разными способами для $(0, 1)$ и $(0, \infty)$, а в настоящей работе они установлены для любого интервала (a, b) (в том числе и для $(-\infty, \infty)$) универсальным методом.

Замечание 3. Для оператора

$$l(y) \equiv (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=2}^{2n} p_k(x)\, y^{(2n-k)}, \quad x \in (0, \infty),$$

с экспоненциально убывающими на бесконечности коэффициентами $p_k(x)$, $k=2, \ldots, 2n$, в [3] получены асимптотические выражения для фундаментальной системы решений уравнения $l(y)=\lambda y$ и их производных. Второй член этих выражений содержит дополнительный экспоненциально убывающий по x множитель.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. А. Ильину за внимание к работе.

Литература

1. Костюченко А. Г., Саргсян И. С. Распределение собственных значений.— М.: Наука, 1979.— 400 с.

2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.— 526 с.

3. Кесельман Г. М.— Дифференц. уравнения, 1969, т. 5, № 9, с. 1700—1714.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 27 сентября 1983 г.

УДК 517.926

С. А. МАЗАНИК

О СТРУКТУРЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В работах [1, 2] было показано, что для любой линейной системы

$$\dot{x} = p(t)\, x \tag{1}$$

с локально интегрируемыми и ограниченными на промежутке R_0 ($R_0 = [0, +\infty[$) коэффициентами существует асимптотически эквивалентная система

$$\dot{y} = q(t)\, y \tag{2}$$

с кусочно-постоянными коэффициентами, принимающими только два значения. Причем последовательность (l_n) длин промежутков, на которых функция q постоянна, ограничена снизу некоторым положительным числом l. Однако наибольший интерес представляет случай, когда указанная последовательность не только ограничена снизу, но и является бесконечно большой или же неограниченной (см., например, [3—5]). Цель настоящей работы — исследовать те случаи, когда последовательность (l_n) может быть сделана неограниченной, если p — локально-интегрируемая ограниченная на промежутке R_0 скалярная функция.

Пусть $-\infty < p_0 = \inf\limits_{t \in R_0} p(t) \leqslant \sup\limits_{t \in R_0} p(t) = p_1 < +\infty$. Кусочно-постоянную функцию q, такую, что уравнение (2) асимптотически эквивалентно уравнению (1), будем называть *аппроксимирующей функцией уравнения* (1). Из работы [1] следует, что аппроксимирующую функцию q можно построить таким образом, что $q(t) \in \{q_0, q_1\}$, где q_0 и q_1—любые числа, $q_0 \leqslant p_0$, $q_1 \geqslant p_1$.

Однако во многих случаях в качестве q_0 можно брать числа, большие p_0, а в качестве q_1 — меньшие p_1. Значения q_0 и q_1, $q_0 \leqslant q_1$, будем называть соответственно нижним и верхним допустимыми значениями аппроксимирующей функции. Обозначим через Q_0 множество всех нижних, а через Q_1 — множество всех верхних допустимых значений. Легко видеть, что множество Q_0 ограничено сверху, а множество Q_1 — снизу. Поэтому существуют $\alpha = \sup Q_0$ и $\beta = \inf Q_1$, причем $\alpha \leqslant \beta$. Очевидно, что если $\max Q_0 = \min Q_1$, то уравнение (1) будет приводимо [6]. В дальнейшем предполагаем, что уравнение (1) не приводимо.

Связные компоненты множества $L_a = \{t \mid t \in R_0,\ q(t) = a\}$, занумерованные в естественном порядке (в порядке возрастания их левых концов), обозначим через L_n^a, и пусть l_n^a — длина L_n^a.

Теорема 1. *Если* $\sup Q_0 = \max Q_0 = \alpha$ ($\inf Q_1 = \min Q_1 = \beta$), *то значение* α (β) *является нижним (верхним) допустимым значением аппроксимирующей функции* q, *а* *сама эта функция может быть построена так, что последовательность* (l_n^α) $((l_n^\beta))$ *будет неограниченной.*

Доказательство. Так как $\alpha = \max Q_0$, то α является нижним допустимым значением некоторой аппроксимирующей функции q. Пусть $q(t) \in \{\alpha, \gamma\}$, где $\gamma \in Q_1$. Не нарушая общности, можно считать, что функция q такова, что последовательность (l_n^γ), $l_n^\gamma = t_{2(n+1)} - t_{2n+1}$, ограничена снизу некоторым положительным числом l. Предположим, что последовательность (l_n^α), $l_n^\alpha = t_{2n+1} - t_{2n}$ $(t_0 = 0)$, ограничена сверху числом L. Положим $\alpha_0 = (\alpha L + \gamma l)/(L + l)$. Очевидно, что $\alpha < \alpha_0 < \gamma$.

Построим функцию f следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} \alpha_0, & \text{если } t \in [t_{2n}, \bar{t}_{2n}[, \\ \gamma, & \text{если } t \in [\bar{t}_{2n}, t_{2(n+1)}[, \end{cases}$$

где $\bar{t}_{2n} = (\alpha l_n^\alpha - \gamma t_{2n+1} + \alpha_0 t_{2n})/(\alpha_0 - \gamma)$.

Поскольку f и q—кусочно-постоянные функции, то имеем

$$\left| \int_0^t (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau \right| \leqslant (\gamma - \alpha)\, Ll/(L + l) \ \forall\, t,\ t \in R_0.$$

Следовательно, уравнение (2) асимптотически эквивалентно уравнению

$$\dot{x} = f(t)\, x. \tag{3}$$

Так как функция q является аппроксимирующей для уравнения (1), то и функция f аппроксимирующая для (1). Поэтому α_0 — нижнее допустимое значение, что противоречит условию теоремы. Таким образом, последовательность (l_n^α) для указанной функции q является неограниченной. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть аппроксимирующая функция q для уравнения (1) имеет вид*

$$q(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } t \in [t_{2n}, t_{2n+1}[, \\ \beta, & \text{если } t \in [t_{2n+1}, t_{2(n+1)}[, \end{cases}$$

где $\alpha < \beta$, $t_0 = 0$, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Если последовательность (l_n^α), $l_n^\alpha = t_{2n+1} - t_{2n}$, не ограничена, то $\alpha = \sup Q_0$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha \neq \sup Q_0$. Так как $\alpha \in Q_0$, то существует α_0, такое, что $\alpha_0 \in Q_0$, $\alpha < \alpha_0 \leqslant \beta$. Следовательно, существует аппроксимирующая функция f, такая, что $f(t) \in \{\alpha_0, \beta\}$.

Поскольку уравнения (2) и (3) будут асимптотически эквивалентны, то при всех t, $t \in R_0$, имеет место неравенство

$$\left| \int_0^t (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau \right| < M, \tag{4}$$

где M — некоторое положительное число, не зависящее от t.

Обозначим через (h_k) подпоследовательность последовательности (l_n^α), такую, что $h_k \to \infty$ при $k \to \infty$ $(h_k = T_{k+1} - T_k)$. Тогда

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau = \int_{T_k}^{T_{k+1}} f(\tau)\, d\tau - \alpha h_k = \delta_k h_k - \alpha h_k,$$

где $\delta_k = \dfrac{1}{h_k} \displaystyle\int_{T_k}^{T_{k+1}} f(\tau)\, d\tau$. Очевидно, что $\delta_k \geqslant \alpha_0 > \alpha$, поэтому в тождестве

$$\int_{T_k}^{T_{k+1}} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau + \int_0^{T_k} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau - \int_0^{T_{k+1}} (f(\tau) - q(\tau))\, d\tau = 0$$

первое слагаемое неограниченно возрастает при возрастании k, в то время как два других слагаемых в силу (4) ограничены при всех k. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из теорем 1 и 2 непосредственно получаем

Следствие 1. *Если $\alpha = \max Q_0$ и $\beta = \min Q_1$, $\alpha < \beta$, то для уравнения (1) существует аппроксимирующая функция q, $q(t) \in \{\alpha, \beta\}$, такая, что последовательности (l_n^α) и (l_n^β) не ограничены.*

Следствие 2. *Если* $\alpha=\max Q_0$ $(\beta=\min Q_1)$, *а минимум* Q_1 *(максимум* Q_0) *не существует, то для уравнения (1) существует аппроксимирующая функция* q, *такая, что последовательность* (l_n^α) $((l_n^\beta))$ *не ограничена.*

Следствие 3. *Если не существует ни минимума* Q_1, *ни максимума* Q_0, *то для уравнения (1) не существует аппроксимирующей функции* q, *принимающей только два значения* α *и* β, *и такой, что хотя бы одна из последовательностей* (l_n^α), (l_n^β), *была бы неограниченной (каковы бы ни были числа* α *и* β).

Примеры уравнений, на которых реализуются утверждения первых двух следствий, строятся легко. Функция p, задающая уравнение (1), для которого имеет место следствие 3, может быть построена следующим образом:

$$p(t)=\begin{cases}1/n, & \text{если } t\in[t_n,\ t_n+n^2[,\\ -1/n, & \text{если } t\in[t_n+n^2,\ t_{n+1}[,\end{cases}$$

где $t_1=0$ и $t_{n+1}=t_n+2n^2$, для $n\geqslant 1$.

Можно показать [7], что $\sup Q_0=\inf Q_1=0$, однако нуль не является допустимым значением ни для какой аппроксимирующей функции. Следовательно, указанная функция p и задает требуемое уравнение (1). Заметим, что если в построенном примере в качестве аппроксимирующей функции q использовать функцию, принимающую три значения: например, 1, 0, -1, то ее можно выбрать таким образом, что последовательность промежутков, на которых $q=0$, являлась бы бесконечно большой. Более того, имеет место

Теорема 3. *Если существует кусочно-постоянная функция* φ, *принимающая значения из некоторого ограниченного множества* A, *такая, что неприводимое уравнение (1) асимптотически эквивалентно уравнению*

$$\dot{x}=\varphi(t)\,x, \tag{5}$$

причем последовательность длин промежутков, на которых φ *постоянна, не ограничена, то для уравнения (1) существует асимптотически эквивалентное ему уравнение (2) с функцией* q, *такой, что* $q(t)\in\{\inf A,\ \gamma,\ \sup A\}$, *и последовательность длин промежутков, на которых* $q=\gamma$, *является бесконечно большой.*

Доказательство. Если среди элементов множества A существует по крайней мере один элемент ε, такой, что последовательность длин связных компонент множества $\{t\,|\,t\in R_0,\ \varphi(t)=\varepsilon\}$ является неограниченной, то утверждение теоремы, очевидно, выполнено.

Предположим, что ни одного такого элемента не существует. (Далее для простоты считаем, что $\alpha=\sup A=-\inf A$.) Обозначим последовательность длин промежутков, на которых функция φ постоянна, через (l_n), а соответствующую последовательность значений функции — через (α_n). Так как по условию последовательность (l_n) не ограничена, то из нее можно выделить бесконечно большую последовательность. Не нарушая общности, считаем, что сама (l_n) бесконечно большая. Поскольку A — ограниченное множество, то из последовательности (α_n) можно выделить сходящуюся монотонную подпоследовательность, которую обозначим через (γ_n). Пусть $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n$. Предположим, что последовательность (γ_n) убывающая. Последовательность длин промежутков $[T_n,\ \tilde{T}_n[$, на которых $\varphi(t)=\gamma_n$, обозначим (h_n).

Предположим, что требуемая функция q построена на промежутке $[0,\ T_n[$, причем имеет место неравенство

$$|I(T_n)|=\left|\int\limits_0^{T_n}(\varphi(\tau)-q(\tau))\,d\tau\right|\leqslant\alpha l, \tag{6}$$

где l—некоторое положительное число. Положим теперь $q(t)=\gamma$ для $t\in[T_n,\ T_n'[$, где

$$T_n'=\begin{cases}\tilde{T}_n, & \text{если } I(T_n)+(\gamma_n-\gamma)h_n\leqslant 2\alpha l,\\ T_n+(2\alpha l-I(T_n))/(\gamma_n-\gamma), & \text{если } I(T_n)+(\gamma_n-\gamma)h_n>2\alpha l.\end{cases} \tag{7}$$

При таком выборе T_n' имеет место неравенство

$$|I(t)|=\left|\int\limits_0^{t}(\varphi(\tau)-q(\tau))\,d\tau\right|\leqslant 2\alpha l\quad\forall\,t\in[T_n,\ T_n'[.$$

Положим далее для $t\in[T_n',\ T_n''[$

$$q(t)=\begin{cases}\alpha, & \text{если } 0\leqslant I(T_n')\leqslant 2\alpha l,\\ -\alpha, & \text{если } -2\alpha l\leqslant I(T_n')<0,\end{cases}$$

где T_n'' выбрано так, что

$$I(T_n'')=0 \tag{8}$$

(такое T''_n заведомо существует, ибо в противном случае уравнение (1) было бы приводимым, что противоречит условию теоремы). Таким образом,

$$|I(t)| \leqslant 2\alpha l \quad \forall t \in [T_n, T''_n[. \tag{9}$$

Не нарушая общности, считаем $T''_n \leqslant T_{n+1}$. Так как выполнено условие (8), то в силу леммы 1 работы [2] функция q может быть построена на $[T''_n, T_{n+1}[$ так, что

$$|I(t)| \leqslant \alpha l \quad \forall t \in [T''_n, T_{n+1}[, \tag{10}$$

т. е. условие (6) будет выполнено и для точки T_{n+1}.

Очевидно, что оба условия и вида (6), и вида (8) выполнены в нуле. Поэтому из (9) и (10) следует, что функция q может быть построена указанным образом последовательно на каждом промежутке $[T_n, T_{n+1}[$, причем при всех t, $t \in R_0$, выполнено неравенство $\left|\int\limits_0^t (\varphi(\tau) - q(\tau))\, d\tau\right| \leqslant 2\alpha l$. Поэтому уравнения (1) и (2) асимптотически эквивалентны. В силу (7), не нарушая общности, можно считать, что последовательность $(\tilde{h}_n)$, $\tilde{h}_n = T'_n - T_n$, является бесконечно большой. Случай, когда (γ_n)—возрастающая последовательность, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Отметим, что существуют уравнения (1), для которых не существует ни одного асимптотически эквивалентного уравнения (2) с кусочно-постоянной функцией q, такой, что последовательность длин промежутков постоянства функции q являлась бы неограниченной. Пример такого уравнения построен в работе [7].

Автор выражает благодарность проф. Ю. С. Богданову за внимание к работе.

Литература

1. Богданов Ю. С.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 6, с. 707—716.
2. Мазаник С. А.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 2, с. 220—226.
3. Былов Б. Ф., Тихонова Э. А.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 12, с. 2115—2121.
4. Мартынов И. И.— Докл. АН БССР, 1967, т. 11, № 9, с. 770—771.
5. Мазаник С. А.— Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 65—67.
6. Еругин Н. П. Приводимые системы.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1946, т. 13.— 98 с.
7. Мазаник С. А.— Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 6, с. 1089—1091.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 11 марта 1984 г.

УДК 517.97

НГУЕН ЧАН

ОБОБЩЕННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ *)

В заметке распространяется результат Ф. Кларка [1] на систему с запаздыванием.

Рассмотрим задачу (P). Минимизировать функционал $J = l(x(p)) + \int\limits_0^T f^0(t, x(t), x(t-\theta(t)), u(t))\, dt$ в классе всех процессов (x, u), удовлетворяющих ограничениям: 1) $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\theta(t)), u(t))$ для почти всех (п. в.) $t \in [0, T]$, $x(t) = \varphi(t)$, $t \in \{\tau - \theta(\tau) \leqslant 0\} = [t_{-1}, 0]$; 2) $u(t) \in U(t)$, $t \in [0, T]$. Здесь $x \in R^n$, $u \in R^k$; $l: R^n \to (-\infty, \infty]$; U — многозначное отображение из $[0, T]$ в R^k; функция θ дифференцируемая, $\theta(t) > 0$, $\dot{\theta}(t) < 1$, $t \in [0, T]$; допустимое управление u—измеримая функция.

Пусть $\beta(t)$ — обратная $\alpha(t) = t - \theta(t)$ функция; $t_i = \beta(t_{i-1})$, $i = 0, 1, \ldots, m$, где m—натуральное число, $t_m \leqslant T$, но $\beta(t_m) > T$; (x_*, u_*)—решение задачи (P); X—открытое множество в R^n, $x_*(t) \in X$, $t \in [t_{-1}, T]$.

Предположим, что: а) функция l полунепрерывна снизу; б) для любых x, y из X функции $(t, u) \to f^i(t, x, y, u)$, $i=0, \ldots, n$, измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^k$,

*) Полностью рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 2042—85 Деп.