УДК 101.1:510.2

«Символ философской простоты», или Почему для натуральных чисел справедливы законы арифметики?

В. А. Еровенко, доктор физико-математических наук, профессор
Н. Б. Яблонская, кандидат физико-математических наук, доцент

Наиболее плодотворные, исторически сложившиеся периоды становления и развития математики проходили при особо концентрированном внимании к общефилософским вопросам онтологии и теории познания. В статье показывается, что это можно понять, начиная с натуральных чисел, которые представляются всем наиболее легкими и знакомыми понятиями в математике.

„Symbol of philosophical simplicity“, or Why the laws of arithmetics are correct for natural numbers?

V. Erovenko, Doctor of Physical-Mathematical Sciences, Professor
N. Yablonskaya, PhD in Mathematics, Associate Professor

The most fruitful historical periods of the development of mathematics took place with especially concentrated attention to general philosophical questions of ontology and the theory of investigation. The paper shows that it can be understood starting from natural numbers, which seem to everyone the easiest and the most familiar things in mathematics.

Понятие «натурального числа» настолько знакомо каждому начинающему философу, не обремененному большим математическим опытом, что вопрос «что такое натуральное число?» кажется на первый взгляд довольно простым. Однако этот прямой вопрос кого угодно может поставить в тупик, так как ответить на него трудно. Ряд натуральных чисел – довольно тонкая структура математики, которая гораздо сложнее, чем большинство других первичных понятий, хотя оно и является простейшим математическим понятием. Говоря о том, что пояснения по поводу «основоположений арифметики» являются более философскими, чем это может показаться уместным многим математикам, немецкий математик и логик Готлоб Фреге настаивал на том, что *«основательное исследование понятия числа всегда должно проходить несколько философски. Для философии и математики эта задача является общей»* [1, с. 19]. Не умаляя побуждающие философские мотивы в исследованиях о понятии натурального числа и учитывая также то, что это важнейшее понятие относится к философским проблемам онто-гносеологического обоснования математики, следует признать, что в решении проблем арифметики приоритет принадлежит самой математике, а их философская интерпретация зависит от смысла, придаваемого соответствующими методологическими вопросами.

Натуральные числа возникли естественным образом, возможно, еще в доисторические времена при счете предметов. Они потому и «натуральные», что ими обозначались реальные неделимые объекты. Во времена Пифагора, в процессе философского осмысления и переосмысления исходного предметного содержания, арифметическое понятие числа подверглось глубокой теоретической переработке. Философская переработка натурального числа выразилась в том, что оно было универсализировано как всеобщее понятие, оно было абсолютизировано как основа всего сущего, и оно стало трактоваться не как внешняя, а как внутренняя характеристика всех вещей и явлений. Заметим, что нельзя смешивать натуральное число с символом, его изображающим. Несмотря на философскую трактовку понятия натурального числа как общемировоззренческой категории, пифагорейское учение неправомерно квалифицировать как «математическую философию», а тем более как «философию математики» в современном понимании. Тем не менее, история математических открытий во многих случаях является методически полезной для понимания сути проблем в философской аудитории как мотивированная подготовка к дальнейшим поискам методологической чистоты понятий, но она не может занять место собственно конкретного математического знания.

Методологический комментарий. Каждый, кто учился в школе, знает, что в геометрии есть аксиомы. Полный список аксиом геометрии довольно длинный и поэтому в деталях не изучается, и упоминаются лишь те аксиомы, которые необходимы с точки зрения методики обучения математике. А как обстоит дело с аксиомами арифметики? У многих с арифметикой ассоциируется прежде всего таблица умножения, но вряд ли кто-нибудь когда-нибудь доказывал в школьном курсе ее правильность. Можно даже задать такой вопрос: *«Почему для натуральных чисел справедливы законы арифметических действий?»* Так уж традиционно повелось, что в школе не говорят о том, что арифметика тоже может быть построена на основе аксиом, подобно тому, как это делается в геометрии.

Заметим, что после аксиоматического построения арифметики даже такое очевидное положение, как **«дважды два – четыре»**, которое все знают, а вот строго доказать с точки зрения математических стандартов могут немногие, наконец становится не только убедительным, но и доказательным. Почему же, имея перед собой выдающийся образец дедуктивного изложения геометрии, воплощенный еще в «Началах» Евклида, в котором, несмотря на все недостатки, математики примерно до конца XVIII в. видели идеал математической строгости, они не предприняли попыток логически обосновать арифметику? В первом приближении можно сказать, что геометрические понятия и аксиомы интуитивно воспринимаются намного легче, чем понятия арифметики.

Исторический комментарий. Так все же почему так поздно в математический обиход вошла система аксиом для арифметики натуральных чисел? Во-первых, фундаментальная причина связана с гносеологической проблемой обоснования математики. Вместо того чтобы, начав с целых и рациональных чисел, перейти к иррациональным и комплексным числам, а затем к алгебре и математическому анализу, так уж исторически сложилось, что события в последовательном обосновании математики развивались в обратном порядке. После доказательства в начале прошлого века теорем Гёделя о неполноте стало понятно, что все это было вовсе не случайно. Во-вторых, можно указать и на то, что до второй половины XIX в. обоснование основных утверждений и алгоритмов арифметики натуральных чисел, а также правил арифметических действий можно было осуществить без ее аксиоматизации.

Как сказал американский историк математики Морис Клайн: *«Как бы то ни было, в 90-е годы XIX в., через каких-нибудь шесть тысяч лет (!) после того, как египтяне и вавилоняне “пустили в оборот” целые числа, дроби и иррациональные числа, математики смогли наконец доказать, что* $2 + 2 = 4$» [2, с. 307]. Напомним в связи с этим, что математики сами заботятся о математической строгости. Математическая строгость характеризует доказательство с его формальной стороны, с точки зрения корректности определений, полноты посылок и независимости принятых аксиом. Значительную роль в достижении математической строгости «основных законов арифметики» сыграл итальянский математик, логик и философ математики Джузеппе Пеано. Известно, что он серьезно интересовался философией, например, в 1900 г. он участвовал в Международном философском конгрессе в Париже. Даже чисто математические работы Пеано всегда были посвящены принципиальным философским проблемам, что шло вразрез со стремлением к специализации научного знания, характерным для того времени.

Занимаясь преподаванием математики, Пеано обнаружил недостаточность математической строгости существовавших тогда арифметических доказательств, требующих усовершенствования оснований математики. Аксиоматизация арифметики – это нечто противоположное метафизике, так как особая черта математического знания состоит в том, что в процессе своего становления оно сливается с уже добытыми фактами и тем самым становится логически равнозначным этим фактам. Аксиоматический подход предполагает получение всевозможных следствий из некоторой системы аксиом по универсальным законам логики. Поэтому он позволяет изучать все модели исходной системы аксиом одновременно.

Перейдем к рассмотрению аксиом, на которых основана арифметика, – это система аксиом арифметики натуральных чисел Пеано. Она была сформулирована Джузеппе Пеано в статье «О понятии числа», опубликованной в 1891 г. Сошлемся вначале на мнение российского академика-математика Д. В. Аносова, который считает, что *«такая поздняя формулировка аксиом арифметики – своего рода исторический парадокс»* [3, с. 19]. Заметим, что в этих аксиомах речь идет только о натуральных числах. Возьмем за основу «школьную версию» натурального ряда, считая, что он начинается с единицы, хотя в оригинальной версии Пеано он начинается с нуля.

Философский комментарий. Законченный ряд натуральных чисел невозможен как эмпирический объект для «конечного» человека, но в то же время он необходим с точки зрения нашей философской интуиции. Интуитивно мы представляем себе натуральный ряд как обычный стандартный объект, и поэтому аксиоматический подход математически неподготовленному человеку не дает адекватного описания идеи натурального ряда. Речь идет о том, что одной из особенностей аксиоматического подхода является то, что аксиомы содержат утверждения как об определяемых понятиях, так и о неопределяемых понятиях. Поэтому аксиомы говорят нам также о том, что можно утверждать о неопределяемых понятиях, то есть, другими словами, как бы содержат неявные определения таких понятий.

Сделаем сначала несколько простых наблюдений, а затем выпишем пять аксиом Пеано, которые позволили наконец формализовать знакомую всем с детства арифметику, которая в какой-то части своих принципов является и описательной, и содержательной наукой. Посмотрим на ряд натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, ... и так далее. *Среди этих чисел имеется одно, которое выделяется с самого начала, – это так называемая «единица»*, обозначаемая *через* 1.

Такое обозначение и название – это всего лишь дань установившейся традиции. Существенная черта «единицы» состоит в ее выделенности среди других натуральных чисел, а не в ее обозначении. Открытие того, что 1 является числом, было трудным. Заметим, что число 0 является сравнительно недавним приобретением, так как ни древние греки, ни римляне такого числа не знали. На самом деле 1 – это та самая единица, которую все хорошо знают, но в данном контексте это специально выделенное число натурального ряда, о котором что-то полезное будет сказано в аксиомах.

Пеано также заметил, что вместо перечисления в виде аксиом основных свойств операций сложения и умножения можно воспользоваться одной-единственной операцией «следующего натурального числа». Когда ребенок учится считать «один, два, три, ...», он как раз называет за натуральным числом то число, которое следует за ним. Введем сейчас важное для дальнейших рассуждений обозначение. *Для любого натурального числа n* обозначим *следующее за ним число через n'* (читается как «эн-штрих»).

Методический комментарий. Для людей, обремененных школьным математическим образованием, естественно возникает вопрос: «Почему n', а не $n + 1$?» Ведь n' в рассмотренном нами ряде натуральных чисел равно $n + 1$. Это действительно так, но, пока у нас не определена операция «сложения», не следует обозначать число, следующее за n, через $n + 1$. Но как-то обозначить его все же надо, хотя раньше мы и обходились без таких обозначений.

Подчеркнем, что при построении аксиоматики Пеано мы будем базироваться только на понятии *«единицы»* и понятии *«следующего за»*, не выясняя их конкретный смысл. Что касается операции сложения, то она, как и операция умножения, будет определена после того, как мы выпишем все интересующие нас аксиомы арифметики. Заметим, что интуитивно понимаемое нами *«множество натуральных чисел»* обычно обозначают *через* $\mathbf{N}$. Можно сказать, что это своего рода математический стандарт. Подчеркнем, что заглавная латинская буква N может обозначать все что угодно, а вот $\mathbf{N}$ – это обязательно привычное для нас множество натуральных чисел.

Нельзя не отметить, что столь «минимальный» набор исходных данных достаточен для построения всей арифметики натуральных чисел. Речь идет о множестве $\mathbf{N}$, называемом «множеством натуральных чисел», в котором особо выделен определенный элемент 1, называемый «единицей», и введенной операции (отображении, функции), сопоставляющей каждому $n \in \mathbf{N}$ некоторое число $n' \in \mathbf{N}$, называемое «число, следующее за n». Дадим, наконец, полный список аксиом, дающий строгое определение натурального ряда, называемый *аксиоматикой Пеано*.

Определение натурального ряда. *Натуральным рядом называется структура $\langle\mathbf{N}, 1, '\rangle$ с основным множеством $\mathbf{N}$, элементы которого называются натуральными числами, выделенной единицей и операцией $'$ (штрих), если они удовлетворяют следующим пяти аксиомам:*

(A1) В $\mathbf{N}$ существует натуральное число 1, называемое *единицей*.

(A2) За каждым натуральным числом n непосредственно следует однозначно определенное натуральное число n', называемое *следующее за n*. Другими словами, для любого $n \in \mathbf{N}$ существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что $m = n'$, причем если $n = k$, то $n' = k'$.

(A3) Единица, т. е. натуральное число 1, непосредственно *не следует ни за каким* натуральным числом. Другими словами, $1 \neq n'$ ни для какого $n \in \mathbf{N}$, т. е. для всех $n \in \mathbf{N}$ обязательно $1 \neq n'$.

(A4) Каждое натуральное число непосредственно *следует не более чем за одним* натуральным числом. Другими словами, если $n' = k'$, то $n = k$, или, что эквивалентно, если $n \neq k$, то $n' \neq k'$.

(A5) *(Аксиома индукции)* Любое подмножество M из множества $\mathbf{N}$, содержащее единицу, т. е. $1 \in$ M, и вместе с каждым n из M, содержащее следующий за n, т. е. $n' \in$ M, совпадает с множеством $\mathbf{N}$.

Эти аксиомы оказались проще, чем аксиомы геометрии. Просто поразительно, что на такой, казалось бы, довольно скудной на первый взгляд основе можно построить всю арифметику. А именно – определить сложение, умножение и другие арифметические действия над числами, ввести отрицательные, рациональные и иррациональные числа и основные правила действий с ними, хотя это может быть математически строго сделано не так скоро. Но все доказанное в формальной системе аксиом арифметики натуральных чисел будет справедливо для объектов каждой интерпретации аксиоматики Пеано.

Философский комментарий. Говоря о различии между математикой и философией, английский логик и философ Бертран Рассел сказал: *«Наиболее ясными и простыми вещами в математике являются не те, к которым приходят логически с самого начала, а те, которые с точки зрения логической дедукции находятся посередине»* [4, с. 12]. Возможно, поэтому «начальная математика» логикой рассуждений отличается от «настоящей математики». В действительности идея построения последовательности элементов натурального ряда, обладающих свойствами, выраженными аксиоматикой Пеано, столь естественна и проста, что на школьном уровне представляется вполне законным представление о существовании натурального ряда в качестве исходного допущения, рассматриваемого как обобщение данных опыта и наглядных соображений. Но на качественно новом логическом и математическом уровне формирование критического мышления и философской рефлексии – это залог подлинной философско-математической образовательной деятельности.

Методологический комментарий. Возвращаясь к аксиоматике Пеано, подчеркнем абстрактный характер определения натурального ряда. Вообще говоря, множество **N** может быть любой природы, операция «штрих» может быть как угодно задана, но если выполняются сформулированные выше пять аксиом Пеано, то структура $\langle \mathbf{N}, 1, {}' \rangle$, по определению, является натуральным рядом. В частности, аксиоматике Пеано удовлетворяет интуитивно представляемый нами ряд натуральных чисел, задаваемый структурой $\langle \mathbf{N}, 1, {}' \rangle$, где $n' = n + 1$, т. е. последовательность 1, 2, 3, 4, 5, ... Хотя математики имеют дело с абстрактными понятиями, они, в духе «умеренного скептического платонизма», считают, что идеализированные объекты, которые они называют «натуральными числами», являются *частью реального мира*, а не просто плодом нашего воображения.

Методический комментарий. В математике объекты создаются из интерпретации слов естественного языка и их сочетаний, входящих в словесное определение математических терминов, описывающих эти объекты. Каждая совокупность объектов, для которой истинна данная система аксиом, называется *интерпретацией этой системы.* Всякий закон построения некоторой бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ может быть использован для построения соответствующей интерпретации аксиоматики Пеано, назначив a_1 «единицей» и введя «следующий за» естественным образом $a'_n = a_{n'}$. Заметим, что в аксиоматике Пеано нет ничего такого, что позволило бы отличить одну интерпретацию от другой, поэтому все эти возможные интерпретации будут равно истинными.

Поскольку аксиоматика Пеано может иметь бесконечное количество различных интерпретаций, то, с точки зрения *логицизации* математики, т. е. сведения математических понятий к логике, трактовка Пеано оказалась для философов математики «менее законченной», чем это казалось поначалу. Прежде чем рассмотреть на некоторых примерах соответствующие *модели Пеано* $\langle \mathbf{N}, 1, {}' \rangle$ заметим, что ценность адекватной математической модели определяется не столько ее свойствами, известными из опыта, сколько теми факторами, которые учитывались при использовании подходящего математического определения.

Пример 1. *Рассмотрим модель:* 1) *термин «единица» имеет свое обычное значение* 1; 2) *термин «следующий за» получается добавлением двух к предыдущему числу;* 3) *термин «натуральное число» означает то, что мы обычно называем «нечетными числами».*

Легко убедиться, что аксиомы (A1) – (A5) при этом выполнены, т. е. «натуральный ряд» в этой модели Пеано будет в итоге таким: 1, 3, 5, 7, ...

Пример 2. *Рассмотрим модель:* 1) *термин «единица» означает произвольное постоянное число а, больше 1, не равное квадрату никакого числа;* 2) *термин «следующий за» определяется как «равно квадрату»;* 3) *термин «натуральное число» – это «степень числа а, показатель которой имеет вид* 2^n*».*

Получим модель Пеано, в которой «натуральный ряд», согласно представленной интерпретации, примет вид: $a, a^2, a^4, a^8, \ldots$

Пример 3. *Предположим:* 1) *термин «единица» обозначает данный «отрезок* $[0, a]$»; 2) *термин «следующий за» определяется через «отрезок, равный первой половине предыдущего отрезка»*; 3) *термин «натуральное число» – это «первые доли отрезка* $[0, a]$, *кратные степени двойки».*

В этой «геометрической интерпретации» модели Пеано «натуральный ряд» можно описать так: $[0, a], [0, a/2], [0, a/4], [0, a/8], \ldots$

Пример 4. *Предположим:* 1) *термин «единица» означает некоторая «студентка-философ»;* 2) *термин «следующий за» – «мать предыдущего человека»;* 3) *термин «натуральное число» – это, не стремясь к словесной точности, «родственники женского рода по прямой линии»*.

Не вступая в дискуссию на тему «откуда появились люди на Земле», в этой нечисловой интерпретации системы аксиом (А1) – (А5) «натуральный ряд» по существу совокупность людей, состоящих из студентки-философа и всех ее прародителей по женской линии.

Пример 5. ***(Философская интерпретация Хофштадтера)*** *Вместо вызывающего определенные ассоциации термина «натуральное число» будем пользоваться неопределенным термином «гений», свободным от известных математических ассоциаций. Другие неопределенные термины, которыми мы будем пользоваться, – это «джинн» вместо «единицы» и «мета» вместо «следующий за»*.

Сформулируем, следуя оригинальному примеру американского ученого Дагласа Хофштадтера [5, с. 211], пять постулатов Пеано в новых терминах: (1) Джинн – это гений. (2) Каждый гений имеет мету, которая тоже является гением. (3) Джинн не является метой никакого гения. (4) Различные гении имеют различные меты. (5) Если джинн обладает некоторым свойством *P* и каждый гений передает *P* своей мете, то тогда все гении обладают свойством *P*.

Философский комментарий. В статье Людовико Джеймонато «Пеано об основах математики и “философские” возражения Рассела» в сборнике «Памяти Джузеппе Пеано» (1955) эти возражения сводятся к следующему: пять аксиом Пеано нельзя принять за неявные определения упомянутых трех идей или основных понятий этой аксиоматики – «единицы», «следующий за» и «натурального числа». Поскольку этим аксиомам могут удовлетворять разные интерпретации, то из этой аксиоматики не получается однозначного понятия числа, как это принято в нашем обиходном языке. Важно понять, что эти три идеи должны быть поняты независимо, если мы хотим, чтобы построенные нами «числа» не просто удовлетворяли математическим формулам, но и были применимы к обыденным объектам. Это *философская проблема* связи между точным, но условным научным языком и обычным неточным языком, но лишенным необоснованных условностей.

С помощью своей аксиоматики Пеано хотел выразить сущность натуральных чисел. Хотя математики считают, что это ему вполне удалось, это не умаляет важности философско-методологического вопроса: *«Как можно отличить истинное высказывание о натуральных числах от ложного?»* При ответе на этот вопрос необходимо учитывать следующее обстоятельство. Арифметика натуральных чисел строится не только на базе пяти аксиом Пеано. При этом используется логика, а также кое-какие сведения о множествах, которые фигурируют в определении натурального ряда. Заметим, что логику и необходимые сведения о множествах можно изложить аксиоматически, но это будет сложнее рассмотренных аксиом Пеано.

Методический комментарий. У философов со сформировавшейся математической культурой мышления может возникнуть естественный вопрос: *«Не является ли одна из аксиом Пеано лишней, вытекающей из остальных аксиом?»* Система аксиом называется независимой, если ни одну из аксиом невозможно доказать исходя из остальных аксиом. Чтобы доказать независимость какой-либо аксиомы от остальных аксиом системы, достаточно сравнить две модели, в одной из которых выполняются все аксиомы, включая выбранную, а в другой пусть выполняются все аксиомы, кроме выбранной аксиомы, которая не выполняется. Проверим на контрпримерах независимость всех пяти аксиом Пеано.

Контрпример 1. *На множестве* $N_1 = \{a, b, c\}$ *определим операцию «штрих», положив* $a'=b$, $b'=c$, $c'=a$ (рис. 1). На рисунках будем наглядно изображать операцию «следования за» символической стрелкой. Считая, что ни один из элементов множества N_1 не выделен, получим, что аксиома (А1) не выполняется, а остальные аксиомы выполняются.

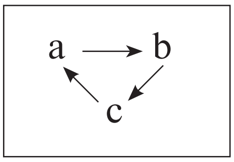

Рис. 1

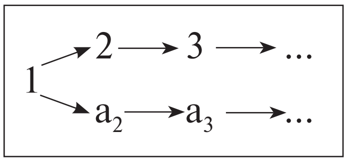

Рис. 2

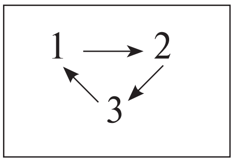

Рис. 3

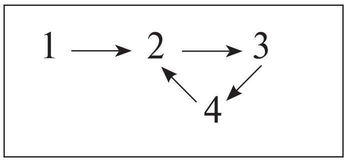

Рис. 4

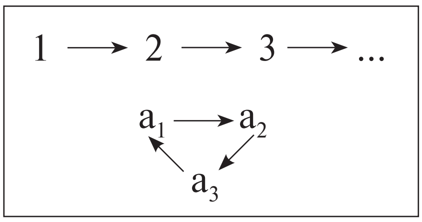

Рис. 5

Контрпример 2. *На множестве* $N_{21} = \{1, 2\}$ *с «единицей»* 1 *определим операцию «штрих», положив* $1' = 2$. Очевидно, что первая половина аксиомы (А2) о существовании для каждого числа «следующего за» ним, а значит и вся аксиома, не выполняется, в отличие от остальных аксиом. *На множестве* $N_{22} = \{1, 2, a_2, 3, a_3, ...\}$ положим $1' = 2$, $2' = 3$, ..., $1' = a_2$, $a'_2 = a_3$, ... (рис. 2). Легко видеть, что вторая часть аксиомы (А2) о единственности «следующего за», а значит и вся аксиома, не выполняется, а остальные аксиомы выполняются.

Контрпример 3. *На множестве* $N_3 = \{1, 2, 3\}$ *с выделенной «единицей»* 1 *определим операцию «штрих», положив* $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 1$ (рис. 3). Очевидно, что аксиома (А3) не выполняется, так как каждый элемент из N_3 непосредственно следует за некоторым другим элементом этого множества, хотя остальные аксиомы выполняются.

Контрпример 4. *На множестве* $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ *с «единицей»* 1 *положим* $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, $4' = 2$ (рис. 4). Нетрудно понять, что аксиома (А4) в этом случае не выполняется, в отличие от остальных аксиом Пеано.

Контрпример 5. *На множестве* $N_5 = \{1, a_1, 2, a_2, 3, a_3, 4, 5, ...\}$ *с выделенной «единицей»* 1 *положим* $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, $4' = 5$, ..., $a_1' = a_2$, $a_2' = a_3$, $a_3' = a_1$ (рис. 5). Нетрудно понять, что эта структура удовлетворяет аксиомам (А1) – (А4). Покажем, что аксиома (А5) не выполняется. Если рассмотреть подмножество $M=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, то тогда $1 \in M$, а из $n \in M$ следует, что $n' \in M$, однако $M \neq N_5$.

Заметим, что помимо аксиом и теорем в математике используются также определения. Трудность ответа на, казалось бы, простой вопрос *«что такое натуральное число?»* обусловлена тем, что это понятие опирается на «категориальные интуиции», не имеющие строгого определения, а также тем, что понятие натурального числа на уровне оснований математики не является исходным, так как оно задано на основе сравнительно элементарных представлений. Философ математики В. Я. Перминов уточнил это следующим образом: *«В основе числа как онтологического понятия лежат три представления, а именно представление о единичной вещи, о совокупности вещей и об элементарной порождающей операции, увеличивающей совокупность вещей на одну вещь»* [6, с. 172]. Напомним, что мы уже имеем право использовать число 1 и можем применять операцию перехода к следующему числу, а, например, что такое число 2 или 3, пока все еще не определено, но мы уже можем дать эти определения.

Онтологическое определение числа. *Зададим число* 2 *как единственное число, следующее за* 1, *т. е.* $2 = 1'$. *Зная, что такое* 2, *можно определить единственное число* 3 *при помощи равенства* $3 = 2'$. *Затем определим* 4 *как* $3'$ *и так далее.*

Методический комментарий. Кратко проанализируем, что же мы в итоге получили, исходя из аксиоматики Пеано. Для начала мы определили 2 как «следующее за единицей 1», которая существует по аксиоме (А1), 3 определяется как «следующий за 2» и так далее. Неразложимое сочетание «и так далее» составляет сущность натурального числа. Ясно, что с помощью онтологического определения числа мы можем идти сколь угодно далеко, так как по аксиоме (А2) каждое достигнутое натуральное число имеет «следующий за» ним элемент. Благодаря аксиоме (А3) этим числом не может быть 1, а в силу аксиомы (А4) этим числом не может быть ни одно из уже достигнутых. Таким образом, строится бесконечно продолжающийся ряд новых чисел, а из-за аксиомы индукции (А5) все натуральные числа попадают в этот ряд, т. е. все числа оказываются в нашем распоряжении.

Даже по Платону, сложение как операция не является причиной возникновения двойки – двойка существовала всегда. Вообще говоря, арифметические операции интересно проанализировать в контексте различий аксиоматического и генетического методов. Но чаще всего предметом философской рефлексии арифметические операции становятся тогда, когда возникает необходимость осмыслить их суть в рамках какого-либо математического метода. Современный философско-методологический взгляд на «законы арифметики» состоит в том, что они не порождены процедурами счета, а являются их условием. Заметим также, что убедительность, в отличие от доказательности, не требует дальнейшей рефлексии, так как она довольно часто просто «усыпляет бдительность».

Все знают, что *«дважды два – четыре»*, а вот доказать это могут лишь немногие. Может быть, все человечество с какой-то степенью вероятности заблуждается, считая истинными равенства $2 + 2 = 4$ и $2 \cdot 2 = 4$? Но прежде чем обсуждать это, надо формально-математически определить сложение и умножение чисел. Чтобы придать смысл записи $x + y$ для любых натуральных чисел x и y, зафиксируем x и последовательно определим $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, ... и т. д. Для этого воспользуемся аксиомой индукции из аксиоматики Пеано. Понятно, что при $y = 1$ выражение для суммы $x + 1$ естественно положить равным x'. Будем считать, что значение выражения $x + y$ для данного числа y уже определено и теперь можно определить значение выражения $x + y'$. Нетрудно понять, что значение суммы $x + y'$ на 1 превышает значение суммы $x + y$, т. е. оно – следующее за $x + y$, и, следовательно, равно $(x + y)'$. Рассмотрим определение операции сложения.

Определение сложения. *Сложением натуральных чисел называется операция +, удовлетворяющая для любых натуральных чисел x и y следующим условиям (или аксиомам):*

(S1) $x + 1 = x'$,

(S2) $x + y' = (x + y)'$.

Оказывается, что такая операция для натуральных чисел не только существует, но и притом она только одна с такими свойствами, что утверждается в следующей теореме, доказательство которой дано, например, в теореме 2.2.2 [7, с. 20].

Теорема о сложении. *Сложение натуральных чисел существует и единственно.*

У нас наконец есть все формальные основания для того, чтобы строго математически доказать знаменитое равенство $2 + 2 = 4$.

Пример «2 + 2». *Вычислить значение выражения* $2 + 2$. Выпишем цепочку равенств, а затем объясним каждый из переходов. Имеем: $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = (2')' = 3' = 4$. Первое равенство справедливо по определению числа 2, второе – по аксиоме (S2) для $x = 2$ и $y = 1$, третье – по аксиоме (S1) для $x = 2$, четвертое – по определению числа 3, а пятое – по определению числа 4.

Осталось определить операцию умножения, т. е. придать смысл записи $x \cdot y$ для любых натуральных чисел x и y. Действуя аналогично, как и при определении операции сложения, сначала определим выражение $x \cdot 1$, которое естественно положить равным x. Далее предположим, что уже известно значение выражения $x \cdot y$ для данных чисел и требуется придать смысл выражению $x \cdot y'$. Поскольку мы хотим включить в определение умножения обычную арифметику, то гипотетически должно выполняться правило раскрытия скобок, т. е. $x \cdot y' = x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x \cdot 1 = x \cdot y + x$. В соответствии с нашими ожиданиями умножение $x \cdot y'$ должно быть определено через $x \cdot y + x$. Сформулируем полученное определение операции умножения.

Определение умножения. *Умножением натуральных чисел называется операция ·, удовлетворяющая для любых натуральных чисел x и y следующим условиям (или аксиомам):*

(P1) $x \cdot 1 = x$,

(P2) $x \cdot y' = x \cdot y + x$.

Как и операция сложения, операция умножения для натуральных чисел существует и с такими свойствами она только одна, что сформулировано в следующей теореме, доказательство которой дано, например, в теореме 2.3.2 [7, с. 25].

Теорема об умножении. *Умножение натуральных чисел существует и единственно.*

В «Критике чистого разума» Иммануил Кант, рассуждая о синтетических положениях чистого и трансцендентального разума, говорил, что они бесконечно далеки от того, *«чтобы быть столь же очевидными (как это настойчиво утверждают), как положение* ***дважды два – четыре»*** [8, с. 386]. Наконец настал для нас торжественный момент – мы в состоянии доказать, точнее вывести из аксиом, одно из самых знаменитых равенств $2 \cdot 2 = 4$.

Пример «2·2». *Вычислить значение выражения* $2 \cdot 2$. Выпишем последовательность равенств и затем проанализируем каждое из них. Имеем: $2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$. В первом равенстве мы использовали определение числа 2, во втором – аксиому (P2) для $x = 2$ и $y = 1$, в третьем – аксиому (P1) для $x = 2$, в четвертом – доказанное равенство в примере «2 + 2».

Вслед за Кантом многие философы говорят, что «это очевидно как дважды два – четыре». Теперь мы знаем, как доказать этот *«символ философской простоты» – дедуктивная дорога к «храму математического доказательства» начинается с аксиом Пеано.* И сегодня мы можем наконец констатировать, что 2 на 2 действительно равняется 4, даже не повышая голоса. Философско-математическая идея, состоящая в том, что в аксиоматике Пеано содержится вся арифметика, потенциально расширяющаяся на бесконечное множество случаев, подчиняющихся арифметическим правилам, опирается на следующее убеждение математиков. Числа для них являются самостоятельными идеальными объектами и на всех уровнях математики составляют определенную иерархию строгости, основанную на степени глубины проникновения в их свойства.

Оценивая усилия, потраченные в первые десятилетия XX в. на аксиоматику, выдающийся немецкий математик и философ математики Герман Вейль в сборнике работ «О философии математики» написал: *«В системе математики имеются два обнаженных пункта, в которых она, может быть, соприкасается со сферой непостижимого. Это именно принцип построения ряда натуральных чисел и понятие континуума».* Сознавая ценность аксиоматизации, он также предупреждал об «оскуднении ее плодов», призывая математиков заниматься содержательными проблемами. Математикам для их собственных нужд, по существу, нужен один натуральный ряд чисел, свойства которого, существенные для них, полностью описываются аксиомами Пеано. Философы математики вынуждены были признать, что натуральное число является первичным и неопределяемым понятием, а также является важнейшей категорией математики.

А что же тогда говорят нам аксиомы Пеано? Разве они не определяют натуральный ряд? Если понимать натуральный ряд, как мы его привычно понимаем, т. е. как единственную совокупность, то тогда надо сказать – нет, поскольку аксиоматика Пеано на это вовсе и не претендует. Философско-методологическая неопределяемость понятия «натурального числа» в аксиоматической теории выражается в том, что если и существует некоторое множество с требуемыми свойствами, то его существование лишь предполагается. Следуя пеановскому методу, мы лишь знаем, что подразумеваем под «единицей», «натуральным числом» и «следующим за», хотя не можем объяснить, что мы под этим подразумеваем в терминах других методических концепций. Поэтому, в этой связи, наряду с «математическим» натуральным рядом можно также говорить и о «физическом» натуральном ряде.

Отталкиваясь от того факта, что маленькие дети прекрасно «понимают» математическую сущность идеи натурального ряда, современный американский математик и физик Роджер Пенроуз заключает, что они удивительным образом способны «входить в контакт» с платоновским миром математических идей. Он также утверждает, что *«математическое понимание вообще сводится вовсе не к вычислительной работе мозга, а к чему-то совершенно иному, связанному с нашей способностью осознавать или понимать окружающий мир»* [9, с. 117]. В силу теоремы Гёделя о неполноте формализованная математика не может быть описана полностью, поэтому в учебных целях будущим философам приходится питать доверие к здравому смыслу, подобное тому, которое многие нематематики питают к таблице умножения, даже не подозревая о существовании аксиом Пеано.

Но, поняв, какие философско-методологические «глубины» скрываются за столь известным фактом, как *«дважды два – четыре»*, становится ясно, что вся таблица умножения может быть получена таким же образом, т. е., строго говоря, каж-дое равенство из таблицы умножения – это от-дельный содержательный пример. А что следует рассматривать дальше? На очереди – доказатель-ство основных *законов арифметики*, а именно: ассоциативного закона сложения, коммутатив-ного закона сложения, дистрибутивного закона, ассоциативного закона умножения и коммута-тивного закона умножения. Все эти законы до-казываются примерно по одной и той же схеме – методом математической индукции.

Для студентов-философов, изучающих курс «Основы высшей математики», принципиально важным для понимания того, чем же занимаются математики, является то, что в аксиоматике Пеано достигается «предельное состояние завершенности», устраняющее саму возможность ее дальнейшего изменения без потери заключенного в ней философско-математического содержания.

Список цитированных источников

1. *Фреге, Г.* Основоположения арифметики / Готлоб Фреге. – Томск, 2000.
2. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности / М. Клайн. – М., 2007.
3. *Аносов, Д. В.* Взгляд на математику и нечто из нее / Д. В. Аносов. – М., 2003.
4. *Рассел, Б.* Введение в математическую философию / Б. Рассел. – М., 1996.
5. *Хофштадтер, Д.* Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда / Д. Хофштадтер. – Самара, 2001.
6. *Перминов, В. Я.* Философия и основания математики / В. Я. Перминов. – М., 2001.
7. *Ларин, С. В.* Числовые системы: учеб. пособие / С. В. Ларин. – М., 2002.
8. *Кант, И.* Критика чистого разума / И. Кант. – Симферополь, 1998.
9. *Пенроуз, Р.* Большое, малое и человеческий разум / Р. Пенроуз [и др.] – СПб., 2008.

Дата поступления статьи в редакцию: 05.02.2009 г.