Доклады Академии наук Беларуси

1997 май-июнь Том 41 № 3

УДК 514.76

Б. Б. КОМРАКОВ

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА СИГНАТУРЫ (2,2) С НЕРАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Пусть $(\overline{G}, M)$ − однородное пространство, где $\overline{G}$ − неразрешимая группа Ли, $G = \overline{G}_x$ − стационарная подгруппа произвольной точки $x \in M$, и $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ − пара алгебр Ли, соответствующая паре групп Ли $(\overline{G}, G)$. Заметим, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ локально однозначно определяет однородное пространство $(\overline{G}, M)$. Глобальное строение всех однородных пространств, соответствующих данной паре, приводится в [1].

Псевдориманово однородное пространство называется *пространством Эйнштейна,* если метрика g удовлетворяет уравнению Эйнштейна $R - \lambda g = 0$, где R − тензор Риччи, λ − произвольное вещественное число.

В данной работе представлена локальная классификация четырехмерных однородных пространств Эйнштейна с неразрешимой группой симметрий, допускающих инвариантную псевдориманову метрику сигнатуры (2,2). Локальная классификация четырехмерных лоренцевых (допускающих инвариантную псевдориманову метрику сигнатуры (3,1)) однородных пространств Эйнштейна может быть найдена в [2].

Глобальная классификация в случае римановой метрики может быть найдена в [3]. Известна также полная классификация всех четырехмерных римановых однородных пространств [4, 5] . Полная локальная классификация четырехмерных псевдоримановых однородных пространств произвольной сигнатуры представлена в [6, 7].

О п р е д е л е н и е. *Пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть эйнштейновой, если соответствующее однородное пространство $(\overline{G}, M)$ допускает инвариантную псевдориманову метрику, удовлетворяющую уравнению Эйнштейна.*

З а м е ч а н и е.

(1) Через $\mathfrak{r}_2 = \langle p, q \rangle$ мы будем обозначать следующую алгебру Ли: $[p,q] = p$.

(2) Через $\mathfrak{n}_3 = \langle h, p, q \rangle$ мы будем обозначать алгебру Ли со следующим ненулевым коммутационным соотношением: $[p,q] = h$.

(3) Через $\bar{\mathfrak{n}}_5 = \langle h, p_1, p_2, q_1, q_2 \rangle$ мы будем обозначать алгебру Ли со следующими ненулевыми коммутационными соотношениями: $[h, q_1] = p_1$, $[h, q_2] = p_2$, $[q_1, q_2] = h$.

Т е о р е м а. *Любая эйнштейнова пара коразмерности 4 с неразрешимой алгеброй $\bar{\mathfrak{g}}$, допускающая инвариантную псевдориманову метрику сигнатуры* (2,2), *эквивалентна одной и только одной из следующих пар:*

1. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \times \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,1)$.

2. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$.

3. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \leftthreetimes \mathbf{R}^2$, $\mathfrak{g} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbf{R}\right\}$.

4. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,1) \times \mathfrak{so}(1,1)$.

5. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \times \mathfrak{so}(2)$.

6. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})_{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,\mathbf{C})_{\mathbf{R}}$.

7. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}(2,\mathbf{R}) \leftthreetimes \mathbf{R}^2$, $\mathfrak{g} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbf{R}\right\}$.

8. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbf{R}\right\} \leftthreetimes \mathfrak{n}_3$, $\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h, p \right\rangle$.

9. $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \leftthreetimes \mathbf{R}^2) \times \mathbf{R}$, $\mathfrak{g} = \left\{\left[\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}, t\right] \middle| y, t \in \mathbf{R}\right\}$.

10. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t+x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbf{R}\right\} \leftthreetimes \mathfrak{n}_3$,

$$\mathfrak{g} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h, p \right\rangle.$$

11. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t+x & y \\ 0 & z & -x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbf{R}\right\} \leftthreetimes \mathbf{R}^3$,

$$\mathfrak{g} = \left\{\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftthreetimes \begin{pmatrix} u \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} \middle| y, t, u \in \mathbf{R}\right\}.$$

12. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \leftthreetimes (V \oplus V^*)$, *где* $V = \mathbf{R}^2$ *естественный* $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$*-модуль*, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$.

13. $\bar{\mathfrak{g}} = \left(\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathbf{R}\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}\right) \leftthreetimes \mathbf{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1)$.

14. $\bar{\mathfrak{g}} = \left(\mathfrak{so}(2,1) \leftthreetimes \mathbf{R}^3\right) \times \mathbf{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1)$.

15. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(3,\mathbf{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$.

16. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{gl}(2,\mathbf{R}) \leftthreetimes (V \oplus V^*)$, *где* $V = \mathbf{R}^2$ *естественный* $\mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$*-модуль*, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$.

17. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2,1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$.

18. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \leftthreetimes \mathbf{R}^4$, $\mathfrak{g} = \left\{\begin{pmatrix} x & y & 0 & t \\ z & -x & -t & 0 \\ 0 & t & -x & -z \\ -t & 0 & -y & x \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t \in \mathbf{R}\right\} \cong \mathfrak{gl}(2,\mathbf{R})$, $\mathfrak{g}$ *действует неприводимо на* $\mathbf{R}^4$.

19. $\bar{\mathfrak{g}} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & z & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z & -x \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbf{R}\right\} \leftthreetimes \tilde{\mathfrak{n}}_5$,

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & z & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z & -x \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbf{R} \right\} \times \mathbf{R}h.$$

20. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathbf{R}^4$, $\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & 0 & t \\ z & -x & -t & 0 \\ 0 & 0 & -x & -z \\ 0 & 0 & -y & x \end{pmatrix} \right| x, y, z, t \in \mathbf{R} \right\} \cong \mathfrak{gl}(2, \mathbf{R})$.

21. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes \mathbf{R}^4$, $\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & 0 & u \\ z & t & -u & 0 \\ 0 & 0 & -x & -z \\ 0 & 0 & -y & -t \end{pmatrix} \right| x, y, z, t, u \in \mathbf{R} \right\}$.

22. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,2)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,2)$.

23. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2,2) \ltimes \mathbf{R}^4$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,2)$.

Summary

This paper presents the complete local classification of four-dimensional homogeneous spaces of non-solvable Lie groups with an invariant pseudo-Riemannian metric of signature (2,2), and this metric satisfies the Einstein equation $R - \lambda g = 0$, where g is a metric, R is the Ricci tensor, λ is an arbitrary real number.

Литература

1. Mostow G. // Ann. of Math. 1950. Vol. 32.
2. Комраков Б. Б. // УМН. 1997. № 2. С. 206–207.
3. Jensen G. R. // J. Diff. Geom. 1969. Vol. 3. P. 309–349.
4. Берар-Бержери Л. Однородные римановы пространства размерности 4. Четырехмерная риманова геометрия. М., 1985. С. 45–60.
5. Ishihara S. // J. Math. Soc. of Japan. 1955. Vol. 7. P. 345–370.
6. Komrakov B., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of complex pairs II. Oslo, 1995 (Preprint / Univ. Oslo:25).
7. Komrakov B., Jnr. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. Classification of real pairs. Oslo, 1995 (Preprint / Univ. Oslo:32).

Белорусский государственный университет

Поступило 05.06.96