АВГУСТ 1977 г., ТОМ XIII, № 8

УДК 517.937+517.972.52

Я. В. РАДЫНО

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. I. РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Введение. В настоящей работе изучаются некоторые свойства регулярных в смысле Вальброока ([1, 2]) элементов алгебры $\mathscr{L}(E)$ — непрерывных линейных операторов на квазиполном локально выпуклом пространстве, борнологически полной с равностепенно непрерывной борнологией.

§ 1. РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство ([3]) и $\mathscr{L}(E)$ — алгебра непрерывных линейных операторов, наделенная борнологией равностепенной непрерывности. Если E — квазиполно, то $\mathscr{L}(E)$ — борнологически полная алгебра (см. [4, 5]) с единицей.

Символом $\operatorname{Spec} E$ будем обозначать множество всех полунорм на E, определяющих топологию на E. Оператор $A\in\mathscr{L}(E)$ будем называть *регулярным* оператором, если существует $M>0$ такое, что для каждого $p\in\operatorname{Spec} E$ найдется такое $q\in\operatorname{Spec} E$, что

$$p(A^n x)\leqslant M^n q(x) \text{ для всех } x\in E \text{ и всех } n=1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

Таким образом, регулярный оператор — это не что иное, как регулярный элемент борнологической алгебры $\mathscr{L}(E)$ в смысле Вальброока ([1, 2]).

Если A — регулярный оператор, то регулярный спектр $\operatorname{sp} A$ оператора A определяется как множество всех $\lambda\in\mathbf{C}$ таких, что $A-\lambda I$ не имеет обратного в множестве регулярных операторов. Известно (см. [1]), что спектр регулярного оператора A — не пустое компактное множество и его спектральный радиус равен

$$r(A)=\inf\{M>0 : p(A^n x)\leqslant M^n q(x)\}. \tag{1.2}$$

Кроме того, на регулярных операторах можно построить, как и в банаховом случае, голоморфное исчисление по формуле

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_A} f(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}d\lambda, \tag{1.3}$$

где Γ_A — контур, обходящий $\operatorname{sp} A$, и интегрирование ведется в борнологическом пространстве $\mathscr{L}(E)$. Оператор $f(A)$ регулярный и $\operatorname{sp}(f(A))=$ $=f(\operatorname{sp} A)$ (теорема Данфорда, [1]).

Из равенства (1.2) следует равенство

$$r(A)=\sup_{\substack{p\in\operatorname{Spec} E\\ x\in E}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{p(A^n x)}. \tag{1.4}$$

§ 2. ТРАНСПОЗИЦИЯ

Сейчас нас будет интересовать вопрос: когда сопряженный оператор регулярному оператору будет регулярным?

Итак, пусть E — локально выпуклое пространство и E'_β — сильно пряженное к E. Пусть $Q\subset\mathscr{L}(E)$ — равностепенно непрерывное мноство. Обозначим $Q'=\{u'\in\mathscr{L}(E'_\beta):u\in Q\}\subset\mathscr{L}(E'_\beta)$. Известно, (см., пример, [3, стр. 250]), что если E квазибочечно, то равностепенная неерывность Q эквивалентна равностепенной непрерывности Q'.

Таким образом, если E квазиполно и квазибочечно, а значит, и боно ([5]), то E'_β квазиполно ([3, стр. 188]. Следовательно, $\mathscr{L}(E'_\beta)$ — рнологическая полная алгебра относительно равностепенно непревной борнологии, и ограниченные множества этой алгебры в точности впадают с сопряженными к ограниченным множествам из $\mathscr{L}(E)$.

Таким образом, получено

Предложение 1. *Если E — квазиполное бочечное локально выклое пространство (например, рефлексивное или пространство Фре), то регулярные операторы борнологически полной алгебры $\mathscr{L}(E'_\beta)$ очности совпадают с сопряженными операторами к регулярным элентам алгебры $\mathscr{L}(E)$.*

Это предложение позволит построить новые классы регулярных опегоров исходя из ранее известных.

§ 3. РЕГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Если E — локально выпуклое пространство и $\mathscr{L}_\beta(E)$ — пространство рерывных линейных отображений в E с топологией равномерной сходости на всех ограниченных подмножествах из E, то наряду с операами $A:E\to E$ приходится часто изучать операторы $\mathscr{A}_g:\mathscr{L}_\beta(E)\ni X\to$ $A\circ X\in\mathscr{L}_\beta(E)$ и $\mathscr{A}_d:\mathscr{L}_\beta(X)\ni X\to X\circ A\in\mathscr{L}_\beta(E)$. В случае, когда E — банао пространство, а A — ограниченный оператор, то $\mathscr{L}_\beta(E)$ — банахово ператоры $\mathscr{A}_g$, $\mathscr{A}_d$ ограничены.

Для регулярных операторов в локально выпуклых пространствах аведливо аналогичное утверждение.

Предложение 2. *Пусть E квазиполно и бочечно и $A:E\to E$ — улярный оператор. Тогда операторы $\mathscr{A}_g$, $\mathscr{A}_d:\mathscr{L}_\beta(E)\to\mathscr{L}_\beta(E)$ регуны и, кроме того,* $\mathrm{sp}\,\mathscr{A}_g\subset\mathrm{sp}\,A$, $\mathrm{sp}\,\mathscr{A}_d\subset\mathrm{sp}\,A$.

Доказательство.

$$\mathrm{Spec}\,\mathscr{L}_\beta(E)=\{p_{\mathcal{O}}(X)=\sup_{x\in\mathcal{O}}p(Xx):p\in\mathrm{Spec}E,\ \mathcal{O}\text{ ограничено в }E\}.$$

Пусть $M>r(A)$, тогда

$$p_{\mathcal{O}}(\mathscr{A}^n_gX)=\sup_{x\in\mathcal{O}}p(A^n\circ Xx)\leqslant M^n\sup_{x\in\mathcal{O}}q(Xx)=M^nq_{\mathcal{O}}(X).$$

юда видно, что $\mathscr{A}_g$ регулярен и $r(\mathscr{A}_g)\leqslant M$ и, следовательно, $(\mathscr{A}_g)\leqslant$ (A).

Теперь докажем регулярность оператора $\mathscr{A}_d$. Пусть $M>r(A)$ — проэльное число. Тогда семейство $\{A^n/M^n;\ n=0,1,\ldots\}$ равностепенно рерывно. Поэтому множество $\mathcal{O}_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}\frac{A^n(\mathcal{O})}{M^n}$ ограничено в E для юго ограниченного $\mathcal{O}\subset E$ ([3, стр. 107]).

Таким образом,

$$p_{\mathcal{O}}\left(\frac{A_d^n}{M^n}X\right)=\sup_{x\in\mathcal{O}}p\left(X\circ\frac{A^n}{M^n}x\right)\leqslant\sup_{y\in\mathcal{O}_1}p(Xy)=p_{\mathcal{O}_1}(X)$$

для всех $n=0, 1, \ldots$, т. е. $\mathcal{A}_d$ регулярен и $r(\mathcal{A}_d)\leqslant r(A)$.

Сейчас докажем требуемые включения. Для этого воспользуемся следующей теоремой Вальброока [1]: Если a — регулярный элемент b-алгебры, то, для того чтобы $\lambda_0\notin\operatorname{sp} a$, необходимо и достаточно, чтобы λ_0 обладало окрестностью, в которой $(\lambda_0-a)^{-1}$ определен и ограничен.

Пусть $\lambda_0\notin\operatorname{sp} A$, тогда существует $\varepsilon>0$, что $((\lambda I-A)^{-1})_{\lambda\in B(\lambda_0;\,\varepsilon)}$ равностепенно непрерывно, т. е., что для любой $p\in\operatorname{Spec} E$ найдется $q\in\operatorname{Spec} E$, что

$$p[(\lambda I-A)^{-1}x]\leqslant q(x)\ \text{для всех}\ x\in E\ \text{и}\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon. \tag{3.1}$$

Из последнего неравенства, поскольку $\mathcal{A}_g$ регулярен в $\mathcal{L}_\beta(E)$, имеем для любого $X\in\mathcal{L}_\beta(E)$ и любого ограниченного в E множества $\mathcal{O}$

$$p_{\mathcal{O}}[(\lambda I-A_g)^{-1}X]=\sup_{x\in\mathcal{O}}p[(\lambda I-A)^{-1}\circ Xx]\leqslant\sup_{x\in\mathcal{O}}q(Xx)=q_{\mathcal{O}}(X) \tag{3.2}$$

для всех $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$. Это означает, согласно упомянутой выше теореме Вальброока, что $\lambda_0\notin\operatorname{sp}\mathcal{A}_g$. Таким образом, показано, что $\operatorname{sp}\mathcal{A}_g\subset\operatorname{sp} A$.

Теперь пусть $\lambda_0\notin\operatorname{sp} A$. Тогда имеем

$$\begin{gathered}p_{\mathcal{O}}[(\lambda I-A_d)^{-1}X]=\sup_{x\in\mathcal{O}}p[X\circ(\lambda I-A)^{-1}]\leqslant\\ \leqslant\sup_{x\in\mathcal{O}_1}p(Xx)=p_{\mathcal{O}_1}(X)\ \text{для всех}\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon,\end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\mathcal{O}_1=\bigcup\limits_{\lambda\in B(\lambda_0,\,\varepsilon)}(\lambda I-A)^{-1}(\mathcal{O})$ ограничено в E ([3, стр. 107]) для любого ограниченного $\mathcal{O}\subset E$.

Из неравенства (3.3) и теоремы Вальброока имеем $\lambda_0\notin\operatorname{sp}\mathcal{A}_d$. Таким образом, $\operatorname{sp}\mathcal{A}_d\subset\operatorname{sp} A$. Предложение доказано.

Замечание. В ходе доказательства бочечность явно нигде не используется. Она нужна только для того, чтобы $\mathcal{L}_\beta(E)$ было квазиполным ([6, стр. 177]), а квазиполнота $\mathcal{L}_\beta(E)$,— чтобы $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\beta(E))$ было борнологически полной алгеброй.

Предложение 2 в сочетании с операторным исчислением позволяет получить формулу М. Г. Крейна [7] для разрешимости уравнений вида $A\circ X+X\circ B=Y$ в случае локально выпуклых пространств почти без всяких изменений в доказательствах.

Пусть E — квазиполное бочечное пространство. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j,\,k=0}^{n}c_{jk}A^j\circ X\circ B^k=Y \tag{3.4}$$

в пространстве $\mathcal{L}_\beta(E)$, где c_{jk} — комплексные числа, $X\in\mathcal{L}_\beta(E)$ — искомый элемент, $Y\in\mathcal{L}_\beta(E)$ — заданный и A, B — регулярные заданные операторы в E.

Рассмотрим теперь операторы $\mathcal{A}_g$, $\mathcal{B}_d$. Очевидно, что они коммутируют.

С помощью многочлена $P(\lambda, \mu)=\sum_{j, k=0}^{n} c_{jk}\lambda^j\mu^k$ запишем оператор

$$P_{A, B}\equiv P(\mathscr{A}_g, \mathscr{B}_d)=\sum_{j, k=0}^{n} c_{jk}\mathscr{A}_g^j\mathscr{B}_d^k. \tag{3.5}$$

После этого уравнение (3.1) примет вид

$$P_{A, B}=Y. \tag{3.6}$$

Выясним условия существования оператора $P_{A, B}^{-1}$. Ввиду предложения 2 операторы $\mathscr{A}_g$ и $\mathscr{B}_d$ регулярны в $\mathscr{L}_\beta(E)$ и $\mathrm{sp}\,(\mathscr{A}_g)\subset\mathrm{sp}\,A$, $\mathrm{sp}\,(\mathscr{B}_d)\subset\subset\mathrm{sp}\,B$. Поэтому по формуле (1.3) имеем

$$\mathscr{A}_g^j=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A}\lambda^j(\lambda I-\mathscr{A}_g)^{-1}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_A}\lambda^j(\lambda I-A)_g^{-1}d\lambda, \quad \lambda\notin\mathrm{sp}\,A.$$

Аналогично для $\mathscr{B}_d^k$. Тогда оператор (3.5) примет вид

$$P_{A, B}=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}P(\lambda, \mu)(\lambda I-\mathscr{A}_g)^{-1}(\mu I-\mathscr{B}_d)^{-1}d\lambda d\mu. \tag{3.7}$$

Сходимость в этих интегралах понимается в смысле борнологии, и они сходятся ввиду теории операторного исчисления для регулярных элементов в b-алгебрах. Отметим, что из этой сходимости следует существование интегралов в топологии поточечной и ограниченной сходимостей.

Если $X\subset\mathbf{C}$ — произвольный компакт, то через $\mathcal{O}(X)$ будем обозначать алгебру ростков голоморфных функций на X. Для каждой $\varphi(\lambda, \mu)\in\in\mathcal{O}(\mathrm{sp}\,A\times\mathrm{sp}\,B)$ определим оператор

$$\varphi_{A, B}\equiv\varphi(\mathscr{A}_g, \mathscr{B}_d)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_A}\int_{\Gamma_B}\varphi(\lambda, \mu)(\lambda I-\mathscr{A}_g)^{-1}(\mu I-\mathscr{B}_d)^{-1}d\lambda d\mu. \tag{3.8}$$

Нетрудно видеть, что формулой (3.8) устанавливается гомоморфизм между алгебрами $\mathcal{O}(\mathrm{sp}\,A\times\mathrm{sp}\,B)$ и $\mathscr{L}(\mathscr{L}_\beta(E))$, а именно

$$\mathcal{O}(\mathrm{sp}\,A\times\mathrm{sp}\,B)\ni\varphi(\lambda, \mu)\to\varphi_{A, B}\in\mathscr{L}(\mathscr{L}_\beta(E)). \tag{3.9}$$

Справедливо

Предложение 3. *Пусть E — квазиполное бочечное пространство, A и B — регулярные операторы в E, и пусть $\varphi(\lambda, \mu)\in\mathcal{O}(\mathrm{sp}\,A\times\mathrm{sp}\,B)$ не обращается в нуль при $(\lambda, \mu)\in\mathrm{sp}\,A\times\mathrm{sp}\,B$. Тогда оператор $\varphi_{A, B}$ имеет обратный $\psi_{A, B}$, где $\psi(\lambda, \mu)=1/\varphi(\lambda, \mu)$.*

Доказательство. При выполнении условий предложения $\psi(\lambda, \mu)\in\mathcal{O}(\mathrm{sp}\,A\times\mathrm{sp}\,B)$ и поэтому результат следует из того, что отображение (3.9) есть гомоморфизм алгебр.

Применяя предложение 3 к уравнению (3.4), будем иметь

Предложение 4. *Если выполняется условие*

$$P(\lambda, \mu)=\sum_{j, k=0}^{n} c_{jk}\lambda^j\mu^k\neq 0, \quad (\lambda, \mu)\in\mathrm{sp}\,A\times\mathrm{sp}\,B.$$

то уравнение (3.4) при каждом $Y\in\mathscr{L}_\beta(E)$ *имеет единственное решение* $X\in\mathscr{L}_\beta(E)$, *которое представимо в виде*

$$X=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_A}\int\limits_{\Gamma_B}\frac{(\lambda I-A)^{-1}\circ Y\circ(\mu I-B)^{-1}}{P(\lambda,\mu)}d\lambda d\mu.$$

§ 4. ОПЕРАТОРНАЯ ЭКСПОНЕНТА

В теории дифференциальных уравнений важную роль играет операторная экспонента e^{tA}, где A — регулярный оператор в $\mathscr{L}(E)$. Эту функцию можно определить, как мы уже отмечали, формулой

$$e^{tA}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_A}e^{\lambda t}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda. \tag{4.1}$$

Также ее можно задать выражением

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}t^kA^k/k!\,. \tag{4.2}$$

В этих формулах рассматривается сходимость в смысле борнологии пространства $\mathscr{L}(E)$. Функция e^{tA} образует однопараметрическую группу. Из равенства (4.2) и оценки (1.1) получаем, что для любой $p\in\operatorname{Spec}E$ существует $q\in\operatorname{spec}E$ такая, что при всех $x\in E$ имеем

$$p(e^{tA}x)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}p\left(\frac{t^kA^k}{k!}\right)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kM^k}{k!}q(x)=e^{tM}q(x),\quad t\geqslant 0. \tag{4.3}$$

Это неравенство дает оценку роста экспоненты.

Сейчас мы установим более тонкую оценку, учитывающую расположение спектра оператора A.

Предложение 5. *Для того чтобы при заданном вещественном* ρ *для любого* $p\in\operatorname{Spec}E$ *существовала* $q\in\operatorname{Spec}E$, *что справедлива оценка*

$$p(e^{tA}x)\leqslant e^{\rho t}q(x)\ \text{для всех}\ t\geqslant 0\ \text{и всех}\ x\in E, \tag{4.4}$$

необходимо, чтобы $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\rho$ *при* $\lambda\in\operatorname{sp}A$, *и достаточно, чтобы* $\operatorname{Re}\lambda<\rho$ *при* $\lambda\in\operatorname{sp}A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть неравенство (4.1) выполняется. Тогда для любого натурального n имеем $p((e^{tA})^nx)=p(e^{tnA}x)=p(e^{(tn)A}x)\leqslant e^{\rho tn}q(x)=(e^{\rho t})^nq(x)$. Это означает, что $r(e^{tA})\leqslant e^{\rho t}$.

Согласно теореме Данфорда о спектре [1], имеем

$$\operatorname{sp}(e^{tA})=\{\mu\in\mathbf{C}:\mu=e^{\lambda t},\quad\lambda\in\operatorname{sp}A\}.$$

С другой стороны, $\operatorname{sp}(e^{tA})$ лежит в круге $|\mu|\leqslant r(e^{tA})$, т. е. $|\mu|=|e^{\lambda t}|=e^{\operatorname{Re}\lambda\cdot t}\leqslant r(e^{tA})\leqslant e^{\rho t}$. Отсюда $\operatorname{Re}\lambda\leqslant\rho$.

Достаточность. Так как

$$e^{tA}x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_A}e^{\lambda t}R(\lambda;A)x\,d\lambda,$$

где контур Γ_A может быть выбран лежащим целиком в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<\rho$, то при любой $p\in\operatorname{Spec}E$ имеем неравенство

$$p(e^{tA}x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_A} |e^{\lambda t}| p(R(\lambda; A)x) |d\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\rho t} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_A} p(R(\lambda; A)x) |d\lambda| \leqslant e^{\rho t} \frac{l}{2\pi} \max_{\lambda \in \Gamma_A} p(R(\lambda; A)x),$$

l — длина контура Γ_A.

Так как A регулярен, то $R(\lambda; A)$ регулярен при $\lambda \notin \operatorname{sp} A$. Следовательно, $p(R(\lambda; A)x) \leqslant q'(x)$, где q' — некоторая полунорма из $\operatorname{Spec} E$. Значит,

$$p(e^{tA}x) \leqslant e^{\rho t} \frac{l}{2\pi} q'(x) = e^{\rho t} q(x), \quad q \in \operatorname{Spec} E.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы при заданном вещественном* ρ *для любой* $p \in \operatorname{Spec} E$ *существовало* $q \in \operatorname{Spec} E$, *что справедлива оценка*

$$p(e^{tA}x) \leqslant e^{-\rho t} q(x) \quad \text{при } t < 0, \tag{4.5}$$

необходимо, чтобы $\operatorname{Re} \lambda \geqslant -\rho$ *при* $\lambda \in \operatorname{sp} A$, *и достаточно, чтобы* $\operatorname{Re} \lambda > -\rho$ *при* $\lambda \in \operatorname{sp} A$.

Доказательство. Обозначая $\tau = -t$, получаем, что (4.5) эквивалентно неравенству

$$p(e^{\tau(-A)}x) \leqslant e^{\rho \tau} q(x), \quad \tau > 0. \tag{4.6}$$

Но (4.6) — это неравенство (4.4) для оператора $-A$. Согласно предложению 3, для выполнения (4.6) необходимо, чтобы $\operatorname{Re} \lambda \leqslant \rho$ при $\lambda \in \operatorname{sp}(-A) = -\operatorname{sp} A$, т. е. $\operatorname{Re} \lambda \geqslant -\rho$ при $\lambda \in \operatorname{sp} A$, и достаточно, чтобы $\operatorname{Re} \lambda > -\rho$ при $\lambda \in \operatorname{sp} A$.

Предложение 6. *Если для любой* $p \in \operatorname{Spec} E$ *существует* $q \in \operatorname{Spec} E$ *такая, что выполняется неравенство* $p(e^{tA}x) \leqslant q(x)$ *для всех* $x \in E$ *и всех* $t \in \mathbf{R}$, *то спектр оператора* A *лежит на мнимой оси.*

Доказательство немедленно вытекает из предложения 5 и его следствия.

§ 5. ИНТЕГРАЛЫ РИССА

Пусть $A \in \mathscr{L}(E)$ — регулярный оператор и пусть $\operatorname{sp} A$ — несвязное множество. Замкнутая часть спектра, имеющая в нем замкнутое дополнение, называется *спектральным множеством*. Предположим, что

$$\operatorname{sp} A = \bigcup_{k=1}^{m} \operatorname{sp}_k A, \tag{5.1}$$

где $\operatorname{sp}_k A$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — пересекающиеся спектральные множества. В дальнейшем будем считать, что контур Γ_A состоит из непересекающихся частей Γ_k $(k = 1, \ldots)$, каждая из которых окружает *область* G_k, содержащую спектральное множество $\operatorname{sp}_k A$. Определим функцию

$$\varphi_k(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in G_k, \\ 0, & \lambda \notin G_j, \quad j \neq k. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_k \in \mathscr{O}(\operatorname{sp} A)$ при любом k, так как она голоморфна в окрестности $G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k$ спектра $\operatorname{sp} A$. Поэтому имеют смысл операторы

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} \varphi_k(\lambda) R(\lambda;\ A)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} R(\lambda;\ A)\, d\lambda. \tag{5.2}$$

Так как в области $G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k$ выполнены соотношения $\varphi_k(\lambda)\varphi_j(\lambda) = \delta_{kj}\varphi_k(\lambda)$, $\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(\lambda) \equiv 1$, то справедливы равенства

$$P_k \circ P_j = 0 \quad (k \neq j), \quad P_k^2 = P_k, \ \sum_{k=1}^{m} P_k = 1. \tag{5.3}$$

Из формулы (5.2) следует

$$P_k \circ A = A \circ P_k \quad (k = 1, \ldots, m), \quad P_k \text{ — регулярный.} \tag{5.4}$$

Таким образом, (5.3) показывает, что операторы P_k $(k=1, \ldots, m)$ являются проекторами, а равенство (5.4) говорит, что подпространства $E_k = P_k E$ инвариантны по отношению к A. Ясно, что A_k-сужение оператора A на E_k является регулярным в $\mathscr{L}(E_k)$. Кроме того, $\operatorname{sp} A_k = \operatorname{sp}_k A$. Действительно, $A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_A} \lambda\varphi_k(\lambda) R(\lambda;\ A)\, d\lambda$. Но ввиду теоремы Данфорда $\operatorname{sp} A_k = (\lambda\varphi_k(\lambda))(\operatorname{sp} A) = \operatorname{sp}_k A$. Ввиду последнего равенства в (5.3) E разлагается в прямую сумму $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$.

В дальнейшем будем рассматривать оператор A, спектр которого не пересекается с мнимой осью. В этом случае всегда будем обозначать $\operatorname{sp}_+ A$ и $\operatorname{sp}_- A$ — спектральные множества оператора A, находящиеся соответственно в правой и левой полуплоскостях. Это будет записываться $\operatorname{sp} A = \operatorname{sp}_+ A \cup \operatorname{sp}_- A$. Через P_+, P_- обозначаются спектральные проекторы, соответствующие спектральным множествам $\operatorname{sp}_+ A$ и $\operatorname{sp}_- A$ соответственно.

§ 6. НЕКОТОРЫЕ «ПЕРЕНОРМИРОВКИ» ПРОСТРАНСТВА В СВЯЗИ С РЕГУЛЯРНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть E — локально выпуклое пространство. Если $\operatorname{Spec} E$ — множество всех полунорм, определяющих топологию в E, или, другими словами, множество всех непрерывных полунорм на E, то подмножество $\mathscr{B} \operatorname{Spec} E \subset \operatorname{Spec} E$ называют *базисом непрерывных полунорм* на E, если для любой $p \in \operatorname{Spec} E$ найдутся $q \in \mathscr{B} \operatorname{Spec} E$ и $C > 0$, что $p \leqslant Cq$.

Пусть $A : E \to E$ — такой линейный оператор, что существует константа $M > 0$ такая, что для любой полунормы $p \in \mathscr{B} \operatorname{Spec} E$ справедливо неравенство

$$p(Ax) \leqslant Mp(x), \quad x \in E. \tag{6.1}$$

Нетрудно видеть, что такой оператор регулярен. Справедливо и обратное. А именно

Предложение 7. *Каждому регулярному оператору $A : E \to E$ соответствует базис $\mathscr{B}_A \operatorname{Spec} E$ непрерывных полунорм на E такой, что $p_A(Ax) \leqslant Mp_A(x)$ для любой $p_A \in \mathscr{B}_A \operatorname{Spec} E$.*

Доказательство. Пусть A — регулярный элемент в $\mathscr{L}(E)$ и справедливо неравенство

$$p(A^n x) \leqslant M^n q(x), \quad x \in E, \quad n = 1, 2, \ldots, p, \quad q \in \operatorname{Spec} E. \tag{6.2}$$

Для каждой $p\in \operatorname{Spec} E$ положим

$$p_A(x)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{p(A^n x)}{M^n}. \tag{6.3}$$

Ввиду (6.2) $p_A(x)\leqslant q(x)$ и, значит, что p_A — непрерывная полунорма на E. Кроме того, неравенство $p(x)\leqslant \sup\limits_{n\geqslant 0}\frac{p(A^n x)}{M^n}=p_A(x)$ показывает, что множество $\{p_A\}_{p\in \operatorname{Spec} E}$ образует базис непрерывных полунорм на E. Это и есть искомый базис $\mathscr{B}_A \operatorname{Spec} E$, так как

$$p_A(Ax)=\sup_{n\geqslant 0}\frac{p(A^{n+1}x)}{M^n}=M\sup_{n\geqslant 0}\frac{p(A^{n+1}x)}{M^{n+1}}\leqslant$$

$$\leqslant M\sup_{k\geqslant 0}\frac{p(A^k x)}{M^k}=Mp_A(x).$$

Предложение доказано. Пусть $A\in\mathscr{L}(E)$ — регулярный оператор. Предположим, что $\operatorname{sp} A$ лежит внутри левой полуплоскости. Тогда при любом $\nu>0$ таком, что $\operatorname{Re}\lambda<-\nu$ при всех $\lambda\in \operatorname{sp} A$, в силу предложения 5 для каждой полунормы $p\in \operatorname{Spec} E$ найдется $q\in \operatorname{Spec} E$ такая, что

$$p(e^{tA}x)\leqslant e^{-\nu t}q(x) \text{ при всех } t\geqslant 0 \text{ и } x\in E. \tag{6.4}$$

Оценка (6.4) позволяет для каждого $r\geqslant 1$ определить функцию $p_{A,r}: E\to \mathbf{R}_+$ по формуле

$$p_{A,r}(x)=\left(\int_0^\infty p^r(e^{tA}x)\,dt\right)^{1/r}. \tag{6.5}$$

Нетрудно видеть, что $p_{A,r}$ — полунорма на E. Справедливо

Предложение 8. *Полунормы $p_{A,r}$ образуют базис непрерывных полунорм, когда p пробегает* $\operatorname{Spec} E$.

Доказательство. В силу (6.4) для каждой $p\in \operatorname{Spec} E$ существует $q\in \operatorname{Spec} E$, что

$$p_{A,r}(x)\leqslant q(x)\left\{\int_0^\infty e^{-\nu r t}dt\right\}^{1/r}=\frac{1}{\sqrt[r]{\nu r}}\,q(x).$$

Это доказывает непрерывность полунормы $p_{A,r}$. Далее для любой $p\in \operatorname{Spec} E$ справедливо $p(x)=p(e^{-tA}\circ e^{tA}x)\leqslant e^{Mt}q(e^{tA}x)$ для некоторой полунормы $q\in \operatorname{Spec} E$, существование которой обеспечено природой оператора A. Из последнего неравенства получаем

$$p(x)=p(x)\sqrt[r]{Mr}\left\{\int_0^\infty e^{-rMt}\,dt\right\}^{1/r}=\sqrt[r]{Mr}\left\{\int_0^\infty [e^{-Mt}\,p(x)]^r dt\right\}^{1/r}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt[r]{Mr}\left\{\int_0^\infty q\,(e^{tA}x)\,dt\right\}^{1/r}=\sqrt[r]{Mr}\,q_{A,r}(x),$$

что завершает доказательство предложения.

Предположим теперь, что регулярный оператор A имеет спектр, не пересекающийся с мнимой осью, и разделяется ею на две части $\operatorname{sp} A=\operatorname{sp}_+A\cup \operatorname{sp}_-A$. Пусть E_+, E_- — инвариантные подпространства оператора A и P_+, P_- — соответствующие спектральные проекторы. В каждом из этих подпространств по формуле (6.5) (с заменой в E_+ оператора A на $-A$) определим полунормы

$$p_{A_-,r}(x)=\left\{\int_0^\infty p^r(e^{tA}x)\,dt\right\}^{1/r},\quad x\in E_-$$

и

$$p_{-A_+,r}(x)=\left\{\int_0^\infty p^r(e^{-tA}x)\,dt\right\}^{1/r},\quad x\in E_+.$$

Введем в E полунорму по формуле

$$p_{A,r}(x)=p_{+A_-,r}(P_-x)+p_{-A_+,r}(P_+x). \tag{6.6}$$

Аналогично проверяется, что $(p_{A,r})_{p\in\operatorname{Spec}E}$ образует базис непрерывных полунорм в E.

Полученные утверждения являются обобщением на не банахов случай аналогичных результатов [7].

Литература

1. Waelbroeck L. Théorie des algébres de Banach et des algébres localment convexes. Univ. de Montreal, 1962.
2. Waelbroeck L. Etndes spectrale des algébres complétes. Brussels, 1960.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1971.
4. Seminaire Banach, Lecture Notes, Springer, 1972.
5. Hogbe-Nlend H. Théorie des bornologies et applications Lecture Notes. Springer, 1971.
6. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959.
7. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию
12 апреля 1976 г.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина