Современная математика. Фундаментальные направления. Том 15 (2006). С. 5–18

УДК 517.983.23 +517.984.5

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2006 г. **А. Б. АНТОНЕВИЧ**

Аннотация. Рассматриваются функциональные операторы — операторы, представимые в виде суммы операторов взвешенного сдвига, порожденных разными отображениями. Получены вариационные принципы для спектрального радиуса функциональных операторов с положительными коэффициентами, выражающиеся в том, что логарифм спектрального радиуса является преобразованием Лежандра некоторого выпуклого функционала T, определенного на множестве вероятностных векторных мер, зависящего от исходной динамической системы и рассматриваемого функционального пространства. В субэкспоненциальном случае получена комбинаторная конструкция функционала T с помощью соответствующего процесса случайных блужданий, построенного по динамической системе.

1. Введение

В ряде математических и физических проблем встречаются вопросы, которые сводятся к исследованию спектральных свойств *функциональных операторов* — операторов, действующих в различных пространствах $F(X)$ функций на множестве X, и имеющих вид

$$Au(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)u(\alpha_k(x)), \quad u \in F(X), \tag{1.1}$$

где $\alpha_k\colon X \to X$ — заданные отображения, a_k — заданные функции. Свойства таких операторов исследовались в связи с различными приложениями, среди которых можно указать теорию динамических систем, теорию нормальных форм дифференциальных уравнений, функционально-дифференциальные и интегро-функциональные уравнения, теорию случайных блужданий, статистическую механику, теорию вэйвлетов и др. (см. [2, 8, 9, 13, 15, 21, 22]). Для операторов вида (1.1) в разных приложениях используются и другие названия: *операторы, ассоциированные с динамической системой*, *операторы переноса*, *операторы Перрона—Фробениуса* и другие.

Операторы вида $T_{\alpha_k}u(x) = u(\alpha_k(x))$ называют *операторами сдвига* или *композиционными операторами*. Операторы, входящие слагаемыми в (1.1), называют *операторами взвешенного сдвига* или *композиционными операторами с весом*.

Данная работа связана с исследованием одной из характеристик оператора — его спектрального радиуса

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

где $\sigma(A)$ — спектр оператора. Такая характеристика важна для произвольных операторов, причем при приложениях функциональных операторов возникают задачи, в которых именно информация о спектральном радиусе оператора оказывается наиболее существенной. Приведем в качестве примера одно из таких приложений.

Рассмотрим задачу моделирования процесса превращения частиц — процесса, в котором частицы могут перемещаться в пространстве и размножаться (или поглощаться) (см. [7]). В такой модели функция u есть плотность распределения частиц в пространстве X относительно некоторой меры μ на X, где частицы могут интерпретироваться как нейтроны, молекулы, особи биологических популяций и т. п. Отображения α_k задают возможные перемещения частиц за единицу времени, которые зависят от распределения скоростей (задают *динамику системы*), а функции a_k являются *внешними параметрами*, описывающими влияние среды на превращение частиц (это могут быть коэффициенты размножения или поглощения, вероятности переходов и т. п.).

Отметим, что по физическому смыслу коэффициенты a_k и функция u в рассматриваемой модели неотрицательны.

В описанной ситуации оператор вида (1.1) описывает *эволюцию системы за единицу времени*; через n единиц времени система переходит из начального состояния u в состояние $A^n u$ и возникает последовательность функций $A^n u$ — траектория заданного начального состояния. Одним из основных вопросов при исследовании процесса превращения частиц является описание поведения траектории при больших n. При этом наиболее существенной является информация об общем количестве частиц в момент времени n, которое совпадает с нормой функции $A^n u$ в пространстве $L_1(X,\mu)$.

Известно (см. [18]), что для любого ограниченного оператора A в банаховом пространстве для всех u выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} \leqslant r(A),$$

и для почти всех u (за исключением множества первой категории в смысле Бэра) выполнено

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} = r(A).$$

Это и означает, что спектральный радиус оператора содержит информацию о поведении типичных траекторий.

Таким образом, при моделировании процесса превращения частиц спектральный радиус оператора является одной из важнейших характеристик рассматриваемого процесса: при $r(A) < 1$ число частиц быстро убывает (процесс затухает); при $r(A) > 1$ происходит экспоненциальный рост числа частиц (взрыв); условие $r(A) = 1$ является необходимым условием стационарности процесса. Значения внешних параметров, при которых $r(A) = 1$, называются *критическими*; выявление таких значений наиболее существенно для качественного описания процесса.

Таким образом, основным вопросом при исследовании процесса превращения частиц является именно вычисление спектрального радиуса операторов вида (1.1) с неотрицательными коэффициентами.

Кроме информации об общем количестве частиц в момент времени n, при описании процесса превращения частиц представляет интерес *предельное распределение частиц* — величина

$$\lim_{n\to+\infty} v_n, \quad \text{где} \quad v_n = \frac{1}{\|A^n u\|} A^n u.$$

Указанный предел в пространстве функций может не существовать, но если функции v_n отождествить с мерами вида $v_n\mu$, то обычно существует предел последовательности $v_n\mu$ в пространстве мер и этот предел задает предельное равновесное состояние системы.

Приведенные ниже результаты имеют естественную интерпретацию с точки зрения исследования процесса превращения частиц.

Для операторов взвешенного сдвига в классических пространствах функций были получены выражения для *спектрального показателя*, т. е. логарифма спектрального радиуса, имеющие вид вариационных принципов.

Например, если X — компактное топологическое пространство, μ — борелевская мера на X, инвариантная относительно *обратимого* отображения $\alpha : X \to X$, такая, что $\operatorname{supp}\mu = X$, $a \in C(X)$, то в пространствах $F(X) = L_p(X,\mu)$ и в пространстве $C(X)$ для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига

$$Au(x) = a(x)\, u(\alpha(x)) \tag{1.2}$$

справедливы формулы:

$$\ln r(A) = \max_{\nu\in PM_\alpha(X)} \int\limits_X \ln|a(x)|d\nu, \tag{1.3}$$

$$\ln r(A) = \max_{\nu\in PME_\alpha(X)} \int\limits_X \ln|a(x)|d\nu \tag{1.4}$$

Здесь $PM_\alpha(X)$ есть множество всех α-инвариантных вероятностных мер на X, а $PME_\alpha(X)$ есть множество эргодических α-инвариантных вероятностных мер на X. Общая формула (1.3) была получена независимо А. К. Китовером и А. В. Лебедевым, относительно истории вопроса и обобщений см. [2, 15]. Здесь и в дальнейшем все меры предполагаются регулярными.

Если отображение α необратимо, то в случае пространства $C(X)$ справедливы те же формулы (1.3)–(1.4), а в случае пространств $L_p(X,\mu)$ ситуация сложнее. Различие этих случаев можно проследить и с точки зрения соответствующего процесса превращения частиц. Случай одного обратимого отображения α соответствует детерминированной ситуации, в случае необратимого отображения частицы могут попадать в одну и ту же точку из разных исходных положений, что соответствует более сложному вероятностному характеру движения частиц и приводит к более сложным операторам.

Для сдвигов Маркова, т. е. специального класса необратимых отображений, естественно возникающего в теории вероятностей, Ю. Д. Латушкиным и А. М. Степиным [10] была получена для операторов вида (1.2) формула спектрального радиуса

$$\ln r(A) = \max_{\nu\in PM_\alpha(X)} \left\{ \int\limits_X \ln|a(x)|d\nu - \frac{1}{p}\int\limits_X \rho(x)d\nu + \frac{1}{p}h(\nu)\right\}, \tag{1.5}$$

где $h(\nu)$ — энтропия меры ν относительно отображения α, ρ — некоторая функция, определяемая отображением α.

Формулу (1.5) можно считать аналогом известного в термодинамике вариационного принципа, связывающего энтропию и свободную энергию, при этом логарифм спектрального радиуса играет роль свободной энергии. Уместно в связи с рассматриваемым вопросом упомянуть работы В. П. Маслова, в которых прослежены подобные связи для некоторых эволюционных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du}{dt} + Bu = 0.$$

Например, в работе [11], посвященной квантованию термодинамики, установлено совпадение свободной энергии термодинамической системы, описываемой уравнением указанного вида, с минимальным собственным значением оператора B. Заметим, что это минимальное собственное значение является именно *логарифмом спектрального радиуса* для оператора e^{-B}, задающего эволюцию системы.

Функциональные операторы вида (1.1), имеющие нескольких слагаемых, устроены более сложно, их спектральные свойства исследованы только для некоторых специальных случаев [1, 6, 20].

В работе показано, что вариационные принципы для спектрального показателя, аналогичные (1.3)–(1.5), имеют место для произвольных операторов взвешенного сдвига и для произвольных функциональных операторов с положительными коэффициентами. Уже факт существования таких вариационных принципов позволяют лучше понять механизм происходящих процессов: в соответствующие формулы отдельно входит функционал на множестве вероятностных мер, количественно описывающий влияние динамики (зависящий только от отображений α_k), и функционал, учитывающий влияние внешних параметров, при этом вариационный принцип означает, что реализуются состояния, при которых имеет место наилучшее сочетание этих двух влияний.

Функционалы, входящие в правые части вариационных принципов, задают некоторые *новые динамические характеристики мер*; при некоторых дополнительных предположениях удается получить независимое определение таких функционалов и выяснить их динамический смысл.

Приведенные ниже результаты получены автором совместно с В. И. Бахтиным, К. Зайковски и А. В. Лебедевым.

2. Выпуклость спектрального показателя и существование вариационных принципов

Исходное соображение заключается в том, что выражения в правых частях формул (1.3)–(1.5) можно рассматривать как преобразование Лежандра некоторых функционалов. Напомним необходимые понятия и факты, следуя [19].

Пусть f есть функционал на вещественном банаховом пространстве $\mathbf{\Phi}$ со значениями в расширенной вещественной прямой $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$. Множество $D(f) = \{\varphi \in \mathbf{\Phi} : -\infty < f(\varphi) < +\infty\}$

называется *эффективной областью* функционала f. Функционал f называется *выпуклым*, если неравенство

$$f(t\varphi+(1-t)\psi)\leqslant tf(\varphi)+(1-t)f(\psi)$$

выполнено для всех $t\in[0,1]$ и всех $\varphi,\psi\in\mathbf{\Phi}$, для которых правая часть корректно определена.

Функционал f называется (*слабо*) *полунепрерывным снизу*, если множество $\{\varphi\in\mathbf{\Phi}:f(\varphi)\leqslant c\}$ (слабо) замкнуто для любого $c\in\bar{\mathbf{R}}$.

Пусть $\mathbf{\Phi}^*$ есть сопряженное пространство к $\mathbf{\Phi}$, через $\langle\nu,\varphi\rangle$ будем обозначать значение линейного ограниченного функционала $\nu\in\mathbf{\Phi}^*$ на элементе $\varphi\in\mathbf{\Phi}$. Функционал $f^*:\mathbf{\Phi}^*\to\bar{\mathbf{R}}$, определенный на сопряженном пространстве выражением

$$f^*(\nu)=\sup\{\langle\nu,\varphi\rangle-f(\varphi):\varphi\in\mathbf{\Phi}\}=$$
$$=\sup\{\langle\nu,\varphi\rangle-f(\varphi):\varphi\in D(f)\},\ \nu\in\mathbf{\Phi}^*,$$

называется *сопряженным по Лежандру* к функционалу f, а отображение $f\to f^*$ называется преобразованием Лежандра. Для функционала g на сопряженном пространстве преобразование Лежандра определяется как функционал на исходном пространстве, заданный аналогичной формулой:

$$g^*(\varphi)=\sup\{\langle\nu,\varphi\rangle-g(\nu):\nu\in\mathbf{\Phi}^*\},\ \varphi\in\mathbf{\Phi}.$$

Для произвольного функционала его *выпуклой оболочкой* называется наибольший выпуклый и полунепрерывный снизу функционал, не превосходящий g.

Предложение 2.1. *Пусть функционал $f:\mathbf{\Phi}\to(-\infty,+\infty]$ не есть тождественно $+\infty$. Функционал f является преобразованием Лежандра для некоторого функционала g на $\mathbf{\Phi}^*$, т. е. допускает представление вида*

$$f(\varphi)=\sup\{\langle\nu,\varphi\rangle-g(\nu):\nu\in\mathbf{\Phi}^*\}\tag{2.1}$$

тогда и только тогда, когда он является выпуклым и полунепрерывным снизу. В качестве g в представлении (2.1) *может быть взят сопряженный функционал f^*, а также любой другой функционал на $\mathbf{\Phi}^*$, выпуклая оболочка которого совпадает с f^*.*

Сравнив формулы (1.3)–(1.5) с выражением для преобразования Лежандра, видим, что в случае $a(x)>0$ спектральный показатель, т. е. логарифм спектрального радиуса, рассматриваемый как функционал на пространстве функций вида $\varphi=\ln a$, во всех этих формулах является преобразованием Лежандра некоторого функционала, эффективная область которого принадлежит множеству $PM_\alpha(X)$.

В случае операторов вида (1.1) с положительными коэффициентами спектральный показатель также можно рассматривать как функционал на подходящем пространстве. Рассмотрим сначала наиболее простой вариант такой конструкции.

Пусть X есть компактное топологическое пространство, $\alpha_k:X\to X$ — непрерывные отображения, $k\in M=\{1,2,...m\}$, и пусть коэффициенты a_k есть непрерывные положительные функции на X.

По коэффициентам a_k построим функции $\varphi_k=\ln a_k$, которые обычно называют *потенциалами*. В силу положительности функций a_k набор $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_m)$ является элементом пространства $[C(X)]^m$ непрерывных вещественных вектор-функций на X, которое естественно изоморфно пространству $C(Y)$, где $Y=X\times M$.

По теореме Рисса пространство $C(Y)^*$, сопряженное к пространству $C(Y)$, изоморфно пространству регулярных (знакопеременных) мер на Y. Поэтому множество $PM(Y)$ вероятностных мер на Y будем считать подмножеством пространства $C(Y)^*$. Это множество иногда удобнее рассматривать как множество векторных мер на X, т. е. как множество векторов вида $\nu=(\nu_1,...,\nu_m)$, где каждое ν_k есть неотрицательная мера на X и $\sum\limits_{k=1}^{m}\ \nu_k(X)=1$.

Пусть $F(X)$ есть пространство, состоящее из функций, определенных на X, в котором каждый оператор вида (1.1) с непрерывными коэффициентами ограничен. Спектральный показатель оператора A в пространстве $F(X)$ будем рассматривать как функционал на пространстве потенциалов $C(Y)$, т. е. рассмотрим функционал

$$\lambda_F(\varphi)=\ln\ r(A),\tag{2.2}$$

где
$$A=\sum_1^m e^{\varphi_k}T_{\alpha_k}. \tag{2.3}$$

Обратим внимание на то, что спектральные свойства и спектральный радиус операторов A, заданных одним и тем же выражением (2.3) в разных функциональных пространствах, в общем случае зависят от рассматриваемого пространства $F(X)$, что подчеркнуто обозначением (2.2).

Первый результат заключается в том, что в случае классических функциональных пространств определенный выше спектральный показатель λ оказывается выпуклым и непрерывным. Тогда из предложения 2.1 вытекает возможность его представления в виде (2.1) через функционал λ^* или какой-нибудь другой функционал на сопряженном пространстве.

Кроме того, для спектрального показателя имеем следующие свойства:

1) если $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$, то $\lambda(\varphi)\leqslant\lambda(\psi)$ (монотонность);

2) $\lambda(\varphi+\mathbf{c})=\lambda(\varphi)+c$, где $c\in\mathbb{R}$, а $\mathbf{c}=(c,c,\dots,c)$ есть постоянная вектор-функция.

Из свойств 1) и 2) следует, что эффективная область функционала λ^* принадлежит множеству $PM(Y)$ вероятностных мер на Y.

В результате получаем следующее утверждение, частный случай которого был получен в [4].

Теорема 2.1. *Пусть X есть компактное топологическое пространство, заданы непрерывные отображения $\alpha_k\colon X\to X$, $k\in M=\{1,2,\dots,m\}$, и пусть μ — мера на X, инвариантная относительно всех отображений α_k.*

Для пространства $C(X)$ и для каждого из пространств $L_p(X,\mu)$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, существует такой выпуклый полунепрерывный снизу функционал $\mathbf{T}$, определенный на множестве $PM(Y)$ вероятностных мер на пространстве $Y=X\times M$ (в общем случае зависящий от рассматриваемого пространства), что в соответствующем пространстве для спектрального показателя любого оператора A вида (2.3), где $\varphi_k(x)\in C(X)$, справедлив вариационный принцип:
$$\ln r(A)=\max_{\nu\in PM(Y)}\left\{\sum_{k=1}^m\int_X\varphi_k(x)d\nu_k-\mathbf{T}(\nu)\right\}.$$

Предположение, что оператор A порожден непрерывными отображениями компактного пространства X и имеет непрерывные коэффициенты существенно в случае пространства $C(X)$. Если оператор рассматривается в пространстве $L_p(X,\mu)$, то эти условия избыточны и можно получить более общее утверждение.

Пространство $[L_\infty(X,\mu)]^m$ является коммутативной банаховой алгеброй. Пусть Φ есть некоторая подалгебра этой алгебры и Y есть пространство максимальных идеалов подалгебры Φ. В пространстве $L_p(X,\mu)$ рассмотрим множество операторов вида (2.3), где потенциалы $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m)$ принадлежат Φ.

Теорема 2.2. *Пусть X есть пространство с мерой μ, $\alpha_k : X\to X$, $k\in M$, есть измеримые отображения и мера μ инвариантна относительно всех отображений α_k.*

Для каждой подалгебры Φ из $[L_\infty(X,\mu)]^m$ и для каждого p, $1\leqslant p\leqslant+\infty$, существует такой выпуклый полунепрерывный снизу функционал $\mathbf{T}$ (зависящий от p и от Φ), определенный на множестве $PM(Y)$ вероятностных мер на пространстве Y максимальных идеалов алгебры Φ, что в пространстве $L_p(X,\mu)$ для любого оператора A вида (2.3) с потенциалом из алгебры Φ справедлив вариационный принцип:
$$\ln r(A)=\max_{\nu\in PM(Y)}\left\{\int_Y\widehat{\varphi}d\nu-\mathbf{T}(\nu)\right\},$$
где $\widehat{\varphi}\in C(Y)$ есть преобразование Гельфанда функции φ из Φ.

В качестве Φ может быть взято все пространство $[L_\infty(X,\mu)]^m$. Но тогда пространство максимальных идеалов устроено слишком сложно. Рассмотрение подпространства Φ позволяет учитывать поведение коэффициентов рассматриваемого конкретного класса операторов. В наиболее простом случае постоянных коэффициентов алгебра Φ конечномерна, ее пространство максимальных идеалов есть конечное множество M. В ситуации, описанной в теореме 2.1, мы имели $\Phi = [C(X)]^m$ и $Y = X \times M$.

3. T-энтропия меры и вариационные принципы для операторов взвешенного сдвига

Теоремы 2.1 и 2.2 утверждают только существование соответствующих функционалов $\mathbf{T}(\nu)$. Формулы (1.3)–(1.5) для операторов взвешенного сдвига, порожденных обратимыми отображениями или отображениями, являющимися сдвигами Маркова, содержат явный вид таких функционалов. Формула (1.5) показывает, что в случае сдвигов Маркова

$$\mathbf{T}(\nu) = \frac{1}{p}\int\limits_X \rho(x)d\nu - \frac{1}{p}h(\nu), \tag{3.1}$$

т. е. этот функционал выражается через энтропию меры по Колмогорову—Синаю относительно отображения α.

Заметим, что для произвольных отображений равенство (3.1) не выполнено, в частности, для обратимых отображений $\mathbf{T}(\nu) = 0$, согласно (1.3). Таким образом, функционал, сопряженный к спектральному показателю оператора взвешенного сдвига, задает некоторую *новую динамическую характеристику* меры, связанную с отображением α, отличную от энтропии.

Независимая (т. е. определяемая без использования двойственности) конструкция такого функционала, в случае произвольного отображения в разных ситуациях (компактное пространство, пространство с мерой и т. д.) была получена А. Антоневичем, В. И. Бахтиным и А. В. Лебедевым [3, 14]. По произвольному отображению α были построены такие соответствующие функционалы, что для спектрального радиуса произвольного оператора взвешенного сдвига имеет место вариационный принцип.

В случае, когда $\alpha\colon X \to X$ есть непрерывное отображение компактного топологического пространства X с определенной на нем инвариантной борелевской мерой μ, требуемый функционал, названный *T-энтропией*, задается следующим образом.

Отображение α порождает разбиение η пространства на прообразы точек:

$$\eta = \{\eta_x = \alpha^{-1}(x) : x \in X\}.$$

Пусть $(X_\eta, \Sigma_\eta, \mu_\eta)$ есть каноническое фактор-пространство исходного пространства с мерой. На каждом множестве η_x существует мера μ_x, такая, что для любой интегрируемой функции

$$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \int\limits_{X_\eta}\Bigg[\int\limits_{\alpha^{-1}(x)} f(y)d\mu_x(y)\Bigg]d\mu_\eta.$$

Оператор условного математического ожидания на пространстве $C(X)$ определяется формулой

$$[E(a)](x) = \int\limits_{\alpha^{-1}(x)} d\mu_x(y).$$

Сопряженный к нему оператор E^* действует в сопряженном пространстве $C(X)^*$. Из положительности оператора E следует, что сопряженный оператор E^* переводит меры в меры.

Конечное борелевское разбиение $\mathbf{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ пространства X будем называть *ν-собственным*, если каждый элемент D_i имеет непустую внутренность и мера ν его границы равна нулю.

Определение 3.1. *T-энтропией* инвариантной меры ν относительно заданного оператора E условного математического ожидания назовем число

$$\tau_\alpha(\nu) = \inf_{n,\mathbb{D}} \frac{\tau(n,\nu,\mathbf{D})}{n},$$

где $\mathbb{D}$ есть множество ν-собственных разбиений пространства X, а

$$\tau(n,\nu,\mathbf{D}) = \sup_{m\in PM(X)} \sum_{D\in\mathbf{D}} \nu(D)\ln\frac{(E^{*n}m)(D)}{\nu(D)}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть X есть компактное топологическое пространство, $\alpha : X \to X$ — непрерывное отображение и мера μ инвариантна. В пространстве $L_p(X,\mu)$ для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига $Au(x) = a(x)u(\alpha(x))$ имеет место равенство*

$$\ln r(A) = \max_{\nu \in PM_\alpha} \left\{ \int\limits_X \ln |a(x)| d\nu + \frac{1}{p}\tau_\alpha(\nu) \right\}.$$

Заметим, что теорема 3.1 указывает вид зависимости функционала, сопряженного по Лежандру к спектральному показателю, от индекса p рассматриваемого пространства $L_p(X,\mu)$:

$$\mathbf{T}_p(\nu) = \frac{1}{p}\mathbf{T}_1(\nu).$$

Таким образом, для произвольных отображений введенная новая динамическая характеристика мер отражает спектральные свойства соответствующих операторов взвешенного сдвига, в отличие от классической энтропии, которая связана со спектральным радиусом только для специальных классов отображений.

Чтобы пояснить отличие T-энтропии от классической энтропии, проанализируем выражение (3.2). Представим его в виде

$$\tau(n,\nu,\mathbf{D}) = \sup_{m \in PM(X)} \left[\sum_{D \in \mathbf{D}} \nu(D) \ln((E^{*n}m)(D)) - \sum_{D \in \mathbf{D}} \nu(D) \ln \nu(D) \right]. \tag{3.3}$$

Для заданного разбиения $\mathbf{D}$ рассмотрим функционал на множестве $PM(X)$, заданный формулой

$$f_\nu(m) = \sum_{D \in \mathbf{D}} \nu(D) \ln m(D).$$

Как известно, наибольшее значение этот функционал принимает на мере ν:

$$\max_{m \in PM(X)} f_\nu(m) = \sum_{D \in \mathbf{D}} \nu(D) \ln \nu(D) = f_\nu(\nu).$$

Первое слагаемое из (3.3) можем представить в виде

$$\sup_{m \in PM(X)} \sum_{D \in \mathbf{D}} \nu(D) \ln((E^{*n}m)(D)) = \sup_{m \in E^{*n}(PM(X))} f_\nu(m),$$

откуда

$$\tau(n,\nu,\mathbf{D}) = \sup_{m \in E^{*n}(PM(X))} f_\nu(m) - \sup_{m \in PM(X)} f_\nu(m). \tag{3.4}$$

Если оператор E^* сюръективен (что выполнено в случае обратимого и в случае инъективного отображения α), то оба выражения, входящие в (3.4), совпадают, откуда $\tau_\alpha(\nu) = 0$ для всех инвариантных мер ν. Отсюда получаем, в частности, формулу (1.3) для обратимых и инъективных отображений.

Если оператор E^* не является сюръективным и $\nu \notin E^{*n}(PM(X))$ для достаточно больших n, то из (3.4) получаем, что $\tau(n,\nu,\mathbf{D}) < 0$ и эту величину можно рассматривать как численную характеристику отдаленности меры ν от образа оператора E^{*n}.

Таким образом, T-энтропия через функционал $f_\nu(m)$ характеризует то, насколько быстро при $n \to \infty$ множества $E^{*n}(PM(X))$ удаляются от меры ν, т. е. насколько быстро убывают образы множества $PM(X)$ при действии отображений E^{*n}. Так как несюръективность отображений E^{*n} является следствием неинъективности α, из сказанного следует, что T-энтропия меры ν представляет собой численную характеристику степени необратимости отображения α, порожденную мерой ν.

Как известно, классическая энтропия меры представляет собой численную характеристику того, насколько сильно отображение α «перемешивает» точки пространства X (см. [8, 9]), т. е. совсем другое свойство. В частности, обратимое отображение может иметь ненулевую энтропию.

Таким образом, энтропия и T-энтропия меры ν описывают два различных свойства отображения α. С этой точки зрения становится понятным, что случай сдвигов Маркова является особым и исключительным — для таких отображений указанные две характеристики тесно связаны.

4. Показатель типичности меры и вариационные принципы

В случае многочленных функциональных операторов функционал, сопряженный по Лежандру к спектральному показателю, зависит только от заданного набора отображений α_k (и рассматриваемого функционального пространства) и является некоторой динамической характеристикой рассматриваемого набора отображений. Возникает естественный вопрос: какие свойства отображений α_k отражает такой *новый динамический инвариант* и как его можно определить независимо от операторов, непосредственно по отображениям α_k.

В данном разделе вводится понятие *показателя типичности вероятностной меры* относительно процесса случайных блужданий, порожденного заданными отображениями. Основным результатом является утверждение, что это есть функционал, преобразованием Лежандра которого является спектральный показатель в случае операторов в пространстве $C(X)$ и, при некоторых дополнительных условиях, в пространствах $L_p(X,\mu)$.

Пусть X есть компактное пространство и заданы отображения $\alpha_k\colon X \to X$, $k \in M$, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Рассмотрим следующий процесс случайных блужданий на множестве X: на каждом шаге точка $x \in X$ переходит в одну из точек $\alpha_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, m$; вероятность каждого из таких переходов есть $\dfrac{1}{m}$. За n шагов получаем m^n различных траекторий, выходящих из точки x. Каждая траектория задается элементом $\xi \in M^n$ и имеет вид

$$x, \alpha_{\xi_1}(x), [\alpha_{\xi_1} \circ \alpha_{\xi_2}](x), \ldots, [\alpha_{\xi_1} \circ \ldots \circ \alpha_{\xi_n}](x).$$

Обозначим через δ_x такую меру, сосредоточенную в точке $x \in X$, что мера этой точки есть 1. Элемент $\xi \in M^n$ и точка x задают так называемую *эмпирическую меру*

$$\nu_{\xi,x} = \frac{1}{n}[\delta_x + \delta_{x_{1,\xi}} + \delta_{x_{2,\xi}} + \ldots + \delta_{x_{n-1,\xi}}],$$

где $x_{i,\xi} = \alpha_{\xi_1} \circ \ldots \circ \alpha_{\xi_i}(x)$. Такая мера сосредоточена на множестве точек траектории точки x, соответствующей элементу ξ. Среди точек траектории могут быть совпадающие, поэтому эмпирическая мера конкретной точки x есть число вида k/n, где $k = k(x)$ есть количество точек траектории, совпадающих с x. В другой терминологии эмпирическая мера точки x есть «относительное время пребывания» траектории в данной точке.

Заметим, что все эмпирические меры положительные и нормированные.

Пусть ν есть произвольная мера на X и W — ее окрестность в $*$-слабой топологии. Обозначим через $N(n, W, x)$ количество элементов $\xi \in M^n$, для которых $\nu_{\xi,x} \in W$. Тогда величина $\dfrac{N(n, \nu, W, x)}{m^n}$ есть вероятность того, что эмпирическая мера, порожденная траекторией точки x, принадлежит окрестности W меры ν, т. е. характеризует типичность попадания эмпирической меры в окрестность W для данного процесса случайных блужданий.

Определение 4.1. *Показателем типичности скалярной меры* ν относительно набора отображений α_k, $k \in M$, будем называть функционал $\tau(\nu)$ на $PM(X)$, заданный выражением

$$\tau(\nu) = \inf_{\{W\}} \limsup_{n} \frac{1}{n} \sup_{x} \ln N(n, W, x), \tag{4.1}$$

где точная нижняя грань вычисляется по множеству $\{W\}$ всех окрестностей меры ν.

В более общем случае векторных мер требуются небольшие изменения приведенной конструкции. Рассмотрим *расширенный процесс блужданий* на пространстве $Y = X \times M$. Для этого зададим отображения $\beta_k\colon Y \to Y$ формулой $\beta_k(x, j) = (\alpha_k(x), k)$ и рассмотрим процесс случайных блужданий на Y, порожденный этими отображениями.

Векторную меру на X будем рассматривать как скалярную меру на пространстве Y.

Определение 4.2. *Показателем типичности векторной меры* будем называть ее показатель типичности, как скалярной меры на Y относительного набора отображений β_k.

Лемма 4.1. *Функционал $\tau(\nu)$ полунепрерывен сверху в $*$-слабой топологии, эффективная область функционала $\tau(\nu)$ принадлежит $PM(Y)$ и, более точно, принадлежит множеству предельных точек множества всех эмпирических мер. На эффективной области выполнено неравенство $0 \leqslant \tau(\nu) \leqslant \ln m$.*

Следующая теорема утверждает, что указанным выше способом задан один из искомых функционалов.

Теорема 4.1. *Пусть X есть компактное топологическое пространство, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — произвольные непрерывные отображения пространства X, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — непрерывная вектор-функция на X и $\tau(\nu)$ есть определенный выше показатель типичности векторной меры на X.*

Тогда для спектрального показателя оператора

$$A = \sum_{k=1}^{N} e_k^{\varphi} T_{\alpha_k} \tag{4.2}$$

в пространстве $C(X)$ справедлив вариационный принцип:

$$\lambda(\varphi) = \max_{\nu \in PM(Y)} \left\{ \int_X \varphi d\nu + \tau(\nu) \right\}. \tag{4.3}$$

В случае пространств $L_p(X, \mu)$ ситуация сложнее и аналогичное равенство выполнено только при дополнительных условиях.

Пусть отображения α_k обратимы и G есть группа, порожденная этими отображениями. Пусть $\Omega = \{g_1, \dots, g_m\}$ — некоторое конечное множество ее элементов. Через $|\Omega|$ будем обозначать число элементов множества Ω. Через Ω_n обозначим множество элементов из G, представимых в виде произведения n элементов, принадлежащих множеству Ω (среди этих элементов могут быть и совпадающие). Заметим, что число $|\Omega_n|$ зависит от соотношений между элементами множества Ω и при $n > 2$ имеем $|\Omega_n| < |\Omega|^n$. Множество Ω будем называть *субэкспоненциальным*, если

$$\lim \frac{1}{n} \ln |\Omega_n| = 0.$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 *и задана мера μ на X, инвариантная относительно всех отображений α_k, носителем которой является все пространство X.*

Если отображения α_k обратимы, а множество $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ субэкспоненциально, то в каждом из пространств $L_p(X, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, спектральный радиус оператора вида (4.2) *совпадает со спектральным радиусом в пространстве $C(X)$ и, следовательно, для спектрального показателя справедлив вариационный принцип* (4.3).

Конструкция показателя типичности естественно обобщается на ситуацию, рассмотренную в теореме 2.2. Основой такого обобщения является следующий факт: если алгебра потенциалов Φ *инвариантна* относительно обратимого отображения α_k (из того, что $\overline{a} \in \Phi$ следует, что $T_{\alpha_k}(\overline{a}) \in \Phi$ и $T_{\alpha_k}^{-1}(\overline{a}) \in \Phi$), то α_k порождает гомеоморфизм γ_k пространства Y максимальных идеалов алгебры Φ.

Теорема 4.3. *Пусть X есть пространство с мерой μ, $\alpha_k \colon X \to X$ суть измеримые отображения, $k = 1, 2, \dots, N$, мера μ инвариантна относительно всех отображений α_k и пусть Φ есть подалгебра алгебры $[L_\infty(X, \mu)]^N$, инвариантная относительно всех отображений α_k.*

Если отображения α_k обратимы, а множество $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ субэкспоненциально, то для любого оператора в пространстве $L_p(X, \mu)$ вида (4.2), *где потенциал $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ принадлежит Φ, справедлив следующий вариационный принцип*:

$$\lambda(\varphi) = \ln r(A) = \max_{\nu \in PM(Y)} \left\{ \int_Y \widehat{\varphi} d\nu + \tau(\nu) \right\},$$

где Y есть пространство максимальных идеалов алгебры Φ, $\widehat{\varphi} \in C(Y)$ — преобразование Гельфанда вектор-функции φ, а $\tau(\nu)$ есть показатель типичности меры на $PM(Y)$ относительно набора отображений γ_k, $k \in M$.

В частности, при выполнении условий теоремы спектральные радиусы операторов, заданных одной и той же формулой в пространствах $L_p(X, \mu)$ с разными p совпадают.

Поясним, почему условия на систему отображений α_k, наложенные в теоремах 4.2 и 4.3, существенны.

Существенность условия обратимости отображений видна уже в случае операторов взвешенного сдвига: согласно теореме 3.1 в случае необратимых отображений спектральный радиус оператора в пространстве L_p зависит от p; в случае обратимых, согласно формуле (1.3), спектральный радиус не зависит от p, что согласуется с теоремой 4.2.

Существенность условия субэкспоненциальности менее очевидна. Она следует, например, из тонких результатов Х. Кэстена [20] и Р. И. Григорчука [6]. В связи с исследованием случайных блужданий на группах в этих работах рассматривался вопрос о спектральном радиусе операторов вида

$$Au(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k[u(h_k x) + u(h_k^{-1} x)], \ x \in G, \tag{4.4}$$

действующих в пространствах $l_2(G)$, где G — дискретная группа с образующими $h_1, \ldots, h_m$. Заметим, что это весьма частный случай операторов вида (1.1) — здесь все коэффициенты постоянны, а отображения α_k имеют специальный вид: $\alpha_k(x) = h_k x$, $x \in G$. Однако и в таком случае задача не тривиальна и спектральный радиус вычислен только при еще более сильных предположениях. В частности, в [20] получен следующий результат.

Предложение 4.1. *Пусть G — дискретная свободная группа с образующими $h_1, \ldots, h_m$, и все коэффициенты совпадают, а именно $a_k = \dfrac{1}{2m}$. Тогда для оператора A вида* (4.4) *выполнено*

$$r(A) = \frac{\sqrt{2m-1}}{m}.$$

При $m \geqslant 2$ свободная группа с m образующими не является субэкспоненциальной. Покажем, что в этом случае для операторов вида (4.4) утверждение теоремы 4.3 не выполнено. В пространстве $L_\infty(X, \mu)$ для функциональных операторов с постоянными положительными коэффициентами, в частности, для операторов вида (4.4) в пространстве $l_\infty(G)$, легко проверяется равенство

$$r(A) = \sum a_k, \tag{4.5}$$

откуда показатель типичности находится в явном виде (см п. 5.2). Если бы выполнялось утверждение теоремы 4.3, то в пространстве l_2 оператор (4.4) должен иметь тот же спектральный радиус. Однако в пространстве l_2 равенство (4.5) не выполнено. Действительно, при $m \geqslant 2$ и $a_k = \dfrac{1}{2m}$, для оператора (4.4), согласно предложению 4.1, имеем $r(A) = \dfrac{\sqrt{2m-1}}{m} < \sum a_k = 1$.

Сравним построенный функционал $\tau(\nu)$ с функционалом $\lambda(\varphi)^*$. Из предложения 2.1 и вариационного принципа следует, что $\lambda = (-\tau)^*$. Если бы функционал $-\tau$ был полунепрерывным снизу и выпуклым вниз, то из этого следовало бы, что $\lambda^* = -\tau$. Однако построенный функционал полунепрерывен снизу, но в общем случае не является выпуклым. Таким образом, в общем случае можно лишь утверждать, что функционал, сопряженный по Лежандру к спектральному показателю, является выпуклой оболочкой функционала $-\tau(\nu)$. Заметим, что в ряде частных случаев имеет место равенство $\lambda^* = -\tau$.

5. Показатель типичности меры для конкретных примеров

Основные сложности при попытках непосредственного подсчета показателя типичности $\tau(\nu)$ связаны с вычислением чисел $N(n, W, \nu, x)$. Ниже приведены некоторые примеры, когда за счет простого поведения траекторий или простого вида коэффициентов функционал $\tau(\nu)$ удается вычислить в явном виде.

5.1. Рассмотрим в пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$, состоящем из двусторонних числовых последовательностей, операторы вида

$$Au(x) = a_0(k)u(k) + a_1(k)u(k+1), \ k \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

где коэффициенты являются положительными последовательностями, имеющими на $\pm\infty$ пределы $a_j(\pm\infty)$.

Здесь $X = \mathbb{Z}$ и соответствующие отображения есть $\alpha_0(x) = x$ и $\alpha_0(x) = x + 1$. Множество Φ соответствующих потенциалов $\varphi_j(k) = \ln a_j(k)$, $j \in M$, где $M = \{0, 1\}$, снабженное sup-нормой, является алгеброй вещественных последовательностей двумерных векторов, имеющих на бесконечности пределы. Эта алгебра изоморфна алгебре непрерывных вектор-функций на пространстве $\widetilde{X} = \mathbb{Z}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. Заметим, что эту алгебру также можно рассматривать как алгебру непрерывных скалярных функций на пространстве $Y = \widetilde{X} \times M$.

Любая вероятностная мера на пространстве Yзадается с помощью двух неотрицательных последовательностей $\nu_j(k), j = 0, 1,\ k \in \widetilde{X}$, таких, что

$$\sum_{k\in\widetilde{X}} \nu_0(k) + \sum_{k\in\widetilde{X}} \nu_1(k) = 1.$$

Заметим, что в рассматривамые суммы входят слагаемые, соответствующие точкам $k = \pm\infty$.

Теорема 5.1. *Для операторов вида* (5.1) *с потенциалами из алгебры* $\Phi = C(Y)$, *где* $Y = \widetilde{X} \times M$, *имеем равенство* $\lambda^* = -\tau$, *эффективная область* $D(\lambda^*)$ *функционала* $\lambda^*(\nu)$, *сопряженного к спектральному показателю, состоит из таких вероятностных мер на* Y, *для которых* $\nu(x, 1) = 0$ *при* $x \in \mathbb{Z}$, *и на векторной вероятностной мере* $\nu = (\nu_0, \nu_1) \in D(\lambda^*)$ *этот функционал задается выражением*

$$\begin{aligned}\lambda^*(\nu) = \nu(+\infty)\Big[-\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} \ln\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} - \frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)} \ln\frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\Big] - \\ -\nu(-\infty)\Big[\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} \ln\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} - \frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)} \ln\frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\Big],\end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\nu(\pm\infty) = \nu_0(\pm\infty) + \nu_1(\pm\infty)$.

Для спектрального радиуса оператора A *в каждом из пространств* l_p *имеет место формула*

$$r(A) = \max\{a_0(k), k \in Z;\ a_0(+\infty) + a_1(+\infty);\ a_0(-\infty) + a_1(-\infty)\}. \tag{5.3}$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты a_0 и a_1 в записи оператора неравноправны — при их перестановке спектральный радиус оператора может измениться. Вместе с тем выражение (5.2) инвариантно относительно такой перестановки. Однако здесь нет противоречия — несимметричность формулы спектрального радиуса следует из несимметричности эффективной области.

Рассматриваемые достаточно простые операторы вида (5.1) допускают содержательную интерпретацию — они могут моделировать процесс размножения организмов в бесконечном потоке, (например, реке) при следующем предположении: на каждом временном отрезке особи, находящиеся в точке k, либо закрепляется в этой точке и размножаются с коэффициентом $a_0(k)$, либо сносятся вниз по течению, для плывущих особей имеет место другой коэффициент размножения $a_1(k)$.

Можно интерпретировать коэффициенты и по другому. Обозначим $a(k) = a_0(k) + a_1(k)$, $p_j(k) = a_j(k)/a(k)$. Тогда $p_0(k)$ можно интерпретировать как вероятность того, что частица, находящаяся в точке k, закрепится на месте, а $p_1(k)$ — как вероятность сноса частицы. При такой интерпретации $a(k)$ есть коэффициент размножения в точке k, одинаковый для закрепленных и для движущихся частиц.

Что дает исследование операторов (5.1) с точки зрения описания указанного процесса? Выражение для спектрального радиуса задает асимптотическое поведение общего числа особей рассматриваемой популяции. При этом возникает три случая, в зависимости от того, какая из величин, входящих в правую часть формулы (5.3), является максимальной. Дополнительный анализ оператора показывает, что в каждом из этих случаев имеем качественно разное поведение процесса.

Например, пусть $r(A) = a_0(k_0)$, причем $a_0(k_0) > a_0(k)$ при $k \neq k_0,\ \ a_0(k_0) > a_0(\pm\infty) + a_1(\pm\infty)$. Приведенные условия означают, что в точке k_0 коэффициент размножения $a_0(k_0)$ достаточно велик.

В рассматриваемом случае число $a_0(k_0)$ является простым изолированным собственным значением оператора, соответствующий нормированный положительный собственный вектор W может быть выписан в явном виде. Число $a_0(k_0)$ является также простым изолированным собственным значением для сопряженного оператора, соответствующий собственный вектор V также может быть выписан в явном виде. Любой элемент $u \in l_p$ допускает единственное разложение вида $u = cW + Z$, где $c = c(u)$ — постоянная, а последовательность Z удовлетворяет условию

$$\sum_k Z(k)V(k) = 0.$$

Поэтому при выполнении условия $c(u) \neq 0$ имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \|A^n u\|^{1/n} = r(A) = a_0(k_0).$$

Это значит, что в данном примере условие типичности начального распределения u, о котором говорилось во введении, есть условие $c(u) \neq 0$; это условие выполнено для любого неотрицательного ненулевого u, и, следовательно, при наложенных условиях скорость роста популяции определяется числом $a_0(k_0)$. Более точно, в рассматриваемом случае имеем

$$\|A^n u\|_{l_1} = c(u)(a_0(k_0))^n + o((a_0(k_0))^n).$$

Кроме того, имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\|A^n u\|} A^n u = W, \tag{5.4}$$

т. е. предельное распределение частиц задается указанным собственным вектором W.

Заметим, что в рассматриваемом случае свойства оператора A полностью аналогичны свойствам положительных матриц, описанным в теореме Перрона.

В других случаях получаем качественно другое предельное распределение. Например, если $a_0(+\infty) + a_1(+\infty) > a_0(-\infty) + a_1(-\infty)$ и $a_0(+\infty) + a_1(+\infty) > a_0(k)$ для любого k, то предельное распределение есть мера, сосредоточенная в точке $+\infty$.

5.2. В случае, когда коэффициенты a_k постоянны и положительны, подпространство $\Phi \subset [L_\infty(X,\mu)]^m$ состоит из постоянных вектор-функций, оно является подалгеброй, пространство максимальных идеалов которой содержит ровно m точек и естественно отождествляется с множеством индексов M. Любая вероятностная мера ν на конечном множестве M задается неотрицательным вектором $\nu(k)$, таким, что $\sum \nu(k) = 1$.

Теорема 5.2. *Для любых отображений α_k в случае постоянных положительных коэффициентов a_k показатель типичности меры задается формулой*

$$\tau(\nu) = \sum_0^m \nu_k \ln \nu_k.$$

Для любого оператора вида (1.1) *с постоянными положительными коэффициентами в пространстве $C(X)$ имеем*

$$r(A) = \sum a_k. \tag{5.5}$$

В пространствах $L_p(X,\mu)$ равенство (5.5) *имеет место при выполнении условия обратимости отображений α_k и субэкспоненциальности множества этих отображений.*

Отметим, что из предложения 4.1 следует, что равенство (5.5) для операторов с постоянными положительными коэффициентами, которое на первый взгляд может показаться очевидным, в пространствах $L_p(X,\mu)$ в общем случае не выполнено.

Обратим внимание на то, что выражение для показателя типичности совпадает с энтропией меры ν и уже в этом простейшем случае проявляется связь с теорией энтропии.

5.3. Перейдем к рассмотрению примеров с более сложным поведением траекторий. В пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ частным видом рассматриваемых операторов являются операторы вида

$$Au(x) = a(k)[u(k-1) + u(k+1)], \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

Оператор вида (5.6) с произвольным коэффициентом $a(k)$ оказывается достаточно сложным и многочисленные результаты по исследованию таких операторов не содержат простых явных формул, задающих их спектральный радиус. При попытке построения в явном виде показателя типичности мер для таких операторов также не удается получить простой явный ответ. Это связано с тем, что при заданных отображениях траектория может многократно возвращаться в точку и подсчет числа траекторий, порождающих фиксированную эмпирическую меру, сводится к тонким и не разработанным вопросам теории случайных блужданий.

Классические результаты теории случайных блужданий, с точки зрения их приложения к исследованию функциональных операторов вида (5.6), связаны с коэффициентами специального вида и позволяют вычислить показатель типичности меры только при дополнительных очень жестких предположениях о поведении коэффициентов.

Приведем один такой пример. Рассмотрим множество операторов вида (5.6), у которых коэффициенты a положительны и почти постоянны в следующем смысле — удовлетворяют условию

$$a(k) = a(1)$$

при $k \neq 0$.

Заметим, что с точки зрения исследования процессов случайных блужданий с размножением, которые описываются функциональными операторами, даже такой специальный случай допускает содержательную интерпретацию. При $a(0) = a(1)$ оператор описывает процессы размножения частиц в однородной среде. Это оператор с постоянными коэффициентами, который просто исследуется — его спектр есть отрезок $[-2a(1), 2a(1)]$, $r(A) = 2a(1)$. Случай, когда $a(0) > a(1)$ интерпретируется как появление дополнительного ресурса, приводящего к более интенсивному размножению частиц в точке $x = 0$. Случай, когда $a(0) < a(1)$ интерпретируется как появление неблагоприятного фактора, подавляющего размножение частиц в точке $x = 0$. Изменение спектрального радиуса при изменении $a(0)$ описывает реакцию системы на указанные изменения среды.

Пространство потенциалов Φ, соответствующих рассматриваемым почти постоянным коэффициентам, двумерно. Выберем в нем нормированный базис e_0, e_1, где $e_0(k) = 1$ при $k = 0$ и $e_0(k) = 0$ при $k \neq 0$ и $e_1(k) = 1 - e_0(k)$. Тогда потенциал $\varphi(k) = \ln a(k)$ представляется в виде $\varphi = se_0 + te_1$, где $s = \ln a(0), t = \ln a(1)$, а любой положительный нормированный функционал на Φ представляется в виде $\langle \nu, \varphi \rangle = qs + (1-q)\ t,\ 0 \leqslant q \leqslant 1$. Таким образом, в рассматриваемом случае множество $PM(Y)$ можем отождествлять с отрезком $[0,1]$, а функционал $\tau(\nu)$ можем считать функцией $\tau(q)$, определенной на этом отрезке. Эту функцию удается найти в явном виде.

Теорема 5.3. *Для операторов вида* (5.6) *где потенциалы принадлежат введенному выше пространству* Φ, *имеем равенство* $\lambda^* = -\tau$, *эффективная область для функционала* $\tau(q)$ *есть отрезок* $[0, 1/2] \subset [0,1] = PM(Y)$ *и на этой области*

$$\tau(q) = \ln \frac{2^{\frac{1}{2}+q}(1-q)^{1-q}}{(\frac{1}{2}-q)^{\frac{1}{2}-q}}.$$

Отсюда для спектрального радиуса оператора A *получаем формулу*

$$r(A) = \begin{cases} 2a(0)\sqrt{\dfrac{a(1)}{2a(0)-a(1)}}, & \text{если } a(0) \geqslant a(1), \\ 2a(1), & \text{если } a(0) \leqslant a(1). \end{cases}$$

Доказательство сформулированной теоремы базируется на следующем классическом результате теории случайных блужданий (см. [12]): при случайном блуждании частицы по $\mathbb{Z}$, начинающемся в точке 0, вероятность r возвращений частицы в точку 0 после $2n$ шагов есть $2^{r-2n}C_{2n-r}^{n}$.

Применим полученный результат к исследованию процессов случайных блужданий с размножением, описываемых рассматриваемыми операторами. Из теоремы 5.3 следует, что процесс слабо реагирует на появление неблагоприятного фактора — при $a(0) < a(1)$ спектральный радиус не зависит от $a(0)$. При появлении дополнительного ресурса реакция системы более существенна — при $a(0) > a(1)$ спектральный радиус возрастает с ростом $a(0)$.

Подобно примеру 5.1, для процессов, описываемых рассматриваемыми операторами, можно найти предельные распределения, причем они являются качественно различными при $a(0) > a(1)$ и при $a(0) \leqslant a(1)$. В частности, при $a(0) > a(1)$ имеем

$$\sigma(A) = [-2a(1), 2a(1)] \bigcup \left\{ 2a(0)\sqrt{\frac{a(1)}{2a(0)-a(1)}} \right\},$$

причем число

$$2a(0)\sqrt{\frac{a(1)}{2a(0)-a(1)}}$$

является простым изолированным собственным значением, соответствующий положительный нормированный собственный вектор W может быть выписан в явном виде и он задает предельное распределение — выполнено равенство (5.6).

При $a(0) \leqslant a(1)$ имеем $\sigma(A) = [-2a(1), 2a(1)]$, предельное распределение в этом случае имеет другой вид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Условия обратимости операторов с выпуклой рационально независимой системой сдвигов// ДАН СССР. — 1981. — *256*, № 1. — С. 11–14.
2. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
3. *Антоневич А. Б., Бахтин В. И., Лебедев А. В.* Вариационный принцип для спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига в лебеговских пространствах// Тр. Института математики НАН Беларуси. — 2000. — *5*. — С. 13–17.
4. *Антоневич А. Б., Зайковский К.* Вариационный принцип для спектрального радиуса модельного функционального оператора// Тр. Института математики НАН Беларуси. — 2004. — *12*, № 2. — С. 18–25.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
6. *Григорчук Р. И.* Симметрические случайные блуждания на дискретных группах. В сб. «Многокомпонентные случайные системы». — М.: Наука, 1978. — С. 132–152.
7. *Дорогов В. И., Чистяков В. П.* Вероятностные модели превращения частиц. — М.: Наука, 1988.
8. *Каток А. Б., Хассельблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
9. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980.
10. *Латушкин Ю. Д., Степин А. М.* Операторы взвешенного сдвига на топологической марковской цепи// Функц. анализ и его прилож. — 1988. — *22*, № 4. — С. 86–87.
11. *Маслов В. П.* Статистический ансамбль и квантование термодинамики// Мат. заметки. — 2002. — *71*, No 4. — С. 558–566.
12. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. — М.: Мир, 1984.
13. *Abramovich Y. A., Arenson E. L., Kitover A. K.* Banach $C(K)$-modules and operators preserving disjointness. — Harlow–Essex: Longman Scientific and Technical, 1992.
14. *Antonevich A., Bakhtin V., Lebedev A.* Thermodynamics and spectral radius// Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2001. — *4*, № 4. — С. 318–321.
15. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^*-theory. — Harlow: Longman, 1994.
16. *Chen D. R.* Spectral radii and eigenvalues of subdivision operator// Proc. Am. Math. Soc. — 2004. — *132*. — С. 1113–1123.
17. *Chicone C., Latushkin Yu.* Evolution semigroup in dynamical systems and differential equations. — Providence, RI: AMS, 1999.
18. *Danes J.* On the local spectral radius// Cas. Pest. Mat. — 1987. — *112*. — С. 177–187.
19. *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. — Amsterdam: North-Holland Publ., 1976.
20. *Kesten H.* Symmetric random walks on groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1959. — *92*. — С. 336–354.
21. *Kravchenko V. G., Litvinchuk G. S.* Introduction to the theory of singular integral operators with shift. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
22. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional differential equations and applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.

Анатолий Борисович Антоневич
Белорусский государственный университет, Университет в Белостоке
E-mail: `antonevich@bsu.by`