Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=P(t)x, \quad t\in T, \tag{1}$$

с локально-интегрируемыми на промежутке $T=[0, +\infty[$ коэффициентами. Под *решением системы* (1), как обычно, будем понимать абсолютно непрерывную векторную функцию, производная которой почти всюду удовлетворяет системе (1). Обозначим через S невырожденную абсолютно интегрируемую матрицу, определенную на промежутке T. Совокупность $\{S\}$ всех функций S образует группу относительно умножения матриц. Одной из подгрупп указанной группы является семейство $\mathfrak{S}_0$ всех матриц S таких, что для каждой функции S существует свое τ, для которого $S(t)=E$ при $t\geqslant\tau$, где E — единичная матрица. Далее рассматриваем только такие подгруппы $\{S\}$, которые содержат $\mathfrak{S}_0$, что соответствует асимптотическому характеру нашего исследования. Среди подгрупп $\{S\}$ выделим две подгруппы: $\mathfrak{S}$ — группу Ляпунова (группу матриц Ляпунова)

$$\mathfrak{S}=\left\{S \mid \sup_T (\|S(t)\|+\|S^{-1}(t)\|)<+\infty\right\},$$

норму матрицы считаем индуцированной некоторой зафиксированной нормой вектора, например евклидовой, что не нарушает общности, так как с точки зрения последующего все нормы эквивалентны; $\mathfrak{S}^*$ — обобщенную группу Ляпунова, т. е.

$$\mathfrak{S}^*=\left\{S \mid \overline{\lim_{t\to+\infty}} (\ln\|S(t)\|+\ln\|S^{-1}(t)\|/t\leqslant 0\right\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{S}_0\subset\mathfrak{S}\subset\mathfrak{S}^*$.

Наряду с системой (1) рассматриваем систему того же типа

$$\dot{y}=Q(t)y, \quad t\in T. \tag{2}$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{S}}$ — подгруппа $\{S\}$. Системы (1) и (2) назовем $\tilde{\mathfrak{S}}$-*эквивалентными*, если существует преобразование $x=Sy$, $S\in\tilde{\mathfrak{S}}$, переводящее (1) в (2). При $\tilde{\mathfrak{S}}=\mathfrak{S}$ говорим об *асимптотической эквивалентности*, а при $\tilde{\mathfrak{S}}=\mathfrak{S}^*$ — об *обобщенной асимптотической эквивалентности* систем. Множество систем (1) распадается на классы $\tilde{\mathfrak{S}}$-эквивалентных систем. Последующее исследование идет по пути решения двух основных задач: а) описание классов $\tilde{\mathfrak{S}}$-эквивалентных систем, в частности решение проблемы различения, т. е. выявления всех систем (2), которые $\tilde{\mathfrak{S}}$-эквивалентны данной системе (1), и выделение в каждом классе систем-представителей (систем в канонической форме); б) установление структурных свойств систем-представителей (а вместе с тем и свойств всех систем данного класса).

В простейшем случае $\mathfrak{S}_0$-эквивалентности решение проблемы различения очевидно: системы (1) и (2) $\mathfrak{S}_0$-эквивалентны в том и только в том случае, когда существует τ такое, что $P(t)=Q(t)$ для всех $t \geqslant \tau$. *При решении проблемы различения* в случае асимптотической (обобщенно асимптотической) эквивалентности естественно пользоваться следующим критерием: для асимптотической (обобщенно асимптотической) эквивалентности систем (1) и (2) необходимо и достаточно, чтобы для любой фундаментальной матрицы X решений системы (1) существовала фундаментальная матрица Y решений системы (2) такая, что матрица XY^{-1} принадлежит $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}^*$).

Известно (см., например, [1, с. 95]), что в силу теоремы Перрона о триангуляции, в качестве систем-представителей классов асимптотически эквивалентных систем могут быть использованы треугольные системы. Кроме того, если коэффициенты системы (1) ограничены почти всюду, т. е.

$$\sup_T{}^* |p_{ij}(t)| \leqslant a, \quad P=(p_{ij}),$$

то любая система (1) с помощью преобразования Ляпунова может *быть приведена к кусочно-постоянной треугольной системе*, чьи коэффициенты принимают только два значения a, $-a$ и последовательность длин промежутков постоянства ограничена снизу некоторым положительным числом, величина которого зависит от a [2, 3]. При этом асимптотические свойства системы-представителя зависят не столько от разрывности ее коэффициентов, сколько от распределения точек разрыва, например наличие у системы бесконечно большой или неограниченной последовательности длин промежутков постоянства во многих ситуациях позволяет эффективно исследовать ее асимптотические характеристики [4—6]. Однако если функцию P задать следующим образом: на каждом из промежутков $[t_n+k,\ t_n+k+1[$, $t_1=0$, $t_{n+1}=t_n+2^{n+1}$, $0 \leqslant k \leqslant 2^{n+1}-1$, положим $P(t)=p_{nk1}+\ldots+p_{nkn}$ для $t \in [t_{n-1}+k,\ t_{n-1}+k+1[$, где при $n \geqslant 2$

$$p_{nki}=\begin{cases}\ln^2(\alpha_{nki}+1)-\ln^2\alpha_{nki}, & \text{если } \alpha_{nki} \neq 0,\\ 0, & \text{если } \alpha_{nki}=0,\end{cases}$$

а

$$\alpha_{nki}=\begin{cases} r(k;2^{i+2})-2^{i+1}, & \text{если } r(k;2^{i+2}) \geqslant 2^{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant n-1,\\ 2^{i+1}-1-r(k;2^{i+2}), & \text{если } r(k;2^{i+2}) < 2^{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant n-1,\\ k, & \text{если } i=n\end{cases}$$

(через $r(k;\ m)$ обозначен остаток от деления k на m), то скалярное уравнение (1) не приводится преобразованием Ляпунова к кусочно-постоянному уравнению с неограниченно возрастающими последовательностями длин промежутков постоянства [7]. Тем не менее если вместо группы Ляпунова использовать обобщенную группу Ляпунова, то любая система (1) обобщенно асимптотически эквивалентна кусочно-постоянной системе, коэффициенты которой имеют разрывы разве лишь в точках последовательности (t_n), удовлетворяющей следующим свойствам [8]:

$$(t_{n+1}-t_n)\uparrow+\infty, \quad (t_{n+1}/t_n)\to 1, \quad n\to\infty.$$

При решении указанных выше задач весьма полезен метод инвариантов. Рассмотрим множество M (чаще всего — множества R, R^n, $R^{n\times n}$) и отображение i множества решений системы (1) в M. Будем говорить, что отображение i определяет *асимптотический инвариант* системы (1), если $i(x)=i(Sx)$ при любой функции $S \in \mathfrak{S}$. Аналогично определяются инварианты и для других групп преобразований. Наиболее известными асимптотическими инвариантами являются показатели Ляпунова решений, различные коэффициенты неправильности и т. п. С помощью инвариантов относительно заданной группы преобразований множество всех систем (1) можно разбить на попарно непересекающиеся классы так, чтобы в каждом классе оказались системы с совпадающими инвариантами. Обозначим K_α и K_β классы систем, соответствующие инвариантам α и β. Тогда пересечение их будет, очевидно, тоже некоторым классом, но уже при разбиении множества систем с помощью инвариантов $\{\alpha;\ \beta\}$; каждый элемент этого класса будет иметь инвариант, являющийся совокупностью пары инвариантов α, β. Совокупность инвариантов назовем *независимой*, если ни один из классов разбиения множества систем (1) по одному из инвариантов этой совокупности не является пересечением классов при разбиении множества систем по всевозможным объединениям других инвариантов данной совокупности. Так например, верхний и нижний показатели Ляпунова для линейных систем являются независимыми инвариантами относительно обобщенной группы Ляпунова. Как уже отмечалось, из результатов работы [2], в частности, следует, что любая локально-интегрируемая ограниченная функция может быть аппроксимирована кусочно-постоянной функцией, принимающей только два значения α, β, $\alpha \leqslant \beta$, которые будем называть *нижним* и *верхним аппроксимирующими числами* исходной функции. Таким образом, независимыми асимптотическими инвариантами системы (1) будут являться точные грани, верхняя и нижняя соответственно, множеств нижних и верхних аппроксимирующих чисел следа матрицы коэффициентов. Совокупность инвариантов назовем *полной*, если из совпадения значений всех инвариантов данной совокупности для систем (1) и (2) следует эквивалентность этих систем. Например, если рассматривать приводимые системы, то полную (независимую) совокупность асимптотических инвариантов множества таких систем образуют, как показано в [9], показатели Ляпунова решений и характеристика Сегре приведенной системы. Следовательно, в этом случае полная независимая совокупность асимптотических инвариантов состоит из конечного числа индивидуальных инвариантов (инвариантов отдельных решений) и одного коллективного (присутствие коллективного инварианта — типичная ситуация). Если же рассмотреть правильные системы, то полную независимую совокупность инвариантов относительно обобщенной группы Ляпунова образует множество значений показателей Ляпунова нормальной системы решений [10, 11]. Наличие коллективного инварианта в данном случае неявное (через привлечение нормальной системы решений).

Если для каждого класса эквивалентности относительно заданного преобразования удается указать такой канонический вид системы-представителя, чтобы в каждый класс попала только одна система указанного вида, то ее коэффициенты образуют полную систему инвариантов. Например [12], если в качестве $\mathfrak{S}$ взять группу ортогональных нормированных в нуле матриц (при этом две системы оказываются эквивалентными, если из совпадения начальных значений соответствующих решений следует совпадение евклидовых норм указанных решений), то такими системами-представителями являются треугольные системы с совпадающими почти всюду коэффициентами.

Отметим в заключение, что свойства преобразований сохранять асимптотические свойства системы являются в некотором смысле характеристическими. В частности, для обобщенного преобразования Ляпунова таким свойством оказывается правильность системы. Более точно: назовем системы (1) и (2) *экспоненциально эквивалентными*, если совпадают показатели Ляпунова у этих и у сопряженных к ним систем. Ясно, что обе экспоненциально эквивалентные системы или правильные или неправильные. Если невырожденное линейное преобразование $x=Sy$ обладает тем свойством, что любая система (с ограниченными показателями) переводится им в экспоненциально эквивалентную систему, то это преобразование *является обобщенным преобразованием Ляпунова.* Действительно, любое невырожденное линейное преобразование $x=Ly$, приводящее правильную систему (1) с нулевыми показателями к системе с нулевыми коэффициентами, является обобщенным преобразованием Ляпунова. Это непосредственно следует из того, что среди решений линейного матричного уравнения $\dot{L}=PL$, которому должна удовлетворять матрица L, имеется (см. [10, 11]) обобщенная матрица Ляпунова. Так как исходное преобразование переводит любую систему в экспоненциально эквивалентную, то, следовательно, систему с нулевыми коэффициентами оно переведет в правильную систему (2) с теми же показателями. Преобразуем теперь полученную систему опять в систему с нулевыми коэффициентами с помощью преобразования $y=Lz$. При этом матрица SL является матрицей преобразования, переводящего исходную систему саму в себя. Поскольку матрица SL должна удовлетворять линейному матричному уравнению с нулевой матрицей коэффициентов, то из принадлежности L группе $\mathfrak{S}^*$ следует, что и $S\in\mathfrak{S}^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Изобов Н. А.** Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники: Мат. анализ.— М., 1974.— Т. 12.— С. 71—146.

2. **Богданов Ю. С.** Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференц. уравнения.— 1965.— Т. 1, № 6.— С. 707—716.
3. **Мазаник С. А.** Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференц. уравнения.— 1981.— Т. 17, № 5.— С. 923—926.
4. **Былов Б. Ф., Тихонова Э. А.** О показателях некоторых линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянной матрицей второго порядка // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 3.— С. 378—389.
5. **Былов Б. Ф., Тихонова Э. А.** О стабилизации некоторых линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянной матрицей второго порядка // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 4.— С. 581—592.
6. **Мазаник С. А.** Некоторые свойства E-систем // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физика, математика и механика.— 1983.— № 2.— С. 65—67.
7. **Мазаник С. А.** Об аппроксимирующей последовательности/Ред. журн. Дифференц. уравнения.— Минск, 1984.— 32 с.— Деп. в ВИНИТИ 12.11.84, № 7239.
8. **Мазаник С. А.** О линейных дифференциальных системах, эквивалентных относительно обобщенного преобразования Ляпунова // Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 22, № 9.— С. 1619—1622.
9. **Еругин Н. П.** Приводимые системы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1946.— Т. 13.
10. **Богданов Ю. С.** Асимптотические характеристики решений линейных дифференциальных систем // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, 1961.— Л., 1964.— Т. 2.— С. 424—432.
11. **Басов В. П.** О структуре решения правильной системы // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, физика и химия.— 1952.— № 2.— С. 3—8.
12. **Мазаник С. А.** О некоторых инвариантах линейных дифференциальных систем // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физика, математика и механика.— 1984.— № 1.— С. 55—57.

Е. В. Воскресенский

КАЧЕСТВЕННЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Принцип сравнения является основой многих качественных и асимптотических методов интегрирования дифференциальных уравнений. В настоящей работе на базе исследований [1—4] дается схема для асимптотического интегрирования возмущенных дифференциальных уравнений, которая содержит новые качественные методы, объединенные принципом сравнения. Приложения демонстрируются новыми результатами из теории оптимального управления движением.

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\,x+f(t,\,x), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt}=A(t)\,y, \tag{2}$$

где $A(\cdot)\colon [T,\ +\infty)\to \mathrm{Hom}(R^n,\ R^n)$ — непрерывное отображение, $f\in C(D)$, $D=[T,\ +\infty)\times R^n$.