Доклады Академии наук БССР

1985 Том XXIX № 9

УДК 517.926

С. А. МАЗАНИК

О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком АН БССР Н. П. Еругиным)

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных

$$(AD+B)x=0, \tag{1}$$

где A и B — постоянные или непрерывные и ограниченные на $[0, +\infty[$ матрицы размерности $n\times n$, x—n-мерный вектор, $D=\dfrac{d}{dt}$.

Покажем, что некоторые результаты, полученные Н. П. Еругиным в работе [1], переносятся с небольшими изменениями на системы вида (1) и в том случае, когда матрица A является вырожденной.

В дальнейшем считаем, что все рассматриваемые системы имеют постоянную размерность пространства решений (это всегда выполнено, если матрицы A и B постоянны), и матрицу, составленную из линейно независимых решений системы, будем называть фундаментальной матрицей этой системы.

Следуя [2], систему (1) назовем асимптотически эквивалентной системе

$$(A_1D+B_1)y=0, \tag{2}$$

если существует преобразование Ляпунова $y=Lx$, L — матрица Ляпунова, переводящее (1) в (2), т. е. для любого решения x системы (1) функция y, $y=Lx$, является решением системы (2) и для любого решения y системы (2) функция x, $x=L^{-1}y$, является решением системы (1). Непосредственно из определения следует

Теорема 1. *Для того чтобы системы (1) и (2) были асимптотически эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая фундаментальная матрица X решений системы (1), что $X=LY$, где L — матрица Ляпунова, Y — фундаментальная матрица решений системы (2).*

Предположим, что A и B — постоянные матрицы. Рассмотрим многочлен от λ вида $p(\lambda)=\det(A\lambda+B)$. Предположим также, что $p(\lambda)\not\equiv 0$, и обозначим $k=\deg p(\lambda)$. Известно (см., например, [3], с. 334), что существуют такие невырожденные постоянные матрицы T и S, для которых

$$T(A\lambda+B)S=\operatorname{diag}\{N(\lambda),\quad J+E_k\lambda\}=K(\lambda), \tag{3}$$

где J — матрица, имеющая нормальную жорданову форму, E_k — единичная $k\times k$-матрица, $N(\lambda)=\operatorname{diag}\{N_{i_1}(\lambda),\ \ldots,\ N_{i_r}(\lambda)\}$, причем $i_s\times i_s$-матрицы $N_{i_s}(\lambda)$ имеют вид

$$N_{i_s}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \lambda & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix},\quad s=\overline{1,\ r},\quad \sum_{s=1}^{r} i_s=n-k.$$

Аналогично для системы (2) с постоянными матрицами A_1 и B_1 имеем

$$T_1(A_1\lambda + B_1)S_1 = \operatorname{diag}\{N_1(\lambda),\ J_1 + E_{k_1}\lambda\},$$

где $k_1 = \deg(\det(A_1\lambda + B_1))$.

Обозначим через O_1 и O_2 нулевые $(n-k)\times k$- и $k\times(n-k)$-матрицы соответственно.

Теорема 2. *Система (1) с постоянными матрицами A и B асимптотически эквивалентна системе*

$$\operatorname{diag}\{E_{n-k},\quad E_kD + I\}\,y = 0, \tag{4}$$

где $I = \operatorname{Re} J$.

Доказательство. Очевидно, что система (1) асимптотически эквивалентна системе

$$K(D)z = 0. \tag{5}$$

Поэтому достаточно показать, что (5) асимптотически эквивалентна (4). Поскольку размерность пространства решений системы (5) равна k (см. также [4]), то фундаментальная матрица Z решений системы (5) имеет размерность $n\times k$. Такую же размерность имеет и фундаментальная матрица Y решений системы (4). Непосредственно из вида систем (4) и (5) следует, что матрицы Y и Z можно взять в виде

$$Y = \begin{pmatrix} O_1 \\ Y_0 \end{pmatrix},\quad Z = \begin{pmatrix} O_1 \\ Z_0 \end{pmatrix},$$

где Y_0 и Z_0 — фундаментальные матрицы решений соответственно систем

$$Dy_0 = -Iy_0, \tag{4.1}$$

$$Dz_0 = -Jz_0. \tag{5.1}$$

В силу теоремы Н. П. Еругина (см. [1], с. 9, 10) системы (4.1) и (5.1) асимптотически эквивалентны. Следовательно, существуют матрица Ляпунова L_0 и невырожденная постоянная матрица C такие, что $Y_0C = L_0Z_0$. Положим

$$L = \begin{pmatrix} E_{n-k} & O_1 \\ O_2 & L_0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что L — матрица Ляпунова, причем $YC = LZ$. Требуемое утверждение теперь следует из теоремы 1.

Отметим, что из теоремы 2 следует асимптотическая эквивалентность системы (2) с постоянными матрицами A_1 и B_1 системе

$$\operatorname{diag}\{E_{n-k_1},\quad E_{k_1}D + I_1\}\,z = 0, \tag{6}$$

где $I_1 = \operatorname{Re} J_1$.

Теорема 3. *Если системы (1) и (2) асимптотически эквивалентны, то* $I = I_1$.

Доказательство. Так как системы (1) и (2) асимптотически эквивалентны, то асимптотически эквивалентны системы (4) и (6). Следовательно, $k = k_1$ и существует невырожденная матрица C такая, что

$$ZC = LY, \tag{7}$$

где L — матрица Ляпунова, Y и Z — фундаментальные матрицы решений системы (4) и (6) соответственно, причем

$$Y = \begin{pmatrix} O_1 \\ \exp(-It) \end{pmatrix},\quad Z = \begin{pmatrix} O_1 \\ \exp(-I_1t) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В силу (7) и (8) матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & O_1 \\ L_2 & O_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

(L_1, L_2, L_3 соответственно $(n-k)\times(n-k)$-, $k\times(n-k)$-, $k\times k$-матрицы). Так как (см. [3], с.57) $\det L=\det L_1 \det L_3$ и $\det L\neq 0$, то $\det L_1\neq 0$ и $\det L_3\neq 0$, поэтому (см. [3], с.60)

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} L_1^{-1} & O_1 \\ -L_3^{-1}L_2L_1^{-1} & L_3^{-1}\end{pmatrix}.$$

Поскольку L — матрица Ляпунова, то матрицы L_3 и DL_3 ограничены, с другой стороны, L^{-1} — тоже матрица Ляпунова, а поэтому ограничена матрица L_3^{-1}. Следовательно, L_3 — матрица Ляпунова. Из (7), (8) и (9) следует

$$\exp(-I_1t)\,c=L_3\exp(-It),$$

поэтому в силу теоремы Н. П. Еругина (см. [1], с. 10) получаем $I=I_1$. Теорема доказана.

Замечание. Если $k=n$, то система (1) может быть разрешена относительно производных, и в этом случае доказанные теоремы совпадают с соответствующими теоремами Н. П. Еругина. Если же $k=0$, то система (1) имеет единственное тривиальное решение.

Аналогично [5] будем называть систему (1) с переменными коэффициентами и постоянной размерностью пространства решений приводимой, если она асимптотически эквивалентна системе с постоянными коэффициентами.

Теорема 4. *Для того чтобы система (1) с переменными коэффициентами и постоянной размерностью k пространства решений была приводима к системе*

$$\operatorname{diag}\{E_{n-k},\quad J+E_kD\}\,y=0, \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала фундаментальная матрица X решений системы (1), для которой имеет место равенство

$$X=L\begin{pmatrix} O_1 \\ \exp(Pt)\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где L — матрица Ляпунова, P — постоянная $k\times k$-матрица такая, что асимптотически эквивалентны системы

$$Dy_0=-Jy_0, \tag{12}$$

$$Dz_0=Pz_0. \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость. Системы (1) и (10) асимптотически эквивалентны, поэтому существует такая матрица Ляпунова R, что для любой фундаментальной матрицы Y решений системы (10) существует матрица X решений системы (1), которая представима в виде

$$X=RY. \tag{14}$$

Матрица Y имеет вид

$$Y=\begin{pmatrix} O_1 \\ Y_0\end{pmatrix}, \tag{15}$$

где Y_0 — фундаментальная матрица решений системы (12). Поскольку системы (12) и (13) асимптотически эквивалентны, то существуют матрица Ляпунова R_0 и такая фундаментальная матрица Z_0 решений системы (13), что

$$R_0Y_0=Z_0=\exp(Pt)\,C, \tag{16}$$

где C — постоянная матрица, $\det C\neq 0$. Учитывая (14), (15) и (16), получаем

$$X=RR_1\begin{pmatrix} O_1 \\ \exp(Pt)\end{pmatrix}C,\quad R_1=\begin{pmatrix} E_{n-k} & O_1 \\ O_2 & R_0^{-1}\end{pmatrix}.$$

Поскольку RR_1 — матрица Ляпунова, XC^{-1} — фундаментальная матрица решений системы (1), то соотношение (11) следует из теоремы 1.

Достаточность. Из (11) следует, что любая фундаментальная матрица X_1 решений системы (1) имеет вид

$$X_1 = L \begin{pmatrix} O_1 \\ \exp(Pt) \end{pmatrix} C_1,$$

где C_1 — постоянная невырожденная матрица. В силу асимптотической эквивалентности систем (12) и (13) существуют матрица Ляпунова R_0 и такая фундаментальная матрица Y_0 решений системы (12), что $Y_0 = R_0 \exp(Pt) C_1$. Поэтому существует фундаментальная матрица Y решений системы (10), которая представима в виде

$$Y = \begin{pmatrix} O_1 \\ Y_0 \end{pmatrix} = R_1^{-1} L^{-1} X_1, \quad R_1 = \begin{pmatrix} E_{n-k} & O_1 \\ O_2 & R_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из теоремы 1, так как $R_1^{-1} L^{-1}$ — матрица Ляпунова. Теорема доказана.

Полученная теорема, в частности, позволяет доказать приводимость системы вида

$$ADx = F(t)\, x,$$

где A — постоянная 2×2-матрица, F — периодическая абсолютно непрерывная матрица, причем степень неравного тождественно нулю определителя $\det(A\lambda - F)$ постоянная и равна k, $0 \leqslant k \leqslant 2$.

В заключение автор выражает благодарность Ю. С. Богданову за полезные советы и замечания.

Summary

Asymptotic equivalence is investigated for the linear systems $A\frac{dx}{d\lambda} + Bx = 0$, where matrix A may be a singular one.

Литература

1. Еругин Н. П.— Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1946, т. 13.— 96 с. 2. Богданов Ю. С.— ДУ, 1965, т. 1, № 6, с. 707—716. 3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с. 4. Лузин Н. Н. Автоматика и телемеханика, 1940, № 5, с. 3—66. 5. Ляпунов А. М. Собр. соч.— М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1956, т. 2.—473 с.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 27.06.84