

УДК 514.76

Б. Б. КОМРАКОВ

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ
ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Пусть (\bar{G}, M) — однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ — стационарная подгруппа произвольной точки $x \in M$, и $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — пара алгебр Ли, соответствующая паре групп Ли (\bar{G}, G) . Заметим, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ локально однозначно определяет однородное пространство (\bar{G}, M) . Глобальное строение всех однородных пространств, соответствующих данной паре, приводится в [1].

Псевдориманово однородное пространство называется *пространством Эйнштейна*, если метрика g удовлетворяет уравнению Эйнштейна $R - \lambda g = 0$, где R — тензор Риччи метрики g , λ — произвольное вещественное число.

В данной работе представлена локальная классификация четырехмерных однородных неразрешимых пространств Эйнштейна, допускающих инвариантную псевдориманову метрику произвольной сигнатуры, а также локальная классификация четырехмерных однородных неразрешимых псевдоримановых пространств, на которых уравнение Эйнштейна не имеет решения.

Локальная классификация четырехмерных однородных неразрешимых лоренцевых пространств Эйнштейна предъявлена в [2], а четырехмерных однородных неразрешимых нейтральных (допускающих инвариантную псевдориманову метрику сигнатуры (2,2)) пространств Эйнштейна предъявлена в [3].

Глобальная классификация четырехмерных однородных пространств Эйнштейна в случае римановой метрики может быть найдена в [4]. Известна также полная классификация всех четырехмерных римановых однородных пространств [5, 6].

Полная локальная классификация четырехмерных псевдоримановых однородных пространств произвольной сигнатуры представлена в [7, 8].

О п р е д е л е н и е. Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называем *псевдоримановой*, если соответствующее однородное пространство (\bar{G}, M) допускает инвариантную псевдориманову метрику. Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называем *эйштейновой*, если эта метрика удовлетворяет уравнению Эйнштейна. Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называем *неразрешимой*, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима.

З а м е ч а н и е.

1. Через $\mathfrak{r}_2 = \langle p, q \rangle$ обозначаем следующую алгебру Ли: $[p, q] = p$.
2. Через $\mathfrak{n}_3 = \langle h, p, q \rangle$ обозначаем алгебру Ли со следующим ненулевым коммутационным соотношением: $[p, q] = h$.
3. Через $\mathfrak{n}_5 = \langle h, p_1, p_2, q_1, q_2 \rangle$ обозначаем алгебру Ли со следующими ненулевыми коммутационными соотношениями:
 $[h, q_1] = p_1, [h, q_2] = p_2, [q_1, q_2] = h$.

Т е о р е м а 1. Любая неразрешимая эйнштейнова пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ коразмерности 4 эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

1. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1)$;
2. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$;
3. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$;
4. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$;
5. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1) \times \mathfrak{so}(1, 1)$;
6. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1) \times \mathfrak{so}(2)$;
7. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1) \times \mathfrak{so}(2)$;
8. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2)$;
9. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2)$;
10. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2)$;
11. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$;
12. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$;
13. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathfrak{u}_3$, $\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h, p \right\rangle$;
14. $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}, t \right] \mid y, t \in \mathbb{R} \right\}$;
15. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathfrak{u}_3$, $\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - h, p \right\rangle$;
16. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t+x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathfrak{u}_3$,
 $\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h, p \right\rangle$;
17. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t+x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathbb{R}^3$,
 $\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ltimes \begin{pmatrix} u \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} \mid y, t, u \in \mathbb{R} \right)$;
18. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t+x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathfrak{u}_3$,

$$\mathfrak{g} = \left\langle \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) - h, p \right\rangle;$$

19. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes (V \oplus V^*)$, где $V = \mathbb{R}^2$ — естественный $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -модуль, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;

$$20. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{ou} \ltimes \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & y & -x & -z \\ -y & 0 & -z & x \\ x & z & 0 & y \\ z & -x & -y & 0 \end{array} \right) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathfrak{su}(2);$$

\mathfrak{g} действует неприводимо на \mathbb{R}^4 ;

21. $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \text{Rid}_{\mathbb{R}^3}) \ltimes \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1)$;

22. $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1)$;

23. $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(3) \oplus \text{Rid}_{\mathbb{R}^3}) \ltimes \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$;

24. $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(3) \ltimes \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$;

25. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{ou} \mathfrak{l}(2, \mathbb{R})$;

26. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{ou} \mathfrak{l}(2, \mathbb{R}) \ltimes (V \oplus V^*)$, где $V = \mathbb{R}^2$ — естественный $\mathfrak{ou} \mathfrak{l}(2, \mathbb{R})$ -модуль, $\mathfrak{g} = \mathfrak{ou} \mathfrak{l}(2, \mathbb{R})$;

27. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2)$;

28. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2, 1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2)$;

$$29. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{ou} \ltimes \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{ou} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & y & -x & -z \\ -y & 0 & -z & -t \\ x & z & 0 & y \\ z & t & -y & 0 \end{array} \right) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathfrak{u}(2),$$

\mathfrak{g} действует неприводимо на \mathbb{R}^4 ;

30. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2, 1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$;

$$31. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} x & y & 0 & t \\ z & -x & -t & 0 \\ 0 & t & -x & -z \\ -t & 0 & -y & x \end{array} \right) \mid x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}),$$

\mathfrak{g} действует неприводимо на \mathbb{R}^4 ;

$$32. \bar{\mathfrak{g}} = \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & z & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z & -x \end{array} \right) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \ltimes \mathfrak{n}_5,$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & z & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z & -x \end{array} \right) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \times \mathbb{R}h;$$

$$33. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathbb{R}^4, \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 & t \\ z & -x & -t & 0 \\ 0 & 0 & -x & -z \\ 0 & 0 & -y & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R});$$

$$34. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathbb{R}^4, \mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 & u \\ z & t & -u & 0 \\ 0 & 0 & -x & -z \\ 0 & 0 & -y & -t \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t, u \in \mathbb{R} \right\};$$

$$35. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2);$$

$$36. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2, 2) \ltimes \mathbb{R}^4, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 2);$$

$$37. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4, 1), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4);$$

$$38. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(5), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4);$$

$$39. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4) \ltimes \mathbb{R}^4, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(4);$$

$$40. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, 1);$$

$$41. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4, 1), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, 1);$$

$$42. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 1) \ltimes \mathbb{R}^4, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, 1).$$

Теорема 2. Любая неразрешимая псевдориманова пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ коразмерности 4, на которой уравнение Эйнштейна не имеет решения, эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

$$1. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{g} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}, x, 0 \right] \middle| x \in \mathbb{R} \right\};$$

$$2. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1);$$

$$3. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1);$$

$$4. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{g} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, x, 0 \right] \middle| x \in \mathbb{R} \right\};$$

$$5. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{g} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, x, 0 \right] \middle| x \in \mathbb{R} \right\};$$

$$6. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}^2, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2);$$

$$7. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2);$$

$$8. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2);$$

$$9. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{v}_2, \mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \rho \right\rangle;$$

$$10. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{g} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, z, 0 \right] \middle| z \in \mathbb{R} \right\};$$

$$11. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times (\mathfrak{so}(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1) \times \mathfrak{so}(1, 1);$$

$$12. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times (\mathfrak{so}(2) \ltimes \mathbb{R}^2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1) \times \mathfrak{so}(2);$$

$$13. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times (\mathfrak{so}(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(1, 1);$$

$$14. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times (\mathfrak{so}(1, 1) \ltimes \mathbb{R}^2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(1, 1);$$

$$15. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times (\mathfrak{so}(2) \ltimes \mathbb{R}^2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2);$$

$$16. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times (\mathfrak{so}(2) \ltimes \mathbb{R}^2), \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2);$$

$$17. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$18. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2, 1) \ltimes \mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$19. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \quad \mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

$$20. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{r}_2 \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - q, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p \right\rangle;$$

$$21. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2, 2) \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1);$$

$$22. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 1) \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1);$$

$$23. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 1) \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3);$$

$$24. \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4) \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3).$$

Summary

This paper presents the complete local classification of four-dimensional homogeneous spaces of non-solvable Lie groups with an invariant Einstein metric of arbitrary signature and the complete local classification of four-dimensional homogeneous spaces of nonsolvable Lie groups with an invariant pseudo-Riemannian metric of arbitrary signature and the metric not satisfying the Einstein equation $R - \lambda g = 0$ where g is a metric, R is the Ricci tensor, λ is an arbitrary real number.

Литература

1. Mostow G. // Ann. of Math. 1950. Vol. 32.
2. Комраков Б. Б. // Успехи мат. наук. 1997. № 2. С. 169—170.
3. Комраков Б. Б. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41. № 3. С. 33—35.
4. Jensen G. R. // J. Diff. Geom. 1969. Vol. 3. P. 309—349.
5. Берар - Бержер Л. Однородные римановы пространства размерности 4. М., 1985. С. 45—60.
6. Ishihara S. Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions // Jour. of the Math. Soc. of Japan. 1955. Vol. 7. P. 345—370.
7. Комраков В., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of complex pairs. Preprint Univ. Oslo, 25 (May 1995).
8. Комраков В., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of real pairs. Preprint Univ. Oslo, 32 (June 1995).

Белорусский государственный
университет

Поступило 27.08.2001