_{L_q(a,d)} \leqslant c\, \|\psi\|_{L_p(a,d)}$. Остается заметить, что интегральный оператор в правой части (3.23) ограничен в $L_q(a, d)$ в силу теоремы 1.5.

Оценим $(x-d)^{\nu/q} (I_{a+}^\alpha \varphi)(x)$ для $x \in (d, b)$:

$$\Gamma(\alpha)(x-d)^{\frac{\nu}{q}} I_{a+}^\alpha \varphi = \left(\int_a^d + \int_d^x\right) \frac{(x-d)^{\frac{\nu}{q}} \psi(t)\, dt}{|t-d|^{\frac{\mu}{p}} (x-t)^{1-\alpha}} = B_1 + B_2. \tag{3.24}$$

Для B_1 при $\mu \leqslant \alpha p - 1$, $0 < \varepsilon < \min(1-\alpha, \nu+1)$ имеем

$$B_1 \leqslant (x-d)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \int_a^d \frac{(d-t)^{-\frac{\mu}{p}} \psi(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha-\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant c(x-d)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \left(I_{a+}^{\alpha+\varepsilon+\frac{\mu}{p}} \psi\right)(d) \leqslant c\,(x-d)^{\frac{\nu-\varepsilon}{q}} \|\psi\|_{L_p(a,d)} \in L_q(d, b).$$

Если $\mu > \alpha p - 1$, то, заменяя в B_1 функцию $(x-t)^{\alpha-1}$ по формуле

$$(x-t)^{\alpha-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} (d-t)^\alpha \int_d^x \frac{(x-\tau)^{\alpha-1}(\tau-d)^{-\alpha}}{\tau - t}\, d\tau$$

(см. (11.4)), после перемены порядка интегрирования получаем

$$B_1 = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} (x-d)^{\frac{\mu}{p}} \int_d^x \frac{(\tau-d)^{-\frac{\mu}{p}} g(\tau)\, d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha}},$$

$$g(\tau) = \int_a^d \left(\frac{d-t}{\tau-d}\right)^{\alpha-\frac{\mu}{p}} \frac{\psi(t)\, dt}{\tau - t}.$$

В силу теоремы 1.5 $\|g\|_{L_p(d,b)} \leqslant c\, \|\psi\|_{L_p(a,b)}$. Отсюда по теореме 3.7 находим

$$\|B_1\|_{L_q(d,b)} \leqslant c\, \|g\|_{L_p(a,b)} \leqslant c\, \|\psi\|_{L_p(a,b)}.$$

Для второго слагаемого в (3.24) нужная оценка получается применением теоремы 3.7. Теорема доказана.

Замечание 3.4. При $\mu/p \leqslant \alpha - 1/p$ в теореме 3.9 нельзя брать $\nu = \mu q/p$. Действительно, взяв $\varphi(x) = |d-x|^{-\mu/p}$, имеем при $x \in \left(\frac{d+a}{2}, d\right)$:

$$(d-x)^{\frac{\nu}{q}}(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) \geqslant c\,(d-x)^{\frac{\nu}{q}} \int\limits_a^{\frac{d+a}{2}} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{(d-t)^{\frac{\mu}{p}}}\,dt \geqslant c\,(d-x)^{\frac{\nu}{q}} \notin L_q.$$

Аналог теоремы 3.9 справедлив и для общих степенных весов:

$$\rho(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\mu_k}, \quad r(x) = \prod_{k=1}^{n} |x-x_k|^{\nu_k}, \quad a = x_1 < \ldots < x_n = b. \tag{3.25}$$

Приведем без доказательства утверждение для оператора I_{a+}^{α}.

Теорема 3.10. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\mu_k < p-1$ *для* $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $0 \leqslant m \leqslant \alpha$, $0 < \alpha < m + \frac{1}{p}$, $q = \frac{p}{1-(\alpha-m)p}$, $\nu_1 = \left(\frac{\mu_1}{p} - m\right)q$, $\nu_k = \left(\frac{\mu_k}{p} - m\right)q$, *если* $\mu_k > \alpha p - 1$, *и* $\nu_k > \left(\alpha - \frac{1}{p} - m\right)q$, *если* $\mu_k \leqslant \alpha p - 1$, $k = 2, \ldots, n$. *Тогда оператор* I_{a+}^{α} *ограничен из* $L_p(\rho)$ *в* $L_q(r)$.

Исследуем вопрос о принадлежности дробных интегралов $I_{a+}^{\alpha}\varphi$, $\varphi \in L_p(\rho)$, весовым гельдеровым пространствам при $\alpha > 1/p$. Вначале рассмотрим вес $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, $a < d \leqslant b$.

Теорема 3.11. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1/p < \alpha < 1 + 1/p$, $0 < \mu < p-1$ *при* $a < d < b$ *и* $0 < \mu < \infty$ *при* $d = b$. *Тогда оператор дробного интегрирования* I_{a+}^{α} *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$, $\rho(x) = |x-d|^{\mu}$, *в* $H_0^{\min(\mu/p, \alpha-1/p)}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu \neq \alpha p - 1$, *и в* $H_0^{\alpha-1/p, 1/p'}(\rho^{1/p})$, *если* $\mu = \alpha p - 1$.

Доказательство. Пусть $\nu = \mu/p$, $\varphi(x) = |x-d|^{-\nu}\varphi_0(x)$, $\varphi_0 \in L_p$. Нужно показать, что

$$f(x) = \int\limits_a^x \left|\frac{x-d}{t-d}\right|^{\nu} \frac{\varphi_0(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \in \begin{cases} H_0^{\min\left(\nu, \alpha - \frac{1}{p}\right)}, & \text{если } \nu \neq \alpha - \frac{1}{p}, \\ H_0^{\alpha - \frac{1}{p}, \frac{1}{p'}}, & \text{если } \nu = \alpha - \frac{1}{p}, \end{cases}$$

$$c\,\|\varphi_0\|_{L_p} \geqslant \begin{cases} \|f\|_{H^{\min\left(\nu, \alpha-\frac{1}{p}\right)}}, & \text{если } \nu \neq \alpha - \frac{1}{p}, \\ \|f\|_{H^{\alpha-\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}}}, & \text{если } \nu = \alpha - \frac{1}{p}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Зафиксируем точку $a_1 \in (a, d)$. Тогда в силу теоремы 3.8 $f(x) \in H^{\alpha-1/p}([a, a_1])$, причем $f(a) = 0$ и $\|f\|_{H^{\alpha-1/p}(a,a_1)} \leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p}$. Покажем, что $f(x)$ обращается в нуль при $x = d$ и удовлетворяет оценке (3.26) на $[a_1, d]$. Пусть $x \in (a_1, d)$, тогда

$$f(x) = \left(\int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{x}\right) \left|\frac{x-d}{t-d}\right|^{\nu} \frac{\varphi_0(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = u(x) + v(x).$$

Оценим $u(x)$:

$$|u(x)| \leqslant c(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_a^{a_1} \frac{(d-t)^{-\nu p'}dt}{(a_1-t)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}.$$

Для $v(x)$ имеем

$$|v(x)| \leqslant (d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_{a_1}^{x} \frac{(x-t)^{(\alpha-1)p'}dt}{(d-t)^{\nu p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.27}$$

Если $\nu < \alpha - 1/p$, то $|v(x)| \leqslant (d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_{a_1}^{x} (x-t)^{(\alpha-1-\nu)p'}dt\right)^{1/p'} \leqslant \leqslant c(d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p}$. Если $\nu > \alpha - 1/p$, то после замены $t = x - \xi(d-x)$ имеем

$$|v(x)| \leqslant (d-x)^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_0^{\frac{(x-a_1)}{d-x}} \xi^{(\alpha-1)p'}(1+\xi)^{-\nu p'}d\xi\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant c(d-x)^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_0\|_{L_p}.$$

В случае $\nu = \alpha - 1/p$ аналогично получаем (можно считать, что $x - a_1 > > d - x$):

$$|v(x)| \leqslant (d-x)^{\nu}\|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_0^1 \xi^{(\alpha-1)p'}\,d\xi + \int_1^{\frac{x-a_1}{d-x}} \xi^{-1}d\xi\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\,(d-x)^{\nu}\,\|\varphi_0\|_{L_p}(1 + |\ln(d-x)|).$$

Из приведенных оценок следует, что $f(d-0) = 0$. Аналогично проверяется, что $f(d+0) = 0$ при $d < b$.

Для оценки гельдеровской нормы функции $f(x)$ при $x \in [a_1, d]$ представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi_0(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{(d-x)^{\nu} - (d-t)^{\nu}}{(d-t)^{\nu}(x-t)^{1-\alpha}}\,\varphi_0(t)\,dt = f_1(x) + f_2(x).$$

По теореме 3.8 $\|f_1\|_{H^{\alpha-1/p}([a,b])} \leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p(a,b)}$. Для f_2 имеем $f_2(x+h) - - f_2(x) = J_1 + J_2 + J_3$, $a_1 \leqslant x < x+h \leqslant d$, где J_1, J_2, J_3 — те же, что в (3.7) с заменой $(x-a)^{\mu}$ на $(d-x)^{\nu}$. Оценим J_1 (в дальнейшем для простоты ограничимся случаем $\nu \leqslant 1$):

$$|J_1| \leqslant \|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_x^{x+h} (d-t)^{-\nu p'}(x+h-t)^{(\alpha-1)p'}|(d-t)^{\nu} -\right.$$

$$\left. - (d-x-h)^{\nu}|^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant c\,\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_x^{x+h} (d-t)^{-\nu p'}(x+h-t)^{(\alpha+\nu-1)p'}\,dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant c\|\varphi_0\|_{L_p}\left(\int_x^{x+h} (x+h-t)^{(\alpha-1)p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant ch^{\alpha-\frac{1}{p}}\|\varphi_0\|_{L_p}.$$

Оценивая J_2, находим

$$|J_2| \leqslant ch^{\nu} \|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_a^x \frac{(d-t)^{-\nu p'} dt}{(x+h-t)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant ch^{\nu} \|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_a^{a_1} \frac{(d-t)^{-\nu p'} dt}{(a-t)^{(1-\alpha)p'}} + \int_{a_1}^x \frac{(d-t)^{-\nu p'} dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant ch^{\nu} \|\varphi_0\|_{L_p} \left[1 + \left(\int_{a_1}^x \frac{(d-t)^{-\nu p'} dt}{(x-t)^{(1-\alpha)p'}} \right)^{\frac{1}{p'}} \right].$$

Интеграл в круглых скобках совпадает с интегралом в (3.27), оценка которого уже проводилась. Поэтому при $\nu < \alpha - 1/p$ имеем $|J_2| \leqslant ch^{\nu} \|\varphi_0\|_{L_{p(a,b)}}$. Если $\nu \geqslant \alpha - 1/p$, то выражение в квадратных скобках оценивается величиной $1 + c\,(d-x)^{\alpha-\nu-1/p} \leqslant 1 + ch^{\alpha-\nu-1/p}$ при $\nu > \alpha - 1/p$ и величиной

$$1 + \int_0^{\frac{x-a_1}{h}} \frac{d\xi}{\xi^{(1-\alpha)p'}(1+\xi)^{\nu p'}} \leqslant c\left(1 + \ln\frac{1}{h}\right) \text{ при } \nu = \alpha - \frac{1}{p},$$

что дает для J_2 нужный результат.

Перейдем к оценке J_3. Зафиксируем произвольную точку $\delta \in (a, a_1)$ и представим J_3 в виде

$$J_3 = \left(\int_a^{\delta} + \int_{\delta}^{a_1} + \int_{a_1}^{x} \right) \frac{(d-x)^{\nu} - (d-t)^{\nu}}{(d-t)^{\nu}} [(x+h-t)^{\alpha-1} -$$

$$-(x-t)^{\alpha-1}]\, \varphi_0(t)\, dt = J_{31} + J_{32} + J_{33}.$$

Для первого слагаемого, очевидно,

$$|J_{31}| \leqslant ch \int_0^{\delta} |\varphi_0(t)|\, dt \leqslant ch \|\varphi_0\|_{L_p},$$

а для второго —

$$|J_{32}| \leqslant c \|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_{\delta}^{a_1} |(x-t)^{\alpha-1} - (x+h-t)^{\alpha-1}|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant ch^{\alpha - \frac{1}{p}} \|\varphi_0\|_{L_p}.$$

Наконец,

$$|J_{33}| \leqslant c \|\varphi_0\|_{L_p} \left(\int_{a_1}^x \left(\frac{x-t}{d-t} \right)^{\nu p'} |(x-t)^{\alpha-1} - (x+h-t)^{\alpha-1}|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}},$$

откуда $|J_{33}| \leqslant ch^{\alpha-1/p} \|\varphi_0\|_{L_p}$.

Из проделанных оценок вытекает неравенство (3.26) на отрезке $[a_1, d]$. Для $[d, b]$ (при $d<b$) рассуждения проводятся аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3.5. Зависимость порядка гельдеровости дробного интеграла $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$ от соотношения между μ/p и $\alpha - 1/p$ обусловлена поведением интеграла $f = I^{\alpha}_{a+}\varphi$ в точке $x = d$. Это поведение можно «уловить», варьируя показатель степени весовой функции для $f(x)$. В этом случае порядок гельдеровости не меняется и равен $\alpha - 1/p$. Приведем без доказательства теорему об ограниченности оператора дробного интегрирования в такой трактовке для случая общих степенных весов (3.25) (другой вариант подобной теоремы см. в § 4, п. 2°, 3.1).

Теорема 3.12. *Пусть* $1<p<\infty$, $1/p<\alpha<1+1/p$, $\mu_k<p-1$ *для* $k=1, 2, \ldots, n-1$. *Тогда оператор* I^{α}_{a+} *ограниченно действует из* $L_p(\rho)$ *в* $H_0^{\alpha-1/p}(r)$ (*и даже в* $h_0^{\alpha-1/p}(r)$), *если* $r(x)=(x-a)^{\mu_1/p}\prod\limits_{k\in\Lambda}|x-x_k|^{\delta_k}$, $\Lambda=\{k : k\in\{2, 3, \ldots, n\}, \mu_k>0\}$, $\delta_k=\mu_k/p$ *при* $\mu_k>\alpha p-1$ *и* $\delta_k=\alpha+\varepsilon_k-1/p$, $\varepsilon_k>0$, *при* $\mu_k\leqslant\alpha p-1$.

Естественно поставить вопрос о действии дробного интегрирования в пространствах $L_p(\rho)$ с произвольным, не обязательно степенным весом. В этом случае рассматриваются весовые функции, удовлетворяющие так называемому условию типа Макенхоупта. Мы не станем касаться здесь этого вопроса, но отметим, что необходимую информацию можно найти ниже в теореме 25.4 и в § 29, п. 2°, 25.8 и 26.11 для многомерного случая.

§ 4. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 1

1°. **Исторические сведения.** В кратком историческом очерке, помещенном в начале книги, содержится обзор работ, относящихся к зарождению и развитию основ теории дробного интегродифференцирования. Поэтому здесь мы остановимся на исторических комментариях к конкретному содержанию главы.

К § 2, пп. 1, 2°. Уравнение (2.1) носит имя Абеля, впервые рассмотревшего и решившего это уравнение при $0<\alpha<1$ в связи с задачей о таутохроне (N. H. Abel [1], 1823 г.; [2], 1826 г.), см. об имеющемся историческом заблуждении по этому поводу в «Кратком историческом очерке». Уравнение типа Абеля $\int\limits_0^x(x^2-s^2)^{-1/2}\varphi(s)ds=f(x)$ было решено Ф. Йоахимсталем (F. Joachimsthal [1], 1861 г.); более общее такое уравнение

$$\int\limits_0^x[\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha-1}\varphi(s)\,ds=f(x),\quad \alpha>0, \tag{4.1}$$

с монотонно возрастающей функцией $\tau(x)$ решалось в работе Т. Сато (T. Satô [1], 1935 г.), хотя его решение фактически было известно еще Х. Хольмгрену (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 гг.). Уравнения (4.1) часто встречаются в приложениях, отметим, например, их использование в теории обобщенных аналитических функций в исследованиях Г. Н. Положего ([1], 1964 г.; [2, с. 236], 1965 г.; [3, с. 186], 1973 г.).

Изложенное в п. 1° решение уравнения Абеля (2.1) хорошо известно. Менее известно обоснование этого решения в классе $L_1(a, b)$, приводимое в теоремах 2.1 и 2.3. Оно дано в 1930 г. Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1, теорема 4]) при $\alpha>0$. (Это доказательство было изложено в книге М. М. Джрбашяна [2].) Роль абсолютной непрерывности в теории дробных интегралов суммируемых функций была в полной мере выявлена Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.), хотя раньше Л. Тонелли (L. Tonelli [1], 1928 г.) использовал понятие абсолютной непрерывности при решении уравнения Абеля и, в частности, получил утверждение следствия из леммы 2.1 и формулу (2.14) для $f\in AC([a, b])$. Обоснование обращения уравнения Абеля в классе непрерывных функций(тогда условия (2.9) заменяются условиями $f_{1-\alpha}(x)\in C^1([a, b])$, $f_{1-\alpha}(a)=0$) было фактически дано еще в книге М. Бохера (M. Bôcher [1, с. 8—9], 1909 г.).

К § 2, п. 3°. Определение 2.1 восходит к Б. Риману (B. Riemann [1], 1847 г.; опубликовано в 1876 г.). Определение 2.2 дробного дифференцирования также содержится в этой работе. Как и Ж. Лиувилль, Б. Риман имел дело с так называемыми «дополнительными» функциями при определении дробного дифференцирования (по существу, «дополнительные» функции — это степенные функции с произвольными коэффициентами, используемые Ж. Лиувиллем и Б. Риманом для того, чтобы равенство $I^{\alpha}_{a+}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f=f$ выполнялось при всех f, ср. с (2.60)). Упомянем полемику, связанную с «дополнительными» функциями в работе А. Кэли (A. Cayley [1], 1880 г.). Первыми, кто сознательно отказались от «дополнительных» функций, были Х. Хольмгрен (Hj. Holmgren [1], 1865—1866 гг.) и независимо А. В. Летников [4], 1874 г. В связи с этим отказом Х. Хольмгрен и А. В. Летников предложили вводить дробное дифференцирование как операцию, являющуюся левой обратной к дробному интегрированию (подход, общепринятый в современном анализе), и осуществили построение основ теории дробного интегродифференцирования при таком подходе.

Формула (2.20) установлена в работе Э. Лава, Л. Юнга (E. R. Love, L. C. Young [1], 1938 г.).

Формула (2.26) фактически была известна еще Эйлеру: правая часть в (2.26) по определению вводилась им как дробная производная степенной функции, см. работу Л. Эйлера [1, с. 56], 1738 г.

К § 2, п. 4°. Порядок α дробного интегродифференцирования был комплексным уже в работах Ж. Лиувилля, Б. Римана, А. Грюнвальда, А. В. Летникова, Н. Я. Сонина и др. Дробные интегралы чисто мнимого порядка $\alpha=i\theta$ вводились Х. Кобером (H. Kober [2], 1941 г.) с помощью преобразования Меллина, что позволило рассматривать такое дробное интегрирование как непрерывную операцию в $L_2(0, \infty)$. В форме (2.37), (2.38) дробные интегралы чисто мнимого порядка появляются в работе Г. Калиша (G. K. Kalisch [1], 1967 г.), где было показано, что они порождают ограниченные в $L_p(0, 1)$, $1<p<\infty$, операторы, см. об этом утверждении в случае всей оси в лемме 8.2. Исследованию в L_p операторов дробного интегрирования чисто мнимого порядка посвящена также работа М. Фишера (M. J. Fisher [2], 1971 г.). Обстоятельное исследование формул композиции (так называемых «индексных законов») для дробных интегралов чисто мнимого порядка проведено в работах Э. Лава (E. R. Love [4, 5], 1971—1972 гг.).

Теорема 2.2 по существу содержится у Я. Тамаркина (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.). Сама формула (2.43) (на достаточно «хороших» функциях) имеется в работах Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1, с. 7], 1865—1866 гг.) и А. В. Летникова [1, с. 26], 1868 г.

К § 2, п. 5°. Формулы вычисления дробных интегралов от элементарных функций (2.44) — (2.54) известны давно. В частности, формулы (2.44), (2.45) для степенных функций фактически имеются у Л. Эйлера [1], 1738 г., где они вводятся по определению, а формулы (2.48), (2.49) — у Х. Хольмгрена (Hj. Holmgren [1, с. 17], 1865—1866 гг.). Для логарифмической функции формула (2.50) дана при $\beta=1$ еще А. В. Летниковым [1, с. 37], 1868 г. Формула (2.54) есть модификация формулы Н. Я. Сонина [3], 1880 г. (так называемый первый интеграл Сонина, см. книгу Н. Я. Сонина [6, с. 206]).

В связи с получением формулы (2.50) отметим, что идея получения формул, содержащих степенно-логарифмические функции, из соответствующих формул для чисто степенных функций путем дифференцирования по показателю степени принадлежит В. Вольтерра (V. Volterra [2], 1916 г.). Этим путем, в частности, получаются формулы для дробного интегрирования функций $\varphi(x)=(x-a)^{\beta-1}\ln^m(x-a)$, см. табл. 9.1 в § 9, п. 3°.

К § 2, п. 6°. Пространства $I^{\alpha}_{a+}[L_1(a, b)]$ как самостоятельный класс функций впервые появляются в работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна ([4], 1960 г.; [5], 1961 г.), а пространства $I^{\alpha}[L_p(a, b)]$ — в работах Б. С. Рубина [1], 1972 г., и С. Г. Самко [7], 1969 г. (для случая $(a, b)=R^1$). Теорема 2.3 дана Я. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1], 1930 г.). Соображения о недостаточности существования почти всюду суммируемой производной $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ для восстановления $f(x)$ в виде дробного интеграла порядка α, приведенные после теоремы 2.3, существенны: заблуждение о достаточности такого условия содержится в немалом числе работ по дробному интегродифференцированию. Используемое в настоящей книге определение 2.4 позволило дать строгое доказательство соотношения (2.58), которое многими авторами «доказывалось» при ошибочном предположении, что $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ лишь существует почти всюду и суммируема.

К § 2, п. 7°. Полугрупповое свойство (2.65) операторов дробного интегрирования доказывалось уже в работах Б. Римана, Х. Хольмгрена, А. В. Летникова и др. Из математиков прошлого века наиболее четко изложил это свойство А. В. Летников [4, гл. II], 1874 г.; см. также [5], 1874 г. Уместно сослаться на описание свойств дробного интегрирования с точки зрения теории полугрупп в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, гл. 23, с. 674—690]. Теорема 2.5 доказывалась в разное время разными авторами при различных предположениях. В случае интегралов, понимаемых в смысле Данжуа, она доказывалась в работе Л. Бозанке (L. S. Bosanquet [1], 1931 г.) при $\alpha>0$, $\beta>0$, а в случае интегралов Стилтьеса, суммируемых в смысле Чезаро,— в работе Ж. Изаакса (G. L. Isaacs [2], 1960 г.). Более подробное, чем в теореме 2.5, рассмотрение свойства (2.65) (включающее случаи $\mathrm{Re}\,\alpha=0$ или $\mathrm{Re}\,\beta=0$) см. в работе Э. Лава (E. R. Love [5], 1972 г.). Теорема 2.6, по-видимому, впервые сформулирована и доказана Э. Хилле (см. книгу Э. Хилле, Р. Филлипса [1, с. 675]). Доказательство теоремы 2.7 заимствовано из книги М. М. Джрбашяна [2, с. 568].

К § 3. пп. 1, 2° Первый результат, касающийся дробного дифференцирования гельдеровских функций принадлежит Г. Вейлю (H. Weyl [1], 1917 г.). Он показал (в периодическом случае, который рассматривается нами в § 19), что функции, удовлетворяющие условию Гельдера порядка λ, имеют непрерывные дробные производные порядка $\alpha<\lambda$. В непериодическом случае для рассматриваемых в § 3 дробных производных Римана—Лиувилля подобное утверждение было получено П. Монтелем (P. Montel [1], 1918 г.), который использовал для этого теоремы типа С. Н. Бернштейна о скорости приближения функций алгебраическими многочленами. Точные результаты о действии дробного интегродифференцирования в рамках пространств H^{λ} принадлежат Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.), получившим теорему 3.1 о действии оператора I^{α}_{a+} из H^{λ}_0 в $H^{\lambda+\alpha}_0, \lambda+\alpha<1$ (и доказываемую в § 13 лемму 13.1 о действии $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}$ из H^{λ}_0, $\lambda>\alpha$, в $H^{\lambda-0}_{\alpha}$). Теоремы 3.3, 3.3′, 3.4 о действии I^{α}_{a+} в пространствах $H^{\lambda}_0(\rho)$ со степенным весом доказаны Б. С. Рубиным [7]. 1974 г., при ограничении $0<\mu_1<\lambda+1$ на показатель веса в точке $x=a$. Здесь эти теоремы доказаны при $\mu_1<\lambda+1$, как в работе Б. ~~С.~~ Рубина [22], 1986 г. При доказательстве теорем 3.3, 3.3′, 3.4 мы следовали этим работам Б. С. Рубина, за исключением теоремы 3.4, доказательство которой проведено нами иначе.

Отметим работу Ю. Чженя (Y. W. Chen [1], 1959 г.), в которой рассматривалась гельдеровость с весом интегральных операторов, обобщающих дробное интегрирование. Имеющийся в этой работе результат охватывает теорему 3.3, причем для значений $0\leqslant\lambda<1$.

К § 3, пп. 3, 4°. Теоремы 3.5—3.7 установлены Г. Харди, Д. Литтлвудом (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [1], 1925 г.; [3], 1928 г.), см. в связи с этим § 9, п. 1° (к § 5). (Простое утверждение о действии I^{α}_{a+} из L_p в L_r, $r<p/(1-\alpha p)$, впервые было отмечено Г. Харди (G. H. Hardy [1], 1917 г.).) Приведенное уточнение в случае $\alpha-1/p=1, 2, \ldots$ сделано А. А. Килбасом. Теорема 3.8 получена в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г. Здесь приведено более короткое — на основе леммы 3.2 о коммутации — доказательство, осуществленное Б. С. Рубиным [22], 1986 г. Изложенное доказательство теоремы 3.7 также основано на лемме 3.2. Оно дано Б. С. Рубиным [22], 1986 г., см. также статьи Б. С. Рубина [17, с. 529], 1983 г., и Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г. Доказательство теоремы 3.7 в случае $p=1$ заимствовано из работы Т. Флетта (T. M. Flett [3], 1958 г.). Лемма 3.2 получена в работах Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [1], 1982 г.; [3], 1986 г. Более общая лемма 3.3 установлена Б. С. Рубиным [17, с. 529], 1983 г. Доказательство следствий из теорем 3.6, 3.8 указано в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г.

Приведенная без доказательства теорема 3.10 доказана при $m=0$ в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г., а при $m\in[0, \alpha]$ — в работе Б. С. Рубина [22], 1986 г. Мы дали здесь простое доказательство этой теоремы только в частном случае — в виде теоремы 3.9, когда вес «привязан» к одной точке $x=a$. Это доказательство было осуществлено независимо друг от друга А. А. Килбасом и Б. С. Рубиным и ранее не публиковалось. Теорема 3.11 доказана в работе Н. К. Карапетянца, Б. С. Рубина [2], 1984 г. (для случая $\nu\neq\alpha-1/p$). Случай $\nu=\alpha-1/p$ рассмотрен А. А. Килбасом и ранее не публиковался. Теорема 3.12 доказана Б. С. Рубиным [22], 1986 г.

2°. Обзор других результатов. 2.1. Решение уравнения Абеля на дуге в комплексной плоскости, а также более общего уравнения

$$\int_a^t \frac{P(t-\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),\quad 0<\alpha<1,$$

где $P(t)$ — многочлен, $t, \tau\in\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ — гладкая дуга с концами a и b, дано К. Д. Сакалюком [3].

2.2. В работе L. S. Bosanquet [1] уравнение Абеля рассматривалось в том случае, когда решение не обязательно интегрируемо по Лебегу. Интегралы при этом понимаются в обобщенном смысле (в смысле Данжуа).

2.3. Имеется ряд работ, посвященных приближенному решению интегрального уравнения Абеля (2.1). Отметим некоторые из них. По-видимому, первой была статья E. T. Whittaker [1]. В работе H. E. Fettis [1] дан метод приближенного решения уравнения (2.1) с помощью многочленов Якоби. Ортогональные многочлены с той же целью применялись также в работе G. N. Minerbo, M. E. Levy [1]. Численный метод решения более общего уравнения $\int_0^x k(x, t)(x-t)^{-\alpha}\varphi(t)dt=f(x)$, $x>0$, предложен в статье R. Weiss [1]. В частном случае $\alpha=1/2$ численный метод указан в работе H. Edels, K. Hearne, A. Young [1] в связи с задачами, возникающими при рассмотрении симметричного разряда в газе. Решение уравнения Абеля при наличии возмущения дано методом квадратичной оптимизации в статье R. Gorenflo [1]. В работах Ю. Е. Воскобойникова [1], Р. Я. Докторского, А. В. Осипова [1], Н. В. Медведева [1] применен метод сплайнов для приближенного решения уравнения Абеля. См. также работы Ю. Е. Воскобойникова [2], В. А. Желудева [2], Е. Л. Косарева [1], R. Balasubramanian, D. H. Norrie, G. de Vries [1], C. K. Chan, P. Lu [1], P. P. B. Eggermont [1], W. Frie [1], R. O. Sirola, T. P. Anderson [1], S. Ugniewski [1, 2].

В § 16, п. 5° можно найти также краткое изложение идеи асимптотического решения уравнения Абеля.

2.4. Н. Я. Сонин [4, 5, 6, с. 148] обобщил интегральное уравнение Абеля, рассмотрев уравнение

$$\int_a^x \mathrm{k}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > a, \tag{4.2}$$

и дав его явное решение

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x l(x-t)\,f(t)\,dt \tag{4.2'}$$

в предположении, что для ядра $\mathrm{k}(x)$ существует функция $l(x)$ такая, что

$$\int_0^x \mathrm{k}(t)\,l(x-t)\,dt = 1 \quad \text{для} \quad x > 0. \tag{4.2''}$$

Существование такой функции $l(x)$ обеспечено, например, в случае ядер вида $\mathrm{k}(x) = x^{\alpha-1}g(x)$, $g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, $a_0 \neq 0$, причем в этом случае $l(x) = x^{-\alpha}h(x)$, $h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$, $0 < \alpha < 1$ (J. Wick [1]). Более широкий класс ядер $\mathrm{k}(x)$, удовлетворяющих условию Н. Я. Сонина, указан Б. С. Рубиным [14, с. 62—63].

Заметим, что В. Вольтерра (V. Volterra [1]) использовал метод решения уравнения Абеля (2.1) для сведения более общего уравнения

$$\int_a^x \frac{\mathrm{k}(x, t)}{(x-t)^\alpha}\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1,$$

с непрерывной функцией $\mathrm{k}(x, t)$ к интегральному уравнению второго рода, ядро которого не имеет особенности (В. Вольтерра называл этот прием методом преобразования ядра). См. о таком сведении к уравнению второго рода более подробно в § 31, п. 3°.

2.5. Решение интегрального уравнения Абеля второго рода

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > 0, \quad \alpha > 0, \tag{4.3}$$

дано E. Hille, J. D. Tamarkin [1] в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера (1.90):

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x E_\alpha[\lambda(x-t)^\alpha]\,f(t)\,dt. \tag{4.4}$$

В этом можно убедиться с помощью преобразования Лапласа (учитывая его действие на левую часть уравнения (4.3) по формуле (7.14) и формулу (1.93) преобразования функции Миттаг-Леффлера).

Равенство (4.4) определяет (с точностью до замены λ на $1/\lambda$) резольвенту $(\lambda E - I_{0+}^\alpha)^{-1}$ оператора дробного интегрирования I_{0+}^α. Следует упомянуть работы E. Hille [1, 2], посвященные исследованию этой резольвенты и вообще спектральных свойств оператора дробного интегрирования в общем контексте спектральной теории линейных операторов и связанной с нею эргодической теорией, см. также книгу Э. Хилле, Р. Филлипса [1]. Резольвента $(E - \lambda M)^{-1}$ более общего интегрального оператора

$$M\varphi = \int_0^x \left[\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + M_1(x, t)\right]\varphi(t)\,dt,$$

где $M_1(x, t)$ — достаточно гладкая вне $t = x$ функция с более «хорошим», чем $(x-t)^{\alpha-1}$, поведением при $t \to x$, исследована в работах А. П. Хромова [1], Л. Б. Мацнева [1] (с использованием свойств дробного дифференцирования $\mathcal{D}_{0+}^\alpha$ и асимптотики функции Миттаг-Леффлера). В связи с этими исследованиями см. также работу С. Н. Кабанова [1].

Уравнение

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1}\,\varphi(t)\,dt = 0, \quad x \in R^1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

имеет при $\lambda>0$ нетривиальное решение $\varphi(x)=Ce^{-ax}$, $a=\lambda^{1/\alpha}$, которое является его общим решением (G. H. Hardy, E. C. Titchmarsh [1]).

В работе H. Brakhage, K. Nickel, P. Rieder [1] уравнение (4.3) решено в замкнутой форме в терминах элементарных функций в случае, когда α — рациональное число: $\alpha=m/n<1$. Случай $\alpha=1/2$ при рассмотрении уравнения вида (4.3) по всей прямой был известен еще Ж. Лиувиллю (J. Liouville [5, с. 285], 1834 г.). Более общее, чем (4.3), уравнение

$$\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{\Gamma(\alpha_k)}\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha_k}}=f(x),\quad x>0, \tag{4.5}$$

с рациональными $\alpha_k=k/n$ решалось в работах V. Kostitzin [1], P. Rieder [1]. В последней работе также изучались системы уравнений вида (4.5).

Уравнение с особенностью в точке $x=0$

$$\varphi(x)-\frac{\lambda}{x^\alpha}\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x),\quad 0<x<1,$$

рассматриваемое на конечном отрезке $[0, 1]$, решается в квадратурах. Соответствующее однородное уравнение имеет, вообще говоря, нетривиальное решение, например, в $L_p(0, 1)$, $1<p<\infty$, при $\lambda>\dfrac{\Gamma(1+\alpha-1/p)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-1/p)}$, см. об этом в работе Л. Г. Михайлова [1, с. 29].

Укажем еще, что в работе H. T. Davis [1, с. 105] (см. также [2]) дана процедура решения уравнения

$$\varphi(x)-\int_a^x\frac{P(t)\,\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x),\quad x>a, \tag{4.6}$$

в случае, когда $P(t)$ — многочлен, α — рациональное число.

Уравнения (4.3), (4.5), (4.6) примыкают к дифференциальным (интегродифференциальным) уравнениям дробного порядка, о которых см. подробнее в § 42.

В прикладных задачах возникает нелинейное уравнение Абеля второго рода $[\varphi(x)]^{1+\alpha/\beta}-\lambda(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)=0$ при специальных значениях λ (W. R. Schneider [1]).

Отметим, что выбрав $f(x)\equiv 1$ и подставив $\varphi(x)=E_\alpha(\lambda x^\alpha)$ в уравнение (4.3), получаем следующую формулу для дробного интегрирования функции Миттаг-Леффлера:

$$\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=E_\alpha(\lambda x^\alpha)-1,\quad \alpha>0. \tag{4.7}$$

Отметим также примыкающую сюда формулу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{t^{\beta-1}E_{2\alpha,\beta}(t^{2\alpha})}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=x^{\beta-1}[E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)-E_{2\alpha,\beta}(x^{2\alpha})],\quad \alpha>0,\ \beta>0, \tag{4.8}$$

которую можно проверить с помощью преобразования Лапласа, используя равенство (1.93). Формулы (4.7), (4.8) получены в работах P. Humbert, R. P. Agarwal [1] и R. P. Agarwal [1], в которых можно найти и другие формулы такого типа.

2.6. Тождество (2.20) дробного интегрирования по частям позволяет по заданной биортогональной системе функций $\varphi_n(x)$, $\psi_m(x)$:

$$\int_a^b\varphi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx=\delta_{n,m},\quad n,\ m=1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.9}$$

строить новые такие системы. Именно пусть

$$\Phi_n(x)=v(x)\,I^\alpha_{a+}(u\varphi_n),\qquad \Psi_m(x)=\frac{1}{v(x)}\,\mathcal{D}^\alpha_{a+}\left(\frac{\psi_m}{u}\right),$$

где $u(x)$, $v(x)$ — произвольные функции, $u(x)\neq 0$, $v(x)\neq 0$. Тогда из (2.20) следует, по крайней мере формально, что $\Phi_n(x)$, $\Psi_n(x)$ также удовлетворяют условию (4.9). Эта идея принадлежит A. Erdélyi [3], который в случае полиномов Якоби

$$\varphi_n(x)={}_2F_1(-n,\ \beta+n;\ \gamma;\ x),\quad \psi_m(x)=cx^{\gamma-1}(1-x)^{\beta-\gamma}{}_2F_1(-m,\ \beta+m;\ \gamma;\ x),$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (1.72), построил таким путем новые биортогональные системы функций, выражающихся через гипергеометрические функции ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$, а также другие системы функций (см. § 9, п. 2° и § 23, п. 2° относительно этого приема в других случаях).

Ранее в работах A. Erdelyi [1, 2] формула (2.20) использовалась при получении некоторых представлений для гипергеометрической функции Гаусса, см. аналогичные исследования для функций Аппеля F_1, F_2, F_4 в статьях H. L. Manocha [1, 2].

Заметим, что в работе C. M. Joshi [1] дробные интегралы (2.17), (2.18) использовались для получения интегральных представлений трех гипергеометрических функций Лауричелла от трех переменных (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 236]).

2.7. Обобщением формулы типа Тейлора (2.63) служит следующее равенство:

$$f(x)=\sum_{k=-m}^{n-1}\frac{(x-x_0)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}\left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha+k}f\right)(x_0)+R_{n,m},$$

где $m<\alpha$, $x>x_0\geqslant a$ и

$$'R_{n,m}=\left(I_{x_0}^{\alpha+n}\mathscr{D}_{a+}^{\alpha+n}f\right)(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha-m)}\int_a^{x_0}(x-t)^{\alpha-m-1}\left(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha-m-1}f\right)(t)\,dt$$

(Y. Watanabe [1, с. 31]). Отсюда при $m=0$ и $x_0\to a$ получается (2.63).

2.8. Другой вариант обобщения формулы Тейлора был предложен в работах М. М. Джрбашяна, А. Б. Нерсесяна [1, 2]. Именно пусть $\alpha_0=0$, α_1, ..., α_m — возрастающая последовательность чисел таких, что $0<\alpha_k-\alpha_{k-1}\leqslant 1$, $k=1, 2, ..., m$. Пусть $x>0$. Введем обозначение

$$\mathscr{D}^{(\alpha_k)}f=I_{0+}^{1-(\alpha_k-\alpha_{k-1})}\mathscr{D}_{0+}^{1+\alpha_{k-1}}f \tag{4.10}$$

и подчеркнем, что, вообще говоря, $\mathscr{D}^{(\alpha_k)}f\neq\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}f$. «Дробная производная» $\mathscr{D}^{(\alpha_k)}f$ отличается от дробной производной Римана—Лиувилля $\mathscr{D}_{0+}^{\alpha_k}f$ конечной суммой степенных функций, см. формулу (2.68). Это обстоятельство позволяет прийти к обобщенной формуле Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(\mathscr{D}^{(\alpha_k)}f\right)(0)}{\Gamma(1+\alpha_k)}x^{\alpha_k}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_m)}\int_0^x(x-t)^{\alpha_m-1}\left(\mathscr{D}^{(\alpha_m)}f\right)(t)\,dt \tag{4.11}$$

(М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян [1, с. 88; 2]) для функций $f(x)$, например, имеющих все непрерывные указанные производные. В цитированных работах продемонстрирована полезность введения производных (4.10) при вычислении коэффициентов обобщенных степенных рядов $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^{\alpha_k}$, $a_k=\dfrac{\left(\mathscr{D}^{(\alpha_k)}f\right)(0)}{\Gamma(1+\alpha_k)}$, а также при получении критериев разложимости функций в ряды Дирихле. Этот подход к исследованию функций, разложимых в обобщенные степенные ряды и ряды Дирихле, был продолжен и развит в работе М. М. Джрбашяна, Б. А. Саакяна [1]. В ней рассматриваются обобщения теоремы С. Н. Бернштейна для абсолютно монотонных функций на случай так называемых $\langle p\rangle$-абсолютно монотонных функций. Введение этого понятия основано на дробном интегродифференцировании вида (4.10). Дальнейшие обобщения абсолютно монотонных функций даны на этом пути Б. А. Саакяном [1, 2] и М. М. Джрбашяном, Б. А. Саакяном [2].

Отметим еще, что разложению функций в ряд Тейлора вида $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(\mathscr{D}^{\alpha+ak}f)(z_0)\times$ $\times(z-z_0)^{\alpha+ak}/\Gamma(1+\alpha+ak)$ в комплексной области посвящена работа T. J. Osler [3] (частный случай такого разложения в комплексной области был дан ранее в работе W. Fabian [2]). Упомянем также работу T. J. Osler [6], содержащую некоторый интегральный аналог разложения в ряд Тейлора в комплексной области.

В связи с обобщением формулы Тейлора (2.63) в работе Г. В. Бадаляна [1] получено соотношение типа (4.11) для более сложных конструкций, чем дробные производные $\mathscr{D}^{(\alpha)}f$.

2.9. Идея дифференцирования по показателю степени, широко применявшаяся V. Volterra [2] для вычисления интегралов от степенно-логарифмических функций, была развита Б. С. Рубиным [10, 14]. В частности, для нахождения дробных интегралов от функций $(x-a)^{\beta-1}\ln^{\nu}(1/(x-a))$ (при $x-a<1$), следуя работе Б. С. Рубина [10], можно применить операцию дробного интегрирования по переменной β. В работе Б. С. Рубина [14] содержится обобщение этой идеи, основанное на применении операции свертки по переменной β, являющейся показателем степени. На этом пути можно получить формулы для вычисления дробных интегралов от функций вида $(x-a)^{\beta-1}\prod_{k=0}^{n}\left(\ln_k \frac{1}{x-a}\right)^{\lambda_k}$, где $\ln_k \frac{1}{x} = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k}\frac{1}{x}$, $-\infty < \lambda_k < \infty$, $\beta > 0$.

2.10. В работе E. R. Love [4] приведены достаточные условия существования дробного интеграла (2.38) чисто мнимого порядка. Например, показано, что если функция f интегрируема на $[0, \infty)$ и выполнено условие $\int_0^\delta t^{-1}\omega_1(f, t)dt<\infty$, $\delta>0$, где $\omega_1(f, t)$ — интегральный модуль непрерывности функции f (см. (13.24)), то дробный интеграл $I_{0+}^{i\theta}$ существует при любых действительных θ (ср. с теоремой 13.5, дающей достаточные условия существования дробной производной $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f$). В работах E. R. Love [4; 5, с. 388] доказано также, что для существования $I_{a+}^{i\theta}f$ от функции $f\in L_1(a, b)$ необходимо и достаточно, чтобы $I_{a+}^{1+i\theta}f\in AC([a, b])$; при этом условии $I_{a+}^{i\theta}f\in L_1(a, b)$ и почти всюду на (a, b) имеет место соотношение $I_{a+}^{-i\theta}\, I_{a+}^{i\theta}f=f$.

2.11. Оценку (2.72) обобщают неравенства

$$\|e^{sg}\, I_{0+}^{\alpha}\varphi\|_p \leqslant \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, \|e^{sg}\varphi\|_p,$$

$$\|e^{sg}\, I_{0+}^{\alpha}\varphi\|_p \leqslant \frac{\Gamma(\alpha/m)}{m\Gamma(\alpha)}\left(\frac{m!}{as}\right)^{\alpha/m} \|e^{sg}\varphi\|_p,$$

где $\alpha>0$, $s>0$, $\|\ \ \|_p$ — норма в $L_p(0, b)$, $g(t)\in C^m([0, b])$, $m\geqslant 1$, $g^{(k)}(t)\leqslant 0$, $k=1, \ldots, m-1$, $g^{(m)}(t)\leqslant -a\leqslant 0$ ($a>0$ во втором неравенстве). Эти неравенства доказаны А. Л. Бухгеймом [1, 2, с. 46] и использованы в [2] при исследовании обратных задач восстановления дифференциальных уравнений по заданным следам решений.

2.12. Пусть $X=L_p(0, 1)$, $1\leqslant p<\infty$, или $X=C([0, 1])$ и пусть $\{I_\alpha\}_{\alpha\geqslant 0}$—семейство линейных операторов в X. Можно ли утверждать, что условия $(I_1\varphi)(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt$, $I_\alpha I_\beta = I_{\alpha+\beta}$, α, $\beta>0$, $(I_\alpha\varphi)(x)\geqslant 0$ для $\varphi(x)\geqslant 0$ однозначно определяют семейство I_α, так что

$$(I_\alpha\varphi)(x) = (I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt \tag{4.12}$$

для всех $\varphi\in X$? (Вопрос поставлен Дж. Лью на конференции по дробному исчислению в 1974 г., см. T. J. Osler [9, с. 379].) В работе D. I. Cartwright, J. R. McMullen [1] дан положительный ответ на этот вопрос при дополнительном предположении, что отображение $\alpha\to I_\alpha$ является непрерывным из R_1^+ в $L(X\to X)$ в какой-нибудь хаусдорфовой топологии.

2.13. Отметим работу B. Spain [1], в которой обсуждалась идея интерполяции интегродифференцирования I^α в виде

$$I^\alpha\varphi=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\varphi^{(k)}(x)}{\alpha-k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}\,\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}\varphi(t)\,dt,\quad x>a,$$

на основании интерполяционного равенства $F(\alpha)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k F(k)}{\alpha-k}$. Однако этот путь не нашел развития из-за очевидных трудностей, связанных с рассмотрением композиции $I^\alpha I^\beta\varphi$.

2.14. В работах V. Zanelli [1, 2] на основе дробного интегрирования $f_{(\alpha)}(x) = (I_{a+}^{\alpha}f)(x)$ вводилось понятие вариации дробного порядка: $V^{(\alpha)}(f; [a, b]) =$

$$= \lim_{\overline{h\to 0}} \int_a^b |h|^{-1} |f_{(1-\alpha)}(x+h) - f_{(1-\alpha)}(x)|\, dx \text{ (формально совпадающей с } \int_a^b |(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f)(x)|dx).$$

В указанных работах исследовалась связь дробного дифференцирования $\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}f$ и дробной вариации $V^{(\alpha)}$ с аппроксимирующими многочленами Стилтьеса и некоторыми взвешенными средними.

2.15. В работах W. O. Pennell [1], H. P. Thielman [1] на основе формул (2.53), (2.54) получены разложения интеграла $(I^{1/2}_{0+}\varphi)(x)$ в ряды типа Фурье—Бесселя по известным разложениям функции $\varphi(x)$ в ряды по тригонометрическим функциям и функциям Бесселя соответственно.

2.16. Пусть

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, & \dots, & \alpha_p; & x\\ \beta_1, & \dots, & \beta_q & \end{matrix}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k \dots (\beta_q)_k} \frac{x^k}{k!}$$

— обобщенная гипергеометрическая функция (см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи [1, с. 183]). В работе A. P. Misra [1] доказана следующая формула типа формулы Родрига:

$$ {}_{p+1}F_q\left[\begin{matrix}-n, & \alpha_1, & \dots, & \alpha_p; & x\\ & \beta_1, & \dots, & \beta_q & \end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(\beta_1)\dots\Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_p)} x^{1-\beta_q}\mathcal{D}^{\alpha_p-\beta_q}_{0+} x^{\alpha_p-\beta_{q-1}} \times$$

$$\times \mathcal{D}^{\alpha_{p-1}-\beta_{q-1}}_{0+} x^{\alpha_{p-1}-\beta_{q-2}} \dots x^{\alpha_3-\beta_2} \mathcal{D}^{\alpha_2-\beta_2}_{0+} x^{\alpha_2-\beta_1} \mathcal{D}^{\alpha_1-\beta_1}_{0+} [x^{\alpha_1-1}(1-x)^n].$$

В качестве частных случаев получены формулы Родрига для классических полиномов. Заметим также, что в работе L. Koschmieder [2] дробные производные применялись для доказательства некоторых свойств функции ${}_pF_q$.

3.1. Вариант теоремы типа теоремы 3.12, в котором не меняется вес, а варьируется показатель гельдеровости (см. замечание 3.5), имеет вид. Пусть $\mu_1 < p-1$, $0<\mu_k< < p-1$, $k=2, 3, \dots, n-1$, $\mu_n > 0$. Если $1/p < \alpha < 1 + 1/p$, то I^{α}_{a+} ограничен из $L_p([a, b], \rho)$ в $H^{\lambda}_0([a, b]; \rho)$, где

$$\lambda = \begin{cases}\min(\alpha - 1/p, \mu/p), & \text{если } \mu \neq \alpha p - 1,\\ -\varepsilon + \mu/p, & \text{если } \mu = \alpha p - 1,\end{cases}$$

где $\mu = \min\limits_{k\geq 2} \mu_k$, $\varepsilon > 0$ (Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [2]).

3.2. Аналогом теоремы Харди—Литтлвуда 3.5 для $p=1$ служит следующее утверждение:

$$\left\{\int_a^b |(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x)|^q dx\right\}^{1/q} \leq C + C\int_a^b |\varphi(x)| (\ln^+ |\varphi(x)|)^{1/q} dx, \quad q = \frac{1}{1-\alpha},$$

где C зависит только от α и (a, b) (T. M. Flett [3]). Ранее подобное неравенство доказал A. Zygmund [1] в периодическом случае для дробного интегрирования в смысле Вейля (см. § 23, п. 2°, 19.7).

3.3. Рассмотрим подробнее предельный случай $p=1/\alpha$ в теореме Харди—Литтлвуда 3.5. Теорема не верна в этом случае. Еще G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3] заметили, что

$$I^{1/p}_{a+}(L_p) \subset \bigcap_{r\geq 1} L_r(a, b), \text{ но } I^{1/p}_{a+}(L_p) \not\subset L_\infty(a, b). \tag{4.13}$$

Последнее соотношение подтверждается примером функции $f = I^{1/p}_{0+}\varphi_\varepsilon$, где

$$\varphi_\varepsilon(x) = \left|x - \frac{2}{e}\right|^{-\frac{1}{p}} \left(\ln \frac{1}{\left|x - \frac{2}{e}\right|}\right)^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \in L_p(0, 1), \quad 0<\varepsilon<p-1. \tag{4.14}$$

Легко показать, что для этой функции $f(x) \geq c\left(\ln \frac{1}{2/e - x}\right)^{1-\frac{1+\varepsilon}{p}}$ при $x \to 2/e - 0$ (Н. К. Карапетянц, Б. С. Рубин [4]).

Соотношения (4.13) приводят к естественной мысли построить промежуточное пространство X, $L_\infty \subset X \subset \bigcap\limits_{r\geqslant 1} L_r$, содержащее образ $I_{a+}^{1/p}(L_p)$ и, по возможности, «близкое» к $I_{a+}^{1/p}(L_p)$. Приведем здесь два способа построения таких пространств. В основу первого кладутся локальные свойства функций f из $I_{a+}^{1/p}(L_p)$, а в основу второго — асимптотика L_r-норм функции f при $r\to\infty$.

А. Пусть BMO (a, b)—класс функций $f(x)\in L_1(a, b)$, для которых

$$\|f\|^* = \sup_{I\subset(a,b)} m_I f < \infty, \tag{4.15}$$

где

$$m_I f = \frac{1}{|I|}\int_I |f(x)-f_I|\,dx, \quad f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(x)\,dx. \tag{4.16}$$

Оценивая норму (4.15), можно убедиться в том, что

$$I_{a+}^{1/p}(L_p)\subset \mathrm{BMO}(a, b), \quad \|I_{a+}^{1/p}\varphi\|^* \leqslant C\|\varphi\|_p.$$

Это утверждение, по-видимому, впервые было получено в многомерном случае для потенциалов Рисса в работе J. Peetre [1], хотя близкий в идейном плане результат отмечался ранее (E. M. Stein, A. Zygmund [3]). См. по этому поводу также работу H. M. Reimann, T. Rychener [1]. О пространствах BMO (называемых пространствами функций ограниченной в среднем осцилляции) см. в случае конечного отрезка $[a, b]$, например, книги Б. С. Кашина, А. А. Саакяна [1, гл. 5], Дж. Гарнетта [1, гл. 5].

Б. Н. К. Карапетянц и Б. С. Рубин [1] ввели банахово пространство $X_\gamma(a, b)$ функций $f(x)$ $\left(\in \bigcap\limits_{r\geqslant 1} L_r(a, b)\right)$ с конечной нормой $\sup\limits_{r\geqslant 1}(r^{-\gamma}\|f\|_r)$ и показали, что оператор $I_{a+}^{1/p}$, $1<p<\infty$, ограничен из $L_p(a, b)$ в $X_\gamma(a, b)$ при $\gamma\geqslant 1/p'$ и не является таковым при $\gamma<1/p'$. Доказательство этого основано на том факте, что $\|I_{a+}^{1/p}\|_{L_p\to L_r} = O(r^{1/p'})$, $r\to\infty$.

Заметим, что BMO $(a, b)\not\subset X_\gamma(a, b)$ и $X_\gamma(a, b)\not\subset \mathrm{BMO}(a, b)$ при $0<\gamma<1$. Первое соотношение подтверждается примером функции $f(x)=\ln x$, для которой $\|f\|_r = \frac{r}{e}(1+o(1))$ при $r\to\infty$ (взяли $a=0$, $b=1$). Для второго соотношения соответствующим примером служит функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0<x<1/2, \\ \left(\ln\dfrac{1}{x-1/2}\right)^\gamma & \text{при } 1/2<x<1 \end{cases}$$

(эти примеры указаны Н. К. Карапетянцем, Б. С. Рубиным [3]).

О развитии изложенных здесь идей см. далее в § 17, п. 2°, 13.1.

ГЛАВА 2

Дробные интегралы и производные на оси и полуоси

Настоящая глава посвящена исследованию дробных интегралов и производных на бесконечном промежутке. Рассматриваемые функции должны быть такими, чтобы соответствующие интегралы сходились на бесконечности. Мы будем иметь дело или с функциями, «убывающими» нужным образом на бесконечности, например с функциями из $L_p(R^1)$, где $1<p<1/\alpha$, или из $L_p(R^1;\rho)$, когда условие на p можно ослабить за счет веса $\rho(x)$, или же с гельдеровскими функциями (с весом), обращающимися в нуль на бесконечности. На таких функциях дробные интегралы сходятся абсолютно. Можно трактовать дробные интегралы и в более широком плане, понимая их как условно сходящиеся:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lim_{N\to\infty}\int_{x-N}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},$$

и тогда можно допускать локально суммируемые функции $\varphi(t)$, не обязательно убывающие на бесконечности, если поведение средних $\int_{x}^{x+T}\varphi(t)\,dt$ подчинить некоторым условиям. Мы не останавливаемся здесь на таком рассмотрении дробных интегралов, но столкнемся с ним позже в периодическом случае (§ 19, см., например, (19.20)) и в непериодическом случае (§ 14, п. 3°). См. также дополнительные указания в § 9, п. 2°, 5.1—5.3, 5.10.

§ 5. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ

1°. Определения и простейшие свойства. Дробные интегралы (2.17), (2.18) легко распространить со случая конечного отрезка $[a, b]$ на случай полуоси или оси. Собственно говоря, уже само определение (2.17) или (2.18) применимо благодаря переменному пределу интегрирования на полуоси (a, ∞) или $(-\infty, b)$. Обозначения (2.17), (2.18) будем использовать на соответствующих полуосях и, в частности, писать

$$(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad 0<x<\infty. \tag{5.1}$$

Дробные интегралы по всей прямой будем обозначать

$$(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad -\infty<x<\infty, \tag{5.2}$$

$$(I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\quad -\infty<x<\infty. \tag{5.3}$$

Их можно записать также в виде свертки

$$I_{\pm}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty}t_{\pm}^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x\mp t)\,dt, \tag{5.4}$$

где

$$t_{+}^{\alpha-1}=\begin{cases}t^{\alpha-1}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases},\qquad t_{-}^{\alpha-1}=\begin{cases}0, & t>0\\ |t|^{\alpha-1}, & t<0.\end{cases} \tag{5.5}$$

Интегралы $I_{\pm}^{\alpha}$ определены, например, на функциях $\varphi\in L_p(-\infty,\infty)$ при $0<\alpha<1$ и $1\leqslant p<1/\alpha$. Действительно,

$$I_{+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi(x-t)\,dt.$$

Здесь существование почти для всех x первого слагаемого можно установить, например, с помощью неравенства (1.33), а второе существует для всех x при $1\leqslant p<1/\alpha$ в силу неравенства Гельдера (1.28).

Аналогично (2.22), (2.23) вводятся лиувиллевские производные

$$(\mathscr{D}_{+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},$$

$$(\mathscr{D}_{-}^{\alpha}f)(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{5.6}$$

$$-\infty<x<\infty,$$

где $0<\alpha<1$. Для $\alpha\geqslant1$ подобно (2.30) полагаем

$$(\mathscr{D}_{\pm}^{\alpha}f)(x)=\frac{(\pm1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^{\infty}t^{n-\alpha-1}\varphi(x\mp t)\,dt,\quad n=[\alpha]+1. \tag{5.7}$$

В случае полуоси $(0,\infty)$ рассматриваем

$$(\mathscr{D}_{0+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{5.8}$$

$$(\mathcal{D}_-^\alpha f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^\infty \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \tag{5.8}$$

Связь между $I_+^\alpha\varphi$ и $I_-^\alpha\varphi$, аналогичная (2.19), имеет вид

$$QI_\pm^\alpha\varphi = I_\mp^\alpha Q\varphi,\quad (Q\varphi)(x) = \varphi(-x),\quad -\infty < x < \infty. \tag{5.9}$$

Операторы $I_\pm^\alpha$ подчиняются простым правилам перестановочности с операторами сдвига и растяжения. Введем для последних обозначения

$$(\tau_h\varphi)(x) = \varphi(x-h),\quad x,\ h\in R^1, \tag{5.10}$$

$$(\Pi_\delta\varphi)(x) = \varphi(\delta x),\quad x\in R^1,\quad \delta>0. \tag{5.11}$$

Легко проверяется, что

$$\tau_h I_\pm^\alpha\varphi = I_\pm^\alpha\tau_h\varphi, \tag{5.12}$$

$$\Pi_\delta I_\pm^\alpha\varphi = \delta^\alpha I_\pm^\alpha\Pi_\delta\varphi. \tag{5.13}$$

Свойство (5.13) справедливо и на полуоси для дробного интеграла $I_{0+}^\alpha\varphi$:

$$\Pi_\delta I_{0+}^\alpha\varphi = \delta^\alpha I_{0+}^\alpha\Pi_\delta\varphi. \tag{5.14}$$

Подобно случаю конечного интервала выполняется полугрупповое свойство

$$I_+^\alpha I_+^\beta\varphi = I_+^{\alpha+\beta}\varphi,\qquad I_-^\alpha I_-^\beta\varphi = I_-^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{5.15}$$

Если функция φ «достаточно хороша», то равенства (5.15) выполняются при всех $\alpha>0$, $\beta>0$, что проверяется, как в случае (2.21). В рамках же пространства $L_p(R^1)$ равенства (5.15) выполняются для тех $\alpha>0$, $\beta>0$, при которых $\alpha+\beta<1/p$ (см. далее п. 2° о действии операторов $I_\pm^\alpha$ в $L_p(R^1)$).

Справедливы формулы «дробного интегрирования по частям»:

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)(I_+^\alpha\psi)(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty \psi(x)(I_-^\alpha\varphi)(x)\,dx, \tag{5.16}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)(\mathcal{D}_+^\alpha g)(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty g(x)(\mathcal{D}_-^\alpha f)(x)\,dx. \tag{5.17}$$

Формула (5.16) получается, как и аналогичная ей формула (2.20), перестановкой порядка интегрирования. Формула (5.17) вытекает из (5.16) после переобозначения $I_+^\alpha\psi=g$, $I_-^\alpha\varphi=f$. Таким путем доказываются эти формулы на «достаточно хороших» функциях. Формулу (5.16) нетрудно обосновать для $\varphi(x)\in L_p$, $\psi(x)\in L_r$, $p>1$, $r>1$, $1/p+1/r=1+\alpha$. Это делается аналогично обоснованию формулы (2.20) с привлечением теоремы 5.3. Обоснование формулы (5.17) в случае p-суммируемых дробных производных дано в следствии 2 из теоремы 6.2.

Формулы (5.16), (5.17) имеют место также и на полуоси. Так, в обозначениях (5.1), (5.3)

$$\int_0^\infty \varphi(x)(I_{0+}^\alpha\psi)(x)\,dx = \int_0^\infty \psi(x)(I_-^\alpha\varphi)(x)\,dx. \tag{5.16'}$$

Интегралы чисто мнимого порядка $\alpha=i\theta$ определяются аналогично (2.38):

$$(I_+^{i\theta}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty t^{i\theta}\varphi(x-t)\,dt \tag{5.18}$$

(на «достаточно хороших» функциях).

Укажем ряд элементарных функций $\varphi(x)$, для которых $I^\alpha_\pm\varphi$ вычисляются также в терминах элементарных функций.

1. Для $\varphi(t)=e^{\pm t}$ имеем

$$(I^\alpha_\pm\varphi)(x)=e^{\pm x},\quad \operatorname{Re}\alpha>0, \tag{5.19}$$

при одинаковом выборе знаков. Действительно, $I^\alpha_+(e^x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{x-t}t^{\alpha-1}dt=$ $=e^x$; более общо:

$$I^\alpha_\pm(e^{\pm ax})=a^{-\alpha}e^{\pm ax},\quad \operatorname{Re}a>0,\quad \operatorname{Re}\alpha>0, \tag{5.20}$$

что обосновывается аналогично с учетом формулы (7.5), доказываемой далее в § 7. Ср. также (5.20) с формулами (22.26), (22.27).

2. Из (5.20) следуют формулы

$$I^\alpha_\pm(e^{\pm ax}\sin bx)=\frac{e^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\sin(bx\mp\alpha\varphi), \tag{5.21}$$

$$I^\alpha_\pm(e^{\pm ax}\cos bx)=\frac{e^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\alpha/2}}\cos(bx\mp\alpha\varphi), \tag{5.22}$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a^2+b^2>0$, $\varphi=\arg(a+bi)\in[0,\pi/2]$ и $\operatorname{Re}\alpha>0$, кроме случая $a=0$, когда $0<\operatorname{Re}\alpha<1$. В последнем случае

$$I^\alpha_\pm(\sin bx)=b^{-\alpha}\sin\left(bx\mp\frac{\alpha\pi}{2}\right),\quad I^\alpha_\pm(\cos bx)=b^{-\alpha}\cos\left(bx\mp\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{5.23}$$

3. Для $\varphi(x)=\begin{cases}(x-a)^{\beta-1}, & x>a,\\ 0\quad, & x\leqslant a,\end{cases}$ $\operatorname{Re}\beta>0$, из (2.44) имеем

$$(I^\alpha_+\varphi)(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}, & x>a,\\ 0\quad, & x\leqslant a.\end{cases}$$

4. При $0<\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re}\mu$ справедливы формулы

$$I^\alpha_+\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(1\pm ix)^\mu}\right]=e^{\pm\frac{\alpha\pi i}{2}}\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(1\pm ix)^{\mu-\alpha}}, \tag{5.24}$$

$$I^\alpha_-\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(x\pm i)^\mu}\right]=\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(x\pm i)^{\mu-\alpha}}, \tag{5.25}$$

где степенные функции $(1\pm ix)^\mu$, $(x\pm i)^\mu$ понимаются, как обычно, как соответствующие значения главной ветви аналитической функции z^μ в плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси:

$$z^\mu=|z|^\mu e^{i\mu\arg z},\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\arg z\big|_{z=t+i\varepsilon,\ t>0}=0. \tag{5.26}$$

В соответствии с выбором (5.26) можно записать

$$\begin{aligned}(\pm ix+1)^\mu&=(1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}e^{\pm i\mu\operatorname{arc\,tg}x},\quad x\in R^1,\\ (x\pm i)^\mu&=(1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}e^{\pm i\mu\operatorname{arc\,ctg}x},\quad x\in R^1.\end{aligned} \tag{5.27}$$

Формулу (5.24) можно переписать также в виде

$$I_{+}^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(x\pm i)^{\mu}}\right]=e^{\pm\alpha\pi i}\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{(x\pm i)^{\mu-\alpha}}. \tag{5.28}$$

Обоснование формул (5.24), (5.25) нам будет удобнее привести позже, в § 7, в конце п. 1°. Сейчас заметим только, что эти формулы выводятся одна из другой на основании свойства (5.9), если учесть, что $(1\pm\pm ix)^{\mu}|_{x=-\xi}=e^{\mp i\mu\pi/2}(\xi\pm i)^{\mu}$ в соответствии с (5.27). Поэтому достаточно будет доказать одну из формул (5.24), (5.25).

2°. Дробные интегралы гельдеровских функций. Результаты этого пункта примыкают к результатам § 3, отличаясь от них той спецификой, которую привносит наличие бесконечно удаленной точки на оси или полуоси. Начнем со случая гельдеровских функций с весом на полуоси $\dot{R}_{+}^{1}=[0,\infty]$. Рассмотрим дробные интегралы:

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\qquad I_{-}^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\qquad x>0. \tag{5.29}$$

Утверждения об их гельдеровости на полуоси получаются сведением к случаю отрезка на основе следующей леммы.

Лемма 5.1. *Преобразование $y=1/(x+1)$ отображает пространство $H^{\lambda}(\dot{R}_{+}^{1};\ \rho)$, $\rho=\rho(x)$, $x>0$, взаимно однозначно на пространство $H^{\lambda}([0,\ 1];\ r)$, где*

$$r=r(y)=\rho\,[(1-y)/y],\quad 0<y<1. \tag{5.30}$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой (укажем, что при замене $y=1/(x+1)$ условие гельдеровости (1.6) переходит в (1.1)).

Теорема 5.1. *Пусть $\varphi(x)\in H_{0}^{\lambda}(\dot{R}_{+}^{1};\ \rho)$, где*

$$\rho(x)=(1+x)^{\mu}\prod_{k=1}^{n}|x-x_{k}|^{\mu_{k}},\quad 0=x_{1}<x_{2}<\cdots<x_{n}<\infty. \tag{5.31}$$

Пусть также $\lambda+\alpha<1$ и $\lambda+\alpha<\mu_{k}<\lambda+1$, $k=2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Если

$$\mu_{1}<\lambda+1,\quad \mu+\sum_{k=1}^{n}\mu_{k}<1-\lambda, \tag{5.32}$$

то $I_{0+}^{\alpha}\varphi\in H_{0}^{\lambda+\alpha}(\dot{R}_{+}^{1};\rho^{*})$. Если же $\lambda+\alpha<\mu_{1}<\lambda+1$ (или $\mu_{1}=0$), или $\alpha-\lambda<\mu+\sum_{k=1}^{n}\mu_{k}$, то $I_{-}^{\alpha}\varphi\in H_{0}^{\lambda+\alpha}(\dot{R}_{+}^{1};\ \rho^{*})$. В обоих случаях $\rho^{*}(x)=(1+x)^{-2\alpha}\rho(x)$.

Доказательство. Теорема 5.1 сводится заменами переменных к теореме 3.4. Действительно, замены $y=1/(x+1)$, $\tau=1/(t+1)$ дают

$$\int_{0}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=y^{1-\alpha}\int_{y}^{1}\frac{\varphi\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)d\tau}{\tau^{1+\alpha}(\tau-y)^{1-\alpha}}, \tag{5.33}$$

$$\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}=y^{1-\alpha}\int_{0}^{y}\frac{\varphi\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right)d\tau}{\tau^{1+\alpha}(y-\tau)^{1-\alpha}}. \tag{5.34}$$

В силу леммы 5.1 замена $y=1/(x+1)$ отображает пространство $H^\lambda(\dot{R}^1_+;\ \rho)$ на пространство $H^\lambda([0,\ 1];\ r(y))$ с весом

$$r(y)=\rho[(1-y)/y]=c\prod_{k=0}^{n}|y-y_k|^{\mu_k}, \tag{5.35}$$

где $y_0=0$, $\mu_0=-\mu-\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k$, а $y_k=(1+x_k)^{-1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Применяя к интегралам (5.33), (5.34) с учетом этого отображения теорему 3.4, после простых преобразований получаем утверждение теоремы.

Следствие 1. *В случае* $\rho(x)=x^\nu(1+x)^\mu$ *оператор* I^α_{0+} *действует из* $H^\lambda_0(\dot{R}^1_+;\ \rho)$ *в* $H^{\lambda+\alpha}_0(\dot{R}^1_+;\ \rho^*)$, $\lambda+\alpha<1$, $\rho^*(x)=x^\nu(1+x)^{\mu-2\alpha}$, *если*

$$\nu<\lambda+1,\quad \mu+\nu<1-\lambda. \tag{5.36}$$

Для оператора I^α_- *условия (5.36) следует заменить условиями*

$$\lambda+\alpha<\nu<\lambda+1,\quad \alpha-\lambda<\mu+\nu. \tag{5.37}$$

Отметим еще частный случай этого следствия: если $\varphi(x)\in H^\lambda([0,\ \infty])$, $\varphi(0)=\varphi(\infty)=0$, то при $\alpha>0$, $\lambda+\alpha<1$

$$\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\frac{\Phi(x)}{(1+x)^{2\alpha}}, \tag{5.38}$$

где $\Phi(x)\in H^{\lambda+\alpha}([0,\ \infty])$, $\Phi(0)=\Phi(\infty)=0$.

Представляет интерес утверждение типа (5.38) для функций $\varphi(x)\in H^\lambda(\dot{R}^1_+)$ без дополнительного предположения $\varphi(0)=\varphi(\infty)=0$. Обозначим для этого $u(x)=\varphi(\infty)+\dfrac{\varphi(0)-\varphi(\infty)}{(1+x)^{1+\alpha}}$, так что $u(0)=\varphi(0)$, $u(\infty)=\varphi(\infty)$. Так как $I^\alpha_{0+}[(1+x)^{-1-\alpha}]=\dfrac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)(1+x)}$ в силу (2.49), то

$$I^\alpha_{0+}u=\frac{\varphi(0)}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{x^\alpha}{1+x}+\frac{\varphi(\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{x^{\alpha+1}}{1+x}.$$

Применяя теперь (5.38) к функции $\varphi(x)-u(x)$, получаем

Следствие 2. *Если* $\varphi(x)\in H^\lambda([0,\ \infty])$, *то при* $\alpha>0$, $\lambda+\alpha<1$

$$\int_0^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=\frac{\varphi(0)}{\alpha}\frac{x^\alpha}{1+x}+\frac{\varphi(\infty)}{\alpha}\frac{x^{\alpha+1}}{1+x}+\frac{\Phi(x)}{(1+x)^{2\alpha}},$$

где $\Phi(x)\in H^{\lambda+\alpha}([0,\ \infty])$, $\Phi(0)=\Phi(\infty)=0$.

Аналогичное теореме 5.1 утверждение получается для дробных интегралов на всей прямой. Именно справедлива

Теорема 5.2. *Пусть* $\varphi(x)\in H^\lambda_0(\dot{R}^1;\ \rho)$, *где*

$$\rho(x)=(1+x^2)^{\frac{\mu}{2}}\prod_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k},\quad -\infty<x_1<\cdots<x_n<\infty. \tag{5.39}$$

Если $\lambda+\alpha<1$, $\lambda+\alpha<\mu_k<\lambda+1$, $k=1,\ \ldots,\ n$, *и* $\alpha-\lambda<\mu+\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k<1-\lambda$, *то* $I^\alpha_+\varphi$, $I^\alpha_-\varphi\in H^{\lambda+\alpha}_0(\dot{R}^1;\ \rho^*)$, *где* $\rho^*(x)=(1+x^2)^{-\alpha}\rho(x)$.

Доказательство. Ввиду (5.9) достаточно рассмотреть дробный интеграл $f(x)=I_-^\alpha\varphi$. Заменой переменных — сдвигом — можно перенести начало координат в точку $x_1=0$. В силу свойства (5.12) достаточно доказать теорему для случая $0=x_1<x_2<\cdots<x_n<\infty$. В этом случае, как нетрудно видеть с учетом леммы 1.1, $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R^1;\ \rho^*)$ тогда и только тогда, когда $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R^1_+;\ \rho^*)$ и $f(-x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R^1_+;\ \rho_1\rho_2)$, где $\rho_1=x^{\mu_1}$, $\rho_2=(1+x^2)^{-\beta}$, $\beta=-2\alpha+\sum\limits_{k=2}^{n}\mu_k$ (учли, что $0<c_1\leqslant\dfrac{\rho^*(-x)}{\rho_1(x)\rho_2(x)}\leqslant c_2<\infty$ для $x\in\dot R^1_+$). Утверждение $f(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R^1;\ \rho^*)$ содержится в теореме 5.1. Далее, при $x>0$ имеем $f(-x)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x\frac{\varphi(-t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}$.

Здесь первое слагаемое принадлежит классу $H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R^1_+;\ \rho_1\rho_2)$ также в силу теоремы 5.1. Второе слагаемое — обозначим его $G(x)$ — есть бесконечно дифференцируемая функция при $0<x<\infty$. Уточним поведение $G(x)$ при $x\to0$ и $x\to\infty$. Пусть

$$\Gamma(\alpha)G(x)=\int_0^2\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}+\int_2^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}=G_1(x)+G_2(x).$$

При $0\leqslant x\leqslant1$ получаем $G(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}([0,\ 1];\ \rho_1)$ в силу леммы 3.1 для $G_1(x)$ и бесконечной дифференцируемости функции $G_2(x)$. При $x\geqslant1$ легко получить $G_1(x)\in H_0^{\lambda+\alpha}([1,\ \infty];\ \rho_1\rho_2)$ с учетом бесконечной дифференцируемости $G_1(x)$ при $x\geqslant1$ и с учетом очевидного поведения $G_1(1/y)$ в окрестности $y=0$. Для $G_2(x)$ при $x\geqslant1$ после замены $t=\tau^{-1}+1$, $x=y^{-1}-1$ имеем

$$\int_0^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^{1-\alpha}}=y^{1-\alpha}\int_0^1\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{(\tau+y)^{1-\alpha}},\tag{5.40}$$

где в силу леммы 5.1 $\psi(\tau)=\tau^{-1-\alpha}\varphi\left(\dfrac{1+\tau}{\tau}\right)\in H_0^\lambda([0,\ 1];\ \rho_3)$, $\rho_3(\tau)=\tau^{1+\alpha}\rho\left(\dfrac{1-\tau}{\tau}\right)=\tau^{1+\alpha+\mu_0}\rho_4(\tau)$, причем вес $\rho_4(\tau)$ уже не «привязан» к точке $\tau=0$, а $\mu_0=-\mu-\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k$ (см. (5.35)). Так как $\tau^{1+\alpha+\mu_0}\psi(\tau)\in H^\lambda([0,\ 1])$ и $\tau^{1+\alpha+\mu_0}\psi(\tau)|_{\tau=0}=0$, то $|\psi(\tau)|\leqslant c\tau^{-\gamma}$, $\gamma=1+\alpha+\mu_0-\lambda$, в окрестности точки $\tau=0$. Применяя лемму 3.1 (что возможно при условии $\alpha-\lambda<-\mu_0<1-\lambda$) при $\beta=\lambda$, получаем, что правая часть равенства (5.40) принадлежит классу $H_0^{\lambda+\alpha}([0,\ 1];\ y^{2\alpha+\mu_0}\rho_4(y))$ с учетом ее бесконечной дифференцируемости при $y>0$. Тогда левая часть принадлежит классу $H_0^{\lambda+\alpha}(\dot R^1_+;\ \rho^*(x))$ в силу леммы 5.1. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Некоторые результаты о действии дробных интегралов в классах гладких функций на оси или полуоси см. также в § 8, пп. 2, 4°.

3°. Дробные интегралы суммируемых функций. Рассмотрим дробные интегралы от функций $\varphi\in L_p$ на полуоси или оси. Здесь отличие от случая конечного отрезка состоит в следующем. В случае конечного отрезка операторы дробного интегрирования были определены (см. § 3, п. 3°) на любом классе L_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и действовали из L_p, $1<p<\infty$, в L_q, где

$1 \leqslant q \leqslant p/(1-\alpha p)$ при $\alpha p < 1$ и $1 \leqslant q < \infty$ при $\alpha p \geqslant 1$. В случае же полуоси или оси операторы дробного интегрирования определены, вообще говоря, при $1 \leqslant p < 1/\alpha$ и могут действовать из L_p, $1 < p < 1/\alpha$, в L_q только при $q = p/(1-\alpha p)$. Именно теорема Харди—Литтлвуда 3.5 для всей прямой справедлива в следующем виде.

Теорема 5.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\alpha > 0$. *Операторы* $I_{\pm}^{\alpha}$ *ограничены из* $L_p(R^1)$ *в* $L_q(R^1)$ *тогда и только тогда, когда*

$$0 < \alpha < 1, \quad 1 < p < 1/\alpha \text{ и } q = p/(1-\alpha p).$$

Доказательство этой теоремы, как и теоремы 3.5, мы опускаем (см. литературные ссылки в § 9). Приведем лишь простое доказательство необходимости условий $\alpha \in (0, 1)$, $p \in (1, 1/\alpha)$, $q = p/(1-\alpha p)$. Пусть $\|I_{+}^{\alpha}\varphi\|_q \leqslant c\|\varphi\|_p$. Тогда и $\|I_{+}^{\alpha}\Pi_\delta\varphi\|_q \leqslant c\|\Pi_\delta\varphi\|_p$, где Π_δ — оператор (5.11). В силу свойства (5.13) и равенства $\|\Pi_\delta\varphi\|_p = \delta^{-1/p}\|\varphi\|_p$ получаем $\|I_{+}^{\alpha}\varphi\|_q \leqslant \leqslant c\delta^{\alpha+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\varphi\|_p$. Устремляя δ к 0 и к ∞, видим, что это неравенство возможно только при $1/q = 1/p - \alpha$. Так как $q > 0$, то отсюда $p < 1/\alpha$. Остается исключить $p = 1$. Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln^{-\gamma}\dfrac{1}{x}, & 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & x \notin (0, 1/2), \end{cases} \quad \gamma > 1, \tag{5.41}$$

доставляет пример функции из $L_1(R^1)$, для которой $(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x) \notin L_{1/(1-\alpha)}(R^1)$ при $1 < \gamma < 2-\alpha$. Действительно, при $0 < x < 1/2$

$$\Gamma(\alpha)(I_{+}^{\alpha}\varphi)(x) > x^{\alpha-1}\int_0^x \frac{dt}{t\ln^{\gamma}(1/t)} = \frac{x^{\alpha-1}\ln^{1-\gamma}\frac{1}{x}}{\gamma-1}, \tag{5.42}$$

так что $I_{+}^{\alpha}\varphi \in L_{1/(1-\alpha)}(R^1)$ лишь при $(\gamma-1)/(2-\alpha) > 1$, т. е. $\gamma > 2-\alpha$.

Ясно, что теорема 5.3 справедлива и для дробных интегралов (5.29) на полуоси $(0, \infty)$.

Некоторую информацию для случая $p = 1$ см. ниже в теореме 5.6. Приведем весовой аналог теоремы 5.3 для случая полуоси.

Теорема 5.4. *Пусть*

$$1 \leqslant p < \infty, \quad 0 < \alpha < m + \frac{1}{p}, \quad 0 \leqslant m \leqslant \alpha, \quad q = \frac{p}{1-(\alpha-m)p}$$
$$\text{и } m \neq 0 \text{ при } p = 1. \tag{5.43}$$

Тогда операторы I_{-}^{α}, I_{0+}^{α} *ограничены из* $L_p(R_{+}^1; x^{\mu})$ *в* $L_q(R_{+}^1; x^{\nu})$, $\nu = (\mu/p - m)q$:

$$\left\{\int_0^\infty x^{\nu}|(I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)|^q dx\right\}^{1/q} \leqslant \kappa\left\{\int_0^\infty x^{\mu}|\varphi(x)|^p dx\right\}^{1/p} \tag{5.44}$$

(и аналогично для $I_{0+}^{\alpha}\varphi$*), где* $\mu < p-1$ *для оператора* I_{0+}^{α} *и* $\mu > \alpha p - 1$ *для оператора* I_{-}^{α}.

Утверждение теоремы 5.4 для оператора I_{0+}^{α} доказано ранее в теореме 3.7, а для оператора I_{-}^{α} получается из утверждения для I_{0+}^{α} заменами

$$1/x = y, \quad y^{-1-\alpha}\varphi(x) = \varphi_1(y), \quad \mu_1 = -\mu + p + \alpha p - 2,$$
$$\nu_1 = -\nu - 2 + (1-\alpha)q$$

с учетом того, что $(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x) = y^{1-\alpha}(I_{-}^{\alpha}\varphi_1)(y)$.

Отметим важные частные случаи теоремы 5.4. Случаю $\mu=0$, $m=0$ отвечает теорема 5.3, а при $\mu=0$, $m=\alpha$ из теоремы 5.4 получаем неравенства

$$\int_0^\infty x^{-\alpha p}|(I_-^\alpha\varphi)(x)|^p\,dx\leqslant\varkappa^p\int_0^\infty|\varphi(x)|^p dx,\qquad 1\leqslant p<1/\alpha,\quad 0<\alpha<1;\tag{5.45}$$

$$\int_0^\infty x^{-\alpha p}|(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)|^p dx\leqslant\varkappa^p\int_0^\infty|\varphi(x)|^p dx,\quad 1<p<\infty,\quad \alpha>0,\tag{5.46}$$

которые называются *неравенствами Харди*. Их можно получить также независимо от общей теоремы 5.4 с помощью теоремы 1.5 (если ограничиться в (5.45) случаем $1<p<1/\alpha$). При этом теорема 1.5 дает значение постоянной $\varkappa$:

$$\varkappa=\Gamma\left(\frac{1}{p}-\alpha\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{p}\right),\qquad \varkappa=\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)\Big/\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{p'}\right)$$

для неравенств (5.45) и (5.46) соответственно. Можно показать, что эти постоянные точные.

Нам удобно выделить также общий случай $m=\alpha$ (т. е. $q=p$) из теоремы 5.4, перефразировав его (после переобозначения $\mu/p=-\gamma$, $\varphi(x)=x^\gamma f(x)$) следующим образом.

Операторы $x^\beta I_-^\alpha x^\gamma$ *и* $x^\beta I_{0+}^\alpha x^\gamma$, $\alpha>0$, *ограничены из* $L_p(R_+^1)$ в $L_p(R_+^1;\ x^{-p(\alpha+\beta+\gamma)})$, $p\geqslant 1$, *соответственно при* $(\alpha+\gamma)p<1$ *и* $(\gamma+1)p>1$:

$$\int_0^\infty x^{-(\alpha+\beta+\gamma)p}|x^\beta I_-^\alpha x^\gamma f(x)|^p dx\leqslant\varkappa^p\int_0^\infty|f(x)|^p dx,\tag{5.45'}$$

$$1\leqslant p<\infty,\quad (\alpha+\gamma)p<1,\quad \alpha>0;$$

$$\int_0^\infty x^{-(\alpha+\beta+\gamma)p}|x^\beta I_{0+}^\alpha x^\gamma f(x)|^p dx\leqslant\varkappa^p\int_0^\infty|f(x)|^p dx,\tag{5.46'}$$

$$1\leqslant p<\infty,\quad (\gamma+1)p>1,\quad \alpha>0.$$

В частности, если $\alpha+\beta+\gamma=0$, то при указанных условиях операторы $x^\beta I_-^\alpha x^\gamma$ и $x^\beta I_{0+}^\alpha x^\gamma$ ограничены из $L_p(R_+^1)$ в $L_p(R_+^1)$.

Неравенства (5.45′), (5.46′) сохраняют силу и для комплексных параметров α, β, γ при замене $x^{-(\alpha+\beta+\gamma)p}$ на $x^{-p\mathrm{Re}(\alpha+\beta+\gamma)}$, если соответственно $p\,\mathrm{Re}(\alpha+\gamma)<1$ и $p(\mathrm{Re}\,\gamma+1)>1$, а также $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $1\leqslant p<\infty$ или $\mathrm{Re}\,\alpha=0$, $\alpha\neq 0$, $1<p<\infty$. Отметим, что для рассмотрения случая чисто мнимого $\alpha=i\theta$ нужно представить $x^{-\gamma}I_{0+}^{i\theta}x^\gamma$ в виде $I_{0+}^{i\theta}+(x^{-\gamma}I_{0+}^{i\theta}x^\gamma-I_{0+}^{i\theta})$, где к первому слагаемому применить лемму 8.2, а ко второму — теорему 1.5.

В граничных случаях условий к неравенствам (5.45′), (5.46′), когда $p=1$ и соответственно $\gamma=1-\alpha$ и $\gamma=0$, интегралы в левых частях указанных неравенств расходятся и вместо этих формул будут иметь место неравенства (3.17‴) и (3.17″). В частности, при $\lambda=0$ последние неравенства показывают, что оператор $x^{-1}I_-^\alpha x^{1-\alpha}$ ограничен из $L_1\left((b,\ \infty);\ \ln\dfrac{b+1}{b}x\right)$ в $L_1(b,\ \infty)$, а $x^{-\alpha}I_{0+}^\alpha$ — из $L_1\left((0,\ b);\ \ln\dfrac{b+1}{x}\right)$ в $L_1(0,\ b)$, $0<b<\infty$.

Приведем без доказательства аналог теоремы 5.4 для случая степенного веса общего вида (5.39). Рассмотрение будем вести для $x\in\Omega$, где в качестве Ω возьмем полуось R^1_+ или всю вещественную ось R^1. В случае $\Omega = R^1_+$ считаем

$$0 = x_1 < \cdots < x_n < \infty. \tag{5.47}$$

Обозначим

$$\nu_k = \begin{cases} \left(\dfrac{\mu_k}{p} - m\right) q & \text{при } \mu_k < \alpha p - 1, \\ \left(\alpha - \dfrac{1}{p} - m\right) q + \varepsilon_k & \text{при } \mu_k \geqslant \alpha p - 1, \quad \varepsilon_k > 0. \end{cases}$$

Пусть $\mu_0 = -\mu - \mu_1 - \cdots - \mu_n$. Введем также числа

$$\nu_\infty^{(1)} = -\frac{\mu_1 q}{p} - \sum_{k=2}^n \nu_k - \begin{cases} \mu_0 q/p & \text{при } \mu_0 > 1 - p, \\ \varepsilon - q/p' & \text{при } \mu_0 \leqslant 1 - p, \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\nu_\infty^{(2)} = -mq - \sum_{k=1}^n \nu_k - \begin{cases} \mu_0 q/p & \text{при } \mu_0 > 1 - p, \\ \varepsilon - q/p' & \text{при } \mu_0 \leqslant 1 - p, \quad \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$\nu_\infty^{(3)} = -\left(\frac{\mu_0}{p} + m\right) q - \sum_{k=1}^n \nu_k,$$

в терминах которых введем весовые функции типа (5.39):

$$r_+(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\nu_\infty^{(1)}} x^{(\mu_1/p - m)\, q} \prod\limits_{k=2}^n |x - x_k|^{\nu_k} & \text{при } \Omega = R^1_+, \\ (1 + |x|)^{\nu_\infty^{(2)}} \prod\limits_{k=1}^n |x - x_k|^{\nu_k} & \text{при } \Omega = R^1, \end{cases}$$

$$r_-(x) = \begin{cases} (1 + x)^{\nu_\infty^{(3)}} \prod\limits_{k=1}^n |x - x_k|^{\nu_k} & \text{при } \Omega = R^1_+, \\ r_+(x) & \text{при } \Omega = R^1. \end{cases}$$

Теорема 5.5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 \leqslant m \leqslant \alpha$, $0 < \alpha < m + 1/p$, $\rho(x)$ — *вес (5.39) с условием (5.47) в случае полуоси. Пусть*

$$\mu_k < p - 1, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{5.48}$$

Если, кроме (5.48), и $\mu_1 < p - 1$, *то оператор* I^α_{0+} *ограничен из* $L_p(R^1_+, \rho)$ *в* $L_q(R^1_+, r_+)$. *Если, кроме (5.48),* $\mu < 1 - \alpha p$, *то* I^α_- *ограничен из* $L_p(R^1_+, \rho)$ *в* $L_q(R^1_+, r_-)$. *Наконец, операторы* $I^\alpha_\pm$ *ограничены из* $L_p(R^1, \rho)$ *в* $L_q(R^1, r_\pm)$, *если, кроме (5.48),* $\mu_1 < p - 1$, $\mu_0 < 1 - \alpha p$.

Отметим полезный частный случай теоремы 5.5:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\nu} |(I^\alpha_+ \varphi)(x)|^q \, dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant c \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\mu} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{5.49}$$

$$1 < p < \infty, \quad \alpha p - 1 < \mu < p - 1, \quad \frac{1}{p} - \alpha \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{p},$$

$$\frac{1 + \nu}{q} = \frac{1 + \mu}{p} - \alpha.$$

Неравенства типа (5.45) справедливы и в случае всей оси:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-\alpha p} |(I^\alpha_\pm \varphi)(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant \varkappa \|\varphi\|_p, \quad 1 < p < 1/\alpha. \tag{5.50}$$

Они содержатся в теореме 5.5, но могут быть также получены с помощью теоремы 1.5 переходом к полуосям.

Докажем еще одну простую теорему, относящуюся к случаю $p=1$ и удобную в приложениях.

Теорема 5.6. *Пусть* $f(x)=I^{\alpha}_{0+}\varphi$ *или* $f(x)=I^{\alpha}_{-}\varphi$. *Если* $\varphi(x)\in L_1(\dot{R}^1_+;\rho)$, $\rho(x)=(1+x)^{\mu}$, $\alpha-1<\mu\leqslant 0$, *то*

$$\left\{\int\limits_0^{\infty}(1+x)^{\nu}|f(x)|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}\leqslant \kappa\int\limits_0^{\infty}(1+x)^{\mu}|\varphi(x)|\,dx, \tag{5.51}$$

где $1\leqslant r<1/(1-\alpha)$ *и* $\nu=r(1-\alpha+\mu)-1$, *за исключением случая* $f(x)=I^{\alpha}_{0+}\varphi$, $\mu=0$, *когда* $\nu<r(1-\alpha)-1$.

Доказательство. Пусть $f(x)=I^{\alpha}_{-}\varphi$ и пусть A — левая часть в (5.51). Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), имеем $A\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}|\varphi(t)|\left(\int\limits_0^{t}(1+x)^{\nu}(t-x)^{(\alpha-1)r}dx\right)^{1/r}dt$. Замена $x=t-(1+t)\xi$ дает

$$\int\limits_0^{t}(1+x)^{\nu}(t-x)^{(\alpha-1)r}dx=(1+t)^{\mu r}\int\limits_0^{t/(t+1)}(1-\xi)^{\nu}\xi^{(\alpha-1)r}d\xi\leqslant c(1+t)^{\mu r}$$

с учетом того, что $\nu>-1$ и $(\alpha-1)r>-1$. Поэтому из записанной оценки для A следует (5.51). Случай $f(x)=I^{\alpha}_{0+}\varphi$ рассматривается аналогично с той лишь разницей, что будем иметь дело с интегралом

$$\int\limits_t^{\infty}(1+x)^{\nu}(x-t)^{(\alpha-1)r}dx=(1+t)^{\nu+1+(\alpha-1)r}\int\limits_0^{\infty}\xi^{(\alpha-1)r}(\xi+1)^{\nu}d\xi.$$

Замечание 5.2. Теорема 5.6 справедлива и на оси в случае веса $(1+|x|)^{\mu}$, $\alpha-1<\mu\leqslant 0$, $\nu=r(1-\alpha+\mu)-1$ при $\mu\neq 0$ и $\nu<r(1-\alpha)-1$ при $\mu=0$. Доказательство аналогично.

Завершим рассмотрение этого пункта построением одного пространства суммируемых на оси функций, инвариантного относительно дробного интегрирования (пространства L_p или $L_p(\rho)$ со степенным весом этим свойством не обладают). Именно введем пространства $L_{p,\omega}$ с экспоненциальным весом, определив в них норму:

$$\|\varphi\|_{L_{p,\omega}}=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega t}|\varphi(t)|^p dt\right\}^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty, \tag{5.52}$$

а через $C_{\omega}=C_{\omega}(R^1)$ обозначим класс функций $\varphi(t)$, таких, что $e^{-\omega t}\varphi(t)\in C(\dot{R}^1)$, $\|\varphi\|_{C_{\omega}}=\max e^{-\omega t}|\varphi(t)|$. Для краткости будем полагать $L_{p,\omega}=C_{\omega}$ при $p=\infty$.

Теорема 5.7. *Операторы* $I^{\alpha}_{\pm}$, $\alpha>0$, *ограничены в* $L_{p,\omega}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, *если* $\pm\omega>0$ *соответственно, при этом*

$$\|I^{\alpha}_{\pm}\|_{L_{p,\omega}\to L_{p,\omega}}\leqslant\begin{cases}(p/|\omega|)^{\alpha}, & 1\leqslant p<\infty,\\ |\omega|^{-\alpha}, & p=\infty,\end{cases} \tag{5.53}$$

и

$$\|I^{\alpha}_{\pm}\|_{L_{1,\omega}\to L_{1,\omega}}=\|I^{\alpha}_{\pm}\|_{C_{\omega}\to C_{\omega}}=|\omega|^{-\alpha}. \tag{5.54}$$

Доказательство. Имеем при $\omega>0$

$$\Gamma(\alpha)\|I_+^\alpha\varphi\|_{L_{p,\omega}}\leqslant\int_0^\infty t^{\alpha-1}dt\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-\omega x}|\varphi(x-t)|^p dx\right\}^{1/p}=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\frac{t\omega}{p}}t^{\alpha-1}dt\,\|\varphi\|_{L_{p,\omega}}=\Gamma(\alpha)\left(\frac{p}{\omega}\right)^\alpha\|\varphi\|_{L_{p,\omega}}. \tag{5.55}$$

Для получения (5.54) остается заметить, что $\|I_\pm^\alpha\varphi\|_{L_{1,\omega}}=|\omega|^{-\alpha}\|\varphi\|_{L_{1,\omega}}$ на неотрицательных функциях $\varphi(x)$ (это усматривается из действий в (5.55)) и что $\|I_\pm^\alpha\varphi\|_{C_\omega}=|\omega|^{-\alpha}\|\varphi\|_{C_\omega}$ на функции $\varphi(x)=e^{\omega x}$.

4°. **Дробная производная Маршо.** Дробные производные Лиувилля (5.6) на оси можно привести к другому виду, который на оси оказывается, вообще говоря, более удобным, чем (5.6). Будем пока предполагать, что функция $f(x)$ достаточно «хороша»; например, $f(x)$ непрерывно дифференцируема и убывает вместе с производной $f'(x)$ не медленнее, чем $|x|^{\alpha-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Предполагаем, что $0<\alpha<1$. Имеем

$$(\mathcal{D}_+^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^\infty t^{-\alpha}f(x-t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty t^{-\alpha}f'(x-t)\,dt=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty f'(x-t)\,dt\int_t^\infty\frac{d\xi}{\xi^{1+\alpha}}=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x)-f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}}d\xi. \tag{5.56}$$

Положим

$$(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}dt=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\infty}^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt, \tag{5.57}$$

так что $\mathbf{D}_+^\alpha f\equiv\mathcal{D}_+^\alpha f$ на достаточно «хороших» функциях $f(x)$.

Аналогичные преобразования приводят к выражению

$$(\mathbf{D}_-^\alpha f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{f(x)-f(x+t)}{t^{1+\alpha}}dt,\qquad -\infty<x<\infty, \tag{5.58}$$

заменяющему $\mathcal{D}_-^\alpha f$. Конструкции (5.57), (5.58) будем называть *дробными производными Маршо*.

Очевидно, интегралы (5.57), (5.58) существуют не только при указанных предположениях о функции $f(x)$ — они понадобились только для того, чтобы совершить простой переход (5.56) от $\mathcal{D}_+^\alpha f$ к $\mathbf{D}_+^\alpha f$. Ясно, что интегралы (5.57), (5.58) существуют, например, на функциях, удовлетворяющих локально условию Гельдера порядка $\lambda>\alpha$ (его можно ослабить до $\lambda=\alpha$, взяв функции $f(x)$, принадлежащие локально классу $H^{\alpha,-a}$, $a>1$), а на бесконечности ограниченных.

Естественно поставить вопрос, можно ли утверждать, что $\mathcal{D}_+^\alpha f\equiv\mathbf{D}_+^\alpha f$ не только на «достаточно хороших» функциях, но и на всех тех функциях $f(x)$, на которых $\mathcal{D}_+^\alpha f$ и $\mathbf{D}_+^\alpha f$ существуют (почти всюду, например). Если существует $\mathcal{D}_+^\alpha f$, то существует ли $\mathbf{D}_+^\alpha f$ и наоборот?

На второй вопрос можно сразу дать отрицательный ответ: в случае $f(x)\equiv\mathrm{const}$ существует $\mathbf{D}_+^\alpha f$ и $\mathbf{D}_+^\alpha f\equiv 0$, однако $\mathcal{D}_+^\alpha f$ для $f(x)=\mathrm{const}$ не существует. Вообще, если $f(x)$ локально гельдерова порядка $\lambda>\alpha$, а на бесконечности не убывает, выходя, например, на постоянную или даже возрастая (!) не быстрее, чем $|x|^{\alpha-\varepsilon}$, то $\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f$ существует, чего не скажешь о $\mathcal{D}^{\alpha}_{+}f$, для существования которой требуется лучшее поведение $f(x)$ на бесконечности.

Ответ на первый вопрос сложнее уже хотя бы потому, что области определения операторов $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}$ и $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}$ оказываются различными. Это различие тесно связано с вопросом обращения дробных интегралов. Какой вариант более естествен:

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm} I^{\alpha}_{\pm}\varphi \equiv \varphi \quad \text{или} \quad \mathcal{D}^{\alpha}_{\pm} I^{\alpha}_{\pm}\varphi \equiv \varphi?$$

Второй вариант уже был использован в случае конечного отрезка (см. § 2, п. 6°). В случае же оси картина такова: если $\varphi \in L_p$, то первый вариант будет работать при всех допустимых p, $1 \leqslant p < 1/\alpha$, а второй — только при $p=1$ (см. далее § 6, п. 2°). Таким образом, дробные производные Маршо $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f$, допуская бо́льшую свободу для $f(x)$ на бесконечности, являются в этом отношении более естественными на оси, чем производные Лиувилля $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm} f$.

Само собой разумеется,что обсуждаемые различия между $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}$ и $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}$, связанные с поведением на бесконечности, будут отсутствовать в случае конечного отрезка.

В дальнейшем на «не очень хороших» функциях $f(x)$ дробные производные Маршо будут пониматься как условно сходящиеся интегралы. Именно пусть

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}f = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt. \tag{5.59}$$

Тогда по определению

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm,\varepsilon}f, \tag{5.60}$$

где характер сходимости будет определяться рассматриваемыми задачами. Так, изучая в § 6, п. 2° обращение $\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm} I^{\alpha}_{\pm}\varphi = \varphi$, $\varphi \in L_p$, будем понимать предельный переход (5.60) по норме пространства L_p.

Выражения (5.59) называются *усеченными дробными производными Маршо.*

Отметим свойства дробных производных Маршо, аналогичные (5.9), (5.12), (5.13):

$$Q\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}Qf, \quad \tau_h\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}\tau_h f, \tag{5.61}$$

$$\Pi_\delta\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}f = \delta^{-\alpha}\mathbf{D}^{\alpha}_{\pm}\Pi_\delta f. \tag{5.62}$$

Замечание 5.3. Аналогично равенствам (5.56) — (5.58) получаем дробные производные Маршо на полуоси $(0, \infty)$. При этом $(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$ преобразуем точно так же к $(\mathbf{D}^{\alpha}_{-} f)(x)$, $x>0$, а вместо $(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f)(x)$, $x>0$, следуя (5.56), получим

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}dt =$$

$$= \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{x^{\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x f'(x-t)\left(\alpha\int\limits_t^x \xi^{-1-\alpha}d\xi + \frac{1}{x^{\alpha}}\right)dt =$$

$$= \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^x \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}dt,$$

так что

$$\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\, x^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\, dt, \quad x>0, \quad 0<\alpha<1, \tag{5.63}$$

играет роль «левосторонней» производной Маршо на полуоси $(0, \infty)$.

Конструкции типа (5.63) будут использоваться и на отрезке (см. § 13, п. 1°). В п. 6° мы остановимся на дробных производных Маршо при $\alpha>1$.

5°. **Интегралы в смысле конечной части по Адамару.** Сравнивая дробные производные Маршо $\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f = \frac{-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{f(x \mp t) - f(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt$ с дробными интегралами $I_{\pm}^{\alpha} f$, видим, что формально $\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f$ получаются из $I_{\pm}^{\alpha} f$ заменой α на $-\alpha$ (при этом вычитание $f(x)$ обеспечивает сходимость интеграла). Таким образом, $\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f$ тесно связаны с понятиями, относящимися к расходящимся интегралам. Остановимся на некоторых из этих понятий.

Определение 5.2. *Пусть функция $\Phi(t)$ интегрируема на отрезке $\varepsilon<t<A$ при любом $A>0$ и $0<\varepsilon<A$. Будем говорить, что $\Phi(t)$ обладает в точке $t=0$ свойством Адамара, если существуют постоянные a_k, b и $\lambda_k>0$ такие, что*

$$\int_{\varepsilon}^{A} \Phi(t)\, dt = \sum_{k=1}^{N} a_k \varepsilon^{-\lambda_k} + b \ln \frac{1}{\varepsilon} + J_0(\varepsilon), \tag{5.64}$$

где $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_0(\varepsilon)$ существует и конечен. По определению

$$\text{p.f.} \int_0^A \Phi(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} J_0(\varepsilon). \tag{5.65}$$

Предел (5.65) называется конечной частью (в смысле Адамара) расходящегося интеграла $\int_0^A \Phi(t)\, dt$ или просто интегралом в смысле Адамара. Явное построение функции $J_0(\varepsilon)$ называется иногда регуляризацией интеграла $\int_0^A \Phi(t)\, dt$.

Легко видеть, что постоянные a_k, b, λ_k в (5.64) не зависят от A.

Если $\Phi(t)$ интегрируема в окрестности бесконечности, то полагаем по определению

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} \Phi(t)\, dt = \text{p.f.} \int_0^{A} \Phi(t)\, dt + \int_A^{\infty} \Phi(t)\, dt. \tag{5.66}$$

Нетрудно видеть, что это определение не зависит от выбора A.

Возвращаясь к $\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f$, рассматриваем расходящийся интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(x-t)\, dt}{t^{1+\alpha}}$.

Справедлива следующая

Лемма 5.2. *Пусть $0<\alpha<1$, а $f(x)$ локально гельдерова порядка $\lambda>\alpha$. Тогда функция $\Phi(t) = f(x-t)\, t^{-1-\alpha}$ обладает в точке $t=0$ свойством Адамара для каждого x и если $|f(t)| \leqslant c\, |t|^{\alpha-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, при $t \to -\infty$, то*

$$\text{p.f.} \int_0^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{f(x-t)-f(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt.$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой условия (5.64) и определений (5.65), (5.66).

Лемма 5.2 утверждает, что

$$\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f = \text{p.f.}\, I_{\pm}^{-\alpha} f, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{5.67}$$

Можно говорить также о том, что $(\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f)(x)$ является при каждом x аналитическим продолжением функции $(I_{\pm}^{-\alpha} f)(x)$ из полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha < 0$. При этом для функций $f(x)$, указанных в лемме 5.2, продолжение осуществляется в полуплоскость $\operatorname{Re}\alpha < \lambda$. Это вытекает из аналитичности функций $\Phi_1(\alpha) = I_{\pm}^{\alpha} f$ и $\Phi_2(\alpha) = \mathcal{D}_{\pm}^{-\alpha} f$ в полуплоскостях $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\alpha < 0$ соответственно (на достаточно «хороших» функциях f) и из совпадения их предельных значений: $\lim\limits_{\operatorname{Re}\alpha \to 0+} \Phi_1(\alpha) = \lim\limits_{\operatorname{Re}\alpha \to 0-} \Phi_2(\alpha) = I_{\pm}^{i \operatorname{Im}\alpha} f$.

Аналогичное (5.67) заключение: $\mathbf{D}_{0+}^{\alpha} f = \text{p.f.}\ I_{0+}^{-\alpha} f$, $0 < \alpha < 1$, справедливо и для производной Маршо (5.63).

Трактовка (5.67) дробных производных Маршо указывает путь, как придать им смысл при $\alpha \geqslant 1$. Для этого дадим в следующей лемме регуляризацию расходящегося интеграла $I_{+}^{-\alpha} f$, $\alpha > 0$.

Лемма 5.3. *Пусть локально $f(x) \in C^m$ и $f^{(m)}(x)$ локально удовлетворяет условию Гельдера порядка λ, $0 \leqslant \lambda < 1$. Тогда функция $\Phi(t) = f(x-t)\, t^{-1-\alpha}$ обладает при $\operatorname{Re}\alpha < m + \lambda$ в точке $t = 0$ свойством Адамара для каждого x и если $|f(t)| \leqslant c\, |t|^{\alpha - \varepsilon}$ при $t \to -\infty$, то*

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\, \text{p.f.} \int\limits_0^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{f(x-t) - \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_1^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{f^{(k)}(x)}{\Gamma(-\alpha)(k-\alpha)}, \tag{5.68}$$

где $\operatorname{Re}\alpha < m + \lambda$, $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой.

Заметим, что при выборе $m = [\alpha]$ равенство (5.68) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\, \text{p.f.} \int\limits_0^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^{\infty} \frac{f(x-t) - \sum\limits_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(-t)^k}{k!} f^{(k)}(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \tag{5.68$'$}$$

$$\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots,$$

где интеграл справа сходится абсолютно для функций, указанных в лемме 5.3. Форма (5.68′) имеет преимущество перед (5.68) своей компактностью.

В силу (5.67) и аналитичности по α правой части в (5.68) равенство (5.68) естественно использовать для определения дробной производной порядка α, $\operatorname{Re}\alpha>0$. Покажем, что такое определение согласуется (на достаточно «хороших» функциях f) с определением (5.7). Именно справедлива

Теорема 5.8. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5.3 при $m\geqslant[\alpha]+1$. Тогда лиувиллевская дробная производная $\mathcal{D}_+^\alpha f$ совпадает при любых α таких, что $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\alpha\neq 1, 2, \ldots$, с конструкцией (5.68).*

Доказательство. Пусть в соответствии с (5.7) $\beta=\alpha-n+1$, $n=[\alpha]+1$ $(0<\beta<1)$. Для «усеченной» лиувиллевской производной справедлива следующая формула:

$$\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\beta}=(-1)^n(\beta)_n\int\limits_\varepsilon^\infty\frac{f(x-t)\,dt}{t^{n+\beta}}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(\beta)_k}{\varepsilon^{k+\beta}}f^{(n-1-k)}(x-\varepsilon). \tag{5.69}$$

Она доказывается непосредственным дифференцированием интеграла в левой части. Регуляризируя интеграл в правой части в духе (5.68), получаем

$$\int\limits_\varepsilon^\infty\frac{f(x-t)\,dt}{t^{n+\beta}}=\int\limits_\varepsilon^1\left[f(x-t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}(t-\varepsilon)^kf^{(k)}(x-\varepsilon)\right]\frac{dt}{t^{n+\beta}}+$$
$$+\int\limits_1^\infty\frac{f(x-t)}{t^{n+\beta}}dt+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\frac{a_k(\varepsilon)}{\varepsilon^{k+\beta}}f^{(n-k-1)}(x-\varepsilon), \tag{5.70}$$

где обозначено

$$a_k(\varepsilon)=\varepsilon^{\beta+k}\int\limits_\varepsilon^1(t-\varepsilon)^{n-1-k}\,t^{-n-\beta}\,dt=\int\limits_0^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\xi^{n-1-k}(\xi+1)^{-n-\beta}d\xi.$$

Подставляя (5.70) в (5.69), находим, что

$$\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_\varepsilon^\infty\frac{f(x-t)}{t^\beta}\,dt=(-1)^n(\beta)_n\left\{\int\limits_\varepsilon^1\left[f(x-t)-\right.\right.$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}(t-\varepsilon)^kf^{(k)}(x-\varepsilon)\right]\frac{dt}{t^{n+\beta}}+\int\limits_1^\infty\frac{f(x-t)}{t^{n+\beta}}dt+$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\varepsilon^{k+\beta}}f^{(n-k-1)}(x-\varepsilon)\left[(\beta)_k-\frac{(\beta)_n}{(n-k-1)!}a_k(\varepsilon)\right]\right\}. \tag{5.71}$$

Имеем $a_k(\varepsilon)=\int\limits_0^\infty\xi^{n-1-k}(1+\xi)^{-n-\beta}\,d\xi-\int\limits_{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}^\infty\xi^{n-k-1}(1+\xi)^{-n-\beta}\,d\xi.$ Здесь первый интеграл легко сводится к бета-функции, а во втором сделаем замену $\xi+1=(\varepsilon t)^{-1}$

$$a_k(\varepsilon)=\frac{\Gamma(n-k)\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(n+\beta)}-\varepsilon^{k+\beta}\int\limits_0^1(1-\varepsilon t)^{n-1-k}\,t^{\beta+k-1}dt.$$

Поэтому квадратная скобка в (5.71) равна $\frac{(\beta)_n}{(n-k-1)!}\varepsilon^{k+\beta}\int\limits_0^1(1-\varepsilon t)^{n-1-k}\times$ $\times t^{\beta+k-1}dt\underset{\varepsilon\to 0}{\sim}\frac{(\beta)_k}{(k+\beta)(n-k-1)!}\varepsilon^{k+\beta}$. Тогда в (5.71) легко осуществляется предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и получаем, что лиувиллевская производная $\mathcal{D}_+^\alpha f=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_0^\infty f(x-t)\,t^{-\beta}dt$ действительно совпадает с правой частью в (5.68) (с учетом того, что $(-1)^n(\beta)_n=\Gamma(n-\alpha)/\Gamma(-\alpha)$ согласно (1.46), (1.47)). Теорема доказана.

6°. Свойства конечных разностей и производные Маршо порядка $\alpha>1$. Конструкции (5.57), (5.58), определяющие дробные производные Маршо, можно распространить на случай $\alpha>1$. Один из напрашивающихся способов этого состоит в том, чтобы поступить аналогично (5.7), положив $\alpha=n+\{\alpha\}$, $n=[\alpha]$, и введя

$$\mathbf{D}_+^\alpha f=\frac{d^n}{dx^n}\mathbf{D}_+^{\{\alpha\}}f=\frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int\limits_0^\infty\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x-t)}{t^{1+\{\alpha\}}}dt.$$

Можно поступить и по-другому, перейдя в числителе в (5.57), (5.58) от разности первого порядка к разности порядка $l>1$. Мы остановимся на последнем пути. Он будет в некоторых вопросах предпочтительнее, выявляя, в частности, в явном виде аналитическую зависимость $\mathbf{D}_+^\alpha f$ от параметра α. Предварительно рассмотрим некоторые простые свойства конечных разностей.

В терминах сдвига τ_h вводим величину

$$(\Delta_h^l f)(x)=(E-\tau_h)^l f=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}f(x-kh). \tag{5.72}$$

Она называется *конечной разностью порядка l функции $f(x)$ с шагом h и с центром в точке x.*

Нам понадобится следующая функция параметра α:

$$A_l(\alpha)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}k^\alpha,\quad \alpha>0. \tag{5.73}$$

Она возникает при рассмотрении конечной разности от степенной функции $(\Delta_1^l f)(0)=-A_l(\alpha)$ для $f(x)=|x|^\alpha$. Отметим важное для нас свойство этой функции:

$$A_l(\alpha)=0 \text{ при } \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ l-1, \tag{5.74}$$

вытекающее из очевидного равенства

$$A_l(m)=-\left(x\frac{d}{dx}\right)^m(1-x)^l\Big|_{x=1} \tag{5.74'}$$

(можно показать, что $A_l(\alpha)\neq 0$ при $\alpha\in R^1$, $\alpha\neq 1,\ 2,\ \ldots,\ l-1$; см. далее формулу (5.81) и лемму 26.1).

Лемма 5.4. *Для $f(x)\in C^m(R^1)$ справедлива при $l\geqslant m$ формула*

$$(\Delta_h^l f)(x)=\frac{h^m}{(m-1)!}\int\limits_0^1(1-u)^{m-1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^{m-k}k^m\binom{l}{k}f^{(m)}(x-khu)\,du. \quad (5.75)$$

Доказательство. В силу формулы Тейлора (с остаточным членом в интегральной форме) имеем $f(x-kh)=\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{(-kh)^i}{i!}f^{(i)}(x)+$ $+\frac{(-kh)^m}{(m-1)!}\int\limits_0^1(1-u)^{m-1}f^{(m)}(x-khu)\,du$. Поэтому для разности (5.72) имеем $(\Delta_h^l f)(x)=-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{(-h)^i}{i!}f^{(i)}(x)A_l(i)+\frac{h^m}{(m-1)!}\int\limits_0^1(1-u)^{m-1}\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^{m-k}k^m\times$ $\times\binom{l}{k}f^{(m)}(x-khu)\,du$, что совпадает с (5.75) ввиду (5.74).

Следствие 1. *Если $f(x)\in C^m(R^1)$ и $f^{(m)}(x)$ ограничена, то*

$$|(\Delta_h^l f)(x)|\leqslant c\,|h|^m\sup_x|f^{(m)}(x)|,\quad l\geqslant m, \quad (5.76)$$

где $c=\frac{1}{m!}\sum\limits_{k=0}^{l}k^m\binom{l}{k}\leqslant\frac{l^m2^l}{m!}$.

Следствие 2. *Если $f(x)\in C^m(R^1)$ и $|f^{(m)}(x+h)-f^{(m)}(x)|\leqslant A|h|^\lambda$, где $A=A(x)$ не зависит от h, то*

$$|(\Delta_h^l f)(x)|\leqslant Ac\,|h|^{m+\lambda},\quad l>m, \quad (5.77)$$

где c — то же, что в (5.76).

Действительно, при $l>m$ можно заменить в (5.75) $f^{(m)}(x-khu)$ на $f^{(m)}(x-khu)-f^{(m)}(x)$ благодаря свойству (5.74). После этого получение оценки (5.77) становится очевидным.

Возвращаясь к дробным производным, введем при произвольном $\alpha>0$, обобщая (5.57), (5.58), конструкции

$$\int\limits_0^\infty\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt,\quad \alpha>0. \quad (5.78)$$

Здесь интеграл сходится при $l>\alpha$ на достаточно «хороших» функциях $f(x)$ в силу (5.76), (5.77).

Справедлива (при $0<\alpha<1$) формула

$$\int\limits_0^\infty\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt=A_l(\alpha)\int\limits_0^\infty\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}dt. \quad (5.79)$$

Действительно, $\int\limits_\varepsilon^\infty\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}dt=\frac{f(x)}{\alpha\varepsilon^\alpha}+\sum\limits_{k=1}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}k^\alpha\int\limits_{k\varepsilon}^\infty\frac{f(x-t)}{t^{1+\alpha}}dt=$ $=\sum\limits_{k=1}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}k^\alpha\int\limits_{k\varepsilon}^\infty\frac{f(x-t)-f(x)}{t^{1+\alpha}}dt$, откуда при $\varepsilon\to0$ получается (5.79). Формула (5.79) подсказывает нормировку для конструкции (5.78) и мы, согласуясь с (5.57), (5.58), положим

$$\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int\limits_0^{\infty} \frac{(\Delta_{\pm t}^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad l > \operatorname{Re}\alpha > 0. \tag{5.80}$$

Будем называть (5.80) *дробными производными Маршо*. Заметим, что произведению $\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)$ нетрудно придать смысл при $\alpha = 1, 2, \ldots, l-1$ за счет свойства (5.74). Более того, $\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)$ можно записать в виде

$$-\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^l}{t^{1+\alpha}}\, dt = \frac{l}{\alpha} \int\limits_0^1 \frac{(1-\xi)^{l-1}}{\left(\ln \frac{1}{\xi}\right)^{\alpha}}\, d\xi \overset{\text{def}}{=} \varkappa(\alpha, l). \tag{5.81}$$

Действительно, в силу (5.19) имеем $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}(e^x) = e^x$ при любом α. Поэтому $e^x = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} e^{x-kt}}{t^{1+\alpha}}\, dt$, откуда следует первое из равенств (5.81). Второе получается заменой $\xi = e^{-t}$ и интегрированием по частям. В дальнейшем $\Gamma(-\alpha) A_l(\alpha)$ понимается в смысле (5.81) при $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ Можно показать, что правая часть в (5.80) не зависит от выбора l, $l > \operatorname{Re}\alpha$.

Подобно (5.59), можно ввести «усеченную» дробную производную Маршо:

$$\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha} f = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad l > \alpha. \tag{5.80'}$$

Производные (5.80) совпадают при всех $\alpha > 0$ с лиувиллевскими производными $\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f$ на достаточно хороших функциях $f(x)$. В этом можно убедиться из соображений аналитичности по α: аналитичность $\mathbf{D}_{\pm}^{\alpha} f$ вытекает непосредственно из (5.80), а $\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f$ — из теоремы 5.8.

Завершим этот пункт следующей теоремой:

Теорема 5.9. *Пусть $\alpha > 0$. Дробные производные Маршо (5.80) определены на функциях $f(x) \in C^{[\alpha]}(R^1)$ таких, что*

$$\sup_{x \in R^1} |f(x)| < \infty \quad \text{и} \quad |f^{([\alpha])}(x+h) - f^{([\alpha])}(x)| \leqslant A(x) h^{\lambda},$$

где $\lambda > \alpha - [\alpha]$.

Доказательство теоремы легко получается с помощью (5.77).

7°. Связь с дробными степенями операторов. Оператор $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}$ дробного дифференцирования можно рассматривать как дробную степень оператора дифференцирования:

$$\mathcal{D}_{+}^{\alpha} = (d/dx)^{\alpha}, \quad I_{+}^{\alpha} = (d/dx)^{-\alpha} \tag{5.82}$$

при надлежащем толковании понятия дробной степени оператора. Фактически эта мысль служила основной моделью при развитии абстрактной теории дробных степеней операторов в банаховом пространстве. Читателя, желающего более подробно ознакомиться с этой теорией, можно направить к книгам М. А. Красносельского, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльника, П. Е. Соболевского [1] и К. Иосида [1]. Мы ограничимся здесь самыми краткими указаниями на основные определения теории дробных степеней операторов и покажем, что они охватывают случай дробного интегродифференцирования (в надлежащей постановке).

Пусть X — банахово пространство и $\{T_t\}$, $t \geqslant 0$,— сильно непрерывная полугруппа в X (см. определение 2.5). Оператор

$$A\varphi = \lim_{\substack{t \to 0+ \\ (X)}} \frac{1}{t} (T_t - E) \tag{5.83}$$

называется *инфинитезимальным (или производящим) оператором полугруппы* T_t. Известно (см., например, книгу Н. Данфорда, Дж. Т. Шварца [1, с. 660]), что область определения $D(A)$ оператора A плотна в X и A — замкнутый оператор. Справедливо равенство $T_t = e^{tA}$ (по крайней мере формально; ему можно придать точный смысл: $T_t = \lim\limits_{h \to 0} e^{tA_h}$, $A_h = \frac{1}{h}(T_h - E)$).

Будем рассматривать дробные степени $(-A)^\alpha$ для операторов A, являющихся порождающими операторами сильно непрерывных полугрупп. Положительная степень оператора $-A$ определяется формулой

$$(-A)^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (T_t\varphi - \varphi)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{5.84}$$

$$\varphi \in D(A),$$

ср. с формулой Маршо (5.57). Здесь интеграл от функции скалярного аргумента t со значениями в банаховом пространстве понимается, как это принято в функциональном анализе, в смысле Бохнера, см. об этом, например, в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, гл. III, § 1]. Формулу (5.84) называют обычно *формулой Балакришнана*.

При $\alpha \geqslant 1$ дробную степень $(-A)^\alpha$ можно определить, следуя (5.80), равенством

$$(-A)^\alpha \varphi = \frac{1}{\varkappa(\alpha, l)} \int_0^\infty t^{-1-\alpha} (E - T_t)^l \varphi dt, \tag{5.85}$$

где E — тождественный оператор, $l > \alpha$, $\varkappa(\alpha, l)$ — постоянная (5.81).

Отрицательную степень оператора $-A$ можно определить при $0 < \alpha < 1$ равенством

$$(-A)^{-\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_t \varphi dt, \quad \varphi \in X, \tag{5.86}$$

однако здесь в отличие от (5.84) интеграл (5.86) может оказаться расходящимся на бесконечности без дополнительных предположений на полугруппу T_t. Простое условие, обеспечивающее его сходимость при всех $\alpha > 0$, состоит в том, чтобы

$$\|T_t\|_X \leqslant M e^{-\varepsilon t}, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.87}$$

Формально ясно, что для реализации равенства (5.82) оператор $A = -d/dx$ нужно представить как производящий оператор полугруппы T_t, которая ввиду (5.83) должна быть полугруппой операторов сдвига:

$$(T_t f)(x) = f(x - t). \tag{5.88}$$

Вопрос, однако, состоит в том, чтобы выбрать пространство X так, чтобы в нем полугруппа T_t была сильно непрерывной и выполнялось условие (5.87). Пространства $L_p(R^1)$, $C(\dot{R}^1)$ для этого не подходят, так как для них $\|T_t\| = 1$. Воспользуемся для этой цели пространствами $L_{p,\omega}$, C_ω (см. п. 3° этого параграфа и теорему 5.7).

Лемма 5.5. *Полугруппа (5.88) является сильно непрерывной в пространстве* $L_{p,\omega}(R^1)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *при этом*

$$\|T_t\|_{L_{p,\omega}} = e^{-\frac{\omega}{p}t}, \quad 1 \leqslant p < \infty; \quad \|T_t\|_{C\omega} = e^{-\omega t}.$$

Доказательство леммы получается непосредственной проверкой.

Лемма 5.5 позволяет утверждать, что интеграл (5.86) сходится по норме пространства $L_{p,\omega}$ при $\omega > 0$ и из (5.86) имеем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi(x-t)\, dt = I_+^\alpha \varphi,$$

где $\varphi \in L_{p,\omega}$ и интеграл справа понимается сходящимся (на бесконечности) по норме пространства $L_{p,\omega}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\omega > 0$. Из равенства же (5.84) получаем

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi(x-t) - \varphi(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt = \mathbf{D}_+^\alpha \varphi,$$

где $\varphi \in D(A) = \{\varphi(t) : \varphi'(t) \in L_{p,\omega}\}$, $\omega > 0$, при $0 < \alpha < 1$. Аналогично на основании равенства (5.85) рассматривается случай $\alpha \geqslant 1$.

§ 6. ПРЕДСТАВИМОСТЬ ФУНКЦИЙ ДРОБНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ОТ ФУНКЦИЙ ИЗ L_p

В § 5, п. 3° были рассмотрены дробные интегралы $I_\pm^\alpha \varphi$ функций $\varphi \in L_p$. Изучим теперь такие дробные интегралы более подробно и дадим их описание.

1°. Пространство $I^\alpha(L_p)$. Обозначим через $I_\pm^\alpha(L_p)$ образы операторов дробного интегрирования:

$$I_\pm^\alpha(L_p) = \{f : f(x) = I_\pm^\alpha \varphi, \quad \varphi \in L_p(R^1)\},$$
$$0 < \alpha < 1, \quad 1 \leqslant p < 1/\alpha.$$

В действительности они совпадают при $1 < p < 1/\alpha$, и мы будем обозначать

$$I^\alpha(L_p) \overset{\text{def}}{=} I_+^\alpha(L_p) = I_-^\alpha(L_p), \quad 1 < p < 1/\alpha, \tag{6.1}$$

однако доказательство этого совпадения нам удобнее отложить до § 11, п. 2°.

По теореме 5.3

$$I^\alpha(L_p) \subset L_q(R^1), \quad q = p/(1-\alpha p), \tag{6.2}$$

а в силу неравенства Харди (5.45)

$$I^\alpha(L_p) \subset L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p}). \tag{6.3}$$

Заметим, что

$$L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p}) \not\subset L_q(R^1), \quad L_q(R^1) \not\subset L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p}). \tag{6.4}$$

Первое очевидно, второе иллюстрируется примером функции $f(x) = |x|^{-1/q} \ln^{-1/p}|x|$ при $|x| > 2$ и $f(x) = 0$ при $|x| < 2$. Вложения (6.2), (6.3) наряду с (6.4) означают, что

$$I^\alpha(L_p) \neq L_q(R^1), \quad I^\alpha(L_p) \neq L_p(R^1;\ |x|^{-\alpha p}). \tag{6.5}$$

Следовательно, с учетом теоремы 5.3 пространство $I^\alpha(L_p)$ не совпадает ни с каким пространством $L_r(R^1)$, $1\leqslant r\leqslant\infty$. Оно не совпадает также ни с каким пространством $L_r(R^1;\rho)$. Поэтому пространство $I^\alpha(L_p)$ нуждается в описании. Этому посвящен п. 3°. Предварительно в п. 2° рассматривается обращение дробных интегралов $I^\alpha_+\varphi$, $\varphi\in L_p$, с помощью производных Маршо, что дает необходимую часть описания пространства $I^\alpha(L_p)$.

Позже, в § 18, п. 4° мы рассмотрим модификацию дробного интегрирования $I^\alpha_\pm$: так называемое *бесселево дробное интегрирование*, отличающееся от $I^\alpha_\pm$ экспоненциально убывающим множителем $G^\alpha_\pm\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\varphi(x\mp t)\,dt$. В отличие от $I^\alpha_\pm$ этот интеграл определен на функциях $\varphi(t)\in L_p(R^1)$ при всех $1<p<\infty$. Кроме того, $G^\alpha_\pm(L_p)\subset L_p$ согласно теореме Юнга 1.4, в то время как $I^\alpha_\pm(L_p)\not\subset L_p$. Важно отметить, что

$$L_p\cap I^\alpha(L_p)=G^\alpha_+(L_p)=G^\alpha_-(L_p),\quad 1<p<1/\alpha.$$

Доказательство этого нам удобно провести позже в § 18, п. 4°.

2°. Обращение дробных интегралов от функций из L_p. Лиувиллевское дифференцирование $\mathcal{D}^\alpha_\pm$ обращает дробные интегралы $I^\alpha_\pm\varphi$ в рамках пространств $L_p:\mathcal{D}^\alpha_\pm I^\alpha_\pm\varphi\equiv\varphi$, $\varphi\in L_p(R^1)$, только при $p=1$, поскольку $\mathcal{D}^\alpha_+I^\alpha_+\varphi\equiv\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^x\varphi(t)\,dt$, что предполагает суммируемость $\varphi(x)$ на всей оси. При $p>1$, как уже отмечалось в § 5, п. 4°, будем использовать вместо $\mathcal{D}^\alpha_\pm f$ производные Маршо, понимаемые, согласно (5.60), в смысле сходимости по норме $L_p(R^1)$.

Докажем предварительно следующую лемму, дающую полезное интегральное представление усеченных дробных производных Маршо (5.59).

Лемма 6.1. *На функциях $f(x)=I^\alpha_+\varphi$, представимых дробными интегралами с плотностью $\varphi(x)\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/\alpha$, усеченная дробная производная $\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f$ имеет следующее представление:*

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)=\int\limits_0^\infty\mathcal{K}(t)\,\varphi(x-\varepsilon t)\,dt,\tag{6.6}$$

где ядро

$$\mathcal{K}(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\,\frac{t^\alpha_+-(t-1)^\alpha_+}{t}\in L_1(R^1)\tag{6.7}$$

является усредняющим:

$$\int\limits_0^\infty\mathcal{K}(t)\,dt=1\ \text{ и }\ \mathcal{K}(t)>0.\tag{6.8}$$

Доказательство. Имеем при $t>0$

$$f(x)-f(x-t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int\limits_0^\infty\varphi(x-t\xi)\,\xi^{\alpha-1}d\xi-\right.$$
$$\left.-\int\limits_1^\infty\varphi(x-t\xi)(\xi-1)^{\alpha-1}d\xi\right\}.$$

так что

$$f(x)-f(x-t)=t^\alpha\int\limits_0^\infty\mathrm{k}(\xi)\,\varphi(x-t\xi)\,d\xi,\tag{6.9}$$

где

$$\mathrm{k}(\xi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}\xi^{\alpha-1}, & 0<\xi<1,\\ \xi^{\alpha-1}-(\xi-1)^{\alpha-1}, & \xi>1.\end{cases} \tag{6.10}$$

Заметим, что $\mathrm{k}(\xi)\in L_1(R^1_+)$ и

$$\int_0^\infty \mathrm{k}(\xi)\,d\xi=0. \tag{6.11}$$

Из (6.9) получаем

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty\frac{dt}{t^2}\int_0^\infty \mathrm{k}\left(\frac{\xi}{t}\right)\varphi(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{\varphi(x-\xi)}{\xi}\,d\xi\int_0^{\xi/\varepsilon}\mathrm{k}(s)\,ds=$$

$$=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty\frac{\varphi(x-\varepsilon t)}{t}\,dt\int_0^t\mathrm{k}(s)\,ds.$$

Непосредственной проверкой устанавливаем равенство

$$\int_0^t\mathrm{k}(s)\,ds=\alpha^{-1}t\Gamma(1-\alpha)\mathscr{K}(t) \tag{6.12}$$

и равенство (6.8). Лемма 6.1 доказана.

Заметим, что аналогично (6.6) получаем представление

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)=\int_0^\infty\mathscr{K}_{l,\alpha}(t)\,\varphi(x-\varepsilon t)\,dt \tag{6.6$'$}$$

в случае произвольного $\alpha>0$, где слева использована усеченная дробная производная Маршо (5.80′), а

$$\mathscr{K}_{l,\alpha}(t)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}(t-k)^\alpha_+}{\varkappa(\alpha,l)\,\Gamma(1+\alpha)\,t}. \tag{6.7$'$}$$

Нетрудно показать, что

$$\mathscr{K}_{l,\alpha}(t)\in L_1(R^1)\ \text{ и }\ \int_0^\infty\mathscr{K}_{l,\alpha}(t)\,dt=1. \tag{6.8$'$}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $f(x)=I^\alpha_\pm\varphi$, $\varphi\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p<1/\alpha$. *Тогда*

$$\varphi(x)=(\mathbf{D}^\alpha_\pm f)(x), \tag{6.13}$$

где $\mathbf{D}^\alpha_\pm f$ *понимается как*

$$(\mathbf{D}^\alpha_\pm f)(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\(L_p)}}(\mathbf{D}^\alpha_{\pm,\varepsilon}f)(x). \tag{6.14}$$

Предел в (6.14) существует также почти всюду.

Доказательство этой теоремы подготовлено леммой 6.1. Действительно, в силу (6.6) и (6.8) имеем

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f)(x)-\varphi(x)=\int_0^\infty\mathscr{K}(t)[\varphi(x-\varepsilon t)-\varphi(x)]\,dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского (1.33), получаем

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f-\varphi\|_p\leqslant\int\limits_0^{\infty}\mathcal{K}(t)\,\|\varphi(x-\varepsilon t)-\varphi(x)\|_p dt\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$$

на основании мажорантной теоремы Лебега 1.2 и свойства (1.34). В соответствии с определением (6.14) равенство (6.13) доказано. Существование предела $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f$, $f\in I^{\alpha}(L_p)$, почти всюду вытекает из теоремы 1.3.

Отметим, что из леммы 6.1 и теоремы 6.1 вытекает неравенство

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p\leqslant\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f\|_p,\quad f\in I^{\alpha}_{+}(L_p),\quad 1\leqslant p<1/\alpha. \tag{6.15}$$

Действительно, из (6.6) с учетом (6.8) и (6.13) имеем

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p\leqslant\|\mathcal{K}\|_1\|\varphi\|_p=\|\varphi\|_p=\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f\|_p.$$

Неравенство (6.15) означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p=\sup_{\varepsilon>0}\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p \tag{6.16}$$

для $f\in I^{\alpha}_{+}(L_p)$. В самом деле, неравенство, получающееся из (6.16) заменой $=$ на $\leqslant$, очевидно. Обратное неравенство вытекает из (6.15) в соответствии с (6.14).

Из теоремы 6.1 следует, что $I^{\alpha}_{\pm}\varphi\equiv0$, $\varphi\in L_p$, только в случае $\varphi(t)\equiv0$. Поэтому в $I^{\alpha}(L_p)$ можно ввести норму равенством

$$\|f\|_{I^{\alpha}(L_p)}=\|\varphi\|_{L_p},\quad f=I^{\alpha}_{+}\varphi. \tag{6.17}$$

Пространство $I^{\alpha}(L_p)$ с нормой (6.17) банахово как изометричное L_p.

3°. **Описание класса $I^{\alpha}(L_p)$. Достаточные признаки.** Следующая теорема дает описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$ в терминах усеченных дробных производных Маршо (ср. с описанием этого пространства в теоремах 20.5 и 20.4 на основе L_p-поведения конечных разностей дробного порядка).

Теорема 6.2. *Для того чтобы $f(x)\in I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<1/\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) выполнялось одно из двух условий:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\(L_p)}}\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\in L_p, \tag{6.18}$$

$$\sup_{\varepsilon>0}\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p<\infty, \tag{6.19}$$

2) $f(x)\in L_r(R^1)$, где $r=q=p/(1-\alpha p)$ в необходимой части и r — любое, $1\leqslant r<\infty$, в достаточной части.

Доказательство. Необходимость в этой теореме является простым фактом, вытекая из теоремы Харди — Литтлвуда 5.3, теоремы 6.1 и равенства (6.16). Сложнее обстоит дело с достаточностью.

Пусть $f\in L_r$ и выполнено одно из условий (6.18), (6.19). Покажем, что тогда существует функция $\varphi\in L_p$ такая, что

$$f=I^{\alpha}_{+}\varphi \tag{6.20}$$

(тогда $f\in I^{\alpha}(L_p)$). Вместо (6.20) докажем вначале при любом $h>0$ равенство

$$f(x)-f(x-h)=(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x)-(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x-h). \tag{6.21}$$

Обозначим

$$(A_h\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a_h(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad a_h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,[t_+^{\alpha-1} - (t-h)_+^{\alpha-1}], \tag{6.22}$$

так что требуемое равенство (6.21) есть $f(x) - f(x-h) = (A_h\varphi)(x)$. Заметим, что A_h — свертка с суммируемым ядром $a_h(t) \in L_1(R^1)$ и потому композиция $A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}$ является (при фиксированном $\varepsilon > 0$) ограниченным оператором в $L_r(R^1)$ при всех $r \geqslant 1$. Для достаточно хороших функций $f(x)$, например из C_0^{∞}, имеем

$$A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f = \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}A_h f = (\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}I_+^{\alpha}f)(x) - (\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}I_+^{\alpha}f)(x-h).$$

Отсюда в силу представления (6.6)

$$A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f = \int_0^{\infty} \mathscr{K}(t)[f(x-\varepsilon t) - f(x-h-\varepsilon t)]\,dt. \tag{6.23}$$

Так как C_0^{∞} плотно в L_r, то тождество (6.23) выполняется для всех $f \in L_r$ ввиду ограниченности операторов в левой и правой частях.

Требуемое равенство (6.21) получится из (6.23) при $\varepsilon \to 0$.

В силу (6.8) правая часть в (6.23) сходится по норме пространства L_r к $f(x) - f(x-h)$. Следовательно, существует и предел левой части, так что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f = f(x) - f(x-h). \tag{6.24}$$

Пусть выполнено (6.18). Так как оператор A_h ограничен в L_p, то существует и предел

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}} A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f = A_h\,(\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f) = A_h\varphi,$$

где $\varphi = \mathbf{D}_+^{\alpha}f \in L_p$. Так как $A_h\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f$ сходится и по норме L_r и по норме L_p, то предельные функции обязаны совпадать почти всюду; тогда из (6.24) получаем $A_h\varphi = f(x) - f(x-h)$, что совпадает с (6.21).

Если же выполнено (6.19), то можно выбрать последовательность $\varepsilon_k \to 0$ такую, что $\mathbf{D}_{+,\varepsilon_k}^{\alpha} f$ слабо сходится по норме L_p (ограниченное множество в L_p, $p > 1$, слабо компактно, см., например, Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1, с. 314]). Пусть $\varphi \in L_p$ — слабый предел последовательности $\mathbf{D}_{+,\varepsilon_k}^{\alpha}f$. Так как всякий ограниченный оператор не только сильно, но и слабо непрерывен, то из (6.24) аналогичным рассуждением снова получаем (6.21).

Равенство (6.21) доказано. Остается заметить, что функции, имеющие тождественно совпадающие разности, могут различаться лишь на постоянную. Поэтому из (6.21) следует (6.20) с учетом того, что f, $I_+^{\alpha}\varphi$ из L_r, L_q соответственно. Теорема 6.2 доказана.

Следствие 1. *Норма (6.17) в $I^{\alpha}(L_p)$ эквивалентна нормам*

$$\|f\|_q + \|\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f\|_p, \tag{6.25}$$

$$\|f\|_q + \sup_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^{\alpha}f\|_p, \qquad q = p/(1-\alpha p). \tag{6.26}$$

Следствие 2. *Формула дробного интегрирования по частям*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\mathbf{D}_+^{\alpha}g)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,(\mathbf{D}_-^{\alpha}f)(x)\,dx \tag{6.27}$$

(с дробными производными Маршо; ср. с (5.17)) справедлива в предположениях: $\mathbf{D}_-^\alpha f \in L_p$, $\mathbf{D}_+^\alpha g \in L_r$, $f \in L_s$, $g \in L_t$, где $p > 1$, $r > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1 + \alpha$ и $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \alpha$, $\frac{1}{t} = \frac{1}{r} - \alpha$.

Действительно, при указанных условиях $f \in I^\alpha(L_p)$, $g \in I^\alpha(L_r)$ и тогда (6.27) вытекает из (5.16).

Чтобы сформулировать еще одно следствие из теоремы 6.2, введем пространство функций из $L_r(R^1)$, имеющих дробную производную (Маршо) в $L_p(R^1)$:

$$L_{p,r}^\alpha(R^1) = \{f(x) : f \in L_r, \ \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (L_p)}} \mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f \in L_p\}. \tag{6.28}$$

Следствие 3. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, $1 \leqslant r < \infty$. *Тогда*

$$L_{p,r}^\alpha(R^1) = L_r \cap I^\alpha(L_p). \tag{6.29}$$

Замечание 6.1. Справедлив также с учетом (5.49) весовой вариант теоремы 6.2: для того чтобы $f(x)$ была представима дробным интегралом $I_+^\alpha \varphi$, где $\varphi \in L_p(R^1; |x|^\mu)$, $\alpha p - 1 < \mu < p - 1$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) \in L_r(R^1; |x|^\nu), \quad \frac{1}{p} - \alpha \leqslant \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{p}, \quad \frac{1+\nu}{r} = \frac{1+\mu}{p} - \alpha$$

и $\sup\limits_{\varepsilon > 0} \|\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f\|_{L_p(R^1;\ |x|^\mu)} < \infty$.

Добавим к характеризации пространства $I^\alpha(L_p)$ еще одно соображение, относящееся к поведению функций $f(x) \in I^\alpha(L_p)$ на бесконечности: дробные интегралы $f(x) = (I_\pm^\alpha \varphi)(x)$ от сохраняющих знак функций $\varphi(x)$ «плохо» ведут себя при $x \to \pm\infty$ соответственно: они убывают лишь как $c|x|^{\alpha-1}$ при любой скорости убывания функции $\varphi(x)$, см. далее оценку (7.8). Поэтому если $f(x)$ вещественна и $f(x) \in L_r \cap I^\alpha(L_p)$, $1 \leqslant r \leqslant 1/(1-\alpha)$, то $(\mathbf{D}_\pm^\alpha f)(x)$ меняет знак на оси. Для случая $r = 1$ более точную информацию дает следующее утверждение:

если $f(x) \in L_1 \cap I^\alpha(L_p)$, $1 \leqslant p < 1/\alpha$, *то* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{D}_{\pm,\varepsilon}^\alpha f)(x)\,dx = 0$ *при любом* $\varepsilon > 0$. *Если* $p = 1$, *то и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{D}_\pm^\alpha f)(x)\,dx = 0$.

Действительно, для $\mathbf{D}_{\pm,\varepsilon}^\alpha f$ требуемое равенство получается непосредственным интегрированием равенства (5.59), а для $\mathbf{D}_\pm^\alpha f$ при $p = 1$—интегрированием равенства (6.6). ■

Рассмотрим теперь вопрос об описании классов $I_\pm^\alpha(L_1)$, $0 < \alpha < 1$. Их можно описать подобно случаю конечного интервала (см. теорему 2.1) в терминах абсолютной непрерывности функций

$$f_{1-\alpha}^\pm(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\infty f(x \mp t)\, t^{-\alpha} dt.$$

Определение 6.1. *Будем говорить, что* $f(x) \in AC(R^1)$, *если* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на любом конечном интервале и имеет ограниченную вариацию на замкнутой прямой* R *(пополненной двумя бесконечно удаленными точками).*

Принадлежность функции $f(x)$ классу $AC(R^1)$ равносильна представимости ее в виде $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt+c$, где $\varphi(t)\in L_1(R^1)$.

Можно было бы определить класс $AC(R^1)$ с помощью отображения на конечный отрезок. Именно пусть $x=x(y)$ — непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на ось $[-\infty, \infty]$ и пусть $\bar{f}(y)=f[x(y)]$. Можно показать, что определение класса $AC(R^1)$ равенством $AC(R^1)=\{f(x):\bar{f}(y)\in AC[0, 1]\}$ равносильно предыдущему определению.

Теорема 6.3. *Для того чтобы $f(x)\in I^{\alpha}_{\pm}(L_1)$, необходимо и достаточно, чтобы $f^{\pm}_{1-\alpha}(x)\in AC(R^1)$ и $f^{\pm}_{1-\alpha}(\mp\infty)=0$ при соответственном выборе знаков.*

Доказательство теоремы аналогично случаю конечного интервала (см. теорему 2.1).

4°. Достаточные признаки представимости функций дробным интегралом. Замечая, что

$$\|\mathbf{D}^{\alpha}_{+,\varepsilon}f\|_p\leqslant\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\omega_p(f, t)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \tag{6.30}$$

где $\omega_p(f, t)$ — интегральный модуль непрерывности:

$$\omega_p(f, t)=\sup_{0<\tau<t}\|f(x+\tau)-f(x)\|_p, \tag{6.31}$$

непосредственно из теоремы 6.2 получаем следующую теорему.

Теорема 6.4. *Если $f\in L_q(R^1)$, $q=p/(1-\alpha p)$, и $\int\limits_0^{\infty}t^{-1-\alpha}\,\omega_p(f,t)\times$ $\times dt<\infty$, то $f\in I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<1/\alpha$.*

Укажем простые достаточные условия для принадлежности функций $f(x)$ классу $I^{\alpha}(L_p)$ в терминах гельдеровости функции $f(x)$. Предварительно докажем следующую вспомогательную оценку, которой неоднократно воспользуемся.

Для интеграла

$$A_{a,b,c}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{|t|^{a}(1+|t|)^{b}(1+|x-t|)^{c}},$$

где $a<1$ и $a+b+c>1$, справедлива оценка

$$A_{a,b,c}(x)\leqslant\varkappa\begin{cases}(1+|x|)^{-\min(a+b,\, c,\, a+b+c-1)}, & \text{если } \max(c,\ a+b)\neq 1,\\ (1+|x|)^{1-a-b-c}\ln(2+|x|), & \text{если } \max(c,\ a+b)=1,\end{cases} \tag{6.32}$$

где $\varkappa$ не зависит от x.

Доказательство. Так как функция $A_{a,b,c}(x)$ ограничена, ее достаточно оценить при $|x|\to\infty$. Представим ее в виде

$$A_{a,b,c}(x)=|x|^{1-a-b-c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{|\tau|^{a}\left(|\tau|+\frac{1}{|x|}\right)^{b}\left(|\tau-1|+\frac{1}{|x|}\right)^{c}}.$$

Отсюда при $|x|\to\infty$ имеем

$$A_{a,b,c}(x)\leqslant\varkappa|x|^{1-a-b-c}+|x|^{1-a-b-c}\left(\int\limits_{-1/2}^{1/2}+\int\limits_{1/2}^{3/2}\right).$$

Очевидно, $J_1 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \leqslant \varkappa \int\limits_{-1/2}^{1/2} |\tau|^{-a} (|\tau| + 1/|x|)^{-b} d\tau = 2\varkappa |x|^{a+b-1} \int\limits_0^{|x|/2} \tau^{-a} (\tau +$ $+ 1)^{-b} d\tau$. Поэтому при $|x| \to \infty$ имеем $J_1 \leqslant \varkappa (|x|^{a+b-1} + 1)$, если $a + b \neq 1$, и $J_1 \leqslant \varkappa \ln (2 + |x|)$, если $a + b = 1$. Аналогично

$$\int\limits_{1/2}^{3/2} \leqslant \varkappa \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(|\xi| + \frac{1}{|x|} \right)^{-c} d\xi \leqslant \varkappa \begin{cases} |x|^{c-1} + 1, & c \neq 1 \\ \ln (2 + |x|), & c = 1. \end{cases}$$

Собирая оценки, получаем (6.32).

Теорема 6.5. *Если* $f(x) \in H^\lambda (\dot{R}^1)$, $\lambda > \alpha$, *то*

$$|(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon} f)(x)| \leqslant c (1 + |x|)^{-\lambda - \alpha}, \qquad \alpha < \lambda < 1, \tag{6.33}$$

$$|(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon} f)(x)| \leqslant c (1 + |x|)^{-1-\alpha} \ln (2 + |x|), \quad \lambda = 1, \tag{6.34}$$

где c не зависит от x и ε. Если при этом $\lambda > \max (\alpha, -\alpha + 1/p)$ *и* $f(\infty) = 0$, *то* $f(x) \in I^\alpha (L_p)$.

Доказательство. Пользуясь условием Гельдера (1.6) на $\dot{R}^1$, получаем

$$|(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon} f)(x)| \leqslant \frac{1}{(1 + |x|)^\lambda} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda} (1 + |x - t|)^\lambda} .$$

Привлекая здесь оценку (6.32), получаем (6.33) и (6.34). Если $f(\infty) = 0$ и $\lambda > -\alpha + 1/p$, то $f \in L_q$, $1/q = -\alpha + 1/p$, а из (6.33), (6.34) следует, что $\sup\limits_{\varepsilon > 0} \|\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon} f\|_p < \infty$. Тогда $f \in I^\alpha (L_p)$ в силу теоремы 6.2.

Следующая теорема предоставляет достаточные условия в весовых терминах.

Теорема 6.6. *Если* $f(x) = \dfrac{g(x)}{|x|^\mu (1 + |x|)^\nu}$, *где* $g(x) \in H^\lambda_{\mathbf{k}} (\dot{R}^1)$, *то при* $\lambda > \alpha$, $-\alpha < \mu < 1$, $\nu > \alpha$ *справедливо неравенство*

$$|(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon} f)(x)| \leqslant c |x|^{-\mu-\alpha} (1 + |x|)^{-\min(\nu,\ 1-\mu)}, \tag{6.35}$$

где c не зависит от x и ε (при $\nu + \mu = 1$ в (6.35) появляется $\ln (2 + |x|)$). *Если, кроме того,*

$$\frac{1}{q} - \nu < \mu < \frac{1}{q}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha, \tag{6.36}$$

то $f(x) \in I^\alpha (L_p)$.

Доказательство. Имеем (обозначив $\rho(x) = |x|^\mu (1 + |x|)^\nu$):

$$(\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha) \rho(x)} \int\limits_\varepsilon^\infty \frac{g(x - t) - g(x)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_\varepsilon^\infty \left[\frac{1}{\rho(x - t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho(x)} \right] \frac{g(x - t)}{t^{1+\alpha}} dt = A_\varepsilon (x) + B_\varepsilon (x).$$

Оценка для $A_\varepsilon (x)$ следует из (6.32):

$$|A_\varepsilon (x)| \leqslant c |x|^{-\mu} (1 + |x|)^{-\nu-\alpha-\lambda} \tag{6.37}$$

(с добавлением $\ln(2+|x|)$ при $\lambda=1$). Для оценки $B_\varepsilon(x)$ представим его в виде

$$B_\varepsilon(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\frac{1}{(1+|x|)^\nu}\int_\varepsilon^\infty\left[\frac{1}{|x-t|^\mu}-\frac{1}{|x|^\mu}\right]\frac{g(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\varepsilon^\infty\left[\frac{1}{(1+|x-t|)^\nu}-\frac{1}{(1+|x|)^\nu}\right]\frac{g(x-t)\,dt}{t^{1+\alpha}|x-t|^\mu}=B_\varepsilon^1(x)+B_\varepsilon^2(x).$$

Оценка для $B_\varepsilon^1(x)$ проста:

$$|B_\varepsilon^1(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-\nu}\int_0^\infty t^{-1-\alpha}\left||x|^{-\mu}-|x-t|^{-\mu}\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant c|x|^{-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}\int_{-\infty}^\infty|t|^{-1-\alpha}\left|1-|1-t|^{-\mu}\right|dt=c_1|x|^{-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}.$$

Далее,

$$|B_\varepsilon^2(x)|\leqslant\frac{c}{|x|^{\alpha+\mu}}\int_0^\infty\left|\frac{1}{(1+|x|)^\nu}-\frac{1}{(1+|x|\,|1-t\operatorname{sign}x|)^\nu}\right|\times$$

$$\times\frac{t^{-1-\alpha}dt}{|1-t\operatorname{sign}x|^\mu}\leqslant c|x|^{\nu-\alpha-\mu}(1+|x|)^{-\nu}\int_0^\infty t^{\nu-\alpha-1}|1-t|^{-\mu}\times$$

$$\times(1+|x|\,|1-t|)^{-\nu}dt=\frac{c|x|^{\nu-\alpha-\mu}}{(1+|x|)^\nu}\int_{|t-1|>1/2}\ldots+\frac{c|x|^{\nu-\alpha-\mu}}{(1+|x|)^\nu}\times$$

$$\times\int_{|t-1|<1/2}\ldots=U_\varepsilon(x)+V_\varepsilon(x).$$

В первом из этих интегралов $|t-1|>(t+1)/5$, поэтому

$$U_\varepsilon(x)\leqslant\frac{c|x|^{-\alpha-\mu}}{(1+|x|)^\nu}\int_0^\infty\frac{dt}{t^{1+\alpha-\nu}(1+t)^{\mu+\nu}}=\frac{c_1}{|x|^{\alpha+\mu}(1+|x|)^\nu}.$$

Далее,

$$V_\varepsilon(x)\leqslant c|x|^{\nu-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}\int_0^1\xi^{-\mu}(1+\xi|x|)^{-\nu}d\xi=$$

$$=c|x|^{\nu-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\nu}\int_0^{|x|}t^{-\mu}(1+t)^{-\nu}dt\leqslant c|x|^{-\mu-\alpha}(1+|x|)^{-\min(\nu,\,1-\mu)}\qquad(6.38)$$

(с добавлением $\ln(2+|x|)$ при $\nu+\mu=1$). Собирая оценки, получаем, что $B_\varepsilon(x)$ оценивается, как в (6.38). Тогда с учетом (6.37) такую же оценку имеет и $\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f$. Тем самым неравенство (6.35) доказано. После этого оставшееся утверждение теоремы получается с помощью теоремы 6.2.

К теореме 6.6 примыкает доказываемая аналогично

Теорема 6.6′. *Если* $f(x)\in H^\lambda(R^1)$, $\lambda>\alpha$, *то* $\dfrac{f(x)-f(0)}{|x|^\mu}\in I^\alpha(L_p)$ *при* $-\alpha+1/p<\mu<1/p$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 6.7. *Пространство $I^\alpha(L_p)$ инвариантно относительно умножения на функции $a(x)\in \dot{H}^\lambda(\dot{R}^1)$, $\lambda>\alpha$, причем*

$$\|af\|_{I^\alpha(L_p)} \leqslant \varkappa \|a\|_{H^\lambda} \|f\|_{I^\alpha(L_p)},$$

где постоянная $\varkappa$ *не зависит от* a *и* f.

Доказательство. Проверяем условия теоремы 6.2. Условие $af\in L_q$ очевидно и $\|af\|_q\leqslant \|a\|_{H^\lambda}\|f\|_q$. Далее,

$$\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}(af) = a(x)\,\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f + A_\varepsilon f,$$

где

$$A_\varepsilon f = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\varepsilon^\infty \frac{a(x)-a(x-t)}{t^{1+\alpha}} f(x-t)\,dt.$$

Очевидно, $\|a\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f\|_p \leqslant \|a\|_{H^\lambda}\|\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}f\|_p$, а для $A_\varepsilon f$ имеем

$$\|A_\varepsilon f\|_p \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\|a\|_{H^\lambda} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{|f(x-t)|^p dx}{(1+|x|)^{\lambda p}(1+|x-t|)^{\lambda p}} \right\}^{1/p}$$

или после применения неравенства Гельдера с показателями q/p и $(q/p)'$:

$$\|A_\varepsilon f\|_p \leqslant \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\|a\|_{H^\lambda}\|f\|_q \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\alpha-\lambda}} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+|x|)^{\lambda/\alpha}(1+|x-t|)^{\lambda/\alpha}} \right\}^\alpha.$$

В силу оценки (6.32) повторный интеграл сходится, так что окончательно $|\mathbf{D}^\alpha_{+,\varepsilon}(af)\|_p \leqslant c\|a\|_{H^\lambda}\|f\|_{I^\alpha(L_p)}$, что завершает доказательство теоремы.

Замечание 6.2. Доказываемое в § 11 равенство (11.36) утверждает, что умножение на разрывную функцию $\theta(x)=(1+\operatorname{sign} x)/2$ также оставляет инвариантным класс $I^\alpha(L_p)$ при $1<p<1/\alpha$. На основании этого в § 11, п. 4° будет указан еще один достаточный признак для того, чтобы $f(x)\in I^\alpha(L_p)$ (см. следствие 2 из теоремы 11.6).

5°. Об интегральном модуле непрерывности функций из $I^\alpha(L_p)$. Завершим этот параграф некоторыми простыми свойствами модуля непрерывности (6.31). Хотя, вообще говоря, $f(x)\notin L_p(R^1)$ для $f(x)\in I^\alpha(L_p)$, однако $f(x)-f(x-h)\in L_p(R^1)$ при любом h. Это вытекает из (6.9). Более того, справедливы следующие утверждения для $f(x)\in I^\alpha(L_p)$, $1<p<1/\alpha$:

$$1)\ \omega_p(f,t)\leqslant ct^\alpha\|\mathbf{D}^\alpha_+ f\|_p, \tag{6.39}$$

$$2)\ \omega_p(f,t)=o(t^\alpha) \quad \text{при } t\to 0. \tag{6.40}$$

Действительно, оценка (6.39) вытекает из (6.9) после применения обобщенного неравенства Минковского (1.33). Чтобы получить (6.40), перепишем (6.9) с учетом свойства (6.11) в виде

$$f(x)-f(x-t) = t^\alpha \int_0^\infty \mathrm{k}(\xi)\,[\varphi(x-t\xi)-\varphi(x)]\,d\xi, \quad \varphi=\mathbf{D}^\alpha_+ f.$$

Отсюда, также применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$\omega_p(f,\ t)\leqslant t^{\alpha}\int\limits_0^{\infty}|\,\mathrm{k}(\xi)|\,\omega_p(\varphi,\ t\xi)\,d\xi = o(t^{\alpha}). \tag{6.41}$$

Из (6.41) нетрудно вывести с учетом (6.10) оценку

$$\omega_p(f,\ t)\leqslant c_1t^{\alpha}\,\omega_p(\varphi,\ t)+c_2t\int\limits_t^{\infty}\frac{\omega_p(\varphi,\ \xi)}{\xi^{2-\alpha}}\,d\xi, \tag{6.42}$$

где c_1, c_2 не зависят от t. Несложными преобразованиями из (6.41) можно получить также оценку

$$\int\limits_0^A\frac{\omega_p(f,t)}{t^{1+\alpha}}\,dt\leqslant\frac{2}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^A\frac{\omega_p(\varphi,t)}{t}\,dt+\frac{3A^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_A^{\infty}\frac{\omega_p(\varphi,\ t)}{t^{1+\alpha}}\,dt. \tag{6.43}$$

§ 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим действие интегральных преобразований Фурье, Лапласа и Меллина на дробные интегралы и производные. Начальные сведения об этих преобразованиях приведены в § 1, п. 4°.

1°. **Преобразование Фурье.** Основное утверждение этого пункта составляет следующая формула преобразования Фурье дробного интеграла:

$$\mathcal{F}\,(I^{\alpha}_{\pm}\varphi)=\hat{\varphi}(x)/\,(\mp ix)^{\alpha},\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1. \tag{7.1}$$

Здесь функция $(\mp ix)^{\alpha}$ в соответствии с (5.26) понимается как

$$(\mp ix)^{\alpha}=e^{\alpha\ln|x|\mp\frac{\alpha\pi i}{2}\operatorname{sign}x}. \tag{7.2}$$

Если α вещественно, то используем также запись

$$(\mp ix)^{\alpha}=|x|^{\alpha}\,e^{\mp\frac{\alpha\pi i}{2}\operatorname{sign}x}. \tag{7.3}$$

Случаю дробного дифференцирования отвечает аналогичная формула:

$$\mathcal{F}\,(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}\varphi)=(\mp ix)^{\alpha}\,\hat{\varphi}(x),\quad \operatorname{Re}\alpha\geqslant 0. \tag{7.4}$$

Формулы (7.1), (7.4) примыкают в очевидном плане к формуле (1.105), обобщая ее на нецелые порядки.

Обоснованию формулы (7.1) предпошлем следующее вспомогательное равенство:

$$\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}\,e^{-zt}dt=\Gamma(\alpha)/z^{\alpha},\quad z\neq 0, \tag{7.5}$$

где $\operatorname{Re}\alpha>0$ при $\operatorname{Re}z>0$ или $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ при $\operatorname{Re}z=0$ и выбрана главная ветвь аналитической в правой полуплоскости функции z^{α} (так что z^{α} положительна при $z=x>0$ и вещественном α). Докажем это равенство. Оно очевидно при $z=x>0$ в силу (1.54). Остается оно справедливым и при $\operatorname{Re}z>0$, поскольку левая и правая части аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$. Остается рассмотреть граничный случай $\operatorname{Re}z=0$, $z\neq 0$, т. е.

$$\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}\,e^{-ixt}dt=\Gamma(\alpha)(ix)^{-\alpha},\quad 0<\operatorname{Re}\alpha<1,\quad x\neq 0 \tag{7.6}$$

(условие $\mathrm{Re}\,\alpha<1$ обеспечивает условную сходимость на бесконечности интеграла слева). Для доказательства (7.6) совершим замену $itx=z$:

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-ixt} dt = (ix)^{-\alpha} \int_{\mathscr{L}} z^{\alpha-1} e^{-z} dz, \tag{7.7}$$

где $\mathscr{L}$ — мнимая полуось $(0, i\infty)$ при $x>0$ или полуось $(-i\infty, 0)$ при $x<0$. Так как в правой полуплоскости $|e^{-z}|$ экспоненциально убывает при $|z|\to\infty$, то в силу интегральной теоремы Коши

$$\int_{\mathscr{L}} z^{\alpha-1} e^{-z} dz = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha),$$ откуда и следует (7.6).

Обоснование формулы (7.1) дается следующей теоремой.

Теорема 7.1. *Формула (7.1) справедлива для* $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ *и* $\varphi(x)\in L_1(R^1)$.

Доказательство. В силу (1.103) имеем

$$\mathscr{F}(I_+^\alpha\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}-1}{it} dt \int_{-\infty}^{t} \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,ds \int_s^\infty \frac{e^{ixt}-1}{it(t-s)^{1-\alpha}} dt.$$

Здесь перестановка порядка интегрирования возможна при $x\neq 0$ в силу теоремы Фубини 1.1. Далее, после дифференцирования получаем

$$\mathscr{F}(I_+^\alpha\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\,ds \int_s^\infty \frac{e^{ixt}dt}{(t-s)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, e^{ixs} ds \int_0^\infty \frac{e^{ix\tau}d\tau}{\tau^{1-\alpha}} = \frac{\hat{\varphi}(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{ixt}dt}{t^{1-\alpha}}.$$

Отсюда с учетом (7.6) приходим к (7.1).

Замечание 7.1. Формула (7.1) не распространяется на значения $\mathrm{Re}\,\alpha\geqslant 1$ в непосредственном виде, так как даже на самых гладких функциях, например $\varphi\in C_0^\infty$, левая часть в (7.1) может не существовать при $\mathrm{Re}\,\alpha\geqslant 1$. Действительно, при $\alpha=1$ имеем $(I_+^1\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$, так что $(I_+^1\varphi)(x)\to\mathrm{const}$ при $x\to+\infty$ и поэтому преобразование Фурье $\mathscr{F}I_+^1\varphi$ не существует (в обычном смысле). Если же $\alpha>1$, то возьмем функцию $\varphi\in C_0^\infty$, неотрицательную и отличную от нуля на каком-нибудь отрезке $[a, b]$. Тогда при $x>b$

$$(I_+^\alpha\varphi)(x) \geqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt \geqslant \min_{a\leqslant t\leqslant b}\varphi(t)\, \frac{(x-b)^\alpha-(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{7.8}$$

так что $(I_+^\alpha\varphi)(x) \sim Cx^{\alpha-1}$ при $x\to+\infty$ и преобразование Фурье $\mathscr{F}I_+^\alpha\varphi$ в данном случае также не существует в обычном смысле. Позже, в § 8, п. 2° формула (7.1) будет распространена на все значения α, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, в случае специально построенного класса функций $\varphi(x)$.

Что же касается формулы (7.4), то она справедлива при $\operatorname{Re}\alpha>0$ для всех достаточно гладких функций, например дифференцируемых до порядка $n=[\operatorname{Re}\alpha]+1$ и достаточно быстро убывающих вместе с производными на бесконечности. В этом можно убедиться, записывая $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}f$ в виде $\mathcal{D}_{+}^{\alpha}f=I_{+}^{n-\alpha}f^{(n)}$ и применяя после этого формулы (7.1) и (1.105).

Проиллюстрируем применимость формулы (7.1) к вычислению некоторых интегралов. Именно дадим с ее помощью обоснование равенства (5.24). Пусть там вначале $\operatorname{Re}\mu>1$. Тогда $(1\pm ix)^{-\mu}\in L_1(R^1)$, и потому (см. теорему 7.1) $\mathcal{F}I_{+}^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(1\pm ix)^{\mu}}\right]=\frac{\Gamma(\mu)}{(-ix)^{\alpha}}\mathcal{F}\left[\frac{1}{(1\pm ix)^{\mu}}\right]$ в силу формулы (7.1). Из равенства же (7.5) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}t_{\pm}^{\mu-1}e^{\mp t}e^{ixt}dt=\frac{\Gamma(\mu)}{(1\mp ix)^{\mu}},\quad \operatorname{Re}\mu>0. \tag{7.9}$$

Это в силу формулы обращения преобразования Фурье (1.104) означает

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{(1\pm ix)^{\mu}}\right]=\frac{2\pi}{\Gamma(\mu)}x_{\pm}^{\mu-1}e^{\mp x}, \tag{7.10}$$

что влечет $\mathcal{F}I_{+}^{\alpha}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{(1\pm ix)^{\mu}}\right]=2\pi\frac{x_{\pm}^{\mu-1}}{(-ix)^{\alpha}}e^{\mp x}$. Применяя к последнему равенству обратное преобразование Фурье, учитывая формулу (7.9) (с заменой μ на $\mu-\alpha$ и x на $-x$), окончательно придем к равенству (5.24). Приведенные соображения обоснованы при $\operatorname{Re}(\mu-\alpha)>1$, но формула (5.24) остается в силе и при $\operatorname{Re}(\mu-\alpha)>0$ из соображений аналитичности по μ.

В заключение этого пункта в предположении, что $0<\alpha<1$, приведем формулы косинус- и синус-преобразований Фурье (1.108), (1.109) дробных интегралов $I_{0+}^{\alpha}\varphi$ и $I_{-}^{\alpha}\varphi$ на полуоси:

$$\mathcal{F}_c(I_{0+}^{\alpha}\varphi)=x^{-\alpha}\left(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_c\varphi-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_s\varphi\right),\quad x>0, \tag{7.11}$$

$$\mathcal{F}_s(I_{0+}^{\alpha}\varphi)=x^{-\alpha}\left(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_c\varphi+\cos\frac{\alpha\pi}{2}\mathcal{F}_s\varphi\right),\quad x>0 \tag{7.12}$$

(в случае интеграла $I_{-}^{\alpha}\varphi$ в правых частях этих равенств знаки перед $\sin\alpha\pi/2$ следует поменять на противоположные). Эти соотношения легко получаются из (7.1) отделением действительной и мнимой частей.

2°. Преобразование Лапласа. Как следует из (1.122), интеграл дробного порядка $(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, является сверткой Лапласа вида

$$(I_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)=\left[\varphi(x)*\frac{x_{+}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right],\quad \operatorname{Re}\alpha>0. \tag{7.13}$$

Поэтому, воспользовавшись теоремой о свертке (1.123), для преобразования Лапласа дробного интеграла $I_{0+}^{\alpha}\varphi$ нетрудно получить формулу

$$(LI_{0+}^{\alpha}\varphi)(p)=p^{-\alpha}(L\varphi)(p), \tag{7.14}$$

которая в случае достаточно хороших функций φ останется справедливой и при $\operatorname{Re}\alpha<0$. Здесь мы не рассматриваем оператор $I_{-}^{\alpha}\varphi$, так как композиция $LI_{-}^{\alpha}\varphi$ приводит к сложному оператору, содержащему функцию Куммера ${}_1F_1(a;c;z)$ в ядре (см. § 36).

Для установления условий справедливости равенства (7.14) нам понадобится

Лемма 7.1. *Пусть $\varphi(x)\in L_1(a, b)$ при любом $b>a$, имеет место оценка*

$$|\varphi(x)| \leqslant Ae^{p_0 x} \text{ при } x>b, \quad A,\ p_0 - \mathrm{const},\ p_0\geqslant 0, \tag{7.15}$$

и $\mathrm{Re}\,\alpha>0$. *Тогда при* $x>b+1$ *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} &|(I^\alpha_{a+}\varphi)(x)| \leqslant Be^{p_0 x} \text{ при } p_0>0,\\ &|(I^\alpha_{a+}\varphi)(x)| \leqslant Bx^{\max(0,\,\mathrm{Re}\,\alpha-1)} \text{ при } p_0=0,\quad B-\mathrm{const}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Доказательство. Пусть $x>b+1$. Для простоты предположим, что α действительное. Тогда имеем

$$|(I^\alpha_{a+}\varphi)(x)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (x-t)^{\alpha-1}|\varphi(t)|\,dt + \frac{A}{\Gamma(\alpha)}\int_b^x \frac{e^{p_0 t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 x^{\max(0,\alpha-1)} + \frac{Ae^{p_0 x}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{x-b}\frac{e^{-p_0\tau}}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau \leqslant C_1x^{\max(0,\alpha-1)} + C_2e^{p_0 x},$$

что и требовалось установить.

Теорема 7.2. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\alpha>0$. *Тогда равенство (7.14) выполняется при* $\mathrm{Re}\,p>p_0$ *для функций* $\varphi(x)$, *удовлетворяющих условиям леммы 7.1 при* $a=0$.

Доказательство. Применимость преобразования Лапласа при $\mathrm{Re}\,p>p_0$ следует из леммы 7.1 и того факта, что если $\varphi\in L_1(0, b)$, то и $I^\alpha_{0+}\varphi\in L_1(0, b)$ (см. § 2, 3). Сама формула (7.14) проверяется непосредственным вычислением с изменением порядка интегрирования по теореме Фубини и использованием равенства (7.5).

Теорема 7.3. *Пусть* $-n<\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant 1-n$, $n=1, 2, \ldots$ *Если при любом* $b>0$ $\varphi(x)\in AC^n([0, b])$, $\varphi^{(j)}(0)=0$, $j=0, 1, 2, \ldots, n-1$, *и справедлива оценка (7.15), то при* $\mathrm{Re}\,p>p_0$ *имеет место равенство (7.14).*

Доказательство. Так как $(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)=(d/dx)^n(I^{\alpha+n}_{0+}\varphi)(x)$, $\mathrm{Re}\,\alpha+n>0$, согласно (2.32), то применим вначале формулу (1.124), приняв во внимание, что из условий $\varphi^{(j)}(0)=0$, $j=0, 1, 2, \ldots, n-1$, следуют равенства $(d/dx)^j(I^{\alpha+n}_{0+}\varphi)(x)=0$ при $x=0$ и $j=0, 1, 2, \ldots, n-1$, а затем теорему 7.2, но по отношению к интегралу $I^{\alpha+n}_{0+}\varphi$. Теорема доказана.

Отметим, что формула (7.14) используется при решении различных интегральных и дифференциальных уравнений в главах 7, 8.

Замечание 7.2. Из формулы (7.14) с помощью (1.120) получается следующее представление оператора I^α_{0+} через операторы Лапласа L, L^{-1}:

$$(I^\alpha_{0+}\varphi)(x) = L^{-1}x^{-\alpha}L\varphi(x). \tag{7.17}$$

Имеет место и другая аналогичная (7.17) формула

$$(I^\alpha_{-}\varphi)(x) = Lx^{-\alpha}L^{-1}\varphi(x), \tag{7.18}$$

которая после замены $\varphi=L\psi$ вытекает из соотношения

$$(I^\alpha_{-}L\psi)(x) = Lx^{-\alpha}\psi(x), \tag{7.19}$$

проверяемого при $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ непосредственным вычислением на достаточно хороших функциях $\psi(x)$.

3°. **Преобразование Меллина.** Как следует из формул (1.105), (7.1), (7.4), (7.14), интегродифференцирование произвольного порядка α в образах Фурье и Лапласа сводится к умножению на степенную функцию

$(\mp ix)^{-\alpha}$ и $p^{-\alpha}$ соответственно. Формулы (1.117) показывают, что при действии преобразованием Меллина на производную целого порядка n образ умножается на произведение $(1-s)_n=\Gamma(1+n-s)/\Gamma(1-s)$. Последнее обстоятельство по отношению к дробным интегралам и производным приводит к равенствам

$$(I_{0+}^{\alpha}f(x))^*(s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}f^*(s+\alpha),\quad \operatorname{Re}(s+\alpha)<1, \tag{7.20}$$

$$(I_{-}^{\alpha}f(x))^*(s)=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}f^*(s+\alpha),\quad \operatorname{Re}s>0, \tag{7.21}$$

которые после замены $f(x)=x^{-\alpha}\varphi(x)$ в силу (1.117) принимают вид

$$(I_{0+}^{\alpha}x^{-\alpha}\varphi(x))^*(s)=\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}\varphi^*(s),\quad \operatorname{Re}(\alpha+s)<1, \tag{7.22}$$

$$(I_{-}^{\alpha}x^{-\alpha}\varphi(x))^*(s)=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}\varphi^*(s),\quad \operatorname{Re}s<1. \tag{7.23}$$

Условия справедливости этих формул содержатся в следующих теоремах.

Теорема 7.4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$ *и* $f(t)t^{s+\alpha-1}\in L_1(0,\infty)$. *Тогда формула (7.20) справедлива при* $\operatorname{Re}s<1-\operatorname{Re}\alpha$, *а формула (7.21) — при* $\operatorname{Re}s>0$.

Доказательство осуществляется так же, как и доказательство теоремы 7.2. Указанные на α, s условия обеспечивают существование внутренних интегралов.

Теорема 7.5. *Пусть* $-n<\operatorname{Re}\alpha\leqslant 1-n$, $n=1, 2, \dots$, $f(t)\in C^n([0,b])$, b — *любое, и* $f(t)t^{\alpha+s-1}\in L_1(0,\infty)$. *Тогда формула (7.20) справедлива при* $\operatorname{Re}s<1-\operatorname{Re}\alpha$ *и условиях*

$$x^{s-k}(I_{0+}^{\alpha+k}f)(x)=0 \text{ при } x=0,\quad x=\infty,\quad k=1, 2, \dots, n, \tag{7.24}$$

а формула (7.21) справедлива при $\operatorname{Re}s>0$ *и условиях*

$$x^{s-k}(I_{-}^{\alpha+k}f)(x)=0 \text{ при } x=0,\quad x=\infty,\quad k=1, 2, \dots, n. \tag{7.25}$$

Доказательство. В силу условия $f(t)\in C^n([0,b])$ дробная производная $(I_{0+}^{\alpha}f)(x)$ существует. Запишем ее в виде $(I_{0+}^{\alpha}f)(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(I_{0+}^{\alpha+n}f)(x)$ (см. (2.32)), применим затем преобразование Меллина и проинтегрируем n раз по частям:

$$(I_{0+}^{\alpha}f(x))^*(s)=\int_0^\infty x^{s-1}d\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(I_{0+}^{\alpha+n}f)(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(1-s)_k x^{s-k-1}I_{0+}^{\alpha+k+1}f(x)\big|_{x=0}^{\infty}+(1-s)_n\int_0^\infty x^{s-n-1}I_{0+}^{\alpha+n}f(x)\,dx.$$

По условию (7.24) внеинтегральные члены обращаются в нуль. Применив теперь теорему 7.4 с заменой α и s на $\alpha+n$ и $s-n$ соответственно, получим равенство

$$(I_{0+}^{\alpha}f(x))^*(s)=(1-s)_n\frac{\Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1-s+n)}f^*(s+\alpha).$$

Отсюда следует (7.20). Аналогично рассматривается случай I_{-}^{α}. Теорема доказана.

Наряду с формулами (7.22), (7.23) ниже также используется следующая теорема, характеризующая действие дробных интегралов и производных на обратное преобразование Меллина.

Теорема 7.6. *Пусть* $f^*(s)\in L_2(1/2-i\infty,\ 1/2+i\infty)$, $\eta\leqslant\min(0, \operatorname{Re}(a-b))$. *Тогда имеют место соотношения*

$$x^b\, I_{0+}^{a-b}\, x^{-a}\int\limits_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta f^*(s)\, x^{-s} ds = \int\limits_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta \frac{\Gamma(1-a-s)}{\Gamma(1-b-s)} f^*(s)\, x^{-s} ds, \tag{7.26}$$

$$\operatorname{Re} a<1/2,\ \operatorname{Re} b<1/2;$$

$$x^b\, I_{-}^{a-b}\, x^{-a}\int\limits_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta f^*(s)\, x^{-s} ds = \int\limits_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} s^\eta \frac{\Gamma(b+s)}{\Gamma(a+s)} f^*(s)\, x^{-s} ds, \tag{7.27}$$

$$\operatorname{Re} a>-1/2,\quad \operatorname{Re} b>-1/2.$$

Доказательство следует из существования интегралов (7.26), (7.27) при указанных условиях на параметры и функцию, их абсолютной сходимости почти всюду и, как следствие, перестановочности интегралов в левых частях равенств (7.26), (7.27), после чего вычисление внутреннего интеграла проводится с учетом формулы (1.68).

Отметим еще, что в § 10, 18, 36 содержатся различные формулы композиций, отражающие действие других интегральных преобразований на операторы I_{0+}^α, I_-^α, их обобщения и видоизменения (см. также § 9, 23, 39).

Замечание 7.3. Дробные интегралы $\Gamma(\alpha)\,(I_\pm^\alpha f)(x)=\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} f(x\mp t)\, dt$, $\operatorname{Re}\alpha>0$, при фиксированном x являются преобразованием Меллина функций $\varphi_\pm(t)=f(x\mp t)$. Обращая преобразование Меллина по формуле (1.113), получаем следующее представление функции $f(x)$ через ее дробные интегралы:

$$f(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty}\Gamma(\alpha)\,(I_\pm^\alpha f)(x)\,|x-\tau|^{-\alpha} d\alpha,\quad \alpha_1=\operatorname{Re}\alpha>0, \tag{7.28}$$

где в правой части выбирается знак $+$, если $x>\tau$, и знак $-$, если $x<\tau$. Так как результат в правой части не должен зависеть от x, то, в частности, при $x=0$

$$f(\pm\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty}\Gamma(\alpha)(I_\pm^\alpha f)(0)\,\tau^{-\alpha} d\alpha,\quad \tau>0. \tag{7.29}$$

Таким образом, $f(x)$ можно восстановить по значениям дробных интегралов $(I_\pm^\alpha f)(0)$ только в одной точке, если последние известны для всех α на какой-нибудь прямой $\operatorname{Re}\alpha=\alpha_1>0$.

§ 8. ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Будем предполагать, что читатель имеет самое минимальное представление об обобщенных функциях. Обобщенная функция понимается как непрерывный функционал над некоторым классом основных функций. Хорошо известно, что в зависимости от рассматриваемых задач используются самые разнообразные классы основных функций, учитывающие специфику задачи. Это будет явно просматриваться и в построениях настоящего параграфа.

1°. **Предварительные указания.** Будем рассматривать обобщенные функции на Ω, где Ω — ось или полуось (только в п. 5° этого параграфа будут краткие указания на случай, когда Ω — отрезок оси). Основные функции на Ω берутся бесконечно дифференцируемыми внутри Ω с предписанным поведением на концах Ω. Значение обобщенной функции f как функционала над основной функцией φ будет обозначаться в виде (f, φ). Обобщенная функция называется *регулярной*, если существует такая локально суммируемая функция $f(x)$, что $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ существует для всех основных функций $\varphi(x)$ и

$$(f, \varphi)=\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{8.1}$$

(предполагается, что в качестве (f, φ) выбрана билинейная форма, совпадающая с (8.1) в случае регулярной обобщенной функции).

Класс $X=X(\Omega)$ основных функций предполагается наделенным топологией (сходимостью). Через $X'=X'(\Omega)$ обозначаем топологически сопряженное к X пространство обобщенных функций.

Напомним понятие обобщенной функции, сосредоточенной в точке. Говорят, что обобщенная функция $f\in X'$ равна нулю на открытом множестве G, если $(f, \varphi)=0$ для любой основной функции, тождественно равной нулю вне G. Объединение O_f всех открытых множеств, на которых $f=0$, называется *нулевым множеством функции* f. Дополнение нулевого множества до Ω называется *носителем обобщенной функции* и обозначается $\operatorname{supp} f=\Omega\backslash O_f$. Если $\operatorname{supp} f$ есть точка x_0, то говорят, что обобщенная функция сосредоточена в точке x_0.

Известная δ-функция Дирака $\delta(x-x_0)$, $x_0\in\Omega$, и ее производные, действующие по правилу

$$(\delta^{(k)}(x-x_0),\ \varphi)=(-1)^k\varphi^{(k)}(x_0),$$

представляют собой примеры обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Справедливо и обратное утверждение: всякий функционал f, сосредоточенный в точке x_0, имеет вид $f=\sum\limits_{k=0}^{N} c_k\delta^{(k)}(x-x_0)$, см. доказательство в книгах В. С. Владимирова [2, с. 52], И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [1, с. 149].

Существует два основных способа определения дробных интегралов и производных от обобщенных функций. Первый восходит к Л. Шварцу (L. Schwartz [1]) и основывается на определении дробного интеграла как свертки:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,x_\pm^{\alpha-1}*f \tag{8.2}$$

функции $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x_\pm^{\alpha-1}$ с обобщенной функцией f (подробнее см. об этом в п. 3°). Этот способ приспособлен к полуоси. Второй, более употребительный способ основан на переходе к сопряженному оператору. Именно, исходя из формул дробного интегрирования по частям (2.20) и (5.16), полагают

$$(I_{a+}^\alpha f,\ \varphi)=(f,\ I_{b-}^\alpha\varphi) \tag{8.3}$$

и аналогично для I_{b-}^α, $I_\pm^\alpha$ и дробных производных. Подход (8.3) будет корректен, если I_{b-}^α непрерывно действует из основного пространства X в X. Часто поступают более общо: f и $I_{a+}^\alpha f$ рассматривают как обобщенные функции над разными классами X и Y основных функций, так что $f\in X'$, $I_{a+}^\alpha f\in Y'$ и тогда I_{b-}^α должен непрерывно действовать из Y в X.

Подход (8.2) мы осветим лишь вкратце в п. 3°. Основное же внимание будет уделено подходу (8.3). В п. 2° он рассматривается на оси, в п. 4° — на полуоси.

2°. Случай оси. Класс основных функций Лизоркина. Широко известный класс S шварцевых основных функций (бесконечно дифференцируемых, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени), а также класс $C_0^\infty \subset S$ финитных бесконечно дифференцируемых функций плохо приспособлены для дробных интегралов и производных. Очевидно, функции $I_\pm^\alpha\varphi$, $\mathscr{D}_\pm^\alpha\varphi$, где $\varphi \in S$, являются бесконечно дифференцируемыми, но недостаточно «хорошо» ведут себя, вообще говоря, на бесконечности, см. по этому поводу замечание 7.1 и оценку (7.8), где уже отмечалось, что дробный интеграл $I_+^\alpha\varphi$ даже функции $\varphi \in C_0^\infty$ может «плохо» вести себя при $x \to +\infty$. Учитывая это, можно в качестве основных функций взять бесконечно дифференцируемые, «хорошие» при $x \to -\infty$ и «плохие» при $x \to +\infty$: например, ввести класс $\mathfrak{S}_+$ бесконечно дифференцируемых функций, ведущих себя при $x \to -\infty$ как функции из S, а при $x \to +\infty$ имеющих медленный рост (последнее означает, что для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ существует m такое, что $\sup (1 + |x|)^{-m} |\varphi^{(k)}(x)| < \infty$). Класс $\mathfrak{S}_+$ и аналогичный ему класс $\mathfrak{S}_-$ с «плохим» поведением функций при $x \to -\infty$ инвариантны относительно дробного интегрирования I_+^α и I_-^α соответственно. Действительно, для $\varphi \in S_+$ и любого p при $x \to -\infty$ имеем

$$\left| (1 + |x|)^m \frac{d^k}{dx^k} I_+^\alpha \varphi \right| \leqslant \frac{(1 + |x|)^m}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{|\varphi^{(k)}(x-t)|}{t^{1-\alpha}} dt \leqslant$$

$$\leqslant c (1 + |x|)^m \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1} dt}{(1 + |x| + t)^p}.$$

Считая p достаточно большим ($p > \alpha + 1$), получаем

$$\left| (1 + |x|)^m \frac{d^k}{dx^k} I_+^\alpha \varphi \right| \leqslant c (1 + |x|)^{m+\alpha+1-p} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} (1 + t)^{-\alpha-1} dt \leqslant \mathrm{const} \tag{8.4}$$

при выборе еще $p > m + \alpha + 1$. Легко показывается, что I_+^α сохраняет медленный рост при $x \to +\infty$.

Нетрудно ввести топологию в $\mathfrak{S}_\pm$ с помощью счетного набора норм, улавливающих «степенное» убывание на одной бесконечности и «степенной» рост на другой.

Очевидно, что классы $\mathfrak{S}_\pm$ примыкают к пространствам $L_{p,\omega}$ (см. (5.52)) суммируемых функций, также инвариантным относительно дробного интегрирования.

Неудобством классов $\mathfrak{S}_\pm$ служит то, что дробное интегрирование I_+^α и I_-^α приходится рассматривать над разными классами $\mathfrak{S}_+$ и $\mathfrak{S}_-$ основных функций. Более существенным их недостатком является то, что обобщенные функции над $\mathfrak{S}_\pm$ обязаны быстро убывать при $x \to \pm\infty$, так что, например, степенные функции не принадлежат классам $\mathfrak{S}'_\pm$.

Построим подпространство $\Phi \subset S$, инвариантное относительно дробного интегрирования и дифференцирования, следуя П. И. Лизоркину. Идея введения такого пространства прозрачна в образах Фурье. Действительно, в силу формулы (7.1) действие дробного интегрирования сводится к делению на $(\mp ix)^\alpha$:

$$\mathcal{F}(I^\alpha_\pm\varphi)(x) = (\mp ix)^{-\alpha}\,\hat{\varphi}(x). \tag{8.5}$$

Требуемая инвариантность будет достигнута, если функция $\hat{\varphi}(x)$ не «ухудшается» от деления на $(\mp ix)^\alpha$. Введем поэтому класс Ψ, состоящий из функций $\psi(x)\in S$, обращающихся в точке $x=0$ в нуль вместе со всеми своими производными:

$$\Psi = \{\psi:\psi\in S,\quad \psi^{(k)}(0)=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Примером функции $\psi\in\Psi$ служит $\psi(x)=e^{-x^2-x^{-2}}$.

Определение 8.1. *Классом Лизоркина назовем класс прообразов Фурье функций из* Ψ:

$$\Phi = \{\varphi:\varphi\in S,\quad \hat{\varphi}\in\Psi\}.$$

Так как $0 = \hat{\varphi}^{(k)}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i0\cdot t}\varphi(t)\,t^k dt$, класс Φ можно охарактеризовать как класс тех шварцевых функций $\varphi(x)\in S$, которые ортогональны всем многочленам:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k\varphi(t)\,dt = 0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{8.6}$$

Напомним, что формула (8.5) была выведена при $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ (см. замечание 7.1). Покажем, что на функциях $\varphi(x)\in\Phi$ она верна при любых α.

Лемма 8.1. *Формула (8.5) на функциях $\varphi\in\Phi$ справедлива при* $\mathrm{Re}\,\alpha\geqslant 0$.

Доказательство. Пусть вначале $1\leqslant\mathrm{Re}\,\alpha<2$ (случай $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$ содержится в теореме 7.1). Тогда

$$\mathcal{F}I^\alpha_+\varphi = \Gamma^{-1}(\alpha)\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{N} e^{ixt}dt\int\limits_{-\infty}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)\,ds =$$

$$= \Gamma^{-1}(\alpha)\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{N}\varphi(s)\,e^{ixs}ds\int\limits_{0}^{N-s}\xi^{\alpha-1}\,e^{ix\xi}d\xi. \tag{8.7}$$

Если $\mathrm{Re}\,\alpha\neq 1$, то интегрирование по частям приводит к формуле

$$\mathcal{F}I^\alpha_+\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,ix}\lim_{N\to\infty}\left[N^{\alpha-1}e^{ixN}\int\limits_{-\infty}^{N}\left(1-\frac{s}{N}\right)^{\alpha-1}\varphi(s)\,ds - \right.$$

$$\left. -(\alpha-1)\int\limits_{-\infty}^{N}\varphi(s)\,e^{ixs}ds\int\limits_{0}^{N-s}\xi^{\alpha-2}\,e^{ix\xi}d\xi\right].$$

Здесь первое слагаемое стремится к нулю в силу (8.6) (раскрыть неопределенность по правилу Лопиталя), а во втором при $\mathrm{Re}\,\alpha<2$ возможен непосредственный предельный переход. Учитывая значение интеграла (7.6), получаем $\mathcal{F}I^\alpha_+\varphi = \dfrac{\alpha-1}{(-ix)^\alpha}\Gamma(\alpha-1)\,\hat{\varphi}(x)$, что и требовалось.

Случай $\alpha=1$ прост:

$$\mathcal{F}I^1_+\varphi = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{N}\varphi(s)\,\frac{e^{ixN}-e^{isx}}{ix}\,ds = -\frac{1}{ix}\hat{\varphi}(x)$$

в силу (8.6). Рассмотрим теперь особый случай $\operatorname{Re}\alpha = 1$, $\alpha \neq 1$, так что $\alpha = 1 + i\theta$, $\theta \neq 0$. Легко видеть, что

$$\int\limits_{N-1}^{N} \varphi(s) e^{ixs} ds \int\limits_{0}^{N-s} \xi^{i\theta} e^{ix\xi} d\xi \to 0 \quad \text{при } N \to \infty$$

для $\varphi(x) \in \Phi$. Поэтому из (8.7)

$$\mathcal{F} I_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{ix\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{N-1} \varphi(s) e^{ixs} ds \times$$

$$\times \left[\int\limits_{0}^{1} \xi^{i\theta} d(e^{ix\xi} - 1) + \int\limits_{1}^{N-s} \xi^{i\theta} de^{ix\xi} \right].$$

Осуществляя здесь интегрирование по частям, после простых преобразований имеем

$$\mathcal{F} I_{+}^{\alpha}\varphi = -\frac{1}{ix\Gamma(\alpha)} \lim_{N\to\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{N-1} \varphi(s) e^{ixs} ds - N^{i\theta} e^{ixN} \int\limits_{-\infty}^{N-1} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^{i\theta} \varphi(s) ds + \right.$$

$$\left. + i\theta \int\limits_{-\infty}^{N-1} e^{ixs} \varphi(s) ds \int\limits_{0}^{N-s} \frac{e^{ix\xi} - \chi(\xi)}{\xi^{1-i\theta}} d\xi \right\},$$

где обозначено $\chi(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi < 1 \\ 0, & \xi > 1 \end{cases}$. Здесь первое слагаемое стремится к $\hat{\varphi}(x)$, второе— к нулю за счет свойства (8.6), а в третьем возможен предельный переход под знаком интеграла. Поэтому

$$\mathcal{F} I_{+}^{\alpha}\varphi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\hat{\varphi}(x)}{ix} + \frac{\theta}{x} A(x) \hat{\varphi}(x) \right], \tag{8.8}$$

где обозначено

$$A(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{ix\xi} - \chi(\xi)}{\xi^{1-i\theta}} d\xi.$$

Из формулы (7.6) предельным переходом нетрудно получить $A(x) = \Gamma(i\theta)(-ix)^{-i\theta} - (i\theta)^{-1}$, что превращает (8.8) в равенство $\mathcal{F} I_{+}^{\alpha}\varphi = (-ix)^{-1-i\theta}\hat{\varphi}(x)$, что и требовалось.

Пусть, наконец, $\operatorname{Re}\alpha > 2$. Этот случай сводится последовательно к рассмотренным в силу полугруппового свойства $I_{+}^{\alpha}\varphi = I_{+}^{1} I_{+}^{\alpha-1}\varphi$, $\varphi \in \Phi$. Аналогично случай $\operatorname{Re}\alpha = 0$ следует из случая $\operatorname{Re}\alpha = 1$ в силу полугруппового свойства $I_{+}^{i\theta}\varphi = \frac{d}{dx} I_{+}^{1+i\theta}\varphi$, $\varphi \in \Phi$, и свойства (7.4). Лемма доказана.

Дадим применение леммы 8.1 к дробному интегродифференцированию чисто мнимого порядка.

Лемма 8.2. *Операторы $I_{\pm}^{i\theta}$, $\theta \in R^1$, допускают продолжение с класса Φ до ограниченного оператора в $L_p(R^1)$,* $1 < p < \infty$.

Доказательство. В силу леммы 8.1 действие дробного интегрирования $I_{+}^{i\theta}$ сводится в образах Фурье к умножению на ограниченную функцию

$$(-ix)^{-i\theta} = e^{(\pi/2)\theta \operatorname{sign} x} [\cos(\theta \ln|x|) - i \sin(\theta \ln|x|)]$$

(по крайней мере на множестве Φ, плотном в $L_p(R^1)$, см. об этом в § 9, п. 2°, 8.1). Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет условиям (1.41′). Но тогда оператор $I_{+}^{i\theta}$ ограничен в $L_p(R^1)$. Лемма доказана. Из нее легко вывести, что и в случае конечного отрезка оператор $I_{a+}^{i\theta}$ ограничен в $L_p(a, b)$, $1<p<\infty$.

Непосредственно из определения вытекает (с учетом леммы 8.1), что класс Φ инвариантен относительно дробного интегрирования и дифференцирования любого порядка.

Класс Φ можно рассматривать как линейное топологическое пространство с топологией пространства S. Напомним, что топология в S порождается счетным семейством норм $\sup_x (1+x^2)^{m/2}|\varphi^{(k)}(x)|$. Пространство Φ замкнуто в S. Действительно, известно (см. книгу И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [1, с. 155]), что сходимость, определяемая как сходимость в двойственном (в смысле преобразования Фурье) пространстве $\mathcal{F}(S)=S$, совпадает с исходной сходимостью в S. Поэтому достаточно показать замкнутость Ψ в S. Последнее очевидно.

В пространстве Ψ можно ввести топологию, улавливающую поведение функций $\psi(x)$ не только на бесконечности, но и при $x\to 0$ с помощью счетного семейства норм $\sup_x [(1+x^2)^{m/2}|x|^{-p}|\psi^{(k)}(x)|]$. Эта топология совпадает на функциях $\psi\in\Psi$ с топологией S. В этом можно убедиться, рассмотрев отдельно случаи $|x|<1$, $|x|>1$ и применив в первом случае формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Замечание 8.1. Класс Φ не содержит вещественных функций, отличных всюду от нуля. Это следует из (8.6) при $k=0$.

Пространство линейных непрерывных функционалов над Φ обозначаем, как обычно, через Φ'. Сравним Φ' с S'. Начнем со сравнения Ψ' с S'. Так как Ψ замкнуто в S, то Ψ' можно отождествить с фактор-пространством шварцева класса S' по классу Ψ_0' функционалов из S', аннулирующихся на Ψ:

$$\Psi' = S'/\Psi_0', \tag{8.9}$$

где $\Psi_0'=\{f : f\in S',\ (f,\psi)=0,\ \psi\in\Psi\}$ (пользуемся общим фактом: если M — замкнутое подпространство в линейном топологическом пространстве E, то $M'=E'/M^{\perp}$, где $M^{\perp}$ — совокупность всех функционалов из E', ортогональных к M). Из определения класса Ψ вытекает, что Ψ_0' состоит из функционалов, сосредоточенных в точке $x=0$. Тогда (см. п. 1°) Ψ_0' состоит из линейных комбинаций дельта-функции и ее производных. Хорошо известно, что прообраз Фурье функции $\delta^{(k)}(x)$ есть степень: $\mathcal{F}\{(-it)^k;\ x\}=2\pi\delta^{(k)}(x)$. Подчеркнем, что преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций:

$$(\hat{f},\ \varphi) = (f,\ \hat{\varphi}), \tag{8.10}$$

где $\varphi\in S$ или $\varphi\in\Phi$. Следовательно, в аналогичном (8.9) представлении для Φ':

$$\Phi' = S'/\Phi_0' \tag{8.11}$$

пространство

$$\Phi_0' = \{f : f\in S',\ (f,\ \varphi) = 0,\ \varphi\in\Phi\} \tag{8.12}$$

состоит из многочленов. Поэтому Φ' можно рассматривать как фактор-пространство S'/P по классу P всех многочленов. Другими словами, Φ' получается из S' «отсеиванием» многочленов (т. е. функционалы из S' неразличимы как элементы пространства Φ', если они отличаются друг от друга на многочлен).

Дробное интегрирование $I_{\pm}^{\alpha}$ обобщенной функции $f\in\Phi'$ определим, следуя подходу (8.3), равенством

$$(I_{\pm}^{\alpha}f,\ \varphi) = (f,\ I_{\mp}^{\alpha}\varphi),\quad \varphi\in\Phi. \tag{8.13}$$

Случаю $\operatorname{Re}\alpha<0$ отвечает дробное дифференцирование. Определение (8.13) корректно при любых α, так как в соответствии с (8.10)

$$(f,\ I_{\mp}^{\alpha}\varphi) = (\tilde{f},\ \widehat{I_{\mp}^{\alpha}\varphi}) = (\tilde{f},\ (\pm ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x)). \tag{8.14}$$

Так как здесь $\hat{\varphi}(x) \in \Psi$ и умножение на $(\pm ix)^{-\alpha}$ — непрерывная операция в Ψ, то $(f, I_{\mp}^{\alpha}\varphi)$ — непрерывный функционал над Φ.

Замечание 8.2. Равенство (8.13) может служить определением дробного интеграла для функции $f(x) \in L_p(R^1)$ при $p \geqslant 1/\alpha$, когда в обычном смысле интегралы $I_{\pm}^{\alpha} f$ не существуют, расходясь на бесконечности. В этом случае $I_{\pm}^{\alpha} f$ — уже обобщенная функция. Однако эта обобщенная функция такова, что ее разность

$$\Delta_h f = f(x+h) - f(x),$$

определяемая стандартным путем: $(\Delta_h f, \varphi) = (f, \Delta_{-h}\varphi)$, является при всех $h \in R^1$ обычной функцией и $\Delta_h f \in L_p(R^1)$, если $\alpha < 1$. Это утверждение получается с помощью представления (6.9). В случае $\alpha \geqslant 1$ аналогичное утверждение можно получить с помощью разностей более высокого порядка. (См. точную формулировку в аналогичной ситуации для многомерного случая в лемме 26.4.)

Рассмотрим примеры. Обратимся к формулам (5.24), (5.25). Функция $f(x) = (1 \pm ix)^{-\mu}$ при любом комплексном μ может рассматриваться как элемент из Φ', поскольку в силу формулы (7.10) $\mathcal{F}[(1 \pm ix)^{-\mu}] \in \Psi'$ (преобразование Фурье понимается в смысле обобщенных функций). Случаю $\mu = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, отвечает $f(x) \equiv 0$, что согласуется с тем, что Φ' не содержит многочленов. Пользуясь обычным правилом (8.10), получаем, что формулы

$$I_{+}^{\alpha}[(1 \pm ix)^{-\mu}] = \frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)} e^{\pm i\alpha\pi/2} (1 \pm ix)^{\alpha-\mu}, \tag{8.15}$$

$$I_{-}^{\alpha}[(x \pm i)^{-\mu}] = \frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)} (x \pm i)^{\alpha-\mu} \tag{8.16}$$

справедливы при всех комплексных μ, кроме $\mu = \alpha - m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ В случае же $\mu = \alpha - m$ получаются формулы

$$I_{+}^{\alpha}[(1 \pm ix)^{m-\alpha}] = \frac{(-1)^{m-1}}{m!\,\Gamma(\alpha-m)} (1 \pm ix)^m \ln(1 \pm ix), \tag{8.17}$$

$$I_{-}^{\alpha}[(x \pm i)^{m-\alpha}] = \frac{(-1)^{m-1}}{m!\,\Gamma(\alpha-m)} (x \pm i)^m \ln(x \pm i), \tag{8.18}$$

где $\ln(1 \pm ix) = \ln\sqrt{1+x^2} \pm i \operatorname{arctg} x$, $\ln(x \pm i) = \ln\sqrt{1+x^2} \pm i \operatorname{arcctg} x$. Докажем, например, формулу (8.17). Для $f(x) = (1+ix)^{-\mu}$ имеем, согласно (8.13), (8.14), (8.5):

$$(I_{+}^{\alpha} f, \varphi) = (\mathcal{F}^{-1}(1+ix)^{-\mu}, (ix)^{-\alpha}\hat{\varphi}(x)),$$

или, учитывая (7.9),

$$(I_{+}^{\alpha} f, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{-}^{\mu-1} e^x}{(ix)^{\alpha}} \hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Так как $\hat{\varphi}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $(I_{+}^{\alpha} f, \varphi)$ есть функционал, аналитический по μ во всей комплексной плоскости (с доопределением $(I_{+}^{\alpha} f, \varphi) = 0$ в точках $\mu = -m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$). В таком случае из (8.15) следует

$$(I_{+}^{\alpha}[(1+ix)^{m-\alpha}], \varphi) = \lim_{\mu \to \alpha - m} \frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{\infty} (1+ix)^{\alpha-\mu}\varphi(x)\,dx.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+i)^m\varphi(x)\,dx=0$ в силу (8.6), то, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получаем (8.17).

Далее, вычислим дробный интеграл от δ-функции и ее производных. Имеем

$$(I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)},\ \varphi)=(\delta^{(k)},\ I_{\mp}^{\alpha}\varphi)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}(I_{\mp}^{\alpha}\varphi)|_{x=0}=$$

$$=(-1)^k I_{\mp}^{\alpha}(\varphi^{(k)})|_{x=0}.$$

Таким образом, $I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)}$ есть функционал, действующий по формуле

$$(I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)},\ \varphi)=\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}\varphi^{(k)}(\pm t)\,dt$$

или

$$(I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)},\ \varphi)=\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha-k)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t_{\pm}^{\alpha-k-1}\varphi(t)\,dt \qquad (8.19)$$

в случае $\operatorname{Re}\alpha>k$. Равенство (8.19) означает, что

$$I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)}=\frac{(-1)^k}{\Gamma(\alpha-k)}t_{\pm}^{\alpha-k-1},\quad \operatorname{Re}\alpha>k. \qquad (8.20)$$

Нетрудно показать, что равенство (8.20) распространяется и на значения $\operatorname{Re}\alpha\leqslant k$. (Обобщенная функция $t_{\pm}^{\alpha-k-1}$ понимается тогда в смысле регуляризации (5.68).) Точки $\alpha=k-m$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, играют при этом особую роль, отвечая равенству $I_{\pm}^{\alpha}\delta^{(k)}=\delta^{(m)}$.

Рассмотрение класса Φ закончим следующим замечанием. Пространство Φ наряду с явными преимуществами (простота построения, прозрачность всех действий в образах Фурье) обладает и существенным недостатком: оно бедно мультипликаторами. Именно если $m(x)\varphi(x)\in\Phi$ для всех $\varphi(x)\in\Phi$, то $m(x)$ может быть только многочленом. В самом деле, в силу (8.6) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}m(x)\varphi(x)dx=0$ для всех $\varphi(x)\in\Phi$, а выше было показано, что класс (8.12), ортогональный к Φ, состоит из многочленов.

3°. Подход Л. Шварца. Будем рассматривать обобщенные функции над основным классом $K_1=C_0^{\infty}(R^1)$. Свертку двух обобщенных функций, следуя Л. Шварцу (L. Schwartz [1]), определим в терминах прямого произведения.

Прямым произведением обобщенной функции $f(x)$ переменной x и обобщенной функции $g(y)$ переменной y называется функционал $f\times g$, действующий на основных функциях $\varphi(x,\ y)\in K_2=C_0^{\infty}(R^2)$ по правилу

$$(f\times g,\ \varphi)=(f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,\ y))).$$

Так как в случае обычных функций $f(x)$ и $g(y)$

$$(f*g,\ \varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,g(y)\,\varphi(x+y)\,dxdy,$$

то для обобщенных функций $f(x)$ и $g(y)$ полагают

$$(f*g,\ \varphi)=(f(x)\times g(y),\ \varphi(x+y)), \qquad (8.21)$$

т. е. свертка $f*g$ определяется как значение функционала $f(x)\times g(y)$ двух переменных на функциях $\varphi(x,\ y)$ вида $\varphi(x+y)$. Однако функция

$\varphi(x+y)$, не будучи финитной в R^2, не является основной функцией двух переменных. Очевидно, определение (8.21) будет иметь смысл, например, для обобщенных функций $f(x)$, $g(y)$, сосредоточенных на полуоси. В самом деле, пусть носитель основной функции $\varphi(x)$ содержится в интервале $[-a, a]$. Так как $f(x)=0$, $x<0$, $f(y)=0$, $y<0$, то функционал (8.21) не изменится, если заменим функцию $\varphi(x+y)$ финитной функцией двух переменных $\psi(x, y)$, совпадающей с $\varphi(x+y)$ в треугольнике $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $x+y\leqslant a$.

В соответствии с указанным понятием свертки вводим дробныйинтеграл обобщенной функции $f\in K_1'$:

$$(I_{0+}^\alpha f, \varphi)=(I_+^\alpha f, \varphi)=\left(\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}*f, \varphi\right) \tag{8.22}$$

в случае, когда f сосредоточена на полуоси $x>0$. Для таких функций $I_+^\alpha f$ также сосредоточена на этой полуоси. Определение (8.22) применимо для всех α при обычном толковании обобщенной функции $x_+^{\alpha-1}$ при $\operatorname{Re}\alpha<0$ (см., например, (5.68)), кроме $\alpha=0, -1, -2, \ldots$, когда оно заменяется правилом непосредственного дифференцирования обобщенной функции.

Корректность подхода Л. Шварца резюмируем следующей теоремой, в которой через K_+' обозначен класс обобщенных функций $f\in K_1'$, сосредоточенных на полуоси R_+^1.

Теорема 8.1. *Если $f\in K_+'$, то и $I_{0+}^\alpha f\in K_+'$ для любого $\alpha\in\mathbf{C}$. Кроме того,*

$$I_{0+}^\alpha I_{0+}^\beta f=I_{0+}^{\alpha+\beta}f, \quad \alpha, \beta\in\mathbf{C},$$

и для любого $f\in K_+'$ существует единственная обобщенная функция $g\in K_+'$ такая, что $f=I_{0+}^\alpha g$, $\alpha\in\mathbf{C}$.

Доказательство получается непосредственно из определения операции $I_{0+}^\alpha f$ для $f\in K_+'$.

4°. Случай полуоси. Подход через сопряженный оператор. Наиболее простой путь построения классов основных функций, инвариантных относительно дробного интегрирования I_-^α, I_{0+}^α, состоит в следующем. Пусть $S(R_+^1)$ — сужение класса $S=S(R^1)$ на полуось, так что функции $f(x)\in S(R_+^1)$ бесконечно дифференцируемы на $[0, \infty)$ и убывают при $x\to\infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени. Легко показывается, что класс $S(R_+^1)$ инвариантен относительно оператора I_-^α. Далее, пусть $\mathfrak{S}_+^0=\mathfrak{S}_+^0(R_+^1)$ — класс бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ на $[0, \infty)$, медленно растущих при $x\to\infty$ и таких, что $\varphi^{(k)}(0)=0$, $k=0, 1, 2, \ldots$ Легко проверяется, что этот класс инвариантен относительно оператора I_{0+}^α. Однако классы $S(R_+^1)$ и $\mathfrak{S}_+^0(R_+^1)$ обладают существенным недостатком. Пространства обобщенных функций над $S(R_+^1)$ и $\mathfrak{S}_+^0(R_+^1)$ не содержат функций, растущих при $x\to 0$ (последнее из них не содержит даже ограниченных или медленно убывающих функций на бесконечности). Это непригодно в приложениях. Как и в случае всей оси, более удобным будет класс основных функций Φ типа Лизоркина, приспособленный к полуоси. Введем такой класс. Пусть

$$S_+=S_+(R_+^1)=\{\omega:\omega\in C^\infty(R_+);$$
$$\lim_{x\to 0,\infty} x^l\omega^{(m)}(x)=0, \quad l, m=0, 1, 2, \ldots\}. \tag{8.23}$$

Положим

$$\Phi_+=\Phi(R_+)=\{\omega:\omega\in S_+; \tag{8.24}$$

$$\int\limits_0^\infty x^k\omega(x)\,dx = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\Big\},\tag{8.24}$$

так что функции класса Φ_+ обладают следующим свойством: их преобразование Меллина (1.112) обращается в нуль в целых точках $s=1,\ 2,\ 3, \ldots$ Топологию в пространствах S_+, Φ_+ зададим нормами

$$\sup_{m\leqslant k}\ \sup_{x>0}\,(1+x)^k\,|\omega^{(m)}(x)|,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Нетрудно показать полноту пространств S_+, Φ_+ в этой топологии. Примером функции из класса Φ_+ является

$$\varkappa(x) = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right),\tag{8.25}$$

в чем можно убедиться непосредственно с учетом того, что преобразование Меллина этой функции

$$\int\limits_0^\infty x^{z-1}\varkappa(x)\,dx = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2/4}\,\mathrm{sh}(zt)\sin\frac{\pi}{2}t\,dt = 2\sqrt{\pi}e^{z^2-\pi^2/4}\sin\pi z\tag{8.26}$$

(см. справочник А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1, 2.5.57.1]).

Заметим, что пространство Φ_+ весьма богато элементами. Можно показать, что если $\omega\in\Phi_+$, то для любой функции $\psi\in S_+$ свертка Меллина функций ω и ψ (см. (1.114)) принадлежит Φ_+.

С учетом инвариантности пространства $\Phi=\Phi(R^1)$ относительно оператора I_+^α легко получается

Лемма 8.3. *Оператор I_{0+}^α, $\operatorname{Re}\alpha>0$, изоморфно отображает пространство Φ_+ на себя.*

Действительно, пусть ε_0: $\Phi_+\to\Phi$ — оператор продолжения нулем на R^1, а P_+ — оператор сужения на R_+^1. Тогда $I_{0+}^\alpha = P_+I_+^\alpha\varepsilon_0$. Так как $\varepsilon_0(\Phi_+)\subset\subset\Phi=\Phi(R^1)$, то в силу инвариантности $\Phi(R^1)$ относительно оператора I_+^α получаем $I_{0+}^\alpha(\Phi_+)\subseteq\Phi_+$. Обратное вложение получаем аналогичным рассмотрением дробного дифференцирования $\mathcal{D}_{0+}^\alpha$.

В силу леммы 8.3 можно определить в пространстве Φ_+' линейных непрерывных функционалов над Φ_+ оператор I_-^α, $\operatorname{Re}\alpha>0$, равенством

$$(I_-^\alpha f,\ \omega) = (f,\ I_{0+}^\alpha\omega),\quad \omega\in\Phi_+.\tag{8.27}$$

Непосредственно из леммы 8.2 вытекает

Следствие. *Оператор I_-^α, $\operatorname{Re}\alpha>0$, изоморфно отображает пространство Φ_+' на себя.*

Равенство (8.27) может служить определением дробного интеграла $I_-^\alpha f$ для $f\in L_p(R_+^1)$ при $p\geqslant 1/\alpha$, когда в обычном смысле этот интеграл расходится (см. также замечание 8.2). Это обстоятельство является достоинством класса Φ_+ основных функций. Шкала классов $F_{p,\mu}$, упоминаемая ниже, таким достоинством не обладает (см. далее замечание 8.4).

Чтобы сформулировать аналог леммы 8.3 для оператора I_-^α, введем следующие пространства основных функций:

$$\Phi_+^\alpha = \Big\{\omega:\omega\in S_+,\ \int\limits_0^\infty\omega(x)\,x^{\alpha-k}dx = 0,\quad k=1,\ 2,\ \ldots\Big\},$$

снабженные топологией пространства S_+.

Лемма 8.4. *Оператор I_-^α, $\operatorname{Re}\alpha>0$, изоморфно отображает Φ_+^α на $\Phi_+^{-\alpha}$.*

Утверждение леммы легко выводится из леммы 8.3, если заметить, что $(I_{-}^{\alpha}\varphi)(x)=x^{2\alpha}(WI_{0+}^{\alpha}W\varphi)(x)$, $(W\varphi)(x)=x^{-1-\alpha}\omega(1/x)$.

Следствие. *Оператор* I_{0+}^{α}, $\operatorname{Re}\alpha>0$, *определяемый равенством* $(I_{0+}^{\alpha}f,\ \omega)=(f,\ I_{-}^{\alpha}\omega)$, $\omega\in\Phi_{+}^{\alpha}$, *изоморфно отображает пространство* $(\Phi_{+}^{-\alpha})'$ *на* $(\Phi_{+}^{\alpha})'$.

Замечание 8.3. Степени x^{λ} принадлежат пространству Φ_{+}' при $\lambda\neq 0, 1, 2, \ldots$ и пространству $(\Phi_{+}^{\alpha})'$ при $\alpha-\lambda\neq 1, 2, \ldots$ (при исключаемых значениях λ степени x^{λ} не отличимы от нуля как элементы соответствующего пространства).

Изложенная выше модификация класса Лизоркина для полуоси осуществлена Б. С. Рубиным [27]. Рассмотрим вкратце другой подход к определению дробного интегродифференцирования обобщенных функций на полуоси, принадлежащий А. МакБрайду (A. C. McBride [2—4, 6]).

Обозначим через $\mathcal{F}_{pl}$, где p — произвольное вещественное число, класс бесконечно дифференцируемых в $(0, \infty)$ функций с носителем в $[0, l]$ таких, что

$$\sup_{x>0}|x^{-p+k}\varphi^{(k)}(x)|<\infty \tag{8.28}$$

при всех $k=0, 1, 2, \ldots$ (ср. с (8.23)). Нормами (8.28) задается топология в $\mathcal{F}_p=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\mathcal{F}_{pl}$. Прежде всего замечаем, что сопряженному пространству $\mathcal{F}_p'$ принадлежат степенные функции x^{λ} при $\lambda>p-1$. Умножение на x^{λ} является непрерывной операцией из $\mathcal{F}_p$ в $\mathcal{F}_q$, отображая непрерывно $\mathcal{F}_p$ на $\mathcal{F}_q$ при $\lambda=q-p$. Более содержательно утверждение о действии оператора I_{-}^{α} в $\mathcal{F}_p$. Для его формулировки введем еще класс $\mathcal{F}_0^*$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, определяемый аналогично классу $\mathcal{F}_p$ (полу)нормами:

$$\sup_{x>0}|x^{-k}(1+|\ln x|)^{-1}\varphi^{(k)}(x)|, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Лемма 8.5. *Оператор* I_{-}^{α} *непрерывно действует из* $\mathcal{F}_p$ *в* $\mathcal{F}_q$, *где* $q\leqslant p+\operatorname{Re}\alpha$, *если* $p+\operatorname{Re}\alpha<0$, *и* $q=0$, *если* $p+\operatorname{Re}\alpha>0$. *В случае* $p+\operatorname{Re}\alpha=0$ *оператор* I_{-}^{α} *непрерывно действует из* $\mathcal{F}_p$ *в пространство* $\mathcal{F}_0^*$.

Доказательство получается несложными оценками и опускается.

Лемма 8.5 позволяет определить дробный интеграл $I_{0+}^{\alpha}f$ от обобщенных функций $f\in\mathcal{F}_q'$, $q\leqslant 0$, по формуле

$$(I_{0+}^{\alpha}f,\ \varphi)=(f,\ I_{-}^{\alpha}\varphi), \quad \varphi\in\mathcal{F}_p, \tag{8.29}$$

где $p=q-\alpha$ при $q<0$ и $p>-\alpha$ при $q=0$. Можно также определить $I_{0+}^{\alpha}f$ равенством (8.29) для $f\in(\mathcal{F}_0^*)'$ и тогда $\varphi\in\mathcal{F}_{-\alpha}$. При этом I_{0+}^{α} отображает $\mathcal{F}_q'$ в $\mathcal{F}_{q-\alpha}'$ при $q<0$ и $(\mathcal{F}_0^*)'$ в $\mathcal{F}_{q-\alpha}'$ при $q=0$.

Известны и другие способы построения пространств бесконечно дифференцируемых функций, приспособленных в аналогичном плане к дробному интегрированию. Укажем, например, на пространство $F_{p\mu}$, задаваемое следующим образом. Через F_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, обозначим пространство функций, определяемое счетным набором (полу)норм

$$\gamma_k^p(\varphi)=\|t^k\varphi^{(k)}(t)\|_{L_p(R_+^1)},$$

и скажем, что $\varphi\in F_{p\mu}$, если $t^{-\mu}\varphi(t)\in F_p$. Естественным образом вводится топология в $F_{p\mu}$ полунормами $\gamma_k^{p,\mu}(\varphi)=\gamma_k^p(t^{-\mu}\varphi)$.

Известно, что I_{0+}^{α} и I_{-}^{α} непрерывно действуют из $F_{p\mu}$ в $F_{p,\,\mu+\alpha}$ при всех значениях μ, за исключением счетного множества значений $\mathrm{Re}\,\mu$. Мы не рассматриваем это и другие пространства (см. по этому поводу литературные ссылки в § 9). Здесь сделаем только следующее

Замечание 8.4. Интеграл $I_{-}^{\alpha}f$, где $f \in L_p(R_+^1)$, определяется равенством

$$(I_{-}^{\alpha}f,\ \varphi) = (f,\ I_{0+}^{\alpha}\varphi), \quad \varphi \in F_{q\mu},$$

не при всех $p \geqslant 1/\alpha$, каковы бы ни были $\mu > -1$, $q \geqslant 1$.

Действительно, пусть $\varphi \in F_{q\mu}$. Возьмем $f(x) = x^{1-2/p}(1+x)^{-2/p'} \in L_p(R_+^1)$, $\varphi(x) = x^{\mu}(1+x)^{-(1+\varepsilon)/q} \in F_{q\mu}$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$(I_{-}^{\alpha}f,\ \varphi) \geqslant c\int\limits_0^{\infty} f(x)\frac{x^{\mu+\alpha}dx}{(1+x)^{(1+\varepsilon)/q}} = c\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{1+\mu+\alpha-2/p}\,dx}{(1+x)^{(1+\varepsilon)/q+2/p'}} \tag{8.30}$$

с учетом неравенства

$$I_{0+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{x}\frac{y^{\mu}(x-y)^{\alpha-1}}{(1+y)^{(1+\varepsilon)/q}}\,dy \geqslant \frac{cx^{\mu+\alpha}}{(1+x)^{(1+\varepsilon)/q}}.$$

Интеграл (8.30) расходится при $\varepsilon = 1$, $\alpha = 3$ для всех $\mu > -1$ и $q \in [1, \infty)$.

5°. Случай отрезка. Основываемся на подходе через сопряженный оператор, т. е. на формуле

$$(I_{a+}^{\alpha}f,\ \varphi) = (f,\ I_{b-}^{\alpha}\varphi) \tag{8.31}$$

(см. (2.20)). Ввиду (8.31) мы можем рассматривать дробный интеграл $I_{a+}^{\alpha}f$ на обобщенных функциях f, если они определены на основных функциях φ, образующих класс X, инвариантный относительно дробного интегрирования I_{b-}^{α}. Таким классом, как нетрудно видеть, служит класс

$$C_b^{\infty}([a,\ b]) = \{\varphi : \varphi(x) \in C^{\infty}([a,\ b]),\ \varphi^{(k)}(b) = 0,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}. \tag{8.32}$$

Он инвариантен также относительно дробного дифференцирования $\mathscr{D}_{b-}^{\alpha}$. Аналогичный класс

$$C_a^{\infty}([a,\ b]) = \{\varphi : \varphi(x) \in C^{\infty}([a,\ b]),\quad \varphi^{(k)}(a) = 0,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

инвариантен относительно дробного интегрирования I_{a+}^{α} и дробного дифференцирования $\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}$.

Простыми рассуждениями устанавливается следующее утверждение: *уравнение Абеля $I_{a+}^{\alpha}\varphi = f$, где $f \in X'$, $X = C_b^{\infty}([a,\ b])$, имеет в классе X' обобщенных функций единственное решение $\varphi = \mathscr{D}_{a+}^{\alpha}f$, понимаемое в смысле*

$$(\mathscr{D}_{a+}^{\alpha}f,\ \omega) = (f,\ \mathscr{D}_{b-}^{\alpha}\omega).$$

§ 9. ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ К ГЛАВЕ 2

1°. Исторические сведения. К § 5, п. 1°. Дробное интегродифференцирование в форме $I_{-}^{\alpha}\varphi$ (но отличающееся от $I_{-}^{\alpha}\varphi$ множителем $(-1)^{\alpha}$) появляется уже у Ж. Лиувилля (J. Liouville [1, с. 8], 1832 г.). Ж. Лиувилль пришел к этому после формальных преобразований своего исходного определения дробного интегрирования функций, представимых рядами из экспонент (или интегралами от экспонент), см. также его работы [2], 1832 г.; [5], 1834 г. В форме (5.4) дробный интеграл $I_{+}^{\alpha}\varphi$ встречается у А. В. Летникова [1, с. 28], 1868 г. Ж. Лиувиллю приходилось иметь дело с так называемыми дополнительными функциями, доставлявшими ему много хлопот (см. J. Liouville [2, с. 94—105], 1832 г.; [4], 1834 г.). Свободное от этого понятия изложение дробного исчисления дано А. В. Летниковым [1]. Решение уравнения Абеля $I_{-}^{\alpha}\varphi=f$ на бесконечном промежутке впервые получено J. Liouville [5, с. 277], 1834 г., в виде $\varphi=-I_{-}^{1-\alpha}f'$. Об интегралах чисто мнимого порядка (5.18) см. в § 4, п. 1° (к § 2, п. 4°). Формулы (5.21) — (5.23) получены J. Liouville [2, с. 121—123], 1832 г., строго доказаны А. В. Летниковым [1, с. 38—44]. Формулы типа (5.25) содержатся в справочнике Г. Бейтмена, А. Эрдейи [4, с. 146, формула (7)]. Формула (5.16) впервые встречается (в случае полуоси) в работе H. Kober [1], 1940 г.

К § 5, п. 2°. Теоремы 5.1, 5.2 получены Б. С. Рубиным [22], 1986 г.

К § 5, п. 3°. Теорема 5.3 впервые доказана G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г., с помощью так называемых перестановок функций, см. также книгу Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуда, Г. Полиа [1, с. 348]. Известно доказательство этой теоремы, элементарное в том отношении, что не использует никаких других средств, кроме длинной цепочки интегральных неравенств Гельдера и Минковского (В. А. Солонников [1], 1962 г.). Имеются доказательства, основанные на методах интерполяции. Соответствующие ссылки см. в § 29 в исторических сведениях к § 25 по поводу аналогичной теоремы для многомерного (риссова) дробного интегрирования. Доказательство необходимости условий теоремы 5.3 взято из книги И. Стейна [1, с. 139]. Контрпример (5.41) указали G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г. В этой же работе доказана теорема 5.4 для оператора I_{0+}^{α}при более жестких предположениях относительно параметров. Случай $\mu=\alpha p-1$ был рассмотрен в работе [6, с. 363], 1936 г., тех же авторов. При указанных в теореме 5.4 ограничениях эта теорема для оператора I_{0+}^{α} была доказана Т. Флеттом (T. M. Flett [3], 1958 г.). Случай $p=q=1$, $\mu<-1$ доказан в работе Л. Бозанке (L. S. Bosanquet [2, с. 13], 1934 г.). Доказательство для оператора I_{-}^{α} в случае $m=\alpha$, пригодное для $p=1$, имеется в работе J. B. Miller [1].

В сформулированном виде при $p\neq 1$ теорема 5.4 является частным случаем более общей теоремы 5.5, доказанной в работе Б. С. Рубина [22], 1986 г. Утверждение теоремы 5.4 для оператора I_{0+}^{α} ранее приводилось в § 3 (см. теорему 3.7 и § 4, п. 1° (к § 3, пп. 3, 4°)).

Утверждение теоремы 5.7 при $p=1$ дано в книге Э. Хилле, Р. Филлипса [1, с. 681].

К § 5, пп. 4—6°. Интеграл (5.57) присутствовал уже в работе Г. Вейля (H. Weyl [1, с. 302], 1917 г.), однако его появление у Г. Вейля носило эпизодический характер. Как самостоятельный объект дробная производная в форме (5.57) и в более общем виде (5.80) появляется в работе А. Маршо (A. Marchaud [1], 1927 г.), где она была подвергнута всестороннему исследованию, см. также ниже п. 2°, 5.11. Поэтому конструкция (5.57), (5.80) называется дробной производной Маршо. Определение 5.2 основано на идеях Ж. Адамара, который ввел понятие конечной части расходящегося интеграла (см., например, книгу Ж. Адамара [1, гл. III]).

Значение нормировочного множителя в (5.80) в виде (5.81) было известно еще А. Маршо (A. Marchaud [1], 1927 г.). Им же в этой работе использовались «усеченные» выражения (5.59), (5.80′).

К § 5, п. 7°. Изложение теории полугрупп и дробных степеней операторов содержится во многих работах и книгах, см., например, Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц [1], Э. Хилле, Р. Филлипс [1], М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский [1]. Определение (5.84) дробной степени (абстрактный аналог формулы Маршо) восходит к А. Балакришнану (A. V. Balakrishnan [3], 1960 г.). Следует отметить работу Ж. Лионса, Ж. Петри (J. L. Lions, J. Peetre [1, с. 54], 1964 г.), в которой использовалась усеченная конструкция (5.85) для описания области определения дробной степени $(-A)^{\alpha}$ при целых α. Это было обобщено на произвольные $\alpha>0$ в работе H. Berens, P. L. Butzer, U. Westphal [1], 1968 г. Реализация дробного интегродифференцирования в виде (5.82), (5.84) в рамках пространств C^{ω} содержится в работе Н. Ю. Бакаева, Р. П. Тарасова [1], 1978 г. В связи с теорией дробных степеней операторов следует упомянуть работы М. А. Красносельского, П. Е. Соболевского [1], A. V. Balakrishnan [1—3], J. Watanabe [1], H. Komatsu [1—5], P. L. Butzer, H. Berens [1], U. Westphal [1, 2], H. W. Hövel, U. Westphal [1], K. Yoshinaga [2], F. Hirsch [1], H. O. Fattorini [1].

К § 6, пп. 1—3°. Пространство $I^{\alpha}(L_p)$, $1<p<1/\alpha$, дробных интегралов от функций из L_p вводилось и исследовалось С. Г. Самко [7], 1969 г.; [9], 1970 г.; [11], 1971 г.; [14], 1973 г. Изложение в § 6 основано на работе [14] и следует книге С. Г. Самко [31, § 1].

Теорема 6.1 и лемма 6.1 доказаны в работе С. Г. Самко [14], 1973 г.; см. также книгу С. Г. Самко [31, с. 9—11]. Утверждение теоремы 6.1 было известно и ранее в случае $p=2$ на функциях $\varphi\in L_2(R^1)$ с компактным носителем (E. M. Stein, A. Zygmund [2, с. 253], 1965 г.). В этой работе рассматривалась модификация (12.1) дробного интегрирования. Описание пространства $I^{\alpha}(L_p)$, предоставляемое теоремой 6.2, в неполном виде было получено С. Г. Самко [14] в терминах (6.18). В терминах же (6.19) эта теорема доказана С. Г. Самко [23], 1977 г., в многомерном случае (для риссовых операторов дробного интегрирования). Описание $I^{\alpha}(L_p)\cap L_p$ в терминах (6.19) с жестким ограничением $1<p<1/(2\alpha)$ в достаточной части было дано в работе D. L. Herson, P. Heywood [1], 1974 г. В приведенном виде теорема 6.2 доказана в книге С. Г. Самко [31]. Пространство (6.28) введено в работах С. Г. Самко [17, 18], 1976 г.; [20], 1977 г. (в многомерном случае). Описание его в виде (6.29) получено им в [17], 1976 г., при $p\leqslant r\leqslant p/(1-\alpha p)$ (также в многомерном случае). Свойство, сформулированное в замечании 6.1, доказано С. Г. Самко [27, § 17], 1978 г. Утверждение о знакопеременности вещественных функций из $L_r\cap I^{\alpha}(L_p)$, $1\leqslant r<1/(1-\alpha)$, отмечено в работе С. Г. Самко [14]. Теорема 6.3 установлена С. Г. Самко [13], 1971 г.

К § 6, пп. 4, 5°. Достаточный признак теоремы 6.4 указан в работе С. Г. Самко [14], 1973 г. Теорема 6.5 в более общем виде и в многомерном случае получена в работе С. Г. Самко [26], а теорема 6.7—в [14]. Утверждение (6.40) принадлежит Г. Харди, Д. Литтлвуду (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [3], 1928 г.) в периодическом случае, а в непериодическом случае дано С. Г. Самко [8], 1969 г.; [14], 1973 г. Оценка (6.42) примыкает к оценке (13.62). Оценка (6.43) получена в работе С. Г. Самко [27, § 1], 1978 г.

К § 7, п. 1°. Формула (7.1) впервые получена Х. Кобером (H. Kober [3, лемма 3], 1941 г.) при условиях $0<\alpha\leqslant 1$, $\hat{\varphi}(t)$, $|t|^{-\alpha}\hat{\varphi}(t)\in L_1(R^1)$ (ср. с теоремой 7.1).

К § 7, п. 2°. Формула (7.14), по-видимому, впервые указана Г. Дечем (G. Doetsch [1, с. 301], 1937 г.) при условиях $\alpha>0$ или $-n-1<\alpha\leqslant n$ и $\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(0)=0$, но при целых α она была известна и ранее. В книге Д. Уиддера (D. V. Widder [2], 1946 г., 1-е изд. в 1941 г.) соотношение (7.14) доказано в терминах обратного преобразования Лапласа (см. далее п. 2°, 7.3). Лемма 7.1 и теоремы 7.2, 7.3 публикуются впервые.

К § 7, п. 3°. Формулы (7.20), (7.21) впервые установил Х. Кобер (H. Kober [1, теоремы 5а, 5в], 1940 г.) в классе $L_p(0,\infty)$ при $\alpha>0$ и $1\leqslant p<\infty$ для (7.17) и $1\leqslant p<1/\alpha$ для (7.18). Теоремы 7.4, 7.5 публикуются впервые. Теорема 7.6 установлена Ву Ким Туаном [2], 1985 г.

К § 8, пп. 1, 2°. Идея введения пространства Φ была предложена В. И. Семянистым [1], 1960 г., и развита П. И. Лизоркиным [1], 1963 г., широко использовавшим это пространство в теории лиувиллевского дифференцирования функций одной и многих переменных, см. также работу П. И. Лизоркина [5], 1969 г., которой мы следовали в п. 2° при рассмотрении пространства Φ. Отметим также работу K. Yoshinaga [1], 1964 г., где исследовано пространство Φ.

Близкий к $\mathfrak{S}_-$ класс V основных функций вводился В. К. Вебером [2], 1974 г. Этот класс V отличается от $\mathfrak{S}_-$ тем, что функции из V справа финитны. Он также инвариантен относительно правостороннего дробного интегродифференцирования I^{α}_{-}, $\mathcal{D}^{\alpha}_{-}$. В работе В. К. Вебера [4], 1976 г., исследованы также свертыватели и преобразование Фурье в V' в связи с приложениями к дифференциальным уравнениям дробного порядка.

Утверждение типа леммы 8.2 об ограниченности в $L_p(0, 1)$ операторов дробного интегрирования $I^{i\theta}_{0+}$ впервые отмечено в работе Г. Калиша (G. K. Kalisch [1], 1967 г.).

Формулы (8.17)—(8.20) ранее, по-видимому, не отмечались. Случай $k=0$ в формуле (8.20) отмечался в работе A. Brédimas [1, с. 23], 1973 г., в рамках подхода Л. Шварца (см. ниже к § 8, п. 3°) и при ином толковании дробного интегродифференцирования — через разности дробного порядка, см. ниже в п. 2°, 8.5. Такое толкование рассматривается нами в случае обычных функций в § 20.

К § 8, п. 3°. Подход к дробному интегродифференцированию обобщенных функций, указанный в п. 3°, предложен Л. Шварцем (L. Schwartz [1, т. 2, с. 30], 1950 г.) и воспроизведен в книге И. М. Гельфанда, Г. Е. Шилова [2, с. 149].

К § 8, п. 4°. Подход через сопряженный оператор на полуоси развивался в работах А. Эрдейи и А. МакБрайда (A. Erdelyi, A. C. McBride [1], 1970 г.), А. Эрдейи (A. Erdelyi [15], 1972 г.; [17], 1975 г.), А. МакБрайда (A. C. McBride [2], 1975 г.; [4], 1977 г.). В кратком освещении этого подхода мы следовали работам A. C. McBride [2, 4], в которых, в частности, введены и исследованы пространства $\mathcal{F}_{pl}$, $\mathcal{F}_p$ и $F_{p\mu}$. Дальнейшее развитие этих результатов изложено в книге A. C. McBride [6], 1979 г.

Пространства Φ_+, Φ^{α}_{+} типа Лизоркина в случае полуоси введены в работе Б. С. Рубина [27], 1987 г., и там же рассмотрено действие операторов дробного интегрирования в классах Φ'_{+}, $(\Phi^{\alpha}_{+})'$.

К § 8, п. 5°. Инвариантность пространств $C^{\infty}_a([a, b])$, $C^{\infty}_b([a, b])$ относительно дробного интегрирования указывалась в работе В. К. Вебера, А. Б. Урдолетовой [1], 1974 г., где на этой основе рассмотрено дробное интегродифференцирование обобщенных функций на отрезке $[a, b]$. Позднее эти пространства использовались в работе R. Estrada, R. P. Kanwal [1], 1985 г., посвященной решению в обобщенных функциях различных классов интегральных уравнений, в том числе сингулярных уравнений, уравнения Абеля и др. Там, в частности, дано решение в обобщенных функциях уравнения

$$\int_a^x \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{[h(x)-h(\tau)]^{1-\alpha}} = f(x), \quad x > a$$

(см. об операторах дробного интегрирования, связанных с таким уравнением, в § 18 и в § 23 (к § 18)).

2°. Обзор других результатов. 5.1. Дробное дифференцирование Лиувилля $(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$, $0<\alpha<1$, можно рассматривать вместо (5.6) в форме

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \frac{d}{dx} \int_x^N \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}} \tag{9.1}$$

(J. Cossar [1]). Это определение удобно тем, что применимо к функциям с худшим поведением на бесконечности по сравнению с (5.6). В этом плане подход (9.1) близок к определению дробного дифференцирования Маршо (5.58). Для дробной производной (9.1) J. Cossar [1] доказал формулу

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x) = (\mathcal{D}^{\alpha}_{b-}f)(x) - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_b^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1+\alpha}}, \quad x<b.$$

Конструкция (9.1) использовалась в работе L. S. Bosanquet [8] при рассмотрении условий существования локально суммируемых решений уравнения Абеля по бесконечному промежутку. В последней работе доказаны, в частности, следующие утверждения: 1) если $f(x)$ представима в виде условно сходящегося дробного интеграла $f(x)=(I^{\alpha}_{-}\varphi)(x)$, $0<\alpha<1$, то необходимо $\varphi(x)=(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$, где $(\mathcal{D}^{\alpha}_{-}f)(x)$ — производная Коссара (9.1); 2) для того чтобы $f(x)$ была представима условно сходящимся интегралом дробного порядка $f(x)=(I^{\alpha}_{-}\varphi)(x)$, $0<\alpha<1$, от локально суммируемой функции $\varphi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $I^{1-\alpha}_{b-}f \in AC([a,b])$ при любых a и b и чтобы $\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}\,dt \times$ $\times \int_b^{\infty} (s-t)^{-\alpha-1} f(s)\,ds \to 0$ при $b\to\infty$ почти для всех x (распространение теоремы Я. Тамаркина 2.1 на случай всей прямой и локально суммируемых решений уравнения Абеля).

В работе B. Choudhary [1] сформулированные утверждения распространены на уравнения типа Сонина (см. § 4, п. 2°, 2.3):

$$\int_x^{\infty} \mathrm{k}(t-x)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x>0,$$

в предположении, что существует ядро $l(t)$ такое, что выполняется (4.2″).

5.2. Можно рассмотреть «усеченный» дробный интеграл

$$(I^{\alpha}_{+,N}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-N}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad N>0.$$

Если $\varphi(t)\in L_p(R^1)$, $1<p<1/\alpha$, то $I^{\alpha}_{+,N}\varphi \to I^{\alpha}_{+}\varphi$ почти всюду и по норме $L_q(R^1)$, $q=p/(1-\alpha p)$. Сходимость почти всюду получается с помощью неравенства Гельдера, а сходимость в L_q—теоремы Банаха—Штейнгауза. Можно воспользоваться также представлением

$$(I^{\alpha}_{+,N}\varphi)(x) = f(x) - \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int_{-\infty}^{x-N} \left(\frac{N}{x-N-t}\right)^{\alpha} \frac{f(t)\,dt}{x-t}, \quad f=I^{\alpha}_{+}\varphi$$

(см. С. Г. Самко [14, теорема 2 и лемма 2]).

5.3. Обстоятельное исследование условно сходящихся дробных интегралов $I^{\alpha}_{+}\varphi = 1/\Gamma(\alpha) \lim\limits_{N\to\infty} \int_0^N \varphi(x-t)\,t^{\alpha-1}dt$ от необязательно убывающих на бесконечности функций

$\varphi(t)$ проведено в работе E. R. Love [1]. Им введен класс I_λ, $0<\alpha\leqslant\lambda<1$, функций $\varphi(t)$, для которых существует возрастающая функция $\omega(T)$, $T>0$ (зависящая от $\varphi(t)$), такая, что $\left|\int\limits_x^{x+T}\varphi(t)\,dt\right|\leqslant\omega(T)$ и $\int\limits_1^\infty t^{\lambda-1}d\omega(t)<\infty$. Показано, что если $\varphi\in I_\lambda$, то $I_+^\alpha\varphi$ существует как равномерный по x предел, если $\lambda>\alpha$, и почти для всех x, если $\lambda=\alpha$. В этой работе особо рассмотрен случай почти периодических функций (равномерно почти периодических и почти периодических в смысле Степанова). Некоторые результаты для дробных интегралов от функций, не исчезающих на бесконечности, см. также в работах С. П. Гейсберга [3], L. S. Bosanquet [8].

5.4. Формулы дробного интегрирования по частям (5.16), (5.17), (5.16′) можно использовать подобно случаю конечного отрезка (см. § 4, п. 2°, 2.6) для построения биортогональных систем функций. A. Erdelyi [3], предложивший этот прием, построил, отправляясь от формулы (5.16′) дробного интегрирования по частям на полуоси $(0,\infty)$, биортогональные системы функций на полуоси, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции. В качестве исходной биортогональной системы $\{\varphi_n,\ \psi_m\}$ (см. § 4, п. 2°, 2.6) брались функции $\varphi_n(x)=L_n^{(\alpha)}(2x)$, $\psi_n(x)=e^{-2x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(2x)$, где $L_n^{(\alpha)}(x)=$ $=\dfrac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})=\sum\limits_{j=0}^n\binom{n+\alpha}{n-j}\dfrac{(-x)^j}{j!}$ — многочлен Лагерра.

5.5. Для многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ (см. выше) справедливо интегральное представление в виде дробного интеграла

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}e^xI_-^{-n-\alpha}(e^{-x}x^n)=\binom{n+\alpha}{n}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^{-\alpha-n-1}(x+t)^n dt$$

при условии $\operatorname{Re}\alpha<-n$. Это обстоятельство использовано H. M. Srivastava [4] для вычисления дробных интегралов от функций вида $e^{-st}P(t)$, где $P(t)$ — многочлен.

5.6. Оператор дробного интегрирования, рассматриваемый в форме

$$I_{\eta,\alpha}^+\varphi=\frac{x^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^\eta\varphi(t)\,dt \tag{9.2}$$

(в обозначении A. Erdelyi [4]), ограничен в пространстве $L_p(R_+^1)$, как это следует из теоремы 1.5, если $\eta>-1/p'$. В указанной работе предложена модификация оператора (9.2) в виде

$$I_{\eta,\alpha}^+\varphi=\frac{x^{-\eta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}t^\eta\varphi(t)\,dt-\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{\alpha-1}{k}x^{\alpha-k-1}\int\limits_0^\infty t^{k+\eta}\varphi(t)\,dt\right\}, \tag{9.3}$$

отличающаяся от (9.2) конечномерным оператором. Такой оператор ограничен в $L_p(R_+^1)$, $1<p<\infty$, при выборе $m=0$, если $\eta>-1/p'$, и $m=[-\eta-1/p']$, если $\eta<-1/p'$, $\eta-1/p\neq-1,\ -2,\ \dots$ В этой работе получена также формула для преобразования Меллина (1.112) дробного интеграла (9.3):

$$(\mathfrak{M}I_{\eta,\alpha}^+\varphi)(s)=\frac{\Gamma(\eta+1/p'-i\xi)}{\Gamma(\eta+\alpha+1/p'-i\xi)}(\mathfrak{M}\varphi)(s),\quad s=i\xi+1/p,$$

где $\varphi\in L_p(R^1)$, $1\leqslant p\leqslant 2$ (ср. с (7.22)). Указанные результаты получены также в форме правостороннего дробного интегрирования (с переменным нижним пределом).

Ограниченность оператора (9.3) в пространстве $L_p(R_+^1;\ x^\mu)$ с весом рассмотрена P. G. Rooney [4].

5.7. В связи с теоремой 5.5 приведем утверждение типа теоремы 3.12 в случае бесконечного промежутка. Именно рассмотрим вопрос об ограниченности операторов дробного интегрирования из пространства $L_p(\Omega;\ \rho)$ в гельдерово пространство $H_0^{\alpha-1/p}(\Omega;\ r)$, $1/p<\alpha<1+1/p$, в случае, когда Ω — ось или полуось. Пусть $\rho(x)$ — вес (5.39). Введем следующие обозначения:

$$\delta_k=\begin{cases}\mu_k/p & \text{при } \mu_k>\alpha p-1,\\ \alpha+\varepsilon_k-1/p & \text{при } 0<\mu_k\leqslant\alpha p-1,\ \varepsilon_k>0,\end{cases}$$

$$\Lambda_1=\{k:k\in\{2,\ldots,n\},\quad \mu_k>0\},$$
$$\Lambda_2=\{k:k\in\{1,\ldots,n\},\quad \mu_k>0\};$$

$$\delta_\infty^{(1)}=-\alpha-\frac{\mu_1}{p}-\sum_{k\in\Lambda_1}\delta_k+$$
$$+\begin{cases}-\alpha+(2-\mu_0)/p & \text{при } \mu_0>1-p,\\ 1-\alpha-\varepsilon_0+1/p,\ \varepsilon_0>0, & \text{при } 2-\alpha p-p<\mu_0\leqslant p-1,\\ 1 & \text{при } \mu_0\leqslant 2-\alpha p-p,\end{cases}$$

$$\mu_0=-\mu-\mu_1-\cdots-\mu_n;$$

$$\delta_\infty^{(2)}=-2\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)-\sum_{k\in\Lambda_2}\delta_k-\begin{cases}\mu_0/p & \text{при } \mu_0>1-p,\\ \varepsilon-1/p' & \text{при } \mu_0\leqslant 1-p,\quad \varepsilon>0,\end{cases}$$

$$\delta_\infty^{(3)}=-2\alpha+(2-\mu_0)/p-\sum_{k\in\Lambda_2}\delta_k;$$

$$r_+(x)=\begin{cases}(1+x)^{\delta_\infty^{(1)}}x^{\frac{\mu_1}{p}}\prod\limits_{k\in\Lambda_1}|x-x_k|^{\delta_k}, & \text{если } \Omega=\dot R_+^1,\\[2ex] (1+|x|)^{\delta_\infty^{(2)}}\prod\limits_{k\in\Lambda_2}|x-x_k|^{\delta_k}, & \text{если } \Omega=\dot R^1,\end{cases}$$

$$r_-(x)=\begin{cases}(1+x)^{\delta_\infty^{(3)}}\prod\limits_{k\in\Lambda_2}|x-x_k|^{\delta_k}, & \text{если } \Omega=\dot R_+^1,\\[2ex] r_+(x), & \text{если } \Omega=\dot R^1.\end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение (Б. С. Рубин [22]). Пусть $1<p<\infty$, $1/p<\alpha<1/p+1$, $\rho(x)=(1+x^2)^{\mu/2}\prod\limits_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}$, выполнено (5.47) в случае $x_k\in\Omega=\dot R_+^1$ и μ_k удовлетворяют условию (5.48). Если и $\mu_1<p-1$, то оператор I_{0+}^α ограничен из $L_p(R_+^1;\ \rho)$ в $'H_0^{\alpha-1/p}(\dot R_+^1;\ r_+)$ (штрих означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}r_+(x)(I_{0+}^\alpha\varphi)(x)\neq 0$, вообще говоря, для $\varphi\in L_p(R_+^1;\ \rho)$, если $\mu_0\leqslant 2-\alpha p-p$). Если $\mu_1<p-1$ и $\mu_0<1-\alpha p$, то операторы $I_\pm^\alpha$ ограничены из $L_p(\Omega;\ \rho)$ в $H_0^{\alpha-1/p}(\Omega;\ r_\pm)$.

5.8. Имеются обобщения весовой теоремы 5.5 на случай двух весовых оценок. В работе K. F. Andersen, H. P. Heinig [1] получены достаточные условия ограниченности операторов дробного интегрирования (5.1) и (5.3) и более общих операторов Эрдейи—Кобера (18.1) и (18.3) из $L_p(R_+^1;\ \rho)$ в $L_q(R_+^1;r)$. Например, для дробного интеграла (5.1) получен следующий результат: если $\rho(x)$, $r(x)$ — неотрицательные измеримые функции на R_+^1, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $0<\alpha<1$, и существует постоянная β, $0\leqslant\beta\leqslant 1$, такая, что

$$\left(\int\limits_A^\infty|(t-A)^{(\alpha-1)\beta}r(t)|^q dt\right)^{1/q}\left(\int\limits_0^A|(A-t)^{(\alpha-1)(1-\beta)p'}\rho(t)|^{-p'}dt\right)^{1/p}\leqslant c<+\infty$$

для всех $A>0$, то оператор I_{0+}^α ограничен из $L_p(R_1^+;\ \rho)$ в $L_q(R_+^1;\ r)$.

В работе J.-O. Strömberg, R. L. Wheeden [1] найдены достаточные условия полиномиально-весовых оценок для многомерных дробных интегралов (см. далее § 29) и, в частности, для дробных интегралов (5.2), (5.3) на оси. Приведем, например, один из результатов для оператора I_+^α. Пусть $1<p<\infty$, $0<1/p-1/q\leqslant\alpha$, $\beta=\alpha-1/p+1/q$, $Q(x)=\prod\limits_{k=1}^{n}|x-x_k|^{\mu_k}$, $-\infty<x_1<x_2<\ldots<x_n<+\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k\geqslant\beta$. Пусть еще

$$\rho(x)=|Q(x)|^p w(x),\quad r(x)=\left[|Q(x)|(1+|x|)^{-\beta}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{|x-x_k|}{1+|x-x_k|}\right)^{-\beta_k}\right]^q w(x)^{q/p},$$

где $\beta_k = \min(\mu_k, \beta)$, а неотрицательная измеримая функция $w(x)$ удовлетворяет так называемому условию Макенхоупта или условию A_p:

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(x)\,dx\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(x)^{-1/p'}dx\right)^{p-1}\leqslant c<+\infty,\quad 1<p<\infty,$$

где I—произвольный отрезок на R^1. Тогда оператор I_+^α ограничен из $L_p(R^1;\rho)$ в $L_q(R^1; r)$.

5.9. Теорема Харди—Литтлвуда 5.3 о действии оператора дробного интегрирования из L_p в L_q, $q=p/(1-\alpha p)$, распространена на пространства Орлича в работе R. O'Neil [2]. Пусть $L_M^*(R^1)$— пространство Орлича, порожденное N-функцией $M(u)$ (о пространствах Орлича см. в книге М. А. Красносельского, Я. Б. Рутицкого [1]). В статье R. O'Neil [2] показано, что если

$$1)\ \frac{uM'(u)}{M(u)}\geqslant p>1,\qquad 2)\ \int\limits_0^1\frac{M^{-1}(u)}{u^{1+\alpha}}\,du<\infty,$$

то оператор дробного интегрирования $I_\pm^\alpha$, $0<\alpha<1$, ограниченно действует из $L_M^*(R^1)$ в $L_C^*(R^1)$, где $C^{-1}(x)=\int\limits_0^x M^{-1}(u)\,u^{-1-\alpha}\,du$. Несколько более слабое утверждение другим методом получено в работе R. Sharpley [1]. При условии 1) функция $C(x)$ является N-функцией (R. O'Neil рассматривал многомерный случай).

См. также работы И. В. Гельмана [1], А. И. Ясакова [1], где рассматривалось действие операторов типа потенциала в пространствах $L_M^*(\Omega)$, $\operatorname{mes}\Omega<\infty$.

5.10. В работе С. П. Гейсберга [3] дробные производные Маршо $(\mathbf{D}_+^\alpha f)(x)$, $0<\alpha<1$, $x\in R^1$, изучались на функциях $f(x)$, локально гельдеровских (порядка больше α), ограниченных и таких, что существует $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\int\limits_{-N}^0 f(x)\,dx=c$. Для таких функций, в частности, показано, что $I_+^\alpha\mathbf{D}_+^\alpha f\equiv f(x)-c$.

5.11. В работе A. Marchaud [1] введен и исследован объект более общий, чем тот, что был назван нами дробной производной Маршо, см. (5.80). Именно А. Маршо рассматривал (см. с. 348—351 его работы) конструкции с обобщенными конечными разностями:

$$f^\alpha(x)=\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty\frac{\sum\limits_{i=0}^{l}c_i f(x-k_i t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\quad l=[\alpha]+1,$$

где k_i—произвольные положительные возрастающие числа, коэффициенты c_i подчинены условиям $\sum\limits_{i=0}^{l}c_i k_i^j=0$, $j=0, 1, \ldots, l-1$, а нормировочная постоянная равна $\gamma(\alpha)=\Gamma(-\alpha)\sum\limits_{i=0}^{l}c_i k_i^\alpha$ (в случае $\alpha=1, 2, \ldots$ нужно перейти к пределу при $\alpha\to m=1, 2,\ldots$).

Показано, что если $f(x)=I_+^\alpha\varphi$, то дробная производная Лиувилля $\mathcal{D}_+^\alpha f$ совпадает с $f^\alpha(x)$ и тем самым не зависит от выбора k_i. При выборе $k_i=i$, $c_i=(-1)^i\binom{l}{i}$ выражение для $f^\alpha(x)$ совпадает с (5.80).

5.12. Так называемые разделенные разности $[x_1, \ldots, x_{n+1}; f]=([x_2, \ldots, x_{n+1}; f]-[x_1, \ldots, x_n; f])/(x_{n+1}-x_n)$, $[x; f]=f(x)$, в связи с дробным интегродифференцированием рассматривались в работе T. Popoviciu [1]. В ней, в частности, показано (с. 39), что если эти разности ограничены, то $f(x)$ имеет непрерывные дробные производные порядка $\alpha<n$.

5.13. В работе L. Gearhart [1], где рассматривалось дробное интегрирование на полуоси $(0, \infty)$ с точки зрения теории полугрупп, построены подпространства в $L_2(0, \infty)$, инвариантные относительно левых сдвигов $(T_t f)(x) = f(x+t)$, $t > 0$, в которых оператор I_-^α ограничен. С этой целью введены аппроксимирующие операторы

$$W_\varepsilon^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\varepsilon t} T_t f dt, \quad \varepsilon > 0 \tag{9.4}$$

(ср. с модификацией (18.64) дробного интегрирования), унитарно эквивалентные теплицевым операторам на подпространствах Харди $H^2(R_+^2)$. На основании некоторых результатов Берлинга—Лакса, связанных с теплицевыми операторами и относящихся к подпространствам, инвариантным относительно сдвига, построена серия пространств $\hat{M} \subset L_2(0, \infty)$, в рамках которых существует сильный предел для W_ε^α. Рассмотрен также вопрос о совпадении этого предела с явной записью оператора I_-^α. В работе рассмотрен также предельный случай операторов чисто мнимого порядка $\alpha = i\eta$.

6.1. Имеется обобщение описания пространства $I^\alpha(L_p)$ на случай пространства $I^\alpha[L_p(\rho)]$ с общим весом, удовлетворяющим так называемому условию Макенхоупта—Видена. Оно дано в работе K. F. Andersen [1], см. его формулировку в § 29, п. 2°, 26. 11.

6.2. В работе С. Г. Самко, А. Ф. Чувенкова [1] теорема 6.2 об описании дробных интегралов от функций из L_p распространена с учетом результата R. O'Neil (см. выше 5.9) на пространства Орлича.

Пусть выполнены условия 1), 2) из 5.9 и функции $M(x)$, $C(x)$ удовлетворяют Δ_2-условию (см. книгу М. А. Красносельского, Я. Б. Рутицкого [1]). Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_M^*)$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_C^*(R^1)$ и чтобы $(\mathbf{D}_{+,\varepsilon}^\alpha f)(x)$ сходилась по норме $L_M^*(R^1)$ при $\varepsilon \to 0$.

Укажем, что $C(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию тогда и только тогда, когда существует постоянная $a > 0$ такая, что

$$\int_0^x \frac{M^{-1}(u)}{u^\alpha} \frac{du}{u} \leqslant a \frac{M^{-1}(u)}{u^\alpha}, \quad x \geqslant x_0.$$

6.3. Пусть $a * \varphi$—оператор свертки. Он ограниченно действует:

а) из $L_r(R^1)$, $1 \leqslant r < p$, в $I^\alpha(L_p)$, если $a(x) \in I^\alpha(L_q)$, $1/q = 1 - 1/r + 1/p$;

б) из $L_p(R^1)$ в $I^\alpha(L_p)$, если $a(x) \in I_+^\alpha(L_1)$ или $a(x) \in I_-^\alpha(L_1)$;

в) из $I^\alpha(L_r)$ в $I^\alpha(L_p)$, если $1 < r \leqslant p < 1/\alpha$ и $a(x) \in L_q(R^1)$, $1/q = 1 - 1/r + 1/p$ (С. Г. Самко [14; 27, с. 8]). Это утверждение выводится из равенства

$$a * \varphi = I_+^\alpha (\mathbf{D}_+^\alpha a * \varphi),$$

справедливость которого нетрудно получить при сформулированных условиях (учесть его справедливость на «хороших» функциях и ограниченность операторов в левой и правой частях в соответствующих пространствах).

6.4. Пусть $\omega_r(f, t)$—интегральный модуль непрерывности (6.31) функции $f(x)$ на полуоси R_+^1. Имеет место следующее обобщение оценки (6.39):

$$\omega_r(I_{0+}^\alpha \varphi, t) \leqslant c \|\varphi\|_p \, t^{\alpha + 1/r - 1/p}, \quad p \leqslant r \leqslant p/(1 - \alpha p), \tag{9.5}$$

где $1 < p < 1/\alpha$. Эта оценка является частным случаем общей оценки

$$\omega_r(\mathrm{K}\varphi, t) \leqslant \omega_s(\mathrm{k}, t) \|\varphi\|_p, \quad 1/p + 1/s = 1 + 1/r$$

для оператора $\mathrm{K}\varphi = \int_0^x \mathrm{k}(x-t)\varphi(t)\,dt$ (Н. К. Карапетянц).

7.1. Формула (7.1) преобразования Фурье дробного интеграла, доказанная для $\varphi \in L_1(R^1)$, распространяется на функции $\varphi \in L_p(R^1)$, $1 < p \leqslant 2$, $1 < p < 1/\alpha$, если сходимость интеграла Фурье $\mathcal{F}\varphi$ в (7.1) понимать по норме $L_{p'}$, а сходимость $\mathcal{F}(I_\pm^\alpha \varphi)$—по норме $L_{q'}$ (в соответствии с теоремой Хаусдорфа—Юнга), см. G. O. Okikiolu [2]; в этой работе рассматривался риссов потенциал по R^1. Доказательство из [2] можно упростить, привлекая обобщенные функции над основным пространством Φ, о котором см. в § 8.

7.2. В книге D. V. Widder [2, с. 73, 74] доказано следующее утверждение, примыкающее к теореме 7.2.

Теорема 9.1. *Пусть $\varphi(x) \in L_1(0, b)$ для любого $b > 0$ и существует интеграл* $\int\limits_0^\infty e^{-p_0 t}|\varphi(t)|\,dt$. *Тогда формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{(L\varphi)(p)}{p^\alpha}e^{px}dp = \begin{cases}(I^\alpha_{0+}\varphi)(x), & x \geqslant 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases}$$

справедлива при $\alpha \geqslant 1$, $\gamma > p_0$, $\gamma > 0$ или при $0 < \alpha \leqslant 1$, если еще функция $\varphi(u)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $u = x$, $x \geqslant 0$.

7.3. Пусть $S_p\varphi = \frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(t+x)^p}$ — *преобразование Стилтьеса*. Справедлива формула $I^{p-1}_{-}S_p\varphi = S_1\varphi$. В работе D. V. Widder [1] с помощью дробного интеграла (5.3) получена формула обращения обобщенного преобразования Стилтьеса

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{(x+t)^p} = f(x), \quad p > 0,$$

с комплексной функцией $\alpha(t)$, имеющей ограниченное изменение на любом отрезке $[0, R]$, $R > 0$, действительной оси (см. И. П. Натансон [1, с. 202]).

7.4. В случае функций $f(x) \in L_p(R^1_+)$ вопрос о существовании дробных производных $D^\alpha_+ f \in L_p(R^1_+)$ был охарактеризован в терминах преобразования Лапласа в работе H. Berens, U. Westphal [1].

7.5. Пусть $I^\alpha_{0+}\varphi$, $I^\alpha_{-}\varphi$—дробные интегралы (5.1), (5.3), $W_{k,m}(x)$—функция Уиттекера. R. S. Varma [1] ввел интегральное преобразование

$$(W_{k,m}\varphi)(x) = x\int\limits_0^\infty e^{-xt/2}(xt)^{m-1/2}W_{k,m}(xt)\,f(t)\,dt, \tag{9.6}$$

которое обобщает интегральное преобразование Лапласа (1.119), получающееся из него при $k + m = 1/2$. Такое преобразование впоследствии было названо *преобразованием Варма*. Установлено, что преобразование Лапласа от функций $x^{-\lambda}(I^\alpha_{0+}\varphi)(x)$ и $x^{-\lambda-1}(I^\alpha_{-}\varphi)(1/x)$ является преобразованием Варма (S. L. Kalla [1]), а от функций $(I^\lambda_{0+}\varphi)(x^2)$ и $x^{2\lambda-2}(I^\lambda_{-}\varphi)(x^{-2})$ — преобразованием Мейера, см. § 1, п. 4° (S. L. Bora, R. K. Saxena [1], B. Martić [1, 2]). Интегральные преобразования Варма и Стилтьеса (см. 7.3) и общие интегральные преобразования (1.101) от дробных интегралов рассмотрены в работах S. L. Kalla [1, 5, 8].

В работе K. J. Srivastava [1] показано, что *обобщенное преобразование Мейера*

$$\tilde{W}_{k,m}\varphi(x) = x\int\limits_0^\infty (xt)^{-k-1/2}\,e^{-xt/2}W_{k+1/2,m}(xt)\,\varphi(t)\,dt =$$
$$= x^{-m-k}\left(W_{k+1/2,m}\,t^{-k-m}\varphi(t)\right)(x) \tag{9.7}$$

от функций $x^{\alpha/2+k-m}(I^\alpha_{0+}\,t^{m-k}\varphi(t))(x)$ и $x^\alpha(I^+_{m-k+\alpha/2,\alpha}\varphi)(x)$, где $I^+_{\eta,\alpha}$ — оператор (9.2), является преобразованием вида (9.7).

В работе V. M. Bhise [1] введено интегральное преобразование

$$(G\varphi)(x) = x\int\limits_0^\infty G^{m+1,0}_{m,m+1}\left(xt\,\middle|\,{\eta_1+\alpha_1,\ldots,\eta_m+\alpha_m \atop \eta_1,\ldots,\eta_m,\rho}\right)\varphi(t)\,dt \tag{9.8}$$

с G-функцией Мейера (1.95) в ядре, называемое *преобразованием Мейера—Лапласа* и сводящееся при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$, $\alpha_m = -1/2 - m - k$, $\eta_m = 2m$, $\rho = 0$ к преобразованию Варма (9.6), а при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$, $\alpha_m = \rho = -m-k$, $\eta_m = m-k$—к обобщенному преобразованию Мейера (9.7). В работах S. L. Mathur [1, 2] найдены интегральные преобразования (9.8) от функций $x^{-\mu-\nu}(I^\alpha_{0+}\,t^\nu\varphi(t))(x)$ и $(I^+_{\eta,\alpha}\varphi)(x)$.

7.6. Ряд работ (S. L. Mathur [2], S. L. Rakesh [1], B. Singh [2]) посвящен нахождению интегральных преобразований специального типа от дробных интегралов. В работе S. L. Mathur [2] найдены интегральные преобразования Мейера (см. § 1, п. 4°) и преобразование $x^{-1}\int\limits_0^\infty {}_2F_1(\lambda, \mu; \nu; -t/x)\,\varphi(t)\,dt$ с гипергеометрической функцией Гаусса (1.72) в ядре от функций $x^\nu (I^\alpha_{0+}\varphi(\sqrt{t}))(x^2)$ и $x^\nu (I^\alpha_{0+}\varphi)(x)$ соответственно и даны приложения к вычислению дробных интегралов от H-функции Фокса. В работе B. Singh [2] вычислено интегральное преобразование с функцией Струве $\mathbf{H}_\nu(x)$ в ядре (см. § 1, п. 4°) от функции $x^{\nu+1/2}(I^\mu_{0+}\varphi)(x^2)$. В работе S. L. Rakesh [1] вычислено интегральное преобразование с H-функцией Фокса в ядре, введенное в статье K. C. Gupta, P. K. Mittal [1], от дробных интегралов (5.2), (5.3).

7.7. Пусть $F(s_1, \ldots, s_n) = L_n f$ — n-мерное преобразование Лапласа, а запись $G(s) = A_n F(s_1, \ldots, s_n)$ означает, что $G(s)$ есть одномерное преобразование Лапласа функции $f(t, t, \ldots, t)$. В связи с задачами теории нелинейных систем в работе J. Conlan, E. L. Koh [1] показано, что если

$$F(s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{s_m^{p+1}} F_1(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, s_{m+1}, \ldots, s_n),$$

то функции $G(s) = A_n F(s_1, \ldots, s_n)$ и $G_1(s) = A_{n-1}F_1(s_1, \ldots, s_{m-1}, s_{m+1}, \ldots, s_n)$ связаны друг с другом операцией дробного интегродифференцирования: $G(s) = \dfrac{(-1)^{[p]}}{\Gamma(p+1)}\mathcal{D}^p_{0+}G_1(s)$, см. также работу E. L. Koh, J. Conlan [1].

7.8. В работе C. V. L. Smith [1] с помощью дробных интегралов (5.3) и дробных производных (5.6) установлены связи между преобразованиями Лапласа—Стилтьеса $\int\limits_0^\infty e^{-xt}\,t^\rho\,d\alpha(t)$ с $\rho > 0$ и $\rho = 0$ и получены формулы обращения для них. Здесь $\alpha(t)$ — вещественнозначная функция с ограниченным изменением на любом интервале $(0, R)$, $R > 0$, действительной оси, удовлетворяющая условиям нормализации: $\alpha(0+) = 0$, $\alpha(t) = 2^{-1}[\alpha(t+0) + \alpha(t-0)]$.

8.1. Пространство Φ, рассмотренное в § 8, п. 2°, плотно в $L_p(R^1)$, $1<p<\infty$: для любой функции $f\in L_p$ и любого $\varepsilon>0$ существует функция $\varphi(x)\in\Phi$ такая, что $\|f-\varphi\|_p < \varepsilon$. Это доказано П. И. Лизоркиным [5] с помощью усреднений, названных им вполне уравновешенными. В работе С. Г. Самко [29] дано другое доказательство этого утверждения.

8.2. В работах W. Lamb [2, 3] развит подход к рассмотрению дробного интегрирования $I^\alpha_\pm$ обобщенных функций на прямой. Исследование основано на построенной автором (W. Lamb [1]) теории дробных степеней операторов в пространствах Фреше. Показано, что операторы $I^\alpha_\pm$ являются дробными степенями операторов $I^1_\pm$, изучаемых в пространствах

$$\mathcal{D}_{p,\mu} = \left\{\varphi\colon\ \varphi\in C^\infty(R^1),\ \frac{d^k}{dx^k}\,[e^{-\mu x}\varphi(x)]\in L_p(R^1),\quad k = 0, 1, 2, \ldots\right\},$$

и что оператор $I^\alpha_\pm$ осуществляет гомеоморфизм пространства $\mathcal{D}_{p,\mu}$ на себя, если $\mu>0$ в случае знака $+$ и если $\mu < 0$ в случае знака $-$.

8.3. В работах K. Skórnik [1, 2] рассмотрено дробное интегрирование $\int\limits_0^x e^{x^2-t^2} \times \dfrac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\varphi(x-t)\,dt$ и соответствующее дробное дифференцирование в классах обобщенных функций. Основное внимание уделено построению таких пространств обобщенных функций, в которых дробное дифференцирование однозначно обратимо. Чтобы «отсеять» нарушающие однозначность обобщенные функции, вводятся классы обобщенных функций, обращающихся в точке $x=0$ в нуль в определенном смысле (по Лоясевичу и др.).

8.4. Пусть $F_{p,\mu}$ — пространство основных функций, отмеченное в конце п. 4° § 8 (пространство А. МакБрайда (A. C. McBride [2, 3])). В работе G. Ahuja [1] рассмотрено действие в $F_{p,\mu}$ операторов Эрдейи типа (9.3) и более общих операторов.

№ п.п.	$\varphi(x),\ x>a$	$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x),\ x>a,\ \alpha\in\mathbf{C}$
1	$(x-a)^{\beta-1}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}$, $\operatorname{Re}\beta>0$
2	$(x\pm c)^{\gamma-1}$	$\dfrac{(a\pm c)^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}\,{}_2F_1\left(1,\ 1-\gamma;\ \alpha+1;\ \dfrac{a-x}{a\pm c}\right)$, $a\pm c>0,\ \gamma\in\mathbf{C}$
3	$(x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{1-\gamma}}\,{}_2F_1\left(\beta,\ 1-\gamma;\ \alpha+\beta;\ \dfrac{x-a}{b-a}\right)$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma\in\mathbf{C},\ a<x<b$
4	$\dfrac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}}$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ a<x<b$
5	$(x-a)^{\beta-1}(x\pm c)^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a\pm c)^{1-\gamma}}\,{}_2F_1\left(\beta,\ 1-\gamma;\ \alpha+\beta;\ \dfrac{a-x}{a\pm c}\right)$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ \gamma\in\mathbf{C},\ a\pm c>0$
6	$\dfrac{(x-a)^{\beta-1}}{(x\pm c)^{\alpha+\beta}}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a\pm c)^{\alpha}(x\pm c)^{\beta}}$, $\operatorname{Re}\beta>0,\ a\pm c>0$
7	$\dfrac{(x-a)^{\alpha}}{(x\pm c)^{\alpha+1/2}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\dfrac{1}{\sqrt{x\pm c}}\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{a\pm c}+\sqrt{x\pm c}}\right)^{2\alpha}$, $\operatorname{Re}\alpha>-1,\ a\pm c>0$
8	$e^{\lambda x}$	$\dfrac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}}\gamma(\alpha,\ \lambda x-\lambda a)=e^{\lambda a}(x-a)^{\alpha}\times$ $\times E_{1,\,\alpha+1}(\lambda x-\lambda a)$
9	$(x-a)^{\beta-1}e^{\lambda x}$	$\dfrac{\Gamma(\beta)e^{\lambda a}}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\,{}_1F_1(\beta;\alpha+\beta;\lambda x-\lambda a)$, $\operatorname{Re}\beta>0$
10	$(x-a)^{\alpha-1}e^{2i\lambda x}$	$\sqrt{\pi}(2\lambda)^{1/2-\alpha}(x-a)^{\alpha-1/2}e^{i\lambda(x+a)}J_{\alpha-1/2}(\lambda x-\lambda a)$, $\operatorname{Re}\alpha>0$
11	$\left\{\begin{matrix}\sin\lambda(x-a)\\ \cos\lambda(x-a)\end{matrix}\right\}$	$\dfrac{i^{-(1\pm1)/2}}{2\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}[{}_1F_1(1;\ \alpha+1;\ i\lambda(x-a))\mp$ $\mp{}_1F_1(1;\ \alpha+1;\ -i\lambda(x-a))]$
12	$\left\{\begin{matrix}\sin\lambda\sqrt{x-a}\\ \operatorname{sh}\lambda\sqrt{x-a}\end{matrix}\right\}$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{1/2-\alpha}(x-a)^{(2\alpha+1)/4}\left\{\begin{matrix}J_{\alpha+1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\\ I_{\alpha+1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\end{matrix}\right\}$
13	$(x-a)^{\beta-1}\left\{\begin{matrix}\sin\lambda(x-a)\\ \cos\lambda(x-a)\end{matrix}\right\}$, $\operatorname{Re}\beta>-(1\pm1)/2$	$\dfrac{i^{-(1\pm1)/2}}{2}\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[{}_1F_1(\beta;\alpha+\beta;$ $i\lambda(x-a))\mp{}_1F_1(\beta;\ \alpha+\beta;\ -i\lambda(x-a))]$
14	$(x-a)^{\alpha-1}\left\{\begin{matrix}\sin 2\lambda(x-a)\\ \cos 2\lambda(x-a)\end{matrix}\right\}$, $\operatorname{Re}\alpha>-(1\pm1)/2$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x-a}{2\lambda}\right)^{\alpha-1/2}\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda x-\lambda a)\\ \cos(\lambda x-\lambda a)\end{matrix}\right\}\times$ $\times J_{\alpha-1/2}(\lambda x-\lambda a)$
15	$(x-a)^{-1/2}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda\sqrt{x-a}\\ \operatorname{ch}\lambda\sqrt{x-a}\end{matrix}\right\}$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{1/2-\alpha}(x-a)^{(2\alpha-1)/4}\times$ $\times\left\{\begin{matrix}J_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\\ I_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\end{matrix}\right\}$

№ п.п.	$\varphi(x),\ x>a$	$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x),\ x>a,\ \alpha\in\mathbf{C}$
16	$\ln(x-a)$	$\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}[\ln(x-a)+\psi(1)-\psi(\alpha+1)]$
17	$(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[\psi(\beta)-$ $-\psi(\alpha+\beta)+\ln(x-a)]$, $\operatorname{Re}\beta>0$
18	$(x-a)^{\beta-1}\ln^m(x-a)$	$(x-a)^{\alpha+\beta-1}\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{d^k}{d\beta^k}\left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\times$ $\times\ln^{m-k}(x-a)$, $\operatorname{Re}\beta>0$, $m=1,2,\ldots$
19	$(x-a)^{\nu/2}J_{\nu}(\lambda\sqrt{x-a})$	$(2/\lambda)^{\alpha}(x-a)^{(\alpha+\nu)/2}J_{\alpha+\nu}(\lambda\sqrt{x-a})$, $\operatorname{Re}\nu>-1$
20	$(x-a)^{(2\alpha-3)/4}Y_{\alpha-1/2}(2\lambda\times$ $\times\sqrt{x-a})$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^{\alpha-1/2}J_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\times$ $\times Y_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})$, $\operatorname{Re}\alpha>0$
21	$(x-a)^{(2\alpha-3)/4}\times$ $\times K_{\alpha-1/2}(2\lambda\sqrt{x-a})$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)^{\alpha-1/2}I_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})\times$ $\times K_{\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x-a})$, $\operatorname{Re}\alpha>0$
22	$(x-a)^{\beta-1}{}_2F_1(\mu,\nu;\beta;\lambda(x-a))$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}{}_2F_1(\mu,\nu;\alpha+\beta;\lambda x-$ $-\lambda a)$, $\operatorname{Re}\beta>0$
23	$(x-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}((x-a)^{\mu})$	$(x-a)^{\alpha+\beta-1}E_{\mu,\alpha+\beta}((x-a)^{\mu})$, $\operatorname{Re}\mu>0$, $\operatorname{Re}\beta>0$

ТАБЛИЦА 9.2

№ п.п.	$\varphi(x),\ x\in R^1$	$(I^{\alpha}_{+}\varphi)(x),\ x\in R^1,\ \alpha\in\mathbf{C}$
1	$(b-ax)^{\gamma-1}$	$\frac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)a^{\alpha}}(b-ax)^{\alpha+\gamma-1}$, $a>0,\ ax<b,\ \operatorname{Re}(\alpha+\gamma)<1$
2	$\frac{1}{(1\pm ix)^{\mu}}$	$\frac{\Gamma(\mu-\alpha)}{\Gamma(\mu)}e^{\pm\alpha\pi i/2}\frac{1}{(1\pm ix)^{\mu-\alpha}}$, $\operatorname{Re}(\mu-\alpha)>0,\ \mu\neq0,-1,-2,\ldots$
3	$(x-a)_{+}^{\beta-1}$	$\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)_{+}^{\alpha+\beta-1}$, $\operatorname{Re}\beta>0$
4	$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha}e^{\lambda x}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$
5	$\left\{\begin{matrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{matrix}\right\}$	$\lambda^{-\alpha}\left\{\begin{matrix}\sin(\lambda x-\alpha\pi/2)\\ \cos(\lambda x-\alpha\pi/2)\end{matrix}\right\}$, $\lambda>0,\ \operatorname{Re}\alpha<1$
6	$e^{\lambda x}\left\{\begin{matrix}\sin\gamma x\\ \cos\gamma x\end{matrix}\right\}$	$\frac{e^{\lambda x}}{(\lambda^2+\gamma^2)^{\alpha/2}}\left\{\begin{matrix}\sin(\gamma x-\alpha\varphi)\\ \cos(\gamma x-\alpha\varphi)\end{matrix}\right\}$, $\varphi=\operatorname{arctg}(\gamma/\lambda),\ \operatorname{Re}\lambda>0,\ \gamma>0$

№ п. п.	$\varphi(x),\ x\in R^1$	$(I_-^{\alpha}\varphi)(x),\ x\in R^1,\ \alpha\in C$
1	$x^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\,x^{\alpha+\gamma-1}$, $\operatorname{Re}(\alpha+\gamma)<1$
2	$(ax+b)^{\gamma-1}$	$\dfrac{\Gamma(1-\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)\,a^{\alpha}}\,(ax+b)^{\alpha+\gamma-1}$, $\operatorname{Re}(\alpha+\gamma)<1$, $\lvert\arg(a/b)\rvert<\pi$
3	$\dfrac{1}{[(x+a)(x+b)]^{\alpha+1/2}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\;\dfrac{[(x+a)(x+b)]^{-1/2}}{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})^{2\alpha}}$, $\operatorname{Re}\alpha>-1$
4	$e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha}e^{-\lambda x}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$
5	$e^{-\lambda\sqrt{x}}$	$2^{\alpha+1/2}\pi^{-1/2}a^{1/2-\alpha}x^{(2\alpha+1)/4}K_{\alpha+1/2}(\lambda\sqrt{x})$, $\operatorname{Re}\lambda>0$
6	$\begin{Bmatrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{Bmatrix}$	$\lambda^{-\alpha}\begin{Bmatrix}\sin(\lambda x+\alpha\pi/2)\\ \cos(\lambda x+\alpha\pi/2)\end{Bmatrix}$, $\lambda>0$, $\operatorname{Re}\alpha<1$
7	$\begin{Bmatrix}\sin\lambda\sqrt{x}\\ \cos\lambda\sqrt{x}\end{Bmatrix}$	$\sqrt{\pi}\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^{\alpha-1/2}x^{(2\alpha+1)/4}\begin{Bmatrix}Y_{-\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x})\\ J_{-\alpha-1/2}(\lambda\sqrt{x})\end{Bmatrix}$, $\lambda>0$, $\operatorname{Re}\alpha<1/2$
8	$e^{-\lambda x}\begin{Bmatrix}\sin\gamma x\\ \cos\gamma x\end{Bmatrix}$	$\dfrac{e^{-\lambda x}}{(\lambda^2+\gamma^2)^{\alpha/2}}\begin{Bmatrix}\sin(\gamma x+\alpha\varphi)\\ \cos(\gamma x+\alpha\varphi)\end{Bmatrix}$, $\gamma>0$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\varphi=\operatorname{arctg}(\gamma/\lambda)$
9	$x^{-\nu/2}J_{\nu}(\lambda\sqrt{x})$	$(2/\lambda)^{\alpha}x^{(\alpha-\nu)/2}J_{\nu-\alpha}(\lambda\sqrt{x})$, $\lambda>0$, $\operatorname{Re}(2\alpha-\nu)<3/2$
10	$x^{-\nu/2}\begin{Bmatrix}Y_{\nu}(\lambda\sqrt{x})\\ K_{\nu}(\lambda\sqrt{x})\end{Bmatrix}$	$\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^{\alpha}x^{(\alpha-\nu)/2}\begin{Bmatrix}Y_{\nu-\alpha}(\lambda\sqrt{x})\\ K_{\nu-\alpha}(\lambda\sqrt{x})\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}\lambda>0,\ \operatorname{Re}(2\alpha-\nu)<3/2\\ \operatorname{Re}\lambda>0\end{Bmatrix}$

8.5. Интересное развитие подхода Л. Шварца, связанное с разностями дробного порядка, дано в ряде работ A. Brédimas [1—5]. Оператор дробного дифференцирования вводится в этих работах как

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k\to 0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}f(x-kh)/h^{\alpha} \tag{9.9}$$

(см. о таком подходе в случае обычных функций в § 20). Выяснено, что при надлежащем толковании этого предела сужение оператора (9.9) на подпространство шварцевых обобщенных функций, сосредоточенных на полуоси R^1_+, совпадает с определением дробного интегрирования (порядка $-\alpha$) по Л. Шварцу, изложенным в § 8, п. 3°.

8.6. В работе A. C. McBride [7] с помощью операторов дробного интегродифференцирования Эрдейи—Кобера (18.1), (18.2) введены дробные степени обыкновенных дифференциальных операторов

$$L=x^{a_1}\mathcal{D}\,x^{a_2}\mathcal{D}\,x^{a_3}\ldots x^{a_n}\mathcal{D}\,x^{a_{n+1}},\quad \mathcal{D}=d/dx, \tag{9.10}$$

и рассмотрены их свойства в пространствах обобщенных функций $F_{p,\mu}$ (см. § 8, п. 4°).

Индексные законы $I^{\alpha}\, I^{\beta} = I^{\alpha+\beta}$, $I^{\alpha}\, x^{-\alpha-\beta}\, I^{\beta} = x^{-\beta}\, I^{\alpha+\beta}\, x^{-\alpha}$ для дробных интегралов и производных (относительно второго см. § 10) перенесены в работе A. C. McBride [8] на операторы (9.10) и операторы $L' = (-1)^n x^{a_{n+1}} \mathcal{D}\, x^{a_n} \ldots x^{a_2} \mathcal{D}\, x^{a_1} I$, $\mathcal{D} = d/dx$, а в работе A. C. McBride [9]—на операторы T^{α}, определяемые с помощью преобразования Меллина (1.112) соотношением

$$(\mathfrak{M}T^{\alpha}\, \varphi)(x) = \frac{h\,(x)}{h\,(x+\alpha\gamma)}\; (\mathfrak{M}\varphi)(x+\alpha\gamma),$$

где h — фиксированная функция; γ — фиксированное число.

О «дробном исчислении» операторов $T\alpha$ см. также в обзоре A. C. McBride [11], где можно найти и другие ссылки.

3°. Таблицы дробных интегралов и производных. Значения дробных интегралов различных специальных и элементарных функций можно найти в справочниках Г. Бейтмена, А. Эрдейи [4, гл. 13] и А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1—3], причем в последнем такие формулы специально не выделялись как формулы дробного интегрирования, а приведены там в ином виде. Относительно небольшие таблицы содержатся также в работах T. R. Higgins. [5], K. B. Oldham, J. Spanier [1], R. Tremblay [1, с. 91—92, 426—433], J. L. Lavoie, R. Tremblay, T. J. Osler [1], J. L. Lavoie, T. J. Osler, R. Tremblay [1], K. Nishimoto [6], T. J. Osler [1, 3]. Отметим также, что большое число дробных интегралов и производных от различных элементарных и не элементарных функций было вычислено еще А. В. Летниковым [6—8, 10, 11], 1882—1888 гг. Многие такие формулы можно получить методом, изложенным в работах О. И. Маричева [10, 11].

Табл. 9.1—9.3 в отличие от указанных содержат не только дробные интегралы, но и дробные производные. Формулы из этих таблиц могут быть получены при условии $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, а затем распространены на $\mathrm{Re}\,\alpha\leqslant 0$ методом аналитического продолжения по параметру α. Отметим еще, что условие $\mathrm{Re}\,\beta>0$, связанное со сходимостью интеграла на конце $x=a$, также можно опустить, если оператор I^{α}_{a+} понимать в смысле интегрирования по петле Похгаммера (подробнее об этом см. в § 22). Некоторые формулы объединены в два уровня так же, как в справочниках А. П. Прудникова, Ю. А. Брычкова, О. И. Маричева [1—3].