Доклады Национальной академии наук Беларуси

2007 **сентябрь–октябрь** **Том 51 № 5**

УДК 517.9

Е. М. РАДЫНО, член-корреспондент Я. В. РАДЫНО, А. Г. СИДОРИК

ХАРАКТЕРИСТИКА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ПОЛЕ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Белорусский государственный университет, Минск

Поступило 15.03.2007

В работе Ж. Петре [1] исследовалось обобщение теоремы Хаусдорфа–Юнга об образе пространства $L_q(\mathbf{R})$ под действием преобразования Фурье. Автор рассматривал векторнозначные функции $x \in L_q(\mathbf{R}, X)$, $1 \le q \le 2$, на действительной оси, принимающие значения в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ и интегрируемые в смысле Бохнера, т. е. слабо измеримые с конечной нормой

$$|||x||| = \left(\int_{\mathbf{R}} \| x(t) \|^q \, dt \right)^{1/q}.$$

Ж. Петре было отмечено, что при $q = 2$ во всех известных ему случаях преобразование Фурье

$$F : L_2(\mathbf{R}, X) \to L_2(\mathbf{R}, X), \quad (Fx)(s) = \int_{\mathbf{R}} x(t) e^{-2\pi i s t} dt$$

оказывалось ограниченным только если X изоморфно гильбертову пространству. В работе [2] польский математик С. Квапень подтвердил наблюдение Ж. Петре. Фактически, он доказал следующую теорему.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *банахово пространство X изоморфно гильбертову;*

2) *существует $C > 0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n} \in X$*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k t} x_k \right\|^2 dt \le C \sum_{k=-n}^{n} \|x_k\|^2 ;$$

3) *существует $C > 0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n} \in X$*

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k t} x_k \right\|^2 dt \ge C^{-1} \sum_{k=-n}^{n} \|x_k\|^2 ;$$

4) *преобразование Фурье F является ограниченным оператором на плотном в $L_2(\mathbf{R}, X)$ подпространстве D_F, состоящем из элементарных функций*

$$D_F = \left\{ x(t) = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}(t) x_k \right\},$$

где A_k *– измеримые непересекающиеся подмножества конечной меры в* $\mathbf{R}$*;* I_{A_k} *– характеристические функции;* $x_k \in X$*. С помощью предельного перехода преобразование Фурье определяется на всем* $L_2(\mathbf{R}, X)$.

Естественная проблема в данном направлении – исследование преобразования Фурье в пространстве векторнозначных функций интегрируемых по Бохнеру на локально-компактной абелевой группе G

$$F: L_2(G,X) \to L_2(\hat{G},X), \quad (Fx)(s) = \int_G x(t)\langle s,t\rangle d\mu_G(t),$$

где X – банахово пространство; $\hat{G}$ – группа двойственная к G по Понтрягину, $\langle s,t\rangle$ – каноническое спаривание $\hat{G}$ и G; μ_G – мера Хаара. В качестве области задания удобно рассматривать всюду плотное подмножество

$$D_F = L_2(G) \otimes X \subset L_2(G,X),$$

где преобразование Фурье действует по формуле

$$F\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((F\varphi_k)(s)x_k\right).$$

В случае конечной группы G пространство $L_2(G,X)$ изоморфно конечному декартовому произведению X^G, а преобразование Фурье является ограниченным для любого банахова пространства X.

В данной работе мы рассмотрим случай, когда G является группой p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$. В этом случае двойственная группа может быть отождествлена с самой $\mathbf{Q}_p$ таким образом, что $\langle s,t\rangle = \chi_p(st) = e^{2\pi i\{st\}_p}$, где $\{\cdot\}_p$ – p-адическая дробная часть. При этом мера Хаара $dt = d\mu(t)$, нормированная условием $\mu(\mathbf{Z}_p) = 1$, является самодвойственной [3,4].

Т е о р е м а 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *банахово пространство* X *изоморфно гильбертову;*
2) *существует* $C > 0$ *такое, что для любого натурального* N *и* $x_0, x_1, \ldots, x_{p^{2N}-1} \in X$

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p\left(\frac{kt}{p^{2N}}\right) x_k \right\|^2 dt \le C \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2 ;$$

3) *существует* $C > 0$ *такое, что для любого натурального* N *и* $\varepsilon > 0$

$$C^{-1} \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2 \le \int_{\mathbf{Z}_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p\left(\frac{kt}{p^{2N}}\right) x_k \right\|^2 dt ;$$

4) *преобразование Фурье* $F: L_2(\mathbf{Q}_p, X) \to L_2(\mathbf{Q}_p, X)$ *является ограниченным оператором.*

Для доказательства теоремы 2 используем критерий из [2], сформулированный на теоретико-вероятностном языке.

Л е м м а 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *банахово пространство* X *изоморфно гильбертову;*
2) *существует константа* $C > 0$ *такая, что для произвольного конечного набора векторов* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *верно двухстороннее неравенство*

$$C^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \le E\left\| \sum_{i=1}^{n} \delta_i(t) x_i \right\|^2 \le C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

где δ_i *– независимые случайные величины, принимающие значения* $\{+1,-1\}$ *с вероятностью* 1/2, *символ* E *означает математическое ожидание.*

Чтобы использовать этот критерий, построим систему функций на множестве $\mathbf{Z}_p$ аналогичную системе функций Радемахера на отрезке [0,1]

$$r_i^{\infty}(z) = \operatorname{sgn} \sin 2^i z, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Для произвольного $t \in \mathbf{Z}_p$ имеется каноническое разложение $t = t_0 + t_1 p + t_2 p^2 + \ldots$, где $t_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Рассмотрим отображение

$$\tau : \mathbf{Z}_p \to [0,1] : \sum_{k=0}^{+\infty} t_k p^k \mapsto \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} t_k p^{-k}.$$

Сужение $\tilde{\tau}$ данного отображения на множество полной меры $\tilde{\mathbf{Z}}_p = \mathbf{Z}_p \setminus \{-1, -2, \ldots\}$ является биекцией на полуинтервал $[0,1)$. При этом $\tilde{\tau}$ сохраняет меру. Действительно, замкнутый шар в $\tilde{\mathbf{Z}}_p$ меры p^{-n} представляет собой множество чисел, у которых начальные цифры канонического разложения с нулевой по $(n-1)$-ю фиксированы. Под действием $\tilde{\tau}$ этот шар переходит в множество действительных чисел, у которых фиксированы цифры дробной части с первой по n-ю при записи в системе счисления по основанию p. Последнее множество также имеет меру p^{-n}. Поскольку шары образуют базу топологии на $\tilde{\mathbf{Z}}_p$, то утверждение верно для всех борелевских множеств и множеств измеримых по Лебегу.

Система функций $r_i(t) = r_i^{\infty}(\tau(t))$ будет давать необходимую нам реализацию δ_i. Таким образом,

$$E\left\|\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i\right\|^2 = \int_{\mathbf{Z}_p} \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\|^2 dt.$$

Л е м м а 4. *Пусть* X *– банахово пространство и пусть* (f_i) *– полная ортонормированная система в* $L_2(\mathbf{Z}_p)$. *Если для некоторого* $C > 0$ *и для любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *верно двустороннее неравенство*

$$C^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \le \int_{Z_p} \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t) x_i\right\|^2 dt \le C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2,$$

то для той же константы $C > 0$ *и для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ *также имеем*

$$C^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \le \int_{Z_p} \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\|^2 dt \le C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу ортонормальности системы Радемахера (r_i) и полноты (f_k) мы для заданного $\varepsilon > 0$ можем найти возрастающие последовательности индексов (k_j), (m_j) и ортонормированную последовательность (h_j) такую, что

$$h_j = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (h_j, f_k) f_k, \qquad \int_{Z_p} \left|h_j(t) - r_{m_j}(t)\right|^2 dt < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Для фиксированного n и для фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ имеем

$$\int_{Z_p} \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\right\|^2 dt = \int_{Z_p} \left\|\sum_{j=1}^{n} r_{m_j}(t) x_j\right\|^2 dt.$$

По неравенству треугольника

$$\left(\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{j=1}^{n} r_{m_j}(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \le \left(\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{j=1}^{n}\left(r_{m_j}(t)-h_j(t)\right)x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} +$$

$$\left(\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{j=1}^{n} h_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \le \sqrt{\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|x_j\right\|^2\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{j=1}^{n} h_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Поскольку $1=\left\|h_j\right\|^2=\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}\left|(h_j,f_k)\right|^2$, имеем

$$\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{j=1}^{n} h_j(t)x_j\right\|^2 dt = \int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}(h_j,f_k)f_k\right)x_j\right\|^2 dt \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}\left|(h_j,f_k)\right|^2\left\|x_j\right\|^2 = C\sum_{j=1}^{n}\left\|x_j\right\|^2.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2 dt \le \left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{C}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left\|x_i\right\|^2.$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое неравенство. Неравенство в обратную сторону доказывается аналогично.

Следствие 5. *Пусть (f_i) – полная ортонормированная система в $L_2(\mathbf{Z}_p)$ и пусть X – банахово пространство. Тогда X изоморфно гильбертову пространству если и только если существует $C>0$ такое, что для любого набора $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$ верно двухстороннее неравенство*

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\left\|x_i\right\|^2 \le \int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i\right\|^2 dt \le C\sum_{i=1}^{n}\left\|x_i\right\|^2.$$

Лемма 6. *Пусть*

$$h(t)=\sum_{k=0}^{p^{2N}-1} p^{N/2} I_{B\left[\frac{k}{p^N},\frac{1}{p^N}\right]}(t)x_k, \quad x_k\in X. \tag{1}$$

Тогда

$$\|h\|^2=\sum_{k=0}^{p^{2N}-1}\left\|x_k\right\|^2, \qquad \|Fh\|^2=\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{k=0}^{p^{2N}-1}\chi_p\left(\frac{kt}{p^{2N}}\right)x_k\right\|^2 dt.$$

Доказательство. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что

$$\|h\|^2=\sum_{k=0}^{p^{2N}-1} p^N\mu\left(B\left[\frac{k}{p^N},\frac{1}{p^N}\right]\right)\left\|x_k\right\|^2=\sum_{k=0}^{p^{2N}-1}\left\|x_k\right\|^2.$$

$$\|Fh\|^2=\int\limits_{Q_p}\left\|\sum_{k=0}^{p^{2N}-1} p^{N/2}\left(FI_{B\left[\frac{k}{p^N},\frac{1}{p^N}\right]}\right)(t)x_k\right\|^2 dt=\int\limits_{Q_p}\left\|\sum_{k=0}^{p^{2N}-1} p^{N/2} I_{B\left[0,p^N\right]}(t)\chi_p\left(\frac{kt}{p^N}\right)x_k\right\|^2 dt=$$

$$\int\limits_{Z_p}\left\|\sum_{k=0}^{p^{2N}-1}\chi_p\left(\frac{kt}{p^{2N}}\right)x_k\right\|^2 dt.$$

Л е м м а 7. *Пусть для банахова пространства* X *и для полной ортонормированной системы* (f_i) *в* $L_2(\mathbf{Z}_p)$ *существует константа* $C > 0$ *такая, что для любого набора* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$

$$\int_{Z_p} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(t) x_i \right\|_X^2 dt \geq C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^2 .$$

Тогда для любого набора $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ *векторов в сопряженном пространстве*

$$\int_{Z_p} \left\| \sum_{j=1}^{n} f_j(t) x_j^* \right\|_{X^*}^2 dt \leq C^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|x_j^*\|_{X^*}^2 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из полноты системы (f_i) следует, что линейные комбинации f_i плотны в $L_2(\mathbf{Z}_p)$. Следовательно, множество E всех векторнозначных функций вида

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) x_i, \quad x_i \in X$$

плотно в пространстве $L_2(\mathbf{Z}_p, X)$ векторнозначных функций квадратично интегрируемых в смысле Бохнера. По определению нормы на сопряженном пространстве $L_2(\mathbf{Z}_p, X^*) = L_2(\mathbf{Z}_p, X)^*$ для любой фиксированной линейной комбинации $\varphi^*(t) = \sum_{j=1}^{m} f_j(t) x_j^*$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) x_i \in X$ с единичной нормой $||| \varphi ||| = \left(\int_{Z_p} \|\varphi(t)\|_X^2 dt \right)^{1/2} = 1$, что

$$\left(\int_{Z_p} \left\| \sum_{j=1}^{m} f_j(t) x_j^* \right\|_{X^*}^2 dt \right)^{1/2} \leq \int_{Z_p} \left| \left\langle \varphi^*(t), \varphi(t) \right\rangle \right| dt + \varepsilon = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \left| \left\langle x_i^*, x_i \right\rangle \right| + \varepsilon \leq$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|x_j^*\|_{X^*}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^2 \right)^{1/2} + \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{C}} \left(\sum_{j=1}^{m} \|x_j^*\|_{X^*}^2 \right)^{1/2} + \varepsilon.$$

Откуда и получаем требуемое неравенство.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Непосредственным вычислением получаем, что если X изометрически изоморфно гильбертову пространству, то для любой ортонормальной системы функций $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L_2(\mathbf{Z}_p)$ и набора векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$

$$\int_{Z_p} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(t) x_i \right\|^2 dt = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Поскольку система характеров $\chi_p(kt / p^{2N})$, $k = 0, 1, \ldots, p^{2N} - 1$, ортонормальна в $L_2(\mathbf{Z}_p)$, мы имеем импликации $1) \Rightarrow 2)$ и $1) \Rightarrow 3)$.

Следствие 5 влечет импликацию $2) \& 3) \Rightarrow 1)$.

Допустим, выполняется неравенство $2)$. В силу леммы 6 для любой функции h вида (1) имеем

$$\|Fh\|^2 = \int_{Z_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p \left(\frac{kt}{p^{2N}} \right) x_k \right\|^2 dt \leq C \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2 = C \|h\|^2 .$$

Поскольку функции вида (1) являются элементами $L_2(\mathbf{Q}_p) \otimes X$ и образуют всюду плотное подмножество в $L_2(\mathbf{Q}_p, X)$, то преобразование Фурье $F: L_2(\mathbf{Q}_p, X) \to L_2(\mathbf{Q}_p, X)$ ограничено. Таким образом, $2) \Rightarrow 4)$.

Допустим, что имеет место ограниченность преобразования Фурье $4)$. Тогда сужение на всюду плотное подмножество $L_2(\mathbf{Q}_p) \otimes X$ обратного преобразования Фурье $F^{-1} = F^3$ также ограничено, т. е. существует константа C_1 такая, что для всех $h \in L_2(\mathbf{Q}_p) \otimes X$ верно неравенство $\left\| F^{-1} h \right\| \le C_1 \|h\|$. Пусть h имеет вид (1), тогда

$$\sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2 = \|h\| = \left\| F^{-1} F h \right\| \le C_1 \int_{Z_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p \left(\frac{kt}{p^{2N}} \right) x_k \right\|^2 dt.$$

Таким образом, $4) \Rightarrow 3)$.

Допустим, что выполняется условие $3)$. Из леммы 7 получаем, что сопряженное пространство X^* удовлетворяет условию, аналогичному условию $2)$. Поэтому выполняется условие, аналогичное условию $4)$, т. е. преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbf{Q}_p, X^*)$ ограничено. Следовательно, X^* удовлетворяет условию, аналогичному условию $3)$. Еще раз применяя лемму 7, получаем, что X^{**} удовлетворяет условию аналогичному $2)$. Само же $X \subset X^{**}$ удовлетворяет условию $2)$. Таким образом, $3) \Rightarrow 2)$.

Приведенных импликаций достаточно, чтобы утверждать эквивалентность пунктов $1)$, $2)$, $3)$, $4)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8. Фактически, пункты $2)$ и $3)$ теоремы 2 означают ограниченность преобразования Фурье $F: L_2(\mathbf{Z}_p, X) \to L_2(\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p, X)$ и обратного преобразования Фурье $F^{-1}: L_2(\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p, X) \to L_2(\mathbf{Z}_p, X)$ соответственно.

Литература

1. P e e t r e J. // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1969. Vol. 42. P. 15–26.
2. K w a p i e ń S. // Studia mathematica. 1972. Vol. XLIV. P. 583–595.
3. V l a d i m i r o v V. S., V o l o v i c h I. V., Z e l e n o v E. I. *p*-Adic analysis and mathematical physics. World Scientific, Singapore, 1994.
4. Р а д ы н а А. Я., Р а д ы н а Я. В. Элементарныя ўводзіны ў *p*-адычны аналіз. Мн., 2006.

RADYNA Ya. M., RADYNO Ya. V., SIDORIK A. G.

yauhen_radyna@tut.by, radyno@bsu.by, anna_incognito@mail.ru

CHARACTERIZING THE HILBERT SPACES USING FOURIER TRANSFORMATION WITH RESPECT TO THE FIELD OF *p*-ADIC NUMBERS

Summary

We give a new characterization of Hilbert spaces in the class of all Banach spaces. A Banach space is isomorphic to a Hilbert one if and only if the Fourier transform operator acting in a space of vector-valued functions, which are square-integrable in the Bochner sense and have their arguments in the *p*-adic field, is bounded.