УДК 517.9

Е.М. РАДЫНО

ОБ ОТНОШЕНИИ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ДИАМЕТРУ.

Обобщение длины на плоскости приводит к задаче, поставленной впервые, по-видимому, Питером Лаксом: обобщить число π и получить его точную оценку.

Кривой назовём произвольное непрерывное отображение единичного отрезка в метрическое пространство $f:[0,1]\to X$. Длиной кривой $L(f)$ назовём верхнюю грань множества сумм $\sum_{k=1}^{n}\rho(f(x_{k-1}),f(x_k))$, где ρ – метрика, $0=x_0<x_1<...<x_n=1$. Длина кривой не меньше расстояния между её концами $L(f)\ge\rho(f(0),f(1))$.

На плоскости E^2 с метрикой ρ выделим круги $B[O,r]=\{X\in E^2:\rho(O,X)\le r\}$ и окружности $S[O,r]=\{X\in E^2:\rho(O,X)=r\}$. Окружности могут быть пустым множеством даже в метрике топологически эквивалентной евклидовой. Поэтому ограничимся нормами плоскости – метриками, которые задаются нормой векторов $\rho(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Отрезок $[XY]$ отождествим с кривой $f:[0,1]\to E^2: t\mapsto Z$, где $\overrightarrow{XZ}=t\cdot\overrightarrow{XY}$.

Лемма 1. *Нормы плоскости обладают свойствами:*

1) Длина отрезка совпадает с расстоянием между его концами;

2) $B[O,r]$ *и* $S[O,r]$ *– центрально-симметричные фигуры;*

3) $B[O,r]$ *– выпуклая фигура, т.е. вместе с точками X,Y содержит и весь отрезок* $[XY]$*;*

4) класс ограниченных множеств един для всех норм плоскости.

Доказательство. Свойства 1) - 3) просто следуют из определения нормы. Эквивалентное 4) утверждение см. в [1, с.158].

Лемма 2. *Пусть* Φ *– выпуклая ограниченная центрально-симметричная фигура с центром в точке О, содержащая свою границу* Γ*. Тогда* Γ *является единичной окружностью с центром О для некоторой (единственной) нормы плоскости.*

Доказательство. Введём норму векторов, которая и задаст нужную норму плоскости. Положим $\left\|\vec{0}\right\|=0$. Для произвольного $\overrightarrow{OX}\ne\vec{0}$ рассмотрим луч $[OX)$ и точку $X'=[OX)\cap\Gamma$. Тогда $\overrightarrow{OX}=\lambda\cdot\overrightarrow{OX'}$ для некоторого $\lambda>0$. Положим $\left\|\overrightarrow{OX}\right\|=\lambda$. Очевидно, $X\in\Gamma$ равносильно $\left\|\overrightarrow{OX}\right\|=1$, а $X\in\Phi$ равносильно $\left\|\overrightarrow{OX}\right\|\le 1$. Для введённой нормы (однозначно определяемой фигурой Φ) проверим здесь лишь неравенство треугольника.

Пусть $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$, $\left\|\overrightarrow{OX}\right\|=a$, $\left\|\overrightarrow{OY}\right\|=b$. По определению $\overrightarrow{OX}=a\cdot\overrightarrow{OX'}$, $\overrightarrow{OY}=b\cdot\overrightarrow{OY'}$, где $X',Y'\in\Gamma\subset\Phi$. Если $\overrightarrow{OX}=\vec{0}$ или $\overrightarrow{OY}=\vec{0}$, то неравенство треугольника выполнено. Иначе рассмотрим $\overrightarrow{OZ''} = \frac{1}{a+b}\overrightarrow{OZ} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OX'} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OY'}$. Имеем $\overrightarrow{X'Z''} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{X'Y'}$. Поскольку $\frac{b}{a+b} \in [0,1]$, то $Z'' \in [X'Y'] \subset \Phi$, откуда вытекает $\frac{1}{a+b}\left\|\overrightarrow{OZ}\right\|$ = $\left\|\overrightarrow{OZ''}\right\| \le 1$, что и доказывает неравенство треугольника.

Пусть $B_E = \{(x,y): x^2 + y^2 \le 1\}$ – единичный круг в некоторой прямоугольной системе координат Oxy в E^2 и φ – параметризация единичной окружности $\varphi: t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, где $t \in [0,1]$. Пусть $h: B_E \to \Phi \subset E^2$ – гомеоморфизм. Периметром $P(\Phi)$ назовём $L(h \circ \varphi)$ – длину кривой $h \circ \varphi$, образ которой является границей Φ. Периметр $P(\Phi)$ зависит лишь от Φ. Если Φ выпуклая, то гомеоморфизм *h* существует и всякая ломаная, приближающая границу Φ, образует вписанный выпуклый многоугольник.

Лемма 3. *Пусть* Φ *и* Φ_0 *выпуклые ограниченные фигуры плоскости и* $\Phi \subset \Phi_0$, *тогда* $P(\Phi) \le P(\Phi_0)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный выпуклый многоугольник $M=A_1A_2\ldots A_n$, вписанный в Φ. Построим выпуклые фигуры $\Phi_1 \supset \ldots \supset \Phi_n = M$, отрезая от Φ_0 по очереди куски вдоль прямых A_1A_2, A_2A_3, … , A_nA_1. При этом криволинейные части границы заменяются на не превосходящие их по длине отрезки: $P(\Phi_0) \ge P(\Phi_1) \ge \ldots \ge P(\Phi_n) = P(M)$. Взяв верхнюю грань по всем многоугольникам M, получаем: $P(\Phi_0) \ge \sup P(M) = P(\Phi)$.

Следствие. Периметры ограниченных выпуклых фигур конечны.

Длиной окружности $S[O,r]$ назовём периметр круга $B[O,r]$. Для произвольной нормы плоскости ρ положим π(ρ) равным половине длины единичной окружности $S[O,1]$. Например, для нормы, порождённой правильным шестиугольником, π=3.

Теорема 1. *Число* π(ρ) *принимает все значения из отрезка* $[3,4]$ *и только эти значения.*

Доказательство. Пусть $S = S[O,1]$ – единичная окружность для нормы ρ. Доказательство проведём в три этапа.

1) Пусть $O_1 \in S$. Рассмотрим окружности S_1 и S_2 – образы S при параллельных переносах на векторы $\overrightarrow{OO_1}$ и $\overrightarrow{OO_2} = -\overrightarrow{OO_1}$ соответственно. Множество $S_1 \cap S$ содержит по точке в обоих полуплоскостях относительно прямой OO_1. Обозначим их K и L. При сдвиге точек K, L на вектор $\overrightarrow{OO_2}$ получаются точки $N, M \in S_2 \cap S$, соответственно. Используя лемму 3, заключаем, что $P(S) \ge P(O_1KNO_2ML)$ = $\left\|\overrightarrow{O_1K}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{KN}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{NO_2}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{O_2M}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{ML}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{LO_1}\right\|$ = 6*1 = 6 и $\pi \ge 3$.

2) Среди параллелограммов с центрами в точке *O*, вписанных в *S*, есть параллелограмм *KLMN* с наибольшей площадью (в обычном смысле). Действительно, площадь *KLMN* непрерывно зависит от пары точек $(K,L)\in S\times S$ и применима теорема Вейерштрасса, так как *S* компактна.

Параллелограмм *KLMN*, очевидно, не вырожден. Проведём две пары прямых через *K*,*M* параллельно *LN* и через *L*,*N* параллельно *KM*, которые при пересечении образуют параллелограмм *PTUV* ($K\in PT$, $L\in VP$). Прямая *VP* – опорная, т.е. нет никакой точки $X\in S$, лежащей "выше" прямой *VP* (иначе площадь *KLMN* не минимальна). Аналогично, прямые *PT*,*TU* и *UV* – опорные. Согласно лемме 3, $P(S)\le P(PTUV)$= $\left\|\overrightarrow{PT}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{TU}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{UV}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{VP}\right\|$ = 4*2 = 8 и $\pi\le 4$.

3) Выберем на плоскости систему координат. В качестве единичной окружности, задающей норму плоскости, возьмём шестиугольник $H(t)$ с координатами вершин $A(1{,}0)$, $B\left(\frac{1+t}{2},\frac{1+t}{2}\right)$, $C(0{,}1)$, $D(-1{,}0)$, $E\left(-\frac{1+t}{2},-\frac{1+t}{2}\right)$, $F(0,-1)$, где $t\in[0{,}1]$. Периметр $P(H(t))$= $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{DE}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{EF}\right\|$ + $\left\|\overrightarrow{FA}\right\|$ =1+1+ $\frac{2}{1+t}$ +1+1+ $\frac{2}{1+t}$ принимает значения на всём отрезке $[6{,}8]$.

Теорема 2. Пусть ρ_1 и ρ_2 – нормы плоскости, $S_1[O_1,1]$ и $S_2[O_2,1]$ – соответствующие единичные окружности и существует такое A – аффинное преобразование плоскости, что $S_2=A(S_1)$. Тогда $\pi(\rho_1)=\pi(\rho_2)$.

Доказательство. Из условия видно, что $\|\vec e\|_1=1\Leftrightarrow\|A(\vec e)\|_2=1$. Всякий $\vec a\ne\vec 0$ представим в виде $\vec a=\|\vec a\|_1\cdot\vec e$, где $\|\vec e\|_1=1$. Поскольку $A(\vec a)=\|\vec a\|_1\cdot A(\vec e)$, то $\|A(\vec a)\|_2=\|\vec a\|_1$. Пусть $[X_1Y_1]$ – хорда S_1, $[X_2Y_2]=A([X_1Y_1])$ – хорда S_2. Имеем $\rho_1(X_1,Y_1)$= $\left\|\overrightarrow{X_1Y_1}\right\|_1$ = $\left\|\overrightarrow{X_2Y_2}\right\|_2$ = $\rho_2(X_2,Y_2)$. Таким образом, у всех выпуклых многоугольников M_1 и $M_2=A(M_1)$, вписанных в S_1 и S_2, периметры в соответствующих нормах совпадают. Взяв верхнюю грань по всем M_1 получаем требуемое.

Следствие. Всякой норме, задаваемой скалярным произведением, соответствует π=3,14159… , хоть обратное и не верно.

Как следствие изложенного, возникает критерий, который профессор Я.В. Радыно предложил доказать или опровергнуть.

Гипотеза. *Пусть банахово пространство X имеет линейную размерность большую двух. Пространство X является гильбертовым тогда и только тогда, когда число π для всех сужений нормы на двумерные подпространства X равняется 3,14159…*

Я благодарен профессору Я.В. Радыно за постановку задачи и внимание.

1. Антоневич А.Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн.:Изд-во ”Университетское”,1984.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:Наука,1972.