Заглавие документа

Овсянников А.В. О СИНТЕЗЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВО МНОГОВХОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ В СРЕДЕ MATLAB // Трудоы II Всероссийской научной конференции "Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB" (ISBN 5-201-14971-5). 2004. С805-803.

Авторы: Овсянников Андрей Витальевич, Асмыкович Иван кузьмич

Тема: Теория автоматического управления, автоматика

Дата публикации: 2004

Издатель: ИПУ РАН

Аннотация: В докладе получен алгоритм расчета модального регулятора единичного и полного ранга в среде MATLAB, приведены численные примеры, описана алгоритмическая возможность получения канонических форм Бруновского и Луенбергера для полностью управляемых систем и рассмотрена задача стабилизации для линейных систем с полной информацией.

УДК 62-50

О СИНТЕЗЕ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВО МНОГОВХОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ В СРЕДЕ MATLAB

Асмыкович И.К., Овсянников А.В.
Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь, e-mail; aik@bstu.unibel.by

Задача модального управления (управления спектром) является одной из основных задач в качественной теории управления линейными динамическими системами. Ее суть состоит в выяснении возможности с помощью линейной обратной связи обеспечить произвольный спектр в замкнутой системе. Частным случаем этой задачи является задача стабилизации, т.е. когда для непрерывной системы необходимо обеспечить весь спектр в левой полуплоскости, а для линейной дискретной системы в единичном круге. Математически строго задача модального управления для обыкновенных многовходных линейных систем с полной информацией была сформулирована и решена в работе [14] в 1967 году. В ней было доказано, что критерием разрешимости этой задачи является полная управляемость рассматриваемой системы, т.е. выполнение критерия Калмана [1,7,8]. Реальное нахождение коэффициентов регулятора, обеспечивающего требуемое распределение спектра, встречается с большим числом вычислительных трудностей, связанных, частично с тем, что непосредственный расчет требует решения нелинейной системы уравнений.

В классической теории управления эта задача была полностью проанализирована и решена для одновходных систем [1]. В пространстве состояний также для нее алгоритм существенно проще, так как в этом случае полная управляемость означает невырожденность матрицы управляемости [8] и возможность сведения системы к дифференциальному уравнению n-го порядка. На этой основе разработана формула Аккермана, [2,5] по которой в среде MATLAB находят коэффициенты модального регулятора и которая усовершенствована в работе [10]. Основным элементом в этом случае является цикличность [7,8] пространства состояний системы относительно вектора входа.

Для многовходных систем ситуация значительно сложнее. Если матрица системы является цикличной, т.е. система может быть управляема одним входом, то тогда задачу сразу сводят к одновходной задаче [1] и используют стандартные алгоритмы [1,10]. Но если матрица системы не является матрицей простой структуры, то это невозможно.

Оригинальное доказательство возможности модального управления опирается на лемму о возможности с помощью линейной обратной связи приведения исходной системы к системе управляемой одним входом. Эта лемма впервые бала доказана в [14] и много раз повторена в других работах (подробности см. в [8]). Она позволяет расчет модального регулятора для многовходной системы свести к расчету регулятора для одновходной системы. Но при этом существенно ограничивается свобода выбора коэффициентов регулятора, так как матрица обратной связи будет иметь единичный ранг, кстати, так же как и при непосредственном сведении к одновходной системе. Уменьшение количества свободных коэффициентов в матрице обратной связи приводит к потере возможности параллельного решения других задач, например, задач реконструкции, или расщепимости [8]. Этого недостатка можно избежать, если использовать приведение многовходной управляемой системы к канонической форме Бруновского [8].

Задача управления спектром существенно усложняется, если учитывать неполноту информации в реальных системах, т.е. рассматривать обратную связь по выходу. Оказывается, что при этом можно точно распределить только часть собственных чисел для одновходных систем, а для многовходных систем получены различные достаточные условия возможности полного модального управления [11,12]. Для реального расчета статических регуляторов используют методы оптимизации [2], методы линейной алгебры [10-12], линейные матричные неравенства и пространство переходных функций [13]. Так все алгоритмы используют достаточные условия существования регулятора, то их применение к конкретным системам не гарантирует хорошего результата, что показано на примере в [2], Но, как отмечено в [12], эта задача еще далека от полного решения. Укажем, что если система полностью управляема и полностью наблюдаема, то, используя, либо наблюдатели, либо динамические регуляторы можно обеспечить произвольный наперед заданный спектр в замкнутой системе, но соответствующие регуляторы будут иметь достаточно сложную структуру [8]. Задачи модального управления рассматриваются и для более сложных классов систем, в частности, для систем с отклоняющимся аргументом [9], дескрипторных систем [6], гибридных систем [15], где изменяется как постановка задачи, так и вид регуляторов. Так как все алгоритмы требуют большое число матричных операций, то их выгодно реализовывать в среде MATLAB [2-6, 13,15].

В докладе получен алгоритм расчета модального регулятора единичного и полного ранга в среде MATLAB, приведены численные примеры, описана алгоритмическая возможность получения канонических форм Бруновского и Луенбергера для полностью управляемых систем и рассмотрена задача стабилизации для линейных систем с полной информацией.

Расчет модального регулятора единичного ранга

Пусть имеется обыкновенная линейная управляемая система со многими входами

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad (1)$$

где x - n - вектор состояния, u - r -вектор управления, A и B - постоянные матрицы соответствующих размеров, определяющие структуру объекта управления и входного устройства. Матрица B считается матрицей полного ранга, т.е. $rank B = r$, в противном случае имеются лишние управления. Будем рассматривать замыкание системы (1) линейным регулятором

$$u(t) = Qx(t) \qquad (2)$$

Так как собственные числа, принадлежащие неуправляемой части, инвариантны относительно обратной связи (2), то система предполагается полностью управляемой по Калману, т.е. матрица управляемости имеет полный ранг, или

$$rank P = rank[B : AB : A^2 B : ... : A^{n-r} B] = n \qquad (3)$$

Определение 1. Система (1) называется модально управляемой (управляемой спектром) с помощью регулятора (2) если для любого наперед заданного согласованного набора комплексных чисел $\Lambda^* = \{\mu_1, \mu_2, ...\mu_n\}$ существует $r \times n$ матрица Q такая, что спектр замкнутой системы (1), (2), т.е. набор собственных чисел матрицы $A + BQ$ совпадает со множеством Λ^*.

Как отмечалось выше, для разрешимости задачи модального управления необходимо и достаточно выполнения условия (3). Реальный расчет регулятора (2) требует формулировки задачи управления спектром как задачи управления коэффициентами характеристического полинома и приведения системы к канонической управляемой форме [10-12]. Это легко выполняется для одновходной системы [10] и для системы с матрицей простой структуры. В последнем случае доказано [8], что такая система управляема одним входом, причем входной вектор может быть взят из линейной оболочки столбцов матрицы B.

Расчет обратной связи в этом случае выполняем по следующему алгоритму:

1. Находим матрицу управляемости P и проверяем условие (3).
2. Проверяем, является ли матрица системы A циклической.
3. Если да, то находим $\tilde{b} \in L(B)$, для которого выполняется условие (3).
4. Для полученной одновходной системы находим коэффициенты регулятора, обеспечивающего требуемый спектр в виде $u(t) = q'x(t)$.
5. Окончательно получаем матрицу $Q = l \times q'$ единичного ранга.

Для реализации указанного алгоритма можно воспользоваться встроенными функциями пакета Control System Toolbox системы Matlab.

1. В частности, для нахождения матрицы управляемости можно воспользоваться функцией ctrb, которая формирует матрицу управляемости для модели в пространстве состояний ctrb(A,B). Условие (3) проверяем с помощью функции rank(ctrb(A,B)).
2. Проверка цикличности матрицы A осуществляется по следующим этапам.

- Находим с помощью функции eig(A) вектор собственных значений матрицы A. Если собственные числа различны между собой то матрица A циклическая.
- Если в результате выполнения этапа 1 некоторые из собственных чисел оказываются кратными определяем Жорданову каноническую форму для матрица A с помощью функции jordan(A).
- Если в ней все блоки одномерны то матрица A циклическая.
- В противном случае матрица A не является матрицей простой структуры.

3. Создаем вектор $\tilde{b} \in L(B)$ как линейную комбинацию столбцов матрицы B с достаточно простыми коэффициентами, которые обозначим как вектор l и как в пункте 1 проверяем условие полной управляемости. Если оно не выполняется, то изменяем любой из коэффициентов линейной комбинации и вновь проверяем условие (3).
4. Для системы $A, \tilde{b}$ находим коэффициенты модального регулятора с помощью команды acker(A,b,p), или, как предложено в [5], команды place.
5. Применяя матричное умножение получаем требуемый регулятор $u(t) = Qx(t)$, где $Q = l \times q'$.

Если матрица системы не является циклической, то система не может быть управляемой одним входом, и предыдущий алгоритм не применим. Но доказано [14], что при выполнении условия (3) почти любая обратная связь приводит к циклической матрице, т.е. применив регулятор $u(t) = Q_1 x(t) + v(t)$ можно решать задачу модального управления по выше приведенному алгоритму. При этом окончательный регулятор будет иметь вид $Q = Q_1 + l \times q'$. В данном случае мы имеем свободу в выборе матрицы Q_1, за счет которой можно оптимизировать в каком-то смысле модальный регулятор, хотя это можно сделать только используя различные алгоритмы прямого перебора.

Расчет модального регулятора полного ранга

Для многовходных управляемых систем аналогом канонической управляемой формы является каноническая форма Бруновского, которая имеет блочный вид и строится при помощи выбора линейно независимых векторов из матрицы управляемости P. Этот выбор можно проводить двумя способами и, соответственно, получать две канонические формы. Первый алгоритм предложен Луенбергером (подробности см. в [8]) и состоит в следующем.

Пусть матрица B в системе (1) состоит из векторов $b_1, b_2, ..., b_r$. Эти векторы полагаются линейно независимыми, т.е. матрица входов имеет полный ранг. Для вектора b_1 находим максимальное число k_1 линейно независимых векторов в цепочке $b_1\ Ab_1\ A^2 b_1, ..., A^{k_1-1} b_1$. Далее рассматриваем цепочку $b_1\ Ab_1\ A^2 b_1, ..., A^{k_1-1} b_1\ b_2\ Ab_2\ A^2 b_2, ..., A^{k_2-1} b_2$ и находим максимальное k_2, при котором эти векторы линейно независимы. Таким образом, выделим из матрицы управляемости P набор n линейно независимых векторов в виде

$$L=[b_1\ Ab_1\ A^2b_1,...,A^{k_1-1}b_1\ b_2\ Ab_2\ A^2b_2,...,A^{k_2-1}b_2...b_r\ Ab_r\ A^2b_r,...,A^{k_r-1}b_r]\ . \qquad (4)$$

Для создания матрицы преобразования L в системе Matlab может быть использована циклическая процедура в процессе выполнения которой происходит дополнение матрицы вектор – столбцов вида A^ib_j до получения невырожденной матрицы.

Далее, выполнив в системе (1) замену переменной $z(t)=Dx(t)$, что можно сделать с помощью встроенной функции SS2SS, мы приведем ее к канонической форме Луенбергера, которая имеет следующий вид матричной пары $(\hat{A},\hat{B})$, где

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_0^1 & 0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_0^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_0^r \\
1 & 0 & ... & 0 & -\alpha_1^1 & 0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_1^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_1^r \\
0 & 1 & ... & 0 & -\alpha_2^1 & 0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_2^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_2^r \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & \\
0 & 0 & ... & 1 & -\alpha_{n_1-1}^1 & 0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_{n_1-1}^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_{n_1-1}^r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_{n_1}^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_{n_1}^r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & & -\alpha_{n_1+1}^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_{n_1+1}^r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & & -\alpha_{n_1+2}^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_{n_1+2}^r \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & \\
 & & & & & 0 & ... & 0 & 1 & -\alpha_{n_1+n_2-1}^2 & ... & & ... & & ... & -\alpha_{n_1+n_2-1}^r \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & ... & 0 & -\alpha_{n+n_r}^r \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & 1 & 0 & ... & 0 & -\alpha_{n+n_r+1}^r \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & ... & 0 & -\alpha_{n+n_r+2}^r \\
... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & & ... & \\
0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -\alpha_{n-1}^r
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\} n_1 \\ \left.\begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\} n_2 \\ \dots \\ \left.\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}\right\} n_r \end{bmatrix}$$

Аналогичная процедура для системы с одним входом реализуется с помощью встроенной функции CANON.

Но для задач модального управления и для задач реконструкции более удобной является каноническая форма Бруновского, которая получается следующим образом. Из матрицы управляемости P вначале выбирают векторы $b_1, b_2, ..., b_r$, затем линейно независимые по их модулю из векторов $Ab_1 \;\; Ab_2, ..., Ab_r$, далее из векторов $A^2b_1 \;\; A^2b_2, ..., A^2b_r$ и так до тех пор, пока не получим набор из n линейно независимых векторов в виде

$$D=[b_1 \; Ab_1 \; A^2b_1, ..., A^{n_1-1}b_1 \; b_2 \; Ab_2 \; A^2b_2, ..., A^{n_2-1}b_2 ... b_r \; Ab_r \; A^2b_r, ..., A^{n_r-1}b_r], \qquad (5)$$

где числа $n_1, n_2, ..., n_r$ индексы Кронеккера [8] матричной пары A, B. Для этих чисел будем полагать, что они расположены в порядке убывания, т.е. $n_1 \ge n_2 \ge ... \ge n_r$, причем возможно, что некоторые индексы Кронеккера равны единице. Если это не выполняется для исходной матрицы B, то выполняем перенумерацию входов. По матрице D строим матрицу преобразования T в форме

$$T=[t_1 \; t_2 ... t_{n_1} \; t_{n_1+1} ... t_{n_1+n_2} \; t_{n_1+n_2+1} ... t_{n-1} \; t_n]$$

где $t_n = b_r$, $t_{n_1+n_2} = b_2, t_{n_1} = b_1$, а остальные векторы матрицы T есть линейные комбинации векторов матрицы D из (5). Выполнив в исходной системе переход к базису T, т.е. преобразование $z = Tx$, получим матрицы системы в виде

$$A^c=\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots & A_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & \dots & \dots & A_{rr} \end{bmatrix},\quad B^c=\begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_r \end{bmatrix},\quad A_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_{ij1} & \dots & \dots & \beta_{ijn_j} \end{bmatrix},$$

$$i\neq j,\quad A_{ii}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ \beta_{ii1} & \dots & \dots & \beta_{iin_i} \end{bmatrix},\qquad B_j=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{j1} & \dots & \gamma_{jj} & \gamma_{jj+1} & \dots & \gamma_{jr} \end{bmatrix}$$

При такой структуре матриц расчет модального регулятора проводится непосредственно путем приравнивания коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы и желаемого характеристического полинома. Кроме того можно в замкнутой системе изменять число инвариантных многочленов, решая тем самым задачу реконструкции, а для системы с выходом рассматривать задачу расщепимости [8].

Для решения задачи стабилизации для полностью управляемой системы достаточно в качестве желаемого характеристического полинома задать устойчивый полином и решить соответствующую задачу модального управления. Для не полностью управляемой системы, с помощью замены базиса в пространстве состояний можно выделить управляемую и неуправляемую части и если неуправляемая часть устойчива, т. е. ее собственные числа лежат в левой части комплексной плоскости, то стабилизировать управляемую часть. Можно также рассматривать обратную связь по выходу, используя разбиение пространства состояний системы на четыре подпространства, т.е. приведение системы (1) с выходом $y(t)=Cx(t)+Du(t)$ к виду [8]:

$$\begin{bmatrix} \dot\xi_1 \\ \dot\xi_2 \\ \dot\xi_3 \\ \dot\xi_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{matrix} 0 & C_2 & 0 & C_2 \end{matrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix}+Du. \quad (6)$$

При этом можно использовать команды SS2SS, CANON, CTRBF, OBSVF, которые позволяют переходить отдельно к канонической управляемой форме и канонической наблюдаемой форме. Структура системы (6) позволяет сделать вывод, что обратной связью по выходу можно изменять только собственные числа, принадлежащие полностью управляемой и полностью наблюдаемой части.

Литература

1. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184с.
2. Дьяконов В. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя. М.: СОЛОН-Пресс.-2003. –576с.
3. Говорухин В. Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. СПб.: Питер, 2001.
4. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB М. : Издательский дом «Вильямс» 2001. – 720с.
5. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control Systems Toolbox. MATLAB для студентов. М.: Диалог-МИФИ, 1999.
6. Varga A. A descriptor systems toolbox for MATLAB // Proc CACSD^2000 Symposium, Anchorage, Atlanta, 2000
7. Летов А.М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256с.
8. Асмыкович И.К., Габасов Р., Кириллова Ф.М., Марченко В.М. Задачи управления конечномерными системами // Автоматика и телемеханика. 1986. N11. С.5-29.
9. *Асмыкович И.К., Овсянников А.В. Р*асчет динамических систем управления с запаздыванием в среде MATLAB / Труды Всероссийской научной конференции ПРОЕКТИРОВАНИЕ НАУЧНЫХ И ИНЖЕНЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB / 28-29 мая 2002 года, Москва, Россия. С. 355-364.
10. Толочко О.И., Федоряк Р.В. Автоматизация синтеза регуляторов и наблюдателей в среде пакета MATLAB / Труды Всероссийской научной конференции ПРОЕКТИРОВАНИЕ НАУЧНЫХ И ИНЖЕНЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ В СРЕДЕ MATLAB / 28-29 мая 2002 года, Москва, Россия. С. 482-496.
11. Syrmos V.I., Ahdallah C.I., Dorato P. and Grigoriadis K. Static output feedback – A survey // Automatica Vol 33. 1997. P.125 – 137.

12. Kimura H. Pole assignment by output feedback: A longstanding open problem // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, FL – 1994. P.2101 – 2105.
13. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. 616с.
14. Wonham W.M. On pole-assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Autom. Control.- v.AC-12, N6, 1967, P.660-667.
15. Taylor J. E., Kebede D. Modeling and simulation of hybrid systems in MATLAB // Proceeding 13th Triennial Word Congress IFAC. San Francisco, USA, vol. D, 1996, p. 275 – 280.