

УДК 101.1:510.2

## Методологическая проблема единства философских программ обоснования математики

**Н. В. Михайлова**, кандидат философских наук, доцент

*Работа посвящена проблеме единства программ обоснования математики, исследования по которой делают само математическое знание объектом математического мышления. Для методологического постижения этого единства используется семантическая формула системной триады. Выявляются наиболее существенные черты подходов к обоснованию и делается вывод о том, что нет необходимости сосредоточиваться только на одном пути обоснования.*

## Methodological problem of unity of philosophical programs of a substantiation of mathematics

**N. Michailova**, PhD in Philosophy, Associate Professor

*The work is devoted to a problem of unity of programs of a substantiation of mathematics, researches on which do mathematical knowledge an object of mathematical thinking. The semantic formula of a system triad for methodological comprehension of this unity is used. The most essential features of approaches to a substantiation are revealed, the conclusion that there is no necessity to concentrate only on one way of a substantiation is done.*

Основная трудность всех программ строгого обоснования математики состоит в том, что на методологическом уровне математика отличается от любого естественнонаучного знания более надежным способом обоснования своих теоретических построений, которые стабильны и в некотором смысле доказательства «внеисторичны». Методологическая трудность обоснования современной математики, в основе которой лежит проблема непротиворечивости аксиоматической системы, не позволяет выделить какую-либо одну из известных философско-математических программ. Поэтому в этой работе обсуждаются методологические подходы к решению проблемы единства философских программ обоснования математики.

Поскольку, с одной стороны, аксиоматические теории содержат в себе неформализуемые аспекты, которые опираются на определенного рода очевидности, то их, вообще говоря, нельзя принять в качестве онтологически истинных без какого-либо обоснования. Но, с другой стороны, едва ли можно привести пример реального математического направления, где работающий математик очень сомневался бы в непротиворечивости своих методов исследования. Для разрешения указанных противоречий необходим «взгляд со стороны», невозможный в линейной или одномерной структуре, в которой все многообразие противоположностей сводится в одну предельную категорию «противоречия». В качестве единого методологического основания в проблеме обоснования математики можно рассмотреть известную схему триадической

спирали «тезис — антитезис — синтез», которая в разных философских системах не обязана сводиться к единственной гегелевской триаде.

Но чтобы подняться по диалектической спирали развития, нужно выйти в другое измерение, для того чтобы обрести двумерный фундамент, задаваемый невырожденной тройкой одного уровня, лежащей в основе синтеза программ обоснования математики. Философ математики В. В. Мороз выделяет следующие значения термина «синтез» как определенного философско-математического взаимодействия: 1) синтез как «способ рассуждения», т. е. последовательное получение нового знания ранее доказанных утверждений; 2) синтез как «мыслительная операция», которая получается в результате соединения частей объектов в единое целое; 3) синтез как «познавательная операция», имеющая множество различных форм при теоретическом обобщении данных исследования, в том числе и по принципу дополнительности. Она вводит новое понятие «философско-математический синтез», интерпретируя его как «особый тип философско-математического взаимодействия, в котором философия и математика, соединяясь тем или иным образом в процессе рассуждения, участвуют в построении целостной картины действительности» [1, с. 44]. В контексте нашего исследования обоснования математики, возникает необходимость в системной триаде, т. е. в такой синтезирующей структуре, в которой есть «структурная многомерность», «системная коррелятивность» и «смысловая целостность».

При этом мы исходим из того, что логический статус теоретико-множественных принципов, используемых в современной математической практике, в действительности не является широко известным в сообществе работающих математиков даже сейчас. Единство математики проявляется, прежде всего в том, что даже ее деление на чистую и прикладную математику не может быть строго проведено в силу общей сущности той и другой. Эта сущность заключается в изучении математических структур, а также в общности методов, применяемых для изучения этих структур. Но, несмотря на роль порождающих структур математики в ее методологическом единстве, довольно большая часть математики, например, не попавшая в трактат Бурбаки, не составлена из этих структур. Поэтому, вообще говоря, нельзя настаивать на едином языке оснований математики. Учитывая исторически сложившиеся программы обоснования математики, в рамках которых происходит реальное формирование единого пространства математики, надо стремиться не просто к «синтезу как способу рассуждения» или к «синтезу как мыслительной операции», а к взаимопониманию различных направлений философии математики, определяющему «естественный синтез», который обогащает общематематический опыт, опирающийся на рациональное знание.

Естественный синтез программ обоснования является результатом тех процессов, которые сами по себе происходят в результате сознательного конструирования абстрактных систем философии и математики. Поэтому сравнение программ обоснования должно исходить как из идеи единства философии, так и из единства историко-математического познания. Прежняя научная парадигма требовала полной определенности и «безусловной объективности», но, согласно принципу неопределенности, в процесс исследования вмешивается субъективный фактор, оставляющий нечто существенное, даже возможно необязательно формализуемое, за рамками математической модели. Становление новой тринитарной парадигмы, принимающей вид «неформализуемой целостности», сопряжено с серьезными психологическими и философскими трудностями. Они связаны, прежде всего, с преодолением традиционного философского «бинаризма», который проявляется, например, в известной кантовской абсолютизации противопоставления «априорно — апостериорного», и редукции, которая стремится свести все многообразие явлений к какой-либо одной теоретической системе.

Методологическое постижение новой целостности на основе семантической формулы систем-

ной триады, показывает, что на самом деле существуют промежуточные концептуально-смысловые подходы к проблеме обоснования математики. Вопрос о степени «естественности» и логической обоснованности такого подхода в философии математики сохраняет свою актуальность также, как, например, обоснованность введения несчетных множеств в отношении бесконечных множеств в целом. Как правильно заметил американский логик и философ математики Г. Крайзель, реальная математическая практика вопреки возможностям не использует всех математических методов естественным образом, поэтому «факты об ограниченности современной практики не имеют отношения к первоначальной программе Гильберта, которая занималась природой всей (возможной) математики, а не увековечиванием современных ему дефектов» [2, с. 261]. Исследования в области оснований математики и математической логики, кроме расширения задач философии математики, преследуют также и важнейшие для математики общеметодологические цели. Именно они цементируют различные разделы математики в единую научную дисциплину.

Исследования по проблеме единства и целостности программ обоснования математики расширяют горизонты математики и раскрепощают математическое мышление, делая саму технологию математического знания объектом математического мышления. Еще древние говорили, что мир идет к единству и некой «сверхорганизации». Все больше число математиков и философов математики осознает значение мудрости древних, строивших математику на двух первичных понятиях — точки и монады. Неделимость точки и актуальная бесконечность как особый акт бесконечного процесса счета лежит в основаниях математики еще со времен Евклида. В свободомыслии, присущем математическому творчеству, заключена неизбежная притягательность теоретико-категорных мотивов в основаниях математики, что является залогом их плодотворного будущего. Новая тринитарная парадигма в обосновании математики резонирует с теми мировоззренческими традициями, которые отвечают собственным принципам и установкам философии математики, наполняя их новым содержанием.

Исходя из внутренних потребностей математики, в ней допустимы такие свободные гипотезы, как неевклидовы геометрии, неархимедовы метрические пространства или нестандартный анализ, а в физике не строят, к примеру, немаквелловскую теорию электричества как возможную для других миров. Задача установления непротиворечивости классической формальной арифме-

тики была впервые решена учеником Гильберта немецким математиком Г. Генценом только в 1936 г., причем средствами, не укладывающимися в финитную установку Гильберта. Он использовал аксиому трансфинитной индукции, в которой, в отличие от обычной индукции, использующейся в математике, рассуждения ведутся не по натуральным числам, а по ординальным числам, обозначающим бесконечные совокупности чисел. Герман Вейль назвал доказательство Генцена «пирровой победой» из-за того, что ему удалось это сделать, лишь значительно снизив требования Гильберта к очевидности. К настоящему времени известны и другие доказательства непротиворечивости арифметики, но, как отмечают некоторые философы, совместимость этих доказательств с финитной установкой Д. Гильберта и степень их конструктивности анализируются далеко не всегда, а отдельные авторы демонстративно считают этот вопрос проблемой «субъективной природы».

При этом нельзя забывать и о второй теореме Гёделя о неполноте. Согласно этой теореме утверждение о непротиворечивости арифметики, формально выраженное в языке самой арифметики, не охватывается аксиомами арифметики в том смысле, что ни само это утверждение, ни его отрицание недоказуемы в формализме арифметики, если не использовать каких-то допущений, выходящих за ее пределы. Если к этому добавить первую теорему о неполноте, то можно сказать, что К. Гёделем была фактически доказана не только невозможность полной непротиворечивой ее аксиоматизации, но и, в определенном точном смысле слова, невозможность средствами, формализуемыми в ней самой, доказать ее непротиворечивость. Сам Гильберт, накануне публикации результата Генцена, считал, что результаты Гёделя на самом деле показывают, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем при рассмотрении элементарных формализмов.

Что же касается проблемы установления непротиворечивости анализа, решение которой прояснило бы судьбу теории доказательств, то она не решена до сих пор, как и проблема непротиворечивости аксиоматической теории множеств. Специфика математики в отношении ее непротиворечивости проявляется в ее согласованности со структурами, обладающими, по мнению математиков, высокой степенью непротиворечивости с арифметикой и логикой. Поэтому можно сказать, что одной из главных целей программы Гильберта было доказательство автономии этой элементарной математики. Во избежание некоторых недо-

разумений следует помнить, что бывают «самые настоящие» доказательства непротиворечивости в том смысле, что используемые математические методы явно более элементарны, чем те интерпретации, которые привели к изучаемым формальным системам. После результатов К. Гёделя о невозможности полной формализации всей существующей математики и даже невозможности доказательства непротиворечивости арифметики финитными средствами развеялась надежда на принципиальную реализуемость программы Гильберта в полном объеме.

Однако дальнейшее развитие теории доказательств, как отмечает Г. Крайзель, не вызвало интереса ни среди математиков, ни среди основной массы логиков, даже несмотря на существующую генценовскую теорию доказательств. Одна из существенных причин осторожного отношения к таким работам связана, по его мнению, с тем, что цели гильбертовской теории доказательств исходят из «опровергнутых представлений» о современной математике. Если математическая теория не формализована, она все же ограничивает средства, допустимые для решения своих проблем, хотя математические структуры имеют определенную произвольность. Возможно, что ошибка классических программ обоснования математики состояла в том, что они стремились абсолютизировать какую-то одну систему достоверных положений обоснования, не учитывая их дополнительный характер взаимодействия. То есть в них не выдерживался принцип «логического консенсуса», одинаково приемлемый как для формалиста, так и для интуициониста.

Проблема обоснования математики начала XX в. в узком смысле состояла в избавлении от парадоксов теории множеств, а в более широком смысле — в нахождении общих принципов обоснования математических теорий, гарантирующих их непротиворечивость. По замыслу Д. Гильберта, всякую математическую теорию, в том числе большую часть классической математики, надо строить как формальную аксиоматическую теорию, а затем в рамках этого формализма попытаться доказать ее непротиворечивость. Почему же вопрос о непротиворечивости арифметики имеет столь большое значение в обосновании математики? С одной стороны, некоторые исследователи полагают, что если концепция натуральных чисел противоречива, то тогда наше мышление вообще не приспособлено к рациональному мышлению. С другой стороны, высказываются и такие мнения, что формальная система не вырождается в бессмысленную игру как раз по причине того обстоятельства, что она содержит противоречие.

Другими словами, система может быть «локально непротиворечивой», даже если она в принципе не является глобально непротиворечивой. Математики довольно уверенно смотрят в будущее своей науки, так как представления об актуальной бесконечности не привели к бессмыслице, пока все обходилось хорошо. По сравнению с первой теоремой Гёделя о неполноте, вторая теорема Гёделя, говорящая о недостижимости непротиворечивости, по мнению некоторых логиков, демонстрирует меньшую устойчивость логического результата, который может исчезнуть при изменении кодировки формул. Правда, отмечает математик и логик Н. Н. Непейвода, «кодировки, при которых можно доказать непротиворечивость, неестественны и даже неформально включают в себя предположение о непротиворечивости, но тем не менее в принципе обойти данную теорему можно» [3, с. 122]. В связи со второй теоремой Гёделя о неполноте методологический вопрос, касающийся непротиворечивости арифметики, приобретает вполне практический интерес, который связан с известным вопросом: могут ли компьютеры мыслить?

Напомним, что вторая теорема Гёделя ставит под сомнение способность человеческого разума к доказательству непротиворечивости достаточно сложных формальных систем, демонстрируемых как математические утверждения. Но сосредотачиваться лишь на гёделевских ограничениях — значит гордиться своим философско-методологическим бессилием или несостоятельностью философии математики как науки. Кроме того, несмотря на вполне оправданное стремление искать «конструктивное решение» вопроса о математическом существовании, интуиционистский подход все же является тоже слишком радикальным. В рамках системного синтеза как принципиально нового философского подхода к обоснованию математики понятие конструктивности может изучаться в общепринятых рамках философии математики в терминах теории Тьюринга о вычислимости. С точки зрения системного синтеза, избегая крайностей ограничительной программы Брауэра можно исследовать конструктивность как вполне самостоятельный философско-математический предмет отдельно от самого вопроса математического существования.

Выявляя наиболее существенные и важные черты имеющихся подходов к обоснованию, теперь нет необходимости сосредотачиваться только на одном пути обоснования, например, интуиционизма или формализма, отказываясь тем самым от других мощных приемов доказательства в математике, ограничивая и лишая практической силы

теоретическую математику, использующую необычайной сложности структуры и множества. «Готов ли иной математик безоглядно следовать вместе с Гёделем путем платонизма, провозглашая истинность или ложность математических выражений, оперирующих подобными огромными множествами, всегда абсолютными (или «платонистскими») по своей природе; или же он, не заходя слишком далеко, будет говорить об абсолютности этих понятий лишь в том случае, если множества окажутся не слишком велики и довольно конструктивны» [4, с. 102]. По мнению одного из наиболее компетентных и плодотворно работающих физиков-теоретиков Р. Пенроуза, ответ на этот вопрос не имеет большого значения, так как с физической точки зрения множества, которые имеют для нас значение, по меркам вышеупомянутых множеств выглядят относительно малыми.

По этой же причине философов математики не должны излишне волновать отличия между различными платонистскими течениями в математике, хотя полезно различать логические и математические основания. Если логические основания анализируют истинность математических принципов, содержащих аксиомы правил вывода, опирающихся на философские концепции природы, то в математических основаниях истинность подразумевается, а математические рассуждения должны быть не только систематическими, но и доступными пониманию с помощью хорошего выбора языка математики. Для многих достаточно богатых и важных математических теорий была доказана их «относительная непротиворечивость», т. е. такая теория непротиворечива, если непротиворечивы теория множеств Цермело-Френкеля или арифметика Пеано натуральных чисел. Так, исследования Г. Крайзеля показывают, что из непротиворечивости арифметики по существу вытекает непротиворечивость математического анализа и существенных фрагментов теории множеств.

Глобальный теоретический вопрос проблемы обоснования математики оказался, в связи с развитием компьютерных вычислений, более приземленным и практически важным вопросом, а так как компьютерные вычисления ограничены математическими ресурсами, то в таком контексте более привлекательной выглядит идея локальной непротиворечивости. Вопрос о непротиворечивости математики, по мнению философа математики В. В. Целищева, можно рассматривать не только с точки зрения дедуктивной математики, но и как эмпирический вопрос. «Основанием для такого мнения служит то обстоятельство, что более теоретические ветви математики получают под-

держку со стороны элементарных ветвей, которые в свою очередь, принимаются благодаря приложениям» [5, с. 44]. Однако, если говорить об убедительности законов арифметики, то она вытекает не из практики счета, а из универсальных требований абстрактной или категориальной онтологии, поскольку нельзя смешивать применение математической истины с самой этой истиной. Философские категории в этом смысле представляют собой автономную и первичную сферу представлений, которую называют «категориальной онтологией».

Не преувеличивая роль теоремы Гёделя о неполноте, можно сказать, что гёделевский результат говорит прежде всего о том, что все множество арифметических истин не может быть перечислено машиной Тьюринга. Даже различие между интуитивной и формальной математикой реализуется в разном понимании концепции полноты. Интуитивная деятельность математика направлена на достижение «дескриптивной полноты», для которой методы логико-математического доказательства, при сопоставлении «реальности» и ее «модели», в таком описательном понимании полноты несущественны. В отличие от интуитивного методологического подхода, в формальной системе появляется новый аспект, связанный с деятельностью математика по выведению теорем из аксиом, указывающий тем самым на «дедуктивную полноту». Из невозможности строгого обоснования в рамках конкретных программ, вообще говоря, не следует невозможность других подходов, способных осуществить такое обоснование.

При обсуждении природы математической истины важное значение имеют не те дедуктивные

средства, которые находятся в распоряжении математиков в конкретный исторический период, а то, в какой степени математики понимают соответствие математических утверждений из разных областей математики и соответствия математических моделей реальности. Напомним, что, используя правила вывода с бесконечным числом посылок, Г. Генцен сумел доказать непротиворечивость арифметики Пеано, а П. С. Новиковым было получено другое доказательство этой непротиворечивости. В историческом развитии единство и целостность многообразия математических систем знания определяется действием «принципа соответствия», согласно которому новые общие теории сохраняют свое значение и для прежних областей исследования. Именно этот принцип реализуется в системном синтезе программ обоснования математики.

#### Список цитированных источников

1. Мороз, В. В. Философско-математический синтез: опыт историко-математической рефлексии / В. В. Мороз. — М., 2005.
2. Крайзель, Г. Исследования по теории доказательств: сб. ст. / Г. Крайзель. — М., 1981.
3. Непейвода, Н. Н. Вызов логики и математики XX века и «ответ» на них цивилизации / Н. Н. Непейвода // *Вопр. философии*. — 2005. — № 8.
4. Пенроуз, Р. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики / Р. Пенроуз. — М., 2003.
5. Целищев, В. В. Непротиворечивость и полнота как нормы дедуктивного мышления в свете теоремы Гёделя о неполноте арифметики / В. В. Целищев // *Философия науки*. — 2005. — № 2.

*Дата поступления статьи в редакцию: 26.02.2009 г.*