МАЙ 1981 г., ТОМ XVII, № 5

УДК 517.928

С. А. МАЗАНИК

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

1. Некоторые вспомогательные утверждения. Обозначим через P_α совокупность функций p, определенных на $[0, +\infty[$, интегрируемых на любом ограниченном промежутке положительной полуоси и таких, что $|p| \leqslant \alpha$. Через $Q_{\alpha l}$ — совокупность кусочно-постоянных функций, определенных на $[0, +\infty[$, с разрывами может быть лишь в точках, кратных l ($l > 0$ — некоторое постоянное число) и принимающих только два значения: α, $-\alpha$. Через $Q_{\alpha l}(T)$ обозначим сужение функций из $Q_{\alpha l}$ на промежуток T. Z_0 — множество целых неотрицательных чисел, N — множество натуральных чисел.

Лемма. *Для любых $\alpha > 0$, $p \in P_\alpha$, $0 < l < \ln 2/4\alpha$, $n \in N$, $k \in Z_0$, $|\gamma| \leqslant 0{,}5(\exp(2\alpha l) - 1)$ существует функция $q \in Q_{\alpha l}$ такая, что неравенство*

$$\left|\gamma + \exp(2\alpha kl) \int_t^{nl} (p(\sigma) - q(\sigma))\, d\sigma\right| \leqslant \exp(2\alpha kl)(1 - \exp(-2\alpha l) - \alpha l/4) \tag{1}$$

выполняется для любого t, $0 \leqslant t \leqslant nl$.

Доказательство. Неравенство (1) эквивалентно неравенствам

$$\exp(-2\alpha l) - 1 + \alpha l/4 - \gamma\exp(-2\alpha kl) \leqslant \int_t^{nl} (p(\sigma) - q(\sigma))\, d\sigma \leqslant 1 - \exp(-2\alpha l) -$$

$$- \alpha l/4 - \gamma\exp(-2\alpha kl).$$

Существование функции q следует из леммы 2 работы [1] и того, что

$$0 \leqslant 1 - \exp(-2\alpha l) - \alpha l/4 - \gamma\exp(-2\alpha kl) \leqslant 2\alpha l,$$

$$\alpha l \leqslant 1 - \exp(-2\alpha l) - \alpha l/4.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любых $\alpha > 0$, $0 < l < \ln 2/4\alpha$, $q_1 \in Q_{\alpha l}$, $q_2 \in Q_{\alpha l}$, $p \in P_\delta$, $\delta = 0{,}5\alpha^2 l$ существует такая функция $q \in Q_{\alpha l}$, что функция*

$$F(t) = \exp\left(\int_0^t (q_1(\tau) - q_2(\tau))\, d\tau\right) \int_0^t (p(\sigma) - q(\sigma)) \exp\left(\int_0^\sigma (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma$$

удовлетворяет неравенству

$$|F(t)| \leqslant 6\alpha l \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Доказательство. Пусть $q_1(t) - q_2(t) = -2\alpha$ или $q_1(t) - q_2(t) = 0$ для $t \in [t_0, t_1[$, $t_0 = kl$, $k \in Z_0$, t_1 конечно или бесконечно (если t_1 конечно, то $t_1 = nl$, $n \in N$, $n > k$). Пусть существует функция $q \in Q_{\alpha l}([0, t_0[)$ такая, что выполнено

Условие *A*.

$$\int_0^{t_0} (p(\sigma) - q(\sigma)) \exp\left(\int_0^\sigma (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma = \gamma \exp\left(\int_0^{t_0} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right),$$

$$\int_0^{t_2} (p(\sigma) - q(\sigma)) \exp\left(\int_0^{\sigma} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma =$$

$$= \gamma \exp\left(\int_0^{t_2} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right),$$

где $|\gamma| \leqslant 0{,}5\,(\exp(2\alpha l) - 1)$.

Таким образом, если теперь $q_1(t) - q_2(t) = -2\alpha$ или $q_1(t) - q_2(t) = 0$ для $t \geqslant t_2$, то условие A выполняется и мы можем продолжить построение функции q для $t \geqslant t_2$.

Из приведенных рассуждений следует, что для существования функции q, удовлетворяющей условиям теоремы, достаточно выполнения условия $Б$ или условия A на левом конце по крайней мере одного промежутка, на котором разность $q_1 - q_2$ принимает значение 2α или -2α, 0 соответственно. Очевидно, что оба условия выполняются в нуле.

Итак, при любых q_1 и q_2 можно последовательно строить функцию q на $[0, +\infty[$ так, что функция F будет удовлетворять неравенству $|F(t)| \leqslant 6\alpha l \quad \forall t \in [0, +\infty[$. Теорема доказана.

Рассмотрим две линейные дифференциальные системы n-го порядка:

$$\dot{x} = Px, \tag{2}$$

$$\dot{y} = Qy, \tag{3}$$

где $P = \{p_{ij}\}$—треугольная матрица с кусочно-непрерывными, ограниченными коэффициентами, заданными на $[0, +\infty[$, т. е. $p_{ij} = 0$ для $i > j$, $|p_{ij}| \leqslant \alpha$ для $i \leqslant j$, $i, j = \overline{1, n}$; $Q = \{q_{ij}\}$ — треугольная матрица такая, что $q_{ij} = 0$ для $i > j$, $q_{ij} \in Q_{\alpha l}$ для $i \leqslant j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Обозначим, через $L = \{F_{ij}\}$ матрицу перехода от системы (3) к системе (2), которая может быть представлена в виде

$$L = XCY^{-1}, \tag{4}$$

где $X = \{x_{ij}\}$ — нормированная в нуле фундаментальная система решений (2), $Y = \{y_{ij}\}$ — нормированная в нуле фундаментальная система решений (3), $C = \operatorname{diag}\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ — произвольная постоянная матрица, $\det C \neq 0$.

Теорема 2. *Для любого* i, $i = \overline{1, n-1}$, *имеет место соотношение*

$$F_{ii+1}(t) = \frac{x_{ii}(t)}{y_{i+1\,i+1}(t)} \int_0^t \left(c_{i+1} p_{ii+1}(\tau) \frac{x_{i+1\,i+1}(\tau)}{x_{ii}(\tau)} - c_i q_{ii+1}(\tau) \frac{y_{i+1\,i+1}(\tau)}{y_{ii}(\tau)}\right) d\tau.$$

Доказательство непосредственно следует из представления (4).

Теорема 3. *Для любых* $i, i = \overline{1, n-2}$, j, $i + 1 < j \leqslant n$, *имеет место соотношение*

$$F_{ij}(t) = \frac{x_{ii}(t)}{y_{jj}(t)} \int_0^t \left(\sum_{k=i+1}^{j} p_{ik}(\tau) F_{kj}(\tau) - \sum_{k=i}^{j-1} q_{kj}(\tau) F_{ik}(\tau)\right) \frac{y_{jj}(\tau)}{x_{ii}(\tau)}\, d\tau. \tag{5}$$

Доказательство. Используя представление (4), легко показать, что

$$F_{ij} = c_j x_{ij} - \sum_{s=i}^{j-1} F_{is} y_{sj} / y_{jj}, \tag{6}$$

для доказательства (5) проводим индукцию по индексу j, пользуясь результатом теоремы 2 и тем, что

$$\frac{d}{dt}(F_{ij} y_{jj} / x_{ii}) = \left(\sum_{k=i+1}^{j} p_{ik} F_{kj} - \sum_{k=i}^{j-1} q_{kj} F_{ik}\right) y_{jj} / x_{ii}$$

на множестве непрерывности функций p_{ij}, q_{ij}. Справедливость (5) следует из непрерывности и кусочно-непрерывной дифференцируемости (см. [2, с. 199]) функций F_{ij} и того, что $F_{ij}(0) = 0$. Теорема доказана.

где $|\gamma| \leqslant 0,5\ (\exp(2\alpha l) - 1)$. Тогда для $t \geqslant t_0$

$$F(t) = \gamma \exp\left(\int_{t_0}^{t} (q_1(\tau) - q_2(\tau))\, d\tau\right) + \exp\left(\int_{t_0}^{t} (q_1(\tau) - q_2(\tau))\, d\tau\right) \int_{t_0}^{t} (p(\sigma) -$$

$$- q(\sigma)) \exp\left(\int_{t_0}^{\sigma} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma.$$

Применяя вторую теорему о среднем, получаем

$$F(t) = \gamma \exp\left(\int_{t_0}^{t} (q_1(\tau) - q_2(\tau))\, d\tau\right) + \int_{\hat{t}}^{t} (p(\sigma) - q(\sigma))\, d\sigma, \quad t_0 \leqslant \hat{t} \leqslant t.$$

Если t_1 бесконечно, то функцию q на $[t_0, +\infty[$ строим в соответствии с леммой 1 работы [1]. Тогда, очевидно, $|F(t)| \leqslant 6\alpha l \quad \forall t \geqslant t_0$.

Пусть $t_1 = nl$, $n \in N$ и пусть $q_1(t) - q_2(t) = 2\alpha$ для $t \in [t_1, t_2[$, где t_2 конечно или бесконечно (если t_2 конечно, то $t_2 = rl$, $r \in N$, $r > n$). Вычислим интеграл

$$J_k = \int_{t_1+(k-1)l}^{t_1+kl} \exp\left(\int_0^{\sigma} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma = (1 - \exp(-2\alpha l)) \times$$

$$\times \exp(-2\alpha(k-1)l) \exp\left(\int_0^{t_1} (q_2(\tau) - q_1(\tau)) d\tau\right) / 2\alpha,$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, r - n$, если t_2 конечно, и $k \in N$, если t_2 бесконечно. Функцию q на $[t_0, t_1[$ будем строить в соответствии с леммой. При этом, очевидно, для любого t, $t \in [t_0, t_1[$, будет выполняться неравенство $|F(t)| \leqslant 6\alpha l$. Кроме того, так как $p \in P_\delta$, будет выполнено

У с л о в и е *Б*.

$$|J^0| = \left| \int_0^{t_1} (p(\sigma) - q(\sigma)) \exp\left(\int_0^{\sigma} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} p(\sigma) \exp\left(\int_0^{\sigma} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma \right| \leqslant 2\alpha J_1.$$

Функцию q на промежутке $[t_1, t_2[$ строим следующим образом: полагаем $J^{i+1} = J^i - q(t) J_{i+1}$, где для $t \in [t_1 + il, t_1 + (i+1) l[$

$$q(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } 0 \leqslant J^i \leqslant 2\alpha J_{i+1}, \\ -\alpha, & \text{если } -2\alpha J_{i+1} \leqslant J^i < 0, \end{cases}$$

$i = \overline{0, r-n-1}$, если t_2 конечно, и $i \in Z_0$, если t_2 бесконечно. При таком построении q имеем $|J^{i+1}| \leqslant \alpha J_{i+1}$. Поэтому для любого $t \in [t_1 + sl, t_1 + (s+1) l[$, $s \in Z_0$ имеем

$$\left| \int_0^{t} (p(\sigma) - q(\sigma)) \exp\left(\int_0^{\sigma} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma \right| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha (J_s + J_{s+1}) + \alpha l \exp\left(\int_0^{t_1} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) \exp(-2\alpha s l)/4.$$

Очевидно, что $|F(t)| \leqslant 6\alpha l \quad \forall t \in [t_1, t_2[$. При этом если t_2 конечно, то

$$\left| \int_0^{t_2} (p(\sigma) - q(\sigma)) \exp\left(\int_0^{\sigma} (q_2(\tau) - q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma \right| \leqslant \alpha J_{r-n},$$

т. е.

2. Основные результаты.

Теорема 4. *Для любой системы вида (2) существует асимптотически эквивалентная ей [3] система вида (3).*

Доказательство теоремы следует из приведенных теорем и леммы 1 работы [1].

Теорема 5. *Для любой системы с локально интегрируемыми и почти везде ограниченными коэффициентами существует асимптотически эквивалентная ей система вида (3).*

Доказательство следует из теоремы Лузина [4, с. 102], теоремы Перрона о триангуляции, теоремы 29.1.2 [5, с. 399] и теоремы 4.

Замечание. Заменяя в предыдущих рассуждениях интегралы Римана интегралами Лебега, можно показать, что утверждение теоремы 5 остается в силе, если вместо локальной интегрируемости потребовать лишь локальную суммируемость коэффициентов системы.

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю. С. Богданову за внимание к работе.

Литература

1. Мазаник С. А. Об асимптотически эквивалентных двухмерных линейных дифференциальных системах.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 2.

2. Шварц Л. Анализ, т. 1.— М.: Мир, 1972.

3. Богданов Ю. С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 6.

4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.

5. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова.— М.: Наука, 1966.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 27 декабря 1979 г.