ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕНТЯБРЬ 1977 г., ТОМ XIII, № 9

УДК 517.937

Я. В. РАДЫНО

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ч. II. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Настоящая работа является продолжением работы [1]. Здесь исследуется вопрос о свойствах решений линейных дифференциальных уравнений с постоянным регулярным оператором в отделимых локально выпуклых пространствах. Наши результаты обобщают некоторые результаты, полученные Х. Массерой и Х. Шеффером [3], а также Ю. Л. Далецким и М. Г. Крейном [2] для банаховых пространств.

Некоторые применения построенной теории к уравнениям с частными производными и бесконечным системам обыкновенных линейных дифференциальных уравнений будут даны в следующей работе.

§ 1. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО И НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть E — квазиполное бочечное пространство, $A : E \to E$ — регулярный оператор [1], r_A — его спектральный радиус и $M > r_A$.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{1.2}$$

Очевидно, что $x(t) = e^{tA}x_0$ является дифференцируемым решением этой задачи. Чтобы доказать единственность этого решения в классе дифференцируемых функций, достаточно показать, что в этом классе задача

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = 0 \tag{1.3}$$

имеет только тривиальное решение. Но при этих предположениях задача (1.3) эквивалентна уравнению

$$x(t) = \int_0^t Ax(s)\,ds. \tag{1.4}$$

Ввиду предложения 8 [1] можно предполагать, что $p(Ax) \leqslant Mp(x)$ для всех $p \in \mathscr{B}\,\mathrm{Spec}\,E$, где $\mathscr{B}\,\mathrm{Spec}\,E$ — базис непрерывных полунорм на E.

Имеем $x(0) = 0$. Покажем, что для некоторого $\delta > 0$ $x(t) = 0$ при $|t| < \delta$. Тогда в силу непрерывности $x(t)$ будет следовать, что $x(t) \equiv 0$. Из (1.4) получаем $p(x(t)) \leqslant M\delta \sup\limits_{|s| \leqslant \delta} p(x(s))$ при $|t| \leqslant \delta$, т. е. имеем $\sup\limits_{|t| \leqslant \delta} p(x(t)) \leqslant M\delta \sup\limits_{|t| \leqslant \delta} p(x(t))$ для каждой $p \in \mathscr{B}\,\mathrm{Spec}\,E$. Если

$\sup\limits_{|t|\leqslant\delta} p(x(t))\neq 0$ хотя бы для некоторой p, то, выбирая $M\delta<1$, получили бы противоречие. Что вместе с отделимостью E доказывает утверждение.

Рассматривая вместо уравнения (1.1) уравнение

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t), \tag{1.5}$$

где $f(t)$ — непрерывная функция, и применяя метод вариации постоянной, получим решение задачи (1.5), (1.2) в виде

$$x(t)=e^{tA}x_0+\int\limits_0^t e^{(t-s)A}f(s)\,ds. \tag{1.6}$$

Пусть A и B — регулярные операторы в E. Рассмотрим операторную задачу Коши

$$\frac{dU}{dt}=A\circ U+U\circ B, \tag{1.7}$$

$$U(t_0)=C. \tag{1.8}$$

Перепишем уравнение (1.7) в виде

$$\frac{dU}{dt}=(\mathscr{A}+\mathscr{B})\,U, \tag{1.9}$$

где $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — соответствующие операторы в пространстве $\mathscr{L}_\beta(E)$ линейных непрерывных операторов с топологией равномерной сходимости на всех ограниченных подмножествах. Согласно предложению 2 [1], операторы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются регулярными и $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$. Отсюда следует, что $e^{t(\mathscr{A}+\mathscr{B})}=e^{t\mathscr{A}}\circ e^{t\mathscr{B}}$. В силу предыдущих рассуждений, дифференцируемое решение задачи Коши (1.9), (1.8) имеет вид

$$U(t)=e^{(t-t_0)(\mathscr{A}+\mathscr{B})}\,C=e^{(t-t_0)A}\circ C\circ e^{(t-t_0)B}. \tag{1.10}$$

Точно так же получим, что решение для уравнения

$$\frac{dU}{dt}=A\circ U+U\circ B+F(t), \tag{1.11}$$

где $F(t)$ — непрерывная со значением в $\mathscr{L}_\beta(E)$ функция, имеет вид

$$U(t)=e^{(t-t_0)A}\circ U(t_0)\circ e^{(t-t_0)B}+\int\limits_{t_0}^t e^{(t-s)A}\circ F(s)\circ e^{(t-s)B}\,ds. \tag{1.12}$$

§ 2. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Предположим, что $\operatorname{sp} A$ лежит внутри левой полуплоскости, т. е. существует $\nu>0$ такой, что $\operatorname{Re}\lambda<-\nu$ для всех $\lambda\in\operatorname{sp} A$. Ввиду представимости решения задачи Коши для однородного уравнения в виде $x(t)=e^{tA}x_0$ и в силу предложения 5 [1] для любой непрерывной полунормы p на E найдется непрерывная полунорма q такая, что

$$p(e^{tA}x_0)\leqslant e^{-\nu t}q(x_0),\quad t\geqslant 0. \tag{2.1}$$

Отсюда немедленно следует, что решение $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Ввиду того же предложения 5 [1] верно и обратное, а именно, если неравенство (2.1) справедливо для всякого решения уравнения (1.1), то спектр $\mathrm{sp}\, A$ оператора A лежит внутри левой полуплоскости.

Если $\mathrm{sp}\, A$ лежит внутри левой полуплоскости, то топология пространства E определяется полунормами [1]:

$$p_A(x) \equiv p_{A,1}(x) = \int_0^\infty p(e^{tA}x_0)\,dt, \quad p \in \mathrm{Spec}\, E. \tag{2.2}$$

Легко видеть, что полунорма $p_{A,1}$ каждого решения уравнения (1.1) монотонно стремится к нулю при $t \to +\infty$. Действительно,

$$p_{A,1}(x(t)) = \int_0^\infty p(e^{sA}x(t))\,ds = \int_0^\infty p(e^{(s+t)A}x_0\,ds = \int_t^\infty p(e^{sA}x_0)\,ds,$$

откуда $\frac{d}{dt}p_{A,1}(x(t)) = -p(e^{tA}x_0) \leqslant 0$.

Предположим теперь, что $\mathrm{sp}\, A = \mathrm{sp}_+ A \cup \mathrm{sp}_- A$, причем $\mathrm{sp}_+ A \neq \varnothing$. Пусть P_+, P_- — спектральные проекторы на подпространства E_+ и E_- соответственно и $E = E_+ \oplus E_-$. Так как $E_\pm$ инвариантны относительно A, то они инвариантны и относительно e^{tA} $(0 \leqslant t < \infty)$. А это означает, что решение $x(t) = e^{tA}x_0$ уравнения (1.1), начинающееся в каком-нибудь из этих подпространств, уже не выходит из него. Вводя функцию

$$f_A(x) = \int_0^\infty \{p(e^{tA}P_-x) - p(e^{-tA}P_+x)\}\,dt, \tag{2.3}$$

получим, что $f_A(x(t)) = \int_t^\infty p(e^{sA}P_-x_0)\,ds - \int_{-t}^\infty p(e^{-sA}P_+x_0)\,ds$. Отсюда

$$\frac{d}{dt}f_A(x(t)) = -p(e^{tA}P_-x_0) - p(e^{tA}P_+x_0) \leqslant 0. \tag{2.4}$$

Таким образом, значения функции f_A на каждом решении уравнения (1.1) монотонно убывают.

З а м е ч а н и е. Неравенство (2.4), как и аналогичное неравенство для полунормы $p_{A,1}$, является *строгим* для некоторого $p \in \mathrm{Spec}\, E$ ввиду отделимости пространства E.

Рассмотрим теперь два случая. a) Пусть $P_+x_0 = 0$, т. е. $x_0 \in E_-$. Тогда $f_A(x_0) = p_{A,1}(x_0)$. В этом случае $x(t) = e^{tA}x_0 \in E_-$ и, значит, что $f_A(x(t)) = p_{A,1}(x(t)) \to 0$ монотонно при $t \to \infty$.

Таким образом, если $x_0 \in E_-$, то решения уравнения (1.1) стремятся к нулю.

b) Пусть $P_-x_0 = 0$, т. е. $x_0 \in E_+$, следовательно, и $x(t) = e^{tA}x_0$. Этот случай сводится к предыдущему заменой A на $-A$ и обращением времени. Таким образом, получаем, что ненулевое решение задачи (1.1), (1.2) уходит на бесконечность при $t \to +\infty$.

Отметим, что из разложения $x(t) = e^{tA}x_0 = e^{tA}P_+x_0 + e^{tA}P_-x_0 = P_+e^{tA}x_0 + P_-e^{tA}x_0$ следует неограниченное возрастание любого решения, для которого $P_+x_0 \neq 0$.

§ 3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Сейчас выясним, когда решения уравнения (1.1) ограничены на всей вещественной оси.

Так как совокупость решений задается выражением $x(t) = e^{tA}x_0$, то из требования ограниченности будем иметь оценку $p(e^{tA}x_0) \leqslant C_{p,x_0}$

$(-\infty<t<+\infty)$ для $\forall p\in \operatorname{Spec} E$. Константа C_{p, x_0} зависит только от p и x_0. Если E — бочечно, то ввиду теоремы Банаха — Штейнгауза семейство $\{e^{tA}x_0\}$ равностепенно непрерывно для всех $t\in\mathbf{R}$. В силу предложения 6 [1] заключаем, что спектр оператора A лежит на мнимой оси.

Сейчас исследуем тот же вопрос для уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d^2u}{dt^2}+Au=0, \tag{3.1}$$

где $A: E\to E$ — регулярный оператор.

Сведем это уравнение к уравнению первого порядка в пространстве $E^2=E\times E$ с топологией, определяемой полунормами

$$\mathscr{P}(x)=p(x_1)+q(x_2), \quad p,\ q\in \operatorname{Spec} E, \quad x=(x_1,\ x_2)\in E^2. \tag{3.2}$$

Стандартной заменой $u=x_1$, $\dfrac{du}{dt}=x_2$ сведем уравнение (3.1) к уравнению

$$\frac{dx}{dt}=\mathscr{A}x, \quad \mathscr{A}=\begin{pmatrix}0 & I\\ -A & 0\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что

$$\mathscr{A}^{2k}=(-1)^k\begin{pmatrix}A^k & 0\\ 0 & A^k\end{pmatrix}, \quad \mathscr{A}^{2k+1}=(-1)^k\begin{pmatrix}0 & A^k\\ -A^{k+1} & 0\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Кроме того, ясно, что $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(E^2)$. Покажем, что $\mathscr{A}$ — регулярный оператор в E^2.

Так как $A\in\mathscr{L}(E)$ — регулярен по условию, то для всех $u\in E$ и $n\in\mathbf{N}$ имеем оценку

$$p(A^nu)\leqslant M^nq(u), \quad p,\ q\in \operatorname{Spec} E. \tag{3.5}$$

Для любой $\mathscr{P}\in \operatorname{Spec} E^2$ и $x\in E^2$ из (3.4) и (3.2) имеем

$$\mathscr{P}(\mathscr{A}^{2k}x)=\mathscr{P}(A^kx_1,\ A^kx_2)=p(A^kx_1)+q(A^kx_2)\leqslant M^k\mathscr{P}_1(x), \tag{3.6}$$

$$\mathscr{P}(\mathscr{A}^{2k+1}x)=\mathscr{P}(A^kx_2,\ -A^{k+1}x_1)=p(A^kx_2)+q(A^{k+1}x_1)\leqslant$$

$$\leqslant M^kp_1(x_2)+M^{k+1}q_1(x_1)=M^{k+\frac{1}{2}}\left[\frac{p_1(x_2)}{\sqrt{M}}+\sqrt{M}\,q_1(x_1)\right]=$$

$$=M^{k+\frac{1}{2}}\mathscr{P}_2(x). \tag{3.7}$$

Выбирая $\mathscr{P}_3\in \operatorname{Spec} E^2$ так, чтобы $\mathscr{P}_3\geqslant\max(\mathscr{P}_1,\ \mathscr{P}_2)$, получим

$$\mathscr{P}(\mathscr{A}^nx)\leqslant M^{n/2}\mathscr{P}_3(x), \quad \forall n\in\mathbf{N}. \tag{3.8}$$

Таким образом, $\mathscr{A}\in\mathscr{L}(E^2)$ — регулярный оператор. Значит, определяется функция $e^{t\mathscr{A}}$:

$$e^{t\mathscr{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}t^n\frac{\mathscr{A}^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}\frac{\mathscr{A}^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k+1}\frac{\mathscr{A}^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{3.9}$$

Принимая, по аналогии со скалярным случаем, обозначение

$$\cos tA^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}A^k}{(2k)!},$$
$$-A^{1/2}\sin tA^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}A^k}{(2k+1)!}, \tag{3.10}$$

будем иметь

$$e^{t\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \cos tA^{1/2} & -A^{1/2}\sin tA^{1/2} \\ -A^{1/2}\sin tA^{1/2} & \cos tA^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Таким образом, если $x_0 = (u_0, u_0')$, то решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_0'$, имеет вид $x(t) = e^{t\mathcal{A}}x_0$, или, учитывая (3.11),

$$u(t) = (\cos tA^{1/2})u_0 + (A^{-1/2}\sin A^{1/2})u_0'. \tag{3.12}$$

Из последней формулы очевидным образом вытекает, что ограниченность при $t \in \mathbf{R}$ каждого решения уравнения (3.1) эквивалентна сильной ограниченности оператор-функций $\cos tA^{1/2}$ и $A^{-1/2}\sin tA^{1/2}$ при $t \in \mathbf{R}$. Покажем, что достаточно потребовать ограниченности $A^{-1/2}\sin tA^{1/2}$ при $t \in \mathbf{R}$. Положим $y(t) = (A^{-1/2}\sin tA^{1/2})y_0$. Из формул (3.11), счетной полноты E и регулярности оператора A непосредственным вычислением получаем, что

$$y'(t) = (\cos tA^{1/2})y_0, \quad y''(t) = -(A^{1/2}\sin tA^{1/2})y_0 = -Ay(t).$$

По условию функция $y(t)$, а значит, и $y''(t)$ (ибо A непрерывен) ограничена при каждом фиксированном y_0. Покажем, что $y'(t)$ ограничена на $\mathbf{R}$. Положим

$$y''(t) - y(t) = f(t). \tag{3.13}$$

Очевидно $f(t)$ ограничена вместе с $y(t)$ и $y''(t)$. Рассматривая (3.13) как дифференциальное уравнение, выразим его ограниченное на всей оси решение формулой

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t-s|}f(s)\,ds. \tag{3.14}$$

Интеграл в (3.14) сходится абсолютно, что проверяется непосредственно ввиду полноты E и регулярности A. Дифференцированием (3.14) устанавливаем неравенство

$$\sup_t p(y'(t)) \leqslant \sup_t p(f(t)), \quad \forall p \in \operatorname{Spec} E.$$

Таким образом, получена

Теорема 1. *Если каждое решение уравнения $\frac{dx}{dt} = Ax$ ограничено на всей оси, а E — бочечно, то* $\operatorname{sp} A$ *лежит на мнимой оси.*

Для того чтобы все решения уравнения $\frac{d^2u}{dt^2} + Au = 0$ были ограничены на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы были ограниченными решения, удовлетворяющие условию $u(0) = 0$.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ У НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t), \tag{4.1}$$

$f(t)$ — непрерывная функция.

Предположим, что спектр оператора A распадается на два спектральных множества $\operatorname{sp} A=\operatorname{sp}_1 A\cup \operatorname{sp}_2 A$, E_1, E_2 — инвариантные подпространства оператора A, соответствующие этим множествам и P_1, P_2 — соответствующие спектральные операторы

$$P_k=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k} R_\lambda d\lambda.$$

Рассмотрим *функцию Грина*

$$G(t)=\begin{cases} e^{tA}P_1=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_1} e^{\lambda t}R_\lambda d\lambda, & t>0,\\ -e^{tA}P_2=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_2} e^{\lambda t}R_\lambda d\lambda, & t<0.\end{cases} \tag{4.2}$$

Отметим, что сходимость в этих интегралах понимается в смысле борнологии равностепенной непрерывности [1] и поэтому они сходятся во всех операторных топологиях в $\mathscr{L}_\beta(E)$.

Функция $G(t)$, определяемая (4.2), обладает следующими свойствами, которые проверяются вычислением.

1) При $t\neq 0$, $G(t)\in\mathscr{L}_\beta(E)$ непрерывна, дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG(t)}{dt}=A\circ G(t).$$

2) Скачок $G(t)$ в нуле равен тождественному оператору.

3) Функция $x(t)=\int\limits_a^b G(t-s)f(s)ds$ удовлетворяет при $a\leqslant t\leqslant b$ уравнению (4.1).

Теперь рассмотрим случай, когда $\operatorname{sp} A=\operatorname{sp}_+ A\cup \operatorname{sp}_- A$. Функцию, определяемую формулой

$$G_A(t)=\begin{cases} e^{tA}P_-, & t>0,\\ e^{tA}P_+, & t<0,\end{cases} \tag{4.3}$$

называют *главной функцией Грина* уравнения (4.1).

Так как $\operatorname{sp} A$ не пересекается с мнимой осью, то из предложения 5 [1] следует существование числа $\nu>0$ такого, что для любого $p\in\operatorname{Spec} E$ существует $q\in\operatorname{Spec} E$, для которого выполняется

$$p(G_A(t)x)\leqslant e^{-\nu|t|}q(x),\quad \forall t\in\mathbf{R},\quad x\in E. \tag{4.4}$$

Теорема 2. *Для того чтобы любой ограниченной на всей оси непрерывной функции $f(t)$ соответствовало одно ограниченное решение уравнения (4.1), необходимо, чтобы собственные значения оператора A*

не лежали на мнимой оси, и достаточно, чтобы спектр оператора A не пересекался с мнимой осью. Это решение дается формулой

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)f(s)\,ds. \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть любой ограниченной функции $f(t)$ соответствует единственное ограниченное решение.

Положим $f(t)=y$ и $x(t)$ — единственное ограниченное решение уравнения $\frac{dx}{dt}=Ax+y$. Вектор $x(t+\tau)$ при любом τ также является решением этого уравнения. В силу единственности $x(t+\tau)=x(t)$, т. е. $x(t)=$ $=x=\mathrm{const}$. Следовательно, $Ax=-y$. Ввиду произвольности y, A — сюрьективно. Инъективность A следует из того, что если $y=0$, то $x=0$ ввиду единственности. Таким образом, $\lambda=0$ не является собственным значением оператора A. Для того чтобы увидеть, что каждое мнимое число не является собственным значением оператора A, рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=Ax+ye^{\rho it} \text{ для } \rho\in\mathbf{R}.$$

Очевидно, функция $f(t)=ye^{\rho it}$ ограничена при любом $\rho\in\mathbf{R}$. Поэтому это уравнение обладает единственным ограниченным решением $x(t)=0$. Делая замену $x=\xi e^{\rho it}$, придем к уравнению

$$\frac{d\xi}{dt}=(A-\rho iI)\xi+y,$$

обладающему единственным ограниченным решением $\xi(t)$, которое, очевидно, постоянно. (Рассуждение такое, как и выше, учитывая тот факт, что оператор $A+\lambda I$ регулярен вместе с оператором A для любого λ.) Таким образом, ρi не является собственным значением оператора A.

Для доказательства достаточности воспользуемся неравенством (4.4), из которого следует, что функция (4.5) ограничена. Тот факт, что она удовлетворяет уравнению (4.1), установлен ранее. Осталось только показать, что при предположении непересечения спектра с мнимой осью ограниченное решение единственно. Для этого достаточно проверить, что при этих предположениях уравнение $\frac{dx}{dt}=Ax$ не имеет ограниченных на всей оси решений, кроме нулевого.

Предположим, что таковое есть $x(t)=e^{tA}x_0$. Полагая $A_-=P_-\circ A$, $A_+=P_+\circ A$, запишем его в виде $x(t)=e^{tA_-}P_-x_0+e^{tA_+}P_+x_0$. Поскольку $\mathrm{sp}\,A_-=\mathrm{sp}_-A$ в левой полуплоскости, то первое слагаемое при $t>0$ ограничено, а значит, ограничено и второе, т. е.

$$p(e^{tA_+}P_+x_0)<C_p \quad (t>0) \quad \forall p\in \mathrm{Spec}\,E.$$

Но $\mathrm{sp}\,A_+=\mathrm{sp}_+A$ лежит внутри правой, а, значит, $\mathrm{sp}\,(-A_+)$ лежит внутри левой полуплоскости и, ввиду предложения 4 [1], имеем

$$p(P_+x_0)=p(e^{-tA_+}(e^{tA_+}P_+x_0))\leqslant e^{-\nu t}q(e^{tA_+}P_+x_0)\leqslant e^{-\nu t}C_q$$

для любой полунормы p. Переходя к пределу при $t\to\infty$, из отделимости E заключаем, что $P_+x_0=0$.

Переписывая $x(t)$ в виде $x(t)=e^{-t(-A_-)}P_-x_0+e^{-t(-A_+)}P_+x_0$ и учитывая, что $\operatorname{sp}(-A_+) = -\operatorname{sp}_+ A$ лежит внутри левой полуплоскости, второе слагаемое в $x(t)$ ограничено при $t<0$. Значит, ограничено и первое, т. е.

$$p(e^{tA_-}P_-x_0) < C_p, \quad t<0, \quad \forall p \in \operatorname{Spec} E.$$

Из неравенства $p(P_-x_0) = p(e^{-tA_-}(e^{tA_-}P_-x_0)) \leqslant e^{\nu t}C_q$ при $t<0$ получим при $t \to -\infty$, что $p(P_-x_0)=0$ для $\forall p \in \operatorname{Spec} E$, т. е. $P_-x_0=0$. Таким образом, доказано, что $x_0=0$, а это значит, что $x(t)=0$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{sp} A$ *не пересекается с мнимой осью и* $f(t)$ — *непрерывная, ограниченная на полуоси* $[t_0, \infty)$ *функция. Каждому элементу* $x_0^- \in E_-$ *отвечает единственное ограниченное на* $[t_0, \infty)$ *решение* $x(t)$ *уравнения (4.1), удовлетворяющее условию* $P_-x(t_0) = x_0^-$. *Это решение дается формулой*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0^- + \int_{t_0}^{\infty} G_A(t-s)f(s)\,ds. \tag{4.6}$$

Доказательство. Уравнение (4.1) эквивалентно системе двух независимых уравнений

$$\frac{dx_+}{dt} = A_+x_+ + f_+(t), \quad (4.7) \quad \frac{dx_-}{dt} = A_-x_- + f_-(t) \tag{4.8}$$

в подпространствах $E_+ = P_+E$ и $E_- = P_-E$ соответственно. Здесь $x_\pm = P_\pm x$, $f_\pm = P_\pm f$, $A_\pm = P_\pm A$, при этом $\operatorname{sp} A_+ = \operatorname{sp}_+ A$ и $\operatorname{sp} A_- = \operatorname{sp}_- A$.

При любом $x_-(t_0) = P_-x_0$ существует решение

$$x_-(t) = e^{(t-t_0)A_-}P_-x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A_-}f_-(s)\,ds = e^{(t-t_0)A}P_-x_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{(t-s)A}P_-f(s)\,ds \tag{4.9}$$

уравнения (4.8) и оно ограничено.

Уравнение (4.7) не может иметь более одного ограниченного решения при $t \geqslant t_0$, ибо таких решений, кроме нулевого, нет у однородного уравнения. Этим единственным ограниченным решением уравнения (4.7), что легко проверяется, является

$$x_+(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{(t-s)A_+}f_+(s)\,ds = -\int_{t}^{\infty} e^{(t-s)A}P_+f(s)\,ds. \tag{4.10}$$

Складывая (4.9) и (4.10), получим (4.6), что завершает доказательство.

Рассмотрим теперь уравнение (4.1) на всей оси, предполагая, что $f(t)$ непрерывна и T периодична, т. е.

$$f(t+T) = f(t). \tag{4.11}$$

Оператор-функцию $\Gamma_T(t) \in \mathscr{L}_\beta(E)$ будем называть *T-периодической функцией Грина* уравнения (4.1), если 1) $\Gamma_T(t) = \Gamma_T(t+T)$; 2) $\Gamma_T(t)$ непрерывна в $\mathscr{L}_\beta(E)$ на всей оси, исключая точки $t=Tk$ $(k=0, \pm1, \pm2, \dots)$, причем $\Gamma_T(0+) - \Gamma_T(0-) = I$; 3) в точках непрерывности $\Gamma_T(t)$ дифференцируема со значением в $\mathscr{L}_\beta(E)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Gamma'_T(t) = A \circ \Gamma_T(t). \tag{4.12}$$

Теорема 4. *Если* A — *регулярный оператор, причем* $\operatorname{sp} A$ *не содержит точек мнимой оси* $\frac{2k\pi i}{T}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \dots)$, *то существует единственная T-периодическая функция Грина уравнения (4.1) и равна* $\Gamma_T(t) = e^{tA}(I-e^{TA})^{-1}$ *при* $0<t<T$.

Доказательство. В силу предположений теоремы и предложения 2 [1] видим, что непрерывное решение уравнения (4.12) имеет вид $\Gamma_T(t) = e^{tA} \circ C$, где C — постоянный оператор. Согласно свойству 2), в определении T-периодической функции Грина $e^{tA} \circ C$ должна быть непрерывна на $(0, T)$ и потом продолжена периодически ввиду свойства 1). Следовательно, $\Gamma_T(0-) = \Gamma_T(T_-)$, и мы должны иметь

$$\Gamma_T(0+) - \Gamma_T(0-) = \Gamma_T(0+) - \Gamma_T(T-) = C - e^{TA} \circ C = I. \qquad (4.13)$$

Из последнего равенства имеем $(I - e^{TA}) \circ C = I$ и $C = (I - e^{TA})^{-1}$, так как $\frac{2k\pi i}{T} \notin \operatorname{sp} A$ и по теореме Данфорда $1 = e^{2k\pi i} \notin \operatorname{sp} e^{TA}$.

Теорема 5. *Если* $\operatorname{sp} A$ *не содержит точек мнимой оси* $\frac{2k\pi i}{T}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, *то уравнение (4.1) при любой непрерывной T-периодической функции $f(t)$ имеет одно и только одно T-периодическое решение $x(t)$. Оно дается формулой*

$$x(t) = \int_0^T \Gamma_T(t-s) f(s)\, ds, \qquad (4.14)$$

где $\Gamma_T(t)$ — T-периодическая функция Грина уравнения (4.1).

Доказательство. Периодичность и существование $x(t)$, определяемой равенством (4.14), следует из свойств функции $\Gamma_T(t)$. Записывая (4.14) в виде

$$x(t) = \int_0^t \Gamma_T(t-s) f(s)\, ds + \int_t^T \Gamma_T(t-s) f(s)\, ds$$

и дифференцируя по t, получим $x'(t) = Ax(t) + f(t)$.

Осталось доказать только единственность T-периодического решения. Для этого покажем, что таковых нет у однородного уравнения. Допуская противное, получим соотношение $e^{tA} x_0 = x(t) = x(t+T) = e^{TA} \circ e^{tA} x_0$, т. е. $x_0 = e^{TA} x_0$, что показывает несуществование оператора $(I - e^{TA})^{-1}$. Другими словами, $1 = e^{2k\pi i} \in \operatorname{sp} e^{TA}$. Отсюда, по теореме Данфорда об отображении спектра регулярных операторов, $\frac{2k\pi i}{T} \in \operatorname{sp} A$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Определение. Непрерывную функцию $f: \mathbf{R} \ni t \to f(t) \in E$ назовем почти периодической, если множество функций $f_\tau(t) = f(t+\tau)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$ секвенциально компактно в смысле равномерной на всей оси топологии пространства $C(\mathbf{R}; E)$ $(\|f\|_p = \sup_{t \in \mathbf{R}} p(f(t)))$.

Из определения следует, что множество значений почти периодической функции секвенциально компактно и, значит, ограничено.

Ввиду теоремы 2 для существования единственного ограниченного решения уравнения (4.1) достаточно предположить, что $\operatorname{sp} A$ не пересекается с мнимой осью и тогда это решение записывается в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s) f(s)\, ds, \qquad (4.15)$$

где $G_A(t)$ — главная функция Грина уравнения (4.1).

Теорема 6. *Если* $\operatorname{sp} A$ *не пересекает мнимой оси, то дифференциальное уравнение (4.1) с почти периодической функцией $f(t)$ имеет одно и только одно почти периодическое решение (4.15).*

Доказательство. Из предположений и предыдущих рассуждений видно, что (4.15) — единственное ограниченное решение уравнения (4.1). Докажем, что оно почти периодично. Таким образом, надо установить, что множество функций

$$x_\tau(t)=x(t+\tau) \quad (-\infty<\tau<+\infty)$$

секвенциально компактно в смысле равномерной сходимости.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_{\tau_k}(t)$. Ввиду почти периодичности $f(t)$ из последовательности $f_{-\tau_k}(t)$ можно выделить последовательность Коши $f_{-\tau_{k_j}}(t)$. Тогда

$$x_{\tau_{k_j}}(t)=x(t+\tau_{k_j})=\int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)f(s-\tau_{k_j})\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)f_{-\tau_{k_j}}(s)\,ds.$$

Отсюда следует, что $x_{\tau_{k_j}}(t)$ последовательность Коши в $C(\mathbf{R};E)$. Действительно, для любой полунормы p на E имеем

$$p(x_{\tau_{k_j}}(t)-x_{\tau_{k_l}}(t))\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu|t-s|}q(f_{-\tau_{k_j}}(s)-f_{-\tau_{k_l}}(s)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant-\sup_{-\infty<s<+\infty} q(f_{-\tau_{k_j}}(s)-f_{-\tau_{k_l}}(s)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu|s|}ds.$$

Из полноты $C(\mathbf{R};E)$ следует секвенциальная компактность множества функций $x_\tau(t)=x(t+\tau)$, т. е. почти периодичность. Теорема доказана.

Литература

1. Радыно Я. В. Дифференц. уравнения, 13, № 8, 1977.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
3. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., 1970.

Поступила в редакцию
12 апреля 1976 г.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина