УДК 517.983.23+517.984.5

А. Б. Антоневич, К. Зайковски

Вариационные принципы для спектрального радиуса функциональных операторов

В работе показано, что спектральный радиус функционального оператора с положительными коэффициентами, порожденного набором отображений (динамической системой), является логарифмически выпуклым функционалом от логарифмов коэффициентов. Из этого следует справедливость вариационного принципа, выражающегося в том, что логарифм спектрального радиуса является преобразованием Лежандра некоторого выпуклого функционала T, определенного на множестве вероятностных векторных мер и зависящего только от исходной динамической системы. В субэкспоненциальном случае получена комбинаторная конструкция функционала T с помощью соответствующего процесса случайных блужданий, построенного по динамической системе. Приведены примеры явного вычисления функционала T и спектрального радиуса.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

В ряде математических и физических проблем встречаются вопросы, которые сводятся к исследованию спектральных свойств ограниченных операторов, действующих в различных пространствах $F(X)$ функций на множестве X и имеющих вид

$$Au(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k(x)\ u(\alpha_k(x)), \qquad u\in F(X), \tag{1.1}$$

где $\alpha_k\colon X\to X$ – заданные отображения, а a_k – заданные функции. Операторы вида (1.1) называют *функциональными операторами*, *операторами, ассоциированными с динамической системой*, или *операторами переноса*. Свойства таких операторов исследовались с разных точек зрения в связи с разными приложениями многими авторами (см. например, книги [1]–[8] и обзоры [9], [10]). Заметим, что в последнее время обнаружены приложения таких операторов в теории всплесков (вейвлетов) [11].

Одной из характеристик оператора является спектральный радиус

$$r(A)=\max\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(A)\},$$

где $\sigma(A)$ – спектр оператора. При этом в ряде задач спектральный радиус является наиболее существенной характеристикой.

Приведем одну из таких задач – задачу моделирования процесса превращения частиц [12]. В таких задачах функция u есть плотность распределения частиц в пространстве X относительно некоторой меры μ, где частицы могут интерпретироваться как нейтроны, молекулы, особи биологических популяций и т.п. При моделировании процесса превращения частиц отображения α_k задают *динамику системы* (возможные перемещения частиц за единицу времени, которые зависят от распределения скоростей), а функции a_k являются *внешними параметрами*, описывающими влияние среды на частицы (это могут быть коэффициенты размножения частиц, вероятности переходов и т.п.). В такой ситуации оператор вида (1.1) описывает эволюцию системы за единицу времени. При начальном состоянии u система через n единиц времени переходит в состояние $A^n u$, и одним из основных вопросов является получение информации об общем количестве частиц в момент времени n. Это количество, которое совпадает с нормой функции $A^n u$ в пространстве $L_1(X,\mu)$.

Известно [13], что для любого ограниченного оператора A для всех u выполнено неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} \leqslant r(A),$$

причем для типичной траектории (почти для всех u, за исключением множества первой категории) справедливо равенство

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} = r(A).$$

При моделировании процесса превращения частиц отсюда следует, что при $r(A) < 1$ число частиц быстро убывает (процесс затухает), при $r(A) > 1$ происходит экспоненциальный рост числа частиц (взрыв), условие $r(A) = 1$ является необходимым условием стационарности процесса. Значения внешних параметров, при которых $r(A) = 1$, называются *критическими*; выявление таких значений представляет особый интерес для качественного описания процесса. Таким образом, спектральный радиус оператора описывает поведение типичных траекторий и является одной из важнейших характеристик динамики рассматриваемого процесса.

Отметим, что по физическому смыслу коэффициенты a_k и функция u в рассматриваемой модели неотрицательны.

Спектральные свойства оператора A вида (1.1) зависят от всех параметров: пространства $F(X)$, отображений α_k и коэффициентов a_k. В настоящей работе для пространств $L_p(X,\mu)$ и пространства $C(X)$ исследуется зависимость спектрального радиуса от коэффициентов и отображений α_k, т.е. от внешних параметров и от динамики.

Функциональные операторы, имеющие только одно слагаемое, называют *операторами взвешенного сдвига*, *композиционными операторами с весом* или *операторами внутренней суперпозиции*. Для таких операторов в классических пространствах функций известно описание спектра и, в частности, известны выражения для спектрального радиуса, имеющие вид вариационных принципов.

Например, если X есть компактное топологическое пространство, μ – борелевская мера на X, инвариантная относительно обратимого отображения $\alpha\colon X \to X$, такая, что $\operatorname{supp}\mu = X$, $a \in C(X)$, то в пространстве $F(X) = L_p(X,\mu)$ и в пространстве $C(X)$ для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига

$$Au(x) = a(x)u(\alpha(x)) \tag{1.2}$$

справедливы формулы

$$\ln r(A) = \max_{\nu\in \mathrm{PM}_\alpha(X)} \int_X \ln|a(x)|\,d\nu, \tag{1.3}$$

$$\ln r(A) = \max_{\nu\in \mathrm{PM}\,\mathrm{Erg}_\alpha(X)} \int_X \ln|a(x)|\,d\nu. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathrm{PM}_\alpha(X)$ есть множество всех α-инвариантных вероятностных мер на X, $\mathrm{PM}\,\mathrm{Erg}_\alpha(X)$ – множество α-инвариантных эргодических вероятностных мер на X (общая формула (1.3) была получена независимо А. К. Китовером [14] и А. В. Лебедевым [15], относительно обобщений и истории вопроса см. [1], [5]. Здесь и в дальнейшем меры на топологических пространствах предполагаются регулярными.

Если отображение α необратимо, то в случае пространства $C(X)$ справедливы те же формулы, а в случае пространств $L_p(X,\mu)$ ситуация сложнее. В случае, когда α – сдвиг Маркова, А. М. Степиным и Ю. Д. Латушкиным [16], [17] установлена следующая формула для спектрального радиуса операторов вида (1.2):

$$\ln r(A) = \max_{\nu\in \mathrm{PM}_\alpha(X)} \left\{ \int_X \ln|a(x)|\,d\nu - \frac{1}{p}\left[\int_X \rho(x)\,d\nu - h(\nu)\right]\right\}, \tag{1.5}$$

где $h(\nu)$ – энтропия меры ν относительно отображения α, ρ – некоторая функция, определяемая этим отображением.

В общем случае произвольного необратимого отображения в работах А. Антоневича, В. И. Бахтина и А. В. Лебедева [18], [19] по отображению α был построен функционал $\tau_\alpha(\nu)$, определенный на множестве $\mathrm{PM}_\alpha(X)$, такой, что для спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига (1.2) имеет место аналогичный вариационный принцип

$$\ln r(A) = \max_{\nu\in \mathrm{Mes}_\alpha} \left\{ \int_X \ln|a(x)|\,d\nu - \frac{1}{p}\tau_\alpha(\nu)\right\}. \tag{1.6}$$

Заметим, что в общем случае, в отличие от (1.5), функционал $\tau_\alpha(\nu)$ существенно отличен от классической энтропии и он задает *новую динамическую характеристику* отображения α, связанную с мерой ν.

Формулы (1.3)–(1.6) можно считать аналогами известного в термодинамике вариационного принципа, связывающего энтропию и свободную энергию, при этом логарифм спектрального радиуса играет роль свободной энергии. Уместно в связи с рассматриваемым вопросом упомянуть работы В. П. Маслова, в которых прослежены подобные связи для некоторых эволюционных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du}{dt} + Bu = 0.$$

Например, в работе [20], посвященной квантованию термодинамики, установлено совпадение свободной энергии термодинамической системы, описываемой рассматриваемым уравнением, с минимальным собственным значением оператора B. Заметим, что это минимальное собственное значение является именно *логарифмом спектрального радиуса* для оператора e^{-B}, задающего эволюцию системы.

Функциональные операторы вида (1.1), имеющие несколько слагаемых, устроены более сложно, их спектральные свойства исследованы только для некоторых специальных случаев (см., например, [21]–[25]). В частности, существование вариационных принципов для некоторого класса модельных функциональных операторов было доказано авторами в [22]. Основным результатом настоящей работы является утверждение, что вариационные принципы для спектрального радиуса, аналогичные (1.3)–(1.6), имеют место для произвольных многочленных функциональных операторов. Функционалы, входящие в правые части таких вариационных принципов, задают некоторые *новые динамические характеристики набора отображений* α_k; при некоторых дополнительных предположениях удается привести независимую конструкцию таких функционалов и выяснить их динамический смысл.

Уже факт существования таких вариационных принципов позволяет лучше понять механизм происходящих процессов: в соответствующие формулы отдельно входят функционал, количественно описывающий влияние динамики (зависящий только от отображений α_k), и функционал, учитывающий влияние внешних параметров. При этом вариационный принцип означает, что реализуются состояния, при которых имеет место наилучшее сочетание этих двух влияний – сумма функционалов принимает максимальное значение.

§ 2. Выпуклые функционалы и преобразование Лежандра

Исходное соображение заключается в том, что выражения в правых частях формул (1.3)–(1.6) можно рассматривать как преобразование Лежандра некоторого функционала. Напомним необходимые понятия и факты, следуя работе [26].

Пусть f есть функционал на вещественном банаховом пространстве $\mathbf{\Phi}$ со значениями в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Множество $D(f) = \{\varphi \in \mathbf{\Phi} : f(\varphi) < +\infty\}$ называется *эффективной областью* функционала f. Функционал f называется *выпуклым*, если неравенство

$$f(t\varphi + (1-t)\psi) \leqslant tf(\varphi) + (1-t)f(\psi)$$

выполнено для всех $t \in [0,1]$ и всех $\varphi, \psi \in \mathbf{\Phi}$, для которых правая часть корректно определена.

Функционал f называется (*слабо*) *полунепрерывным снизу*, если множество $\{\varphi \in \mathbf{\Phi} : f(\varphi) \leqslant c\}$ (слабо) замкнуто для любого $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Для произвольных функционалов свойство слабой полунепрерывности сильнее свойства полунепрерывности в нормированной топологии, но для выпуклых функционалов эти свойства эквивалентны. Через $\mathrm{CSC}(\mathbf{\Phi})$ будем обозначать множество выпуклых полунепрерывных снизу функционалов на пространстве $\mathbf{\Phi}$.

Пусть $\mathbf{\Phi}^*$ есть сопряженное пространство к $\mathbf{\Phi}$, через $\langle \nu, \varphi \rangle$ будем обозначать значение линейного ограниченного функционала $\nu \in \mathbf{\Phi}^*$ на элементе $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Функционал $f^* \colon \mathbf{\Phi}^* \to \overline{\mathbb{R}}$, определенный на сопряженном пространстве выражением

$$f^*(\nu) = \sup\{\langle \nu, \varphi \rangle - f(\varphi) : \varphi \in \mathbf{\Phi}\} = \sup\{\langle \nu, \varphi \rangle - f(\varphi) : \varphi \in D(f)\}, \qquad \nu \in \mathbf{\Phi}^*,$$

называется *сопряженным по Лежандру* к функционалу f. Для функционала g на сопряженном пространстве преобразование Лежандра определяется как функционал на исходном пространстве, заданный аналогичной формулой

$$g^*(\varphi) = \sup\{\langle \nu, \varphi \rangle - g(\nu) : \nu \in \mathbf{\Phi}^*\}, \qquad \varphi \in \mathbf{\Phi}.$$

Предложение 2.1. *Пусть функционал* $f \colon \mathbf{\Phi} \to (-\infty, +\infty]$ *не есть тождественно* $+\infty$. *Сопряженный функционал* f^* *является выпуклым и полунепрерывным снизу в* $*$*-слабой топологии на сопряженном пространстве.*

Равенство $(f^*)^* = f$ *выполнено тогда и только тогда, когда исходный функционал* f *выпуклый и полунепрерывный снизу.*

Если функционал $g\colon \mathbf{\Phi}^* \to (-\infty, +\infty]$ *не является выпуклым и полунепрерывным снизу, то*

$$(g^*)^* = \sup\{h \in \mathrm{CSC}(\mathbf{\Phi}^*);\ h(x) \leqslant g(x)\},$$

т.е. $(g^*)^*$ *является выпуклой оболочкой* g *– наибольшим выпуклым и полунепрерывным снизу функционалом, не превосходящим* g.

Следствие 2.1. *Функционал* f *на пространстве* $\mathbf{\Phi}$ *допускает представление вида*

$$f(\varphi) = \sup\{\langle \nu, \varphi\rangle - g(\nu) : \nu \in \mathbf{\Phi}^*\} \tag{2.1}$$

тогда и только тогда, когда он является выпуклым и полунепрерывным снизу. Представление (2.1) *не единственно – в качестве* g *может быть взят сопряженный функционал* f^* *и любой другой функционал на* $\mathbf{\Phi}^*$, *выпуклая оболочка которого совпадает с* f^*.

Сравнив формулы (1.3)–(1.6) с выражением для преобразования Лежандра, видим, что в случае $a(x) > 0$ логарифм спектрального радиуса во всех этих формулах является преобразованием Лежандра некоторого функционала, эффективная область которого принадлежит $\mathrm{PM}_\alpha(X)$.

Действительно, если $a(x) > 0$, то функция $\varphi(x) = \ln a(x)$ принадлежит пространству $C(X)$. Рассмотрев *спектральный показатель* – функционал $\lambda(\varphi) = \ln r(A)$ на пространстве $\mathbf{\Phi} = C(X)$, из формулы (1.6) получим, что $\lambda(\varphi)$ является преобразованием Лежандра выпуклого функционала $\frac{1}{p}\,\overline{\tau}_\alpha(\nu)$, где $\overline{\tau}_\alpha(\nu) = \tau_\alpha(\nu)$, если $\nu \in \mathrm{PM}_\alpha(X)$, и $\overline{\tau}_\alpha(\nu) = +\infty$, если $\nu \notin \mathrm{PM}_\alpha(X)$. Отметим, что эффективная область этого функционала принадлежит $\mathrm{PM}_\alpha(X)$.

Формула (1.4) имеет несколько иной характер. Эта формула утверждает, что спектральный показатель является преобразованием Лежандра функционала $T(\nu)$, который принимает нулевое значение на множестве $\mathrm{PM}\,\mathrm{Erg}_\alpha(X)$ и значение $+\infty$ на дополнении. Такой функционал не является в общем случае выпуклым и поэтому $\lambda^* = (T^*)^* \neq T$. Связь этих функционалов описана в предложении 2.1: λ^* является овыпуклением функционала T.

Из сказанного выше следует, что существование аналогичных вариационных принципов для более сложных многочленных операторов эквивалентно тому, что логарифм спектрального радиуса является выпуклым и полунепрерывным снизу функционалом на подходящем пространстве.

§ 3. Выпуклость спектрального показателя

Пусть X есть компактное топологическое пространство с борелевской мерой μ, $\alpha_k\colon X \to X$, $k \in M = \{1, 2, \dots, m\}$, суть непрерывные отображения (которые могут быть необратимыми), и пусть a_k есть непрерывные положительные функции на X.

По коэффициентам a_k построим функции $\varphi_k = \ln a_k$, которые обычно называют *потенциалами*. В силу положительности a_k набор $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ является элементом пространства $C^m(X)$ непрерывных вещественных вектор-функций на X, которое естественно изоморфно пространству $C(Y)$, где $Y = X \times M$. *Спектральный показатель*, т.е. логарифм спектрального радиуса оператора A в заданном функциональном пространстве $F(X)$, будем рассматривать как функционал на пространстве потенциалов $C(Y)$, т.е. рассмотрим функционал

$$\lambda(\varphi) = \ln r(A), \tag{3.1}$$

где
$$A = \sum_{k=1}^{m} e^{\varphi_k} T_{\alpha_k}. \tag{3.2}$$

В качестве пространства $C(Y)^*$, сопряженного к пространству $C(Y)$, можем рассматривать пространство (знакопеременных) мер на Y. Поэтому множество $\mathrm{PM}(Y)$ вероятностных мер на Y будем рассматривать как подмножество пространства $C(Y)^*$. Это множество иногда удобнее рассматривать как множество векторных мер на X, т.е. как множество векторов вида $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, где каждое ν_k есть неотрицательная мера на X и $\sum_{k=1}^{m} \nu_k(X) = 1$.

Теорема 3.1. *Пусть X есть компактное топологическое пространство, $\alpha_k\colon X \to X$, $k = 1, 2, \dots, m$, суть непрерывные отображения.*

Существует такой выпуклый полунепрерывный снизу функционал $\mathscr{T}$ на $\mathrm{PM}(Y)$, что в пространстве $C(X)$ для спектрального показателя любого оператора A вида (3.2), где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in C(Y)$, справедлив вариационный принцип
$$\lambda(\varphi) = \ln r(A) = \max_{\nu \in \mathrm{PM}(Y)} \left\{ \int_Y \varphi \, d\nu - \mathscr{T}(\nu) \right\}. \tag{3.3}$$

При этом для функционала $\mathscr{T}$ имеют место следующие оценки снизу:
$$\mathscr{T}(\nu) \geqslant \sum_{k=1}^{m} \nu_k(X) \ln \nu_k(X) \geqslant -\ln m. \tag{3.4}$$

Аналогичное утверждение имеет место в пространствах $L_p(X, \mu)$.

Теорема 3.2. *Пусть X есть компактное топологическое пространство с борелевской мерой μ, носителем которой является все пространство X, $\alpha_k\colon X \to X$, $k = 1, 2, \dots, m$, суть непрерывные отображения, сохраняющие меру μ.*

Для каждого из пространств $L_p(X, \mu)$ существует такой выпуклый полунепрерывный снизу функционал $\mathscr{T}$ на $\mathrm{PM}(Y)$ (в общем случае зависящий от рассматриваемого пространства), что для спектрального показателя любого оператора A вида (3.2), где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in C(Y)$, справедлив вариационный принцип (3.3) и выполнено неравенство (3.4).

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 аналогичны. Согласно известной формуле Гельфанда имеем
$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Поскольку $T_\alpha a = (a \circ \alpha) T_\alpha$ и $T_{\alpha_k} T_{\alpha_l} = T_{\alpha_k \circ \alpha_l}$, то
$$(A^n u)(x) = \sum_{\xi \in M^n} a_\xi(x) u(\alpha^\xi(x)), \tag{3.5}$$

где
$$M^n = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \xi_i \in M\},$$
$$a_\xi(x) = a_{\xi_1}(x) a_{\xi_2}(\alpha_{\xi_1}(x)) \cdots a_{\xi_n}(\alpha_{\xi_1} \circ \cdots \circ \alpha_{\xi_{n-1}}(x)),\ \alpha^\xi(x) = \alpha_{\xi_1} \circ \cdots \circ \alpha_{\xi_n}(x).$$

Замечание 3.1. В случае $Au(x) = a(x)u(\alpha(x))$, т.е. оператора взвешенного сдвига, для оператора A^n получаем более простое выражение
$$A^n u(x) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(\alpha^i(x)) \right] u(\alpha^n(x)),$$

где $\alpha^{i+1}(x) = \alpha(\alpha^i(x))$. Кроме того, в случае обратимого α в каждом из рассматриваемых пространств имеем явное выражение для нормы

$$\|A^n\| = \max_x \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x))|. \tag{3.6}$$

Формулы (1.3) получены фактически предельным переходом из (3.6).

В случае многочленного функционального оператора исследование усложняется в связи с тем, что число слагаемых в выражении для оператора A^n растет с ростом n, сами слагаемые устроены более сложно, а также с тем, что в пространствах $L_p(X,\mu)$ нет простого явного выражения для нормы такого оператора.

В силу неотрицательности коэффициентов a_k при вычислении нормы оператора достаточно рассмотреть образы неотрицательных функций, т.е.

$$\|A^n\| = \sup\{\|A^n u\|_p : \|u\|_p = 1,\ u(x) \geqslant 0\}.$$

Кроме того, норма оператора A монотонно зависит от a_k (и от φ).

Лемма 3.1. *При сделанных предположениях функционал λ принимает конечные значения во всех точках пространства $C(Y)$, непрерывен и имеют место оценки сверху*

$$\lambda(\varphi) \leqslant \ln \sum_{k=1}^m \max_x e^{\varphi_k(x)}.$$

Доказательство леммы. В силу положительности коэффициентов существуют такие постоянные $d_k > 0$, что $a_k(x) \geqslant d_k$. Отсюда для любого k имеем

$$\|A^n\| \geqslant \|(a_k T_k)^n\| \geqslant d_k^n$$

и $r(A) \geqslant d_k > 0$. Поэтому логарифм спектрального радиуса принимает конечные значения.

Пусть последовательность $\varphi^i = (\varphi_k^i)_{k=1}^m$ сходится к φ^0 в $C(Y)$, т.е.

$$\|\varphi^0 - \varphi^i\| = \max_{1\leqslant k\leqslant m} \|\varphi_k^0 - \varphi_k^i\| \to 0$$

при стремлении i к ∞ (здесь и ниже нормы потенциалов рассматриваются в $C(X)$ или $C(Y)$ соответственно). Пусть $a_k^i = e^{\varphi_k^i}$. Заметим, что для каждого k имеем $a_k^i = e^{(\varphi_k^i - \varphi_k^0)} a_k^0$. Поскольку для каждого $x \in X$ выполнено

$$-\|\varphi^i - \varphi^0\| \leqslant \varphi_k^i(x) - \varphi_k^0(x) \leqslant \|\varphi^i - \varphi^0\|,$$

имеем

$$e^{-\|\varphi^i - \varphi^0\|} a_k^0(x) \leqslant a_k^i(x) \leqslant e^{\|\varphi^i - \varphi^0\|} a_k^0(x).$$

Следовательно, для любого $\xi \in M^n$ и $u \geqslant 0$

$$\begin{aligned} e^{-n\|\varphi^i - \varphi^0\|} \sum_{\xi\in M^n} a_\xi^0(x) u(\alpha^\xi(x)) &\leqslant \sum_{\xi\in M^n} a_\xi^m(x) u(\alpha^\xi(x)) \\ &\leqslant e^{n\|\varphi^i - \varphi^0\|} \sum_{\xi\in M^n} a_\xi^0(x) u(\alpha^\xi(x)). \end{aligned}$$

Пусть операторы A_0 и A_i соответствуют потенциалам φ^0 и φ^i. Согласно предыдущему

$$e^{-\|\varphi^i - \varphi^0\|} \|A_0^n\|^{1/n} \leqslant \|A_i^n\|^{1/n} \leqslant e^{\|\varphi^i - \varphi^0\|} \|A_0^n\|^{1/n},$$

откуда, устремляя n к бесконечности, получаем неравенство, из которого следует непрерывность спектрального радиуса:

$$e^{-\|\varphi^i-\varphi^0\|}r(A_0) \leqslant r(A_i) \leqslant e^{\|\varphi^i-\varphi^0\|}r(A_0).$$

Так как для всех операторов из рассматриваемого класса операторов с положительными коэффициентами спектральный радиус положителен, логарифм спектрального радиуса также непрерывен. Лемма доказана.

Замечание 3.2. Возможность представления коэффициентов a_k с помощью потенциалов из $C(X)$ эквивалентна условию строгой положительности коэффициентов. Это условие в лемме 3.1 существенно. Как известно, спектральный радиус оператора не является непрерывным функционалом от оператора, а является только полунепрерывным сверху. Наиболее простые примеры, демонстрирующие разрывность спектрального радиуса, строятся как раз с помощью операторов взвешенного сдвига, у которых коэффициент обращается в нуль хотя бы в одной точке [1]. Отсюда следует, что формула (1.3) спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига, справедливая и в случае обращающихся в нуль коэффициентов, для таких коэффициентов не является частным случаем преобразования Лежандра.

Аналогично в случае, когда коэффициенты многочленных функциональных операторов могут обращаться в нуль, формулы вида (3.3) не укладываются в общую схему преобразования Лежандра и вопрос требует дополнительного исследования.

Лемма 3.2. *Функционал $\lambda(\varphi) = \ln r(A)$ является выпуклым на пространстве $C(Y)$.*

Доказательство. Пусть φ и ψ – произвольные функции из пространства $C(Y)$. Обозначим $a_k = e^{\varphi_k}$, $b_k = e^{\psi_k}$, и пусть

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k T_{\alpha_k}, \qquad B = \sum_{k=1}^{m} b_k T_{\alpha_k}.$$

Рассмотрим значение $\lambda(t\varphi + (1-t)\psi)$ для $t \in (0,1)$. Функции $t\varphi + (1-t)\psi$ соответствует оператор

$$C_t = \sum_{k=1}^{m} \exp[t\varphi_k + (1-t)\psi_k] T_{\alpha_k} = \sum_{k=1}^{m} a_k^t b_k^{1-t} T_{\alpha_k}.$$

Имеем

$$(C_t)^n u(x) = \left(\sum_{\xi\in M^n} a_\xi^t b_\xi^{1-t} T_\alpha^\xi \right) u(x) = \sum_{\xi\in M^n} [a_\xi(x)]^t [b_\xi(x)]^{1-t} u(\alpha^\xi(x)). \tag{3.7}$$

Пусть $r = 1/t$ и $s = 1/(1-t)$. Поскольку $t \in (0,1)$, то $r > 1$, $s > 1$ и эти числа сопряжены, т.е. $1/r + 1/s = 1$. Используя неравенство Гёльдера с показателями r и s для сумм, из (3.7) получаем, что

$$\begin{aligned} C_t^n u(x) &= \sum_{\xi\in M^n} [a_\xi(x) u(\alpha^\xi(x))]^t [b_\xi(x) u(\alpha^\xi(x))]^{1-t} \\ &\leqslant \left[\sum_{\xi\in M^n} a_\xi(x) u(\alpha^\xi(x)) \right]^t \left[\sum_{\xi\in M^n} b_\xi(x) u(\alpha^\xi(x)) \right]^{1-t} = [A^n u(x)]^t [B^n u(x)]^{1-t}. \end{aligned}$$

В пространстве $C(X)$ отсюда непосредственно следует, что

$$\|C_t^n\| \leqslant \|A^n\|^t \|B^n\|^{1-t}. \tag{3.8}$$

В случае пространства $L_p(X,\mu)$ в силу неотрицательности функций $C_t^n u(x)$, $A^n u(x)$ и $B^n u(x)$ имеем

$$\int_X (C_t^n u(x))^p \, d\mu \leqslant \int_X [(A^n u(x))^p]^t [(B^n u(x))^p]^{1-t} \, d\mu. \tag{3.9}$$

Применяя к правой части (3.9) неравенство Гёльдера для интегралов

$$\int_X [(A^n u(x))^p]^t [(B^n u(x))^p]^{1-t} \, d\mu \leqslant \left[\int_X (A^n u(x))^p \, d\mu \right]^t \left[\int_X (B^n u(x))^p \, d\mu \right]^{1-t},$$

получаем неравенство (3.8) для норм операторов в пространстве $L_p(X,\mu)$.

Возведя (3.8) в степень $1/n$ и переходя к пределу, получаем

$$\ln r(C_t) = \lambda(t\varphi + (1-t)\psi) \leqslant t \ln r(A) + (1-t) \ln r(B) = t\lambda(\varphi) + (1-t)\lambda(\psi).$$

Лемма доказана.

Так как функционал λ выпуклый и непрерывный, в силу предложения 2.1 имеем $\lambda = \lambda^{**}$, т.е.

$$\lambda(\varphi) = \sup\{\langle \varphi, \nu \rangle - \lambda^*(\nu) : \nu \in D(\lambda^*)\}, \tag{3.10}$$

где

$$\lambda^*(\nu) = \sup\{\langle \varphi, \nu \rangle - \lambda(\varphi) : \varphi \in C(Y)\}. \tag{3.11}$$

Лемма 3.3. *Эффективная область $D(\lambda^*)$ функционала λ^* содержится во множестве* $\mathrm{PM}(Y)$.

Доказательство. Проверим положительность функционалов ν, входящих в $D(\lambda^*)$.

Согласно (3.10) для любого $c \in \mathbb{R}$ и любого $\varphi \in C(Y)$ имеем

$$\lambda^*(c\nu) \geqslant c\langle \varphi, \nu \rangle - \lambda(c\varphi). \tag{3.12}$$

Пусть функционал ν не является положительным. Тогда существует вектор-функция $\varphi(x) \geqslant 0$ такая, что значение $\langle \varphi, \nu \rangle$ отрицательно.

При произвольном $c < 0$ рассмотрим оператор

$$A_c = \sum_{k=1}^{m} e^{c\varphi_k} T_{\alpha_k},$$

соответствующий выбранной вектор-функции $c\varphi$. Так как для коэффициентов этого оператора выполнена оценка $e^{c\varphi_k} \leqslant 1$, имеем $\|A_c\| \leqslant m$, откуда

$$\lambda(c\varphi) = \ln r(A_c) \leqslant \ln m.$$

Таким образом, при $c \to -\infty$ правая часть в (3.12) стремится к $+\infty$, откуда $\lambda^*(\nu) = +\infty$, т.е. $\nu \notin D(\lambda^*)$. Таким образом, если функционал $\nu \in D(\lambda^*)$, то он положительный и задается векторной мерой на X.

Проверим нормированность таких мер. Пусть $c \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C^m(X)$ и $\varphi + c$ есть вектор-функция с компонентами $(\varphi_k + c)$. Если вектор-функции φ соответствует оператор A, то вектор-функции $\varphi + c$ соответствует оператор $e^c A$. Поэтому $\lambda(\varphi + c) = \lambda(\varphi) + c$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda^*(\nu) &\geqslant \sup_c \left[\sum_{k=1}^m \int_X (\varphi_k + c)\, d\nu_k - \lambda(\varphi + c) \right] \\ &= \sup_c \left[\langle \varphi, \nu \rangle - \lambda(\varphi) + c \left(\sum_{k=1}^m \nu_k(X) - 1 \right) \right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Если $\sum_{k=1}^m \nu_k(X) \neq 1$, то, устремляя c к $+\infty$ в случае $\sum_{k=1}^m \nu_k(X) > 1$ или к $-\infty$ в случае $\sum_{k=1}^m \nu_k(X) < 1$, получаем, что выражение под знаком супремума в правой части (3.13) стремится к $+\infty$. Значит, для таких ν имеем $\lambda^*(\nu) = +\infty$ и условие нормировки является необходимым для точек эффективной области. Лемма 3.3 доказана.

Для обоснования формулы (3.3) осталось заметить, что супремум в (3.10) можно заменит на максимум. Действительно, функционал λ^* является $*$-слабо полунепрерывным снизу, поэтому выражение в правой части (3.10) является $*$-слабо полунепрерывным сверху функционалом. Так как множество $\mathrm{PM}(Y)$ вероятностных мер является компактным в $*$-слабой топологии, супремум в (3.10) достигается и его можно заменить на максимум. Таким образом, положив $T(\nu) = \lambda^*(\nu)$ для $\nu \in \mathrm{PM}(Y)$, получаем для спектрального радиуса выражение (3.3).

Получим оценки (3.4) сопряженного функционала. Имеет место очевидная оценка спектрального радиуса сверху

$$r(A) \leqslant \|A\| \leqslant \sum_{k=1}^m \max_x |a_k(x)|,$$

из которой получаем, что

$$\lambda(\varphi) \leqslant \ln \sum_{k=1}^m e^{\max_x \varphi_k(x)}.$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned}\lambda^*(\nu) &= \sup\{\langle \varphi, \nu \rangle - \lambda(\varphi) : \varphi \in C(Y)\} \\ &\geqslant \sup\left\{ \sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, \nu_k \rangle - \ln \sum_{k=1}^m e^{\max_x \varphi_k(x)} : \varphi \in C(Y) \right\} \\ &= \sup_{\{C_k\}} \left\{ \sup\left\{ \sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, \nu_k \rangle - \ln \sum_{k=1}^m e^{C_k} : \varphi \in C(Y),\ \max_x \varphi_k(x) = C_k \right\} \right\}. \end{aligned}$$

При фиксированном значении C_k выражение $\langle \varphi_k, \nu_k \rangle$ в силу неотрицательности ν_k достигает максимальное значение на постоянной функции $\varphi_k(x) \equiv C_k$, откуда

$$\begin{aligned}&\sup\left\{ \sum_{k=1}^m \langle \varphi_k, \nu_k \rangle - \ln \sum_{k=1}^m e^{C_k} : \varphi \in C(Y),\ \max_x \varphi_k(x) = C_k \right\} \\ &\qquad = \sum_{k=1}^m C_k \nu_k(X) - \ln \sum_{k=1}^m e^{C_k}. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой преобразование Лежандра функционала

$$f(C_1, \dots, C_m) = \ln \sum_{k=1}^{m} e^{C_k}$$

на пространстве $\mathbb{R}^m$ и вычисляется в явном виде:

$$\sup_{\{C_k\}} \sum_{k=1}^{m} C_k \nu_k(X) - \ln \sum_{k=1}^{m} e^{C_k} = \sum_{k=1}^{m} \nu_k(X) \ln \nu_k(X).$$

Заметим, что выражение $-\sum_{k=1}^{m} \nu_k(X) \ln \nu_k(X)$ совпадает с энтропией дискретного распределения $(\nu_1(X), \nu_2(X), \dots, \nu_m(X))$ на конечном множестве; как известно (легко проверяется), максимум энтропии достигается на распределении $\nu_k(X) = 1/m$ и равен $\ln m$. Отсюда имеем оценку (3.4) сопряженного функционала снизу. Теорема доказана.

Пример 3.1. Рассмотрим случай операторов в конечномерном пространстве. Пусть A есть произвольный линейный оператор в пространстве $\mathbb{C}^m$, заданный матрицей с положительными элементами. Положительные матрицы исследованы весьма подробно и относительно них получено много тонких фактов [27]. Согласно теореме Перрона у оператора A существует простое положительное собственное значение, которое больше модуля любого другого собственного значения и, следовательно, совпадает со спектральным радиусом. Полученные выше результаты могут быть применены к положительным матрицам и приводят к сформулированному ниже утверждению, которое не удалось обнаружить в литературе.

Любой линейный оператор A в пространстве $L_2(X) = \mathbb{C}^m$ может быть записан в виде (1.1). Для этого возьмем конечное множество $X = \{0, 1, \dots, m-1\}$ из m элементов, и пусть $\alpha\colon X \to X$ есть циклическая перестановка $\alpha(k) = (k+1) \mod m$. Тогда линейный оператор A может быть представлен в виде $A = \sum a_j T^j$, где коэффициенты $a_j = (a_j(k))$ есть функции на X, значения которых являются элементами матрицы A.

Логарифм наибольшего собственного значения положительной матрицы $A = \{a_{i,j}\}$ будем рассматривать как функцию от m^2 вещественных переменных $\varphi_{i,j} = \ln a_{i,j}$, обозначим ее $\lambda(\varphi)$. Как весьма частный случай теоремы 3.1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Функция $\lambda(\varphi)$ является выпуклой.*

Существует такая выпуклая функция $\mathscr{T}(\nu)$, определенная на множестве P матриц $\nu = \{\nu_{i,j}\}$ размерности $m \times m$, удовлетворяющих условиям

$$\nu_{i,j} \geqslant 0, \qquad \sum_i \sum_j \nu_{i,j} = 1,$$

что для любой матрицы с положительными элементами имеет место вариационный принцип

$$\lambda(\varphi) = \max_{\nu \in P} \left[\sum_i \sum_j \nu_{i,j} \varphi_{i,j} - \mathscr{T}(\nu) \right].$$

§ 4. Обобщения теоремы о выпуклости

В предыдущем параграфе выпуклость спектрального показателя и справедливость вариационного принципа были доказаны в предположении, что оператор A порожден непрерывными отображениями компактного пространства X и имеет непрерывные коэффициенты. Это существенно в случае пространства $C(X)$. Если оператор рассматривается в пространстве $L_p(X, \mu)$, то эти условия в значительной мере избыточны, равно как и требование инвариантности меры μ. Некоторые модификации доказательства позволяют получить ряд обобщений.

Пусть Φ есть некоторое векторное подпространство в вещественном пространстве $[L_\infty(X, \mu)]^m$. Рассмотрим множество операторов вида (3.2), где потенциалы $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ принадлежат Φ. В такой ситуации проходит основная часть рассуждений из доказательства теоремы 3.2, откуда получаем, что $\lambda(\varphi)$ является выпуклым непрерывным функционалом на пространстве Φ. Поэтому сопряженный по Лежандру функционал определен на сопряженном пространстве Φ^* и эффективная область сопряженного функционала λ^* принадлежит множеству нормированных положительных линейных функционалов.

Пусть Φ является не только подпространством, но и C^*-подалгеброй алгебры $[L_\infty(X, \mu)]^m$. Тогда преобразование Гельфанда устанавливает изометрический изоморфизм этой алгебры с алгеброй $C(Y)$ непрерывных функций на некотором компактном пространстве Y – пространстве максимальных идеалов алгебры Φ. В этом более частном случае каждый нормированный положительный линейный функционал на Φ задается с помощью вероятностной меры на Y и эффективная область сопряженного функционала принадлежит множеству $\mathrm{PM}(Y)$.

Например, в условиях теоремы 3.2 мы имели компактное пространство X, $\Phi = [C(X)]^m$ и $Y = X \times M$.

Другим примером, когда выполнены сделанные предположения, может служить ситуация, когда пространство X локально компактно, коэффициенты непрерывны, положительны и для каждого коэффициента существует положительный предел на бесконечности. Тогда пространство максимальных идеалов алгебры потенциалов Φ есть $Y = \widetilde{X} \times M$, где $\widetilde{X}$ есть компактификация александрова пространства X бесконечно удаленной точкой.

Сделанные замечания приводят к следующему обобщению.

Теорема 4.1. *Пусть X есть пространство с мерой μ, отображения $\alpha_k \colon X \to X$, $k = 1, 2, \dots, m$, измеримы и сохраняют меру μ, и пусть Φ есть подпространство пространства $[L_\infty(X, \mu)]^m$. В пространстве $L_p(X, \mu)$ рассмотрим множество операторов A вида*

$$A = \sum_{k=1}^{m} e^{\varphi_k} T_{\alpha_k}, \tag{4.1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \Phi$. Тогда существует такой выпуклый полунепрерывный снизу функционал $\mathscr{T}$ на множестве $\mathrm{PN}(\Phi^*)$ положительных нормированных функционалов на пространстве Φ, что для любого оператора A справедлив следующий вариационный принцип:

$$\ln r(A) = \max\{f(\varphi) - \mathscr{T}(f) : f \in \mathrm{PN}(\Phi^*)\}. \tag{4.2}$$

В частности, если Φ *является* C^**-подалгеброй алгебры* $[L_\infty(X,\mu)]^m$ *и* Y *есть пространство максимальных идеалов этой алгебры, то существует такой выпуклый полунепрерывный снизу функционал* $\mathscr{T}$ *на множестве* $\mathrm{PM}(Y)$ *вероятностных мер на пространстве* Y*, что для любого оператора* A *справедлив следующий вариационный принцип:*

$$\ln r(A) = \max\left\{ \int_Y \widehat{\varphi}\, d\nu - \mathscr{T}(\nu) : \nu \in \mathrm{PM}(Y) \right\}, \tag{4.3}$$

где $\widehat{\varphi} \in C(Y)$ *есть преобразование Гельфанда функции* φ *из* Φ.

Пространство максимальных идеалов Y устроено тем сложнее, чем сложнее поведение коэффициентов. Поэтому сделанное обобщение позволяет учитывать сложность поведения коэффициентов, сводя вопрос к рассмотрению соответствующего пространства максимальных идеалов. Это может быть полезным и при рассмотрении операторов в пространстве $C(X)$ на компактном пространстве X в случае, когда потенциалы принадлежат некоторой подалгебре $\Phi \subset [C(X)]^m$.

Замечание 4.1. В рассмотренную схему можно включить еще более общую ситуацию, допускающую вырождения, – когда значения коэффициентов отделены от нуля на некотором подмножестве X_0 из X, а на дополнении коэффициенты имеют значение нуль. Тогда пространство Φ рассматриваем как подпространство в $[L_\infty(X_0,\mu)]^m$ и получаем полностью аналогичное утверждение.

Обсудим еще одно обобщение, связанное с заменой условия инвариантности меры μ, задающей пространство $L_p(X,\mu)$, в котором действуют рассматриваемые операторы, на условие квазиинвариантности. Говорят, что мера μ на пространстве X *квазиинвариантна* относительно отображения $\alpha\colon X \to X$, если условие $\mu(E) = 0$ равносильно условию $\mu(\alpha^{-1}(E)) = 0$.

Пусть мера μ_α на X задана формулой $\mu_\alpha(E) = \mu(\alpha^{-1}(E))$. Из условия квазиинвариантности меры μ следует, что существует производная Радона–Никодима $\varrho(x) = \dfrac{\partial \mu_\alpha}{\partial \mu}$, причем $\varrho(x) > 0$ почти всюду. Тогда оператор T_α, заданный формулой

$$(T_\alpha u)(x) = \varrho(x)^{1/p} u(\alpha(x)),$$

является изометрическим в пространстве $L_p(X,\mu)$ и обратимым в случае обратимого α.

В частности, в случае квазиинвариантной меры оператор взвешенного сдвига $Au(x) = a(x)u(\alpha(x))$ в пространстве $L_p(X,\mu)$ более удобно записывать в виде $Au = \widetilde{a}T_\alpha$, где $\widetilde{a}(x) = \varrho(x)^{-1/p}a(x)$ есть так называемый *приведенный коэффициент.* Заметим, что условием ограниченности оператора взвешенного сдвига в такой ситуации является ограниченность приведенного коэффициента $\widetilde{a}$, а не ограниченность исходного коэффициента a, причем $\|A\| = \|\widetilde{a}\|_\infty$.

Аналогично можно записывать многочленные функциональные операторы в пространстве $L_p(X,\mu)$ в случае, когда мера μ квазиинвариантна относительно всех преобразований α_k. В пространстве $L_p(X,\mu)$ зададим изометрические операторы T_{α_k} формулой

$$(T_{\alpha_k} u)(x) = \varrho_k(x)^{1/p} u(\alpha(x)), \qquad \varrho_k(x) = \frac{\partial \mu_{\alpha_k}}{\partial \mu}\,, \tag{4.4}$$

и рассмотрим операторы вида (4.1), где операторы T_{α_k} имеют вид (4.4). Заметим, что при такой записи коэффициенты $\widetilde{a}_k = e^{\varphi_k}$ являются приведенными коэффициентами. Если оператор A задан формулой (1.1), то для его записи в виде (4.1) в пространстве $L_p(X,\mu)$ нужно положить

$$\widetilde{a}_k(x) = \varrho_k(x)^{-1/p} a_k(x).$$

Как и выше, условием ограниченности оператора A является условие ограниченности приведенных коэффициентов, в то время как неприведенные коэффициенты могут быть неограниченными.

Для введенных операторов проходят все рассуждения из доказательства теоремы 3.2 и возможны все обобщения, описанные выше. В результате приходим к следующему утверждению, относящемуся к существенно более широкому классу операторов.

Теорема 4.2. *Пусть X есть пространство с мерой μ, $\alpha_k\colon X \to X$, $k = 1, 2, \ldots, m$, есть измеримые отображения* (*которые могут быть необратимыми*), *мера μ квазиинвариантна относительно всех отображений α_k, и пусть задано подпространство Φ пространства $[L_\infty(X,\mu)]^m$. Тогда в пространстве $L_p(X,\mu)$ для операторов вида* (4.1), *где $\varphi \in \Phi$ и операторы T_{α_k} определены формулой* (4.4), *справедливы все утверждения теоремы* 4.1.

Если рассмотреть в пространствах $L_p(X,\mu)$ с разными p функциональные операторы, заданные одной формулой (1.1), то для применения теоремы 4.2 операторы нужно записать в виде (4.1) с помощью приведенных коэффициентов $\widetilde{a}_k(x) = \varrho_k(x)^{-1/p} a_k(x)$. В результате появляется более сложная зависимость спектрального радиуса от показателя p: от p зависят приведенные коэффициенты и в общем случае от p зависит функционал $\mathscr{T}(\nu)$.

Существенность сделанных обобщений будет видна из приведенных ниже примеров.

§ 5. Символические последовательности

Прямая конструкция функционала $T(\nu)$, использующая только заданные отображения без использования двойственности, будет приведена в следующем параграфе. В настоящем параграфе по оператору A строятся некоторые последовательности функций, названные символическими, и показано, что при некоторых дополнительных ограничениях спектральный показатель оператора A является показателем Ляпунова соответствующей последовательности. Конструкция искомого функционала возникает при анализе выражения для символической последовательности.

Показателем Ляпунова последовательности $b = (b_n)$ неотрицательных чисел называется величина

$$\chi(b) = \limsup_n \frac{1}{n} \ln b_n.$$

В частности, спектральный показатель оператора A есть показатель Ляпунова последовательности $\|A^n\|$.

Отметим ряд свойств показателей Ляпунова.

Если, начиная с некоторого номера, выполнено $b_n = 0$, то $\chi(b) = -\infty$.

Если выполнено неравенство $b_{n+m} \leqslant b_n b_m$, то существует обычный предел $\chi(b) = \lim \frac{1}{n} \ln b_n$.

Если последовательность $b = (b_n)$ состоит из натуральных чисел, то $\chi(b) \geqslant 0$. Числовую последовательность b, состоящую из натуральных чисел, будем называть *субэкспоненциальной*, если $\chi(b) = 0$, что эквивалентно тому, что

$$\lim \frac{1}{n} \ln b_n = 0.$$

Очевидны также следующие свойства:
1) из неравенства $a_n \leqslant b_n$ следует, что $\chi((a_n)) \leqslant \chi((b_n))$;
2) для любых двух последовательностей выполнено

$$\chi((a_n b_n)) \leqslant \chi((a_n)) + \chi((b_n));$$

3) для любых двух последовательностей выполнено

$$\chi((a_n + b_n)) = \max\{\chi((a_n)), \chi((b_n))\}.$$

Из свойства 3) следует аналогичное равенство для конечной суммы последовательностей.

Некоторым аналогом свойства 3) в случае бесконечного числа слагаемых может служить приведенная ниже лемма, описывающая показатель Ляпунова последовательности, построенной следующим образом. Пусть задана последовательность натуральных чисел m_n, и пусть последовательность b_n имеет следующее представление

$$b_n = \sum_{k=1}^{m_n} b_k^n, \tag{5.1}$$

где b_k^n, $1 \leqslant k \leqslant m_n$, $n = 1, 2, \dots,$ – заданные неотрицательные числа.

Лемма 5.1. *Если последовательность m_n субэкспоненциальна, то при любых b_k^n для последовательности b_n вида (5.1) выполнено*

$$\chi((b_n)) = \chi\big(\big(\max_{1 \leqslant k \leqslant m_n} b_k^n\big)\big).$$

Доказательство. Для любого n имеем

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant m_n} b_k^n \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} b_k^n \leqslant m_n \max_{1 \leqslant k \leqslant m_n} b_k^n.$$

Из свойств 1) и 2) показателей Ляпунова и субэкспоненциальности последовательности m_n получаем утверждение леммы.

В качестве примера получим следующее известное утверждение.

Следствие 5.1. *Пусть C_n^k есть биномиальные коэффициенты, a и b – положительные числа. Тогда*

$$\chi\big(\max_k C_n^k a^k b^{n-k}\big) = \ln(a + b),$$

в частности,

$$\chi\big(\max_k C_n^k\big) = \ln 2.$$

Доказательство. Число слагаемых в сумме

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a + b)^n$$

субэкспоненциально, поэтому утверждение следует из леммы.

Стандартное доказательство этого утверждения более громоздко: оно заключается в нахождении максимального члена и в получении его асимптотики с помощью формулы Стирлинга.

Эта лемма или ее модификации неоднократно используются в последующих вычислениях.

Пусть G есть группа (или полугруппа), $\Omega = \{g_1, \dots, g_m\}$ – некоторое конечное множество ее элементов. Через $|\Omega|$ будем обозначать число элементов множества Ω. Через Ω_n обозначим множество элементов из G, представимых в виде произведения n элементов, принадлежащих множеству Ω (среди этих элементов могут быть и совпадающие). Заметим, что число $|\Omega_n|$ зависит от соотношений между элементами множества Ω и при $n > 2$ имеем $|\Omega_n| < |\Omega|^n$. Множество Ω будем называть *субэкспоненциальным*, если последовательность $|\Omega_n|$ субэкспоненциальна, т.е. $\chi(|\Omega_n|) = 0$.

Группа G с конечным числом образующих $g_1, \dots, g_N$ называется *субэкспоненциальной*, если множество $F = \{g_1, \dots, g_N, g_1^{-1}, \dots, g_N^{-1}\}$ субэкспоненциально. Любая коммутативная группа субэкспоненциальна, так как для такой группы $|F_n| \leqslant (2n+1)^N$. Если группа G субэкспоненциальна, то любое ее конечное подмножество субэкспоненциально.

Вернемся к рассмотрению функциональных операторов. *Символической последовательностью* для оператора A будем называть последовательность функций

$$S_n(x) = \sum_{\xi \in M^n} a_\xi(x) = A^n \mathbf{1},$$

где функции $a_\xi(x)$ есть коэффициенты оператора A^n, заданного формулой (3.5), а $\mathbf{1}$ есть функция, тождественно равная 1.

Теорема 5.1. *Если $\alpha_k\colon X \to X$ – непрерывные отображения компактного пространства X, то для оператора A в пространстве $C(X)$, заданного формулой $A = \sum_1^m a_k T_{\alpha_k}$ с неотрицательными непрерывными коэффициентами a_k, выполнено равенство*

$$r(A) = \lim_n \|S_n\|^{1/n}, \tag{5.2}$$

которое может быть записано в виде

$$\ln r(A) = \chi((\|S_n\|)).$$

Доказательство. В пространстве $C(X)$ имеем $\|A^n\| = \|S_n\|$, откуда и следует утверждение теоремы.

Заметим, что полученное свойство является проявлением общей закономерности – выполнения равенства

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} = r(A) \tag{5.3}$$

для “типичных” функций. Содержательным здесь является то, что функция $\mathbf{1}$ является типичной.

В случае пространств $L_p(X,\mu)$ ситуация сложнее. Ниже показано, что при дополнительных условиях для спектрального радиуса в пространствах $L_p(X,\mu)$ также выполнено равенство (5.2). Отметим, что в этом случае равенство (5.2) не является частным случаем равенства (5.3), так как в (5.2) норма рассматривается в пространстве $C(X)$, а в (5.3) – в пространстве $L_p(X,\mu)$.

Предварительно проанализируем выражение для операторов A^n. Согласно (3.5) имеем

$$(A^n u)(x) = \sum_{\xi \in M^n} a_\xi(x) u(\alpha^\xi(x))$$

или

$$A^n = \sum_{\xi \in M^n} a_\xi T_{\alpha^\xi}, \tag{5.4}$$

где

$$M^n = \{\xi = (\xi_i)_{i=1}^n : \xi_i \in M = \{1, \dots, m\}\},$$
$$a_\xi(x) = a_{\xi_1}(x) a_{\xi_2}(\alpha_{\xi_1}(x)) \cdots a_{\xi_n}(\alpha_{\xi_1} \circ \cdots \circ \alpha_{\xi_{n-1}}(x)), \tag{5.5}$$
$$\alpha^\xi(x) = \alpha_{\xi_1} \circ \cdots \circ \alpha_{\xi_n}(x). \tag{5.6}$$

Напомним, что в случае, когда мера μ квазиинвариантна относительно каждого из отображений α_k, мы через T_{α_k} обозначаем операторы, заданные формулой (4.4), и при записи функционального оператора в виде $\sum a_k T_{\alpha_k}$ коэффициенты являются приведенными. При такой записи для оператора A^n выполнены равенства (5.4)–(5.6), если через a_ξ и a_d обозначать соответствующие приведенные коэффициенты.

В сумму (5.4) входят операторы T_{α^ξ} с некоторыми коэффициентами. При разных ξ отображения α^ξ (и соответствующие операторы T_{α^ξ}) могут совпадать. Пусть $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$; это множество будем рассматривать как подмножество группы (или полугруппы) G, порожденной заданными отображениями. Тогда множество (различных) операторов T_{α^ξ} параметризуется элементами множества Ω_n, число различных среди них есть $|\Omega_n|$. Поэтому выражение для A^n можем переписать в виде

$$A^n = \sum_{d \in \Omega_n} a_d T_d, \qquad a_d(x) = \sum_{\alpha^\xi = d} a_\xi(x). \tag{5.7}$$

Обратим внимание на то, что здесь коэффициенты a_d зависят от n, в используемых обозначениях эта зависимость проявляется через условие $d \in \Omega_n$.

Теорема 5.2. *Пусть (X, μ) – пространство с мерой, α_k – измеримые обратимые отображения пространства X, мера μ квазиинвариантна относительно каждого из этих отображений и функциональный оператор в пространстве $L_p(X, \mu)$ записан в виде $A = \sum a_k T_{\alpha_k}$, т.е. с приведенными коэффициентами.*

Если множество $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ субэкспоненциально, коэффициенты a_k принадлежат пространству $L_\infty(X, \mu)$ и неотрицательны, то

$$r(A) = \lim_n \max_{d \in \Omega_n} \|a_d\|^{1/n} = \lim_n \|S_n\|^{1/n} = \lim_n \Bigg(\sum_{d \in \Omega_n} \|a_d\| \Bigg)^{1/n}, \tag{5.8}$$

где нормы функций S_n и a_d вычисляются в пространстве $L_\infty(X, \mu)$.

Доказательство. В силу обратимости отображений α_k для $d \in \Omega_n$ имеем $\|aT_d\| = \|a\|_\infty$. Поэтому с учетом неотрицательности коэффициентов получаем неравенства

$$\|A^n\| \leqslant \sum_{d\in\Omega_n} \|a_d T_d\| = \sum_{d\in\Omega_n} \|a_d\| \leqslant |\Omega_n| \max_{d\in\Omega_n} \|a_d\|$$

$$\leqslant |\Omega_n| \Big\| \sum_{d\in\Omega_n} a_d \Big\| = |\Omega_n| \, \|S_n\| \leqslant |\Omega_n| \sum_{d\in\Omega_n} \|a_d\|.$$

Так как $\lim |\Omega_n|^{1/n} = 1$, получаем оценку спектрального радиуса сверху:

$$r(A) \leqslant \liminf_n \max_{d\in F^n} \|a^d\|^{1/n} \leqslant \liminf_n \|S_n\|^{1/n} \leqslant \liminf \Big(\sum_{d\in\Omega_n} \|a^d\| \Big)^{1/n}. \tag{5.9}$$

Теперь получим оценки снизу.

Лемма 5.2. *При выполнении условий теоремы 5.2 выполнены неравенства*

$$\Big\| \sum_{k\in M} a_k T_k \Big\| \geqslant \|a_j\| \qquad \forall\, j \in M. \tag{5.10}$$

Доказательство. В силу неотрицательности коэффициентов, как уже отмечалось, в пространстве $L_p(X,\mu)$ для оператора

$$A = \sum_{k\in M} a_k T_k$$

имеем

$$\|A\| = \sup_{u\geqslant 0, \|u\|=1} \|Au\| = \sup_{u\geqslant 0, \|u\|=1} \Big[\int_X \Big(\sum_{k\in M} a_k T_k \Big)^p d\mu \Big]^{1/p}.$$

Так как из неотрицательности a_k и $T_k u$ следует, что

$$\sum_{k\in M} a_k T_k u \geqslant a_j T_j u \qquad \forall\, j,$$

то далее получаем требуемые неравенства:

$$\|A\| \geqslant \sup_{u\geqslant 0, \|u\|=1} \Big[\int_X (a_j(x) u(h(x)))^p \, d\mu \Big]^{1/p} = \|a_j T_j\| = \|a_j\|.$$

Замечание 5.1. В случае знакопеременных коэффициентов неравенство (5.10) в общем случае не выполнено, достаточным условием его выполнения является следующее условие *топологически свободного действия* (см. [1], [5]). Говорят, что группа преобразований G действует на топологическом пространстве X *топологически свободно*, если для любого конечного набора F элементов группы G и любого открытого множества $U \subset X$ существует такая точка $x_0 \in U$, что все точки $g(x_0)$, $g \in F$, различны.

Применяя лемму к оператору A^n, получаем неравенство

$$\max_{d\in\Omega_n} \|a_d\| \leqslant \|A^n\|,$$

откуда

$$\|S_n\| = \left\| \sum_{d\in\Omega_n} a_d \right\| \leqslant \sum_{d\in\Omega_n} \|a_d\| \leqslant |\Omega_n| \max_{d\in\Omega_n} \|a_d\| \leqslant |\Omega_n| \, \|A^n\|.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\limsup_n \|S_n\|^{1/n} \leqslant \limsup_n \left(\sum_{d\in\Omega_n} \|a_d\| \right)^{1/n} \leqslant \limsup_n \max_{d\in\Omega_n} \|a_d\|^{1/n} \leqslant r(A). \quad (5.11)$$

Так как всегда нижний предел не превосходит верхнего, из (5.9) и (5.11) получаем равенства (5.8), включая существование пределов, входящих в эти равенства. Теорема доказана.

Следствие 5.2. *Если коэффициенты* $a_k \geqslant 0$ *постоянны, то в условиях теорем* 5.1 *и* 5.2 *имеем*

$$r(A) = \sum_1^N a_k. \quad (5.12)$$

Сделаем несколько замечаний о существенности условий теоремы 5.2, связанных с тем, что свойства функциональных операторов в пространствах $L_p(X, \mu)$ отличаются от свойств таких операторов в пространстве $C(X)$.

1. В пространствах $L_p(X,\mu)$ равенство $\|aT_\alpha\| = \|a\|$ выполнено также для инъективных отображений, и в таком случае также выполнено утверждение теоремы. Однако если отображения α_k не являются инъективными, то норма оператора aT_α может оказаться существенно меньше, чем $\|a\|$. Ввиду этого исследование функциональных операторов с необратимыми отображениями требует более тонких оценок нормы; именно это обстоятельство приводит к более сложным формулам (1.5), (1.6) спектрального радиуса оператора взвешенного сдвига в случае необратимого отображения. В частности, спектральный радиус операторов взвешенного сдвига, заданных одной и той же формулой в пространствах $L_p(X,\mu)$ с разными p, для необратимых отображений зависит от p, а для обратимых – не зависит.

2. Условие субэкспоненциальности семейства отображений также существенно. Это не очевидно и следует, например, из тонких результатов о симметричных случайных блужданиях на группах, полученных Х. Кестеном [25] и Р. И. Григорчуком [24]. В этих работах рассматривался вопрос о спектральном радиусе операторов вида

$$Au(x) = \sum_{k=1}^m a_k[u(h_k x) + u(h_k^{-1}x)], \qquad x \in G,$$

действующих в пространствах $l_2(G)$, где G – дискретная группа с образующими $h_1, \dots, h_m$. Заметим, что это весьма частный случай операторов вида (1.1) – здесь все коэффициенты постоянны, а отображения α_k имеют специальный вид: $\alpha_k(x) = h_k x$, $x \in G$. Однако и в таком случае задача не тривиальна и спектральный радиус вычислен только при еще более сильных предположениях. В частности, в [25] получено

Предложение 5.1. *Пусть G – дискретная свободная группа с образующими $h_1, \ldots, h_m$. Тогда в пространстве $l_2(G)$ для оператора с постоянными коэффициентами вида*

$$Au(x) = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{m} [u(h_k x) + u(h_k^{-1} x)], \qquad x \in G,$$

выполнено

$$r(A) = \frac{\sqrt{2m-1}}{m}.$$

В этом примере при $m \geqslant 2$ группа G не является субэкспоненциальной, в случае такой группы имеем

$$r(A) = \frac{\sqrt{2m-1}}{m} = \lim_n \max_{d \in \Omega_n} \|a_\xi^d\|^{1/n} < \lim_n \|S_n\|^{1/n} = 1,$$

т.е. утверждение теоремы в полном объеме не выполнено: спектральный радиус совпадает с одной из величин, входящих в равенство (5.8), и строго меньше другой величины. В частности, в этом примере не выполнено равенство (5.12), которое на первый взгляд может показаться очевидным.

Отметим в заключение, что идея рассмотрения близких по конструкции символических последовательностей для исследования функциональных операторов принадлежит В. В. Бреннеру [23] и результаты настоящего параграфа являются модификацией некоторых утверждений из [23].

§ 6. Показатель типичности меры

Спектральный радиус функционального оператора согласно теоремам 5.1 и 5.2 есть показатель Ляпунова последовательности норм (в пространстве $C(X)$) символической последовательности S_n. Анализ выражения для функций S_n позволяет получить комбинаторную конструкцию функционала, двойственным к которому является спектральный показатель оператора. Проведем такой анализ в случае, когда пространство X компактно, а отображения α_k непрерывны; в более общих ситуациях конструкция аналогична.

Для более наглядного описания идеи рассмотрим сначала случай, когда все коэффициенты совпадают: пусть $a_1(x) = \cdots = a_m(x) = a(x)$.

Обозначим через δ_x меру, сосредоточенную в точке $x \in X$, такую, что мера этой точки есть 1. Элемент $\xi \in M^n$ и точка x задают так называемую *эмпирическую меру*

$$\nu_{\xi,x} = \frac{1}{n}[\delta_x + \delta_{x_{1,\xi}} + \delta_{x_{2,\xi}} + \cdots + \delta_{x_{n-1,\xi}}], \tag{6.1}$$

где $x_{i,\xi} = \alpha_{\xi_1} \circ \cdots \circ \alpha_{\xi_i}(x)$. Такая мера сосредоточена на множестве точек траектории точки x, соответствующей элементу ξ. Среди точек траектории могут быть совпадающие, поэтому эмпирическая мера конкретной точки траектории есть k/n, где k есть число точек траектории, совпадающих с данной. В другой терминологии эмпирическая мера точки есть "относительное время пребывания" траектории в данной точке.

Через $\mathrm{ME}_n(x)$ обозначим множество эмпирических мер, порожденных всеми траекториями длины n точки x. Заметим, что все эмпирические меры положительные и нормированные, т.е. $\mathrm{ME}_n(x) \subset \mathrm{PM}(X)$. Через $\mathrm{ME}_n(X)$ обозначим множество всех эмпирических мер, соответствующих элементам из M^n, т.е.

$$\mathrm{ME}_n(X) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{ME}_n(x).$$

Используя потенциал $\varphi(x) = \ln a(x)$, получаем представления для коэффициентов a_ξ из (3.4) с помощью введенных эмпирических мер:

$$a_\xi(x) = \exp \int_X n\varphi \, d\nu_{\xi,x}.$$

Существенным для дальнейшего является то, что для разных элементов $\xi \in M^n$ соответствующие эмпирические меры могут совпадать, тогда функции $a_\xi(x)$ также совпадают (при любом исходном коэффициенте a). Для меры $\nu \in \mathrm{ME}_n(x)$ обозначим через $N(n,\nu,x)$ количество элементов $\xi \in M^n$, для которых $\nu_{\xi,x} = \nu$.

Тогда

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{\xi\in M^n} a_\xi(x) = \sum_{\nu\in\mathrm{ME}_n(x)} N(n,\nu,x) \exp\int_X n\varphi\, d\nu \\ &= \sum_{\nu\in\mathrm{ME}_n(x)} \exp\biggl[\ln N(n,\nu,x) + \int_X n\varphi\, d\nu\biggr], \\ \|S_n\| &= \max_{x\in X}\biggl[\sum_{\nu\in\mathrm{ME}_n(x)} \exp\biggl[\ln N(n,\nu,x) + \int_X n\varphi\, d\nu\biggr]\biggr], \end{aligned}$$

откуда

$$\ln r(A) = \lim_n \max_{x\in X} \frac{1}{n} \ln\biggl\{\sum_{\nu\in\mathrm{ME}_n(x)} \exp\biggl[\ln N(n,\nu,x) + \int_X n\varphi\, d\nu\biggr]\biggr\}. \tag{6.2}$$

Таким образом, вопрос сводится к вычислению предела в правой части (6.2). Однако непосредственному вычислению этого предела препятствует то, что множества мер ν, входящие в правую часть, при разных n разные и что число слагаемых в полученной сумме может расти экспоненциально. Поэтому произведем некоторую модификацию предыдущих рассуждений.

Пусть ν есть произвольная мера на X и W – ее окрестность в $*$-слабой топологии. Обозначим через $N(n,W,x)$ количество элементов $\xi \in M^n$, для которых $\nu_{\xi,x} \in W$. Зададим функционал $T(\nu)$ на $M(X)$ выражением

$$T(\nu) = \inf_W \limsup_n \frac{1}{n} \max_x \ln N(n,W,x). \tag{6.3}$$

Приведенное определение удобно интерпретировать на языке теории случайных блужданий. Рассмотрим следующий процесс случайных блужданий на множестве X: на каждом шаге точка $x \in X$ переходит в одну из точек $\alpha_k(x)$, $k = 1,2,\ldots,m$; вероятность каждого из таких переходов есть $1/m$. За n шагов получаем m^n различных траекторий, выходящих из точки x. Каждая траектория задается элементом $\xi \in M^n$. С такой точки зрения величина $1/m^n N(n,\nu,W,x)$ есть вероятность того, что эмпирическая мера, порожденная траекторией точки x, принадлежит окрестности W меры ν, т.е. характеризует типичность попадания эмпирической меры в окрестность W для данного процесса случайных блужданий. Тогда выражение

$$\limsup_n \frac{1}{n} \max_x \ln N(n, \nu, W, x)$$

является показателем Ляпунова типичности для данной окрестности меры ν. Поэтому определенный выше формулой (6.3) функционал $T(\nu)$ будем называть *показателем типичности скалярной меры* ν относительно набора отображений α_k, $k \in M$, или, более кратко, *функционалом типичности*.

В более общем случае различных коэффициентов требуются небольшие изменения приведенных конструкций. Определенную выше эмпирическую меру разобьем на m слагаемых и получим в результате векторную меру: компоненту с номером k искомой *эмпирической векторной меры* $\nu_{\xi,x}$, соответствующей элементу $\xi \in M^n$, зададим формулой

$$[\nu_{\xi,x}]_k = \frac{1}{n} \sum_{\xi_i = k} \delta_{x_{i,\xi}},$$

где, как и выше, $x_{i,\xi} = \alpha_{\xi_1} \circ \cdots \circ \alpha_{\xi_i}(x)$.

Для окрестности W векторной меры ν через $N(n, W, x)$ будем обозначать количество элементов $\xi \in M^n$, для которых векторные эмпирические меры $\nu_{\xi,x}$ принадлежат окрестности W. *Показателем типичности* $T(\nu)$ *векторной меры* ν относительно набора отображений α_k, $k \in M$, будем называть число

$$T(\nu) = \inf_{W \in O(\nu)} \limsup_n \frac{1}{n} \max_{x \in X} \ln N(n, W, x), \tag{6.4}$$

где $O(\nu)$ есть множество всех окрестностей меры ν.

С точки зрения рассмотренного выше процесса случайных блужданий на X введенная эмпирическая векторная мера учитывает предысторию блужданий частицы – учитывает, в результате действия какого из отображений α_k появилась очередная точка траектории. Для более наглядной интерпретации такой процедуры можно считать, что применение отображения с номером k приписывает очередной точке траектории некоторый цвет; тогда компонента с номером k, т.е. число $[\nu_{\xi,x}]_k(x_0)$, есть относительное время пребывания соответственно окрашенной части траектории в заданной точке x_0.

Можно дать и другую интерпретацию введенных величин. Рассмотрим *расширенный процесс блужданий* на пространстве $Y = X \times M$. Для этого зададим отображения $\beta_k \colon Y \to Y$ формулой $\beta_k(x, j) = (\alpha_k(x), k)$ и рассмотрим процесс случайных блужданий на Y, порожденный этими отображениями.

Векторную меру на X будем рассматривать как скалярную меру на пространстве Y.

Тогда определенная выше типичность ν как векторной меры на X совпадает с типичностью ν как скалярной меры на Y относительного расширенного процесса случайных блужданий.

Аналогично приведенным выше рассуждениям получаем представления для коэффициентов a_ξ с помощью введенных векторных эмпирических мер и потенциала $\varphi(x) = (\ln a_1(x), \ln a_2(x), \dots, \ln a_m(x))$:

$$a_\xi(x) = \exp \int_X n\varphi \, d\nu_{\xi,x},$$

где для вектор-функции

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$$

и векторной меры $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)$

$$\int_X \varphi \, d\nu_{\xi,x} = \sum_{k=1}^{m} \int_X \varphi_k \, d\nu_k.$$

Лемма 6.1. *Функционал $T(\nu)$ полунепрерывен сверху в $*$-слабой топологии, эффективная область функционала $T(\nu)$ принадлежит* $\mathrm{PM}(Y)$ *и, более точно, принадлежит совокупности предельных точек множества всех эмпирических мер.*

На эффективной области выполнено неравенство

$$0 \leqslant T(\nu) \leqslant \ln m.$$

Доказательство. Полунепрерывность сверху функционала $T(\nu)$ эквивалентна тому, что множество $M_C = \{\nu : T(\nu) < C\}$ открыто для любого $C \in \mathbb{R}$. Пусть $\nu_0 \in M_C$. Выберем число C_1 такое, что $T(\nu_0) < C_1 < C$. Согласно определению $T(\nu)$ существуют открытая окрестность $W(\nu_0)$ и натуральное $n(\nu_0)$ такие, что для всех $n \geqslant n(\nu_0)$ выполнено неравенство

$$\limsup_n \max_x \frac{1}{n} \ln N(n, W(\nu_0), x) \leqslant C_1.$$

Если $\nu \in W(\nu_0)$, то $W(\nu_0)$ является окрестностью меры ν, поэтому

$$\begin{aligned} T(\nu) &= \inf_{W \in O(\nu)} \limsup_n \max_x \frac{1}{n} \ln N(n, W, x) \\ &\leqslant \limsup_n \max_x \frac{1}{n} \ln N(n, W(\nu_0), x) \leqslant C_1 < C. \end{aligned}$$

Таким образом, у любой меры $\nu_0 \in M_C$ существует окрестность $W(\nu_0) \subset M_C$, т.е. M_C открыто.

Если мера ν не является предельной точкой множества эмпирических мер, то достаточно малая окрестность такой меры не содержит эмпирических мер, откуда следует, что $T(\nu) = -\infty$, т.е. эффективная область функционала принадлежит совокупности предельных точек множества всех эмпирических мер $\bigcup_n \mathrm{ME}_n(X)$, которая содержится в $\mathrm{PM}(X)$.

Так как $N(n, W, x) \leqslant m^n$, получаем, что функционал $T(\nu)$ ограничен сверху и $T(\nu) \leqslant \ln m$. То, что эта оценка точная, будет получено ниже (следствие 7.1).

Значение $T(\nu)$ определяется как точная нижняя грань показателей Ляпунова некоторых последовательностей неотрицательных целых чисел. Но для последовательностей неотрицательных целых чисел показатель Ляпунова есть либо $-\infty$, либо неотрицателен. Поэтому если $T(\nu) > -\infty$, то $T(\nu) \geqslant 0$. Лемма доказана.

Заметим, что в общем случае функционал $T(\nu)$ не является выпуклым. Действительно, пусть имеются две непересекающиеся орбиты и есть две меры ν_1 и ν_2, сосредоточенные на соответствующих орбитах, такие, что $T(\nu_j) \neq -\infty$. Если $\nu = 1/2(\nu_1 + \nu_2)$, то $T(\nu) = -\infty$, так как в окрестности меры ν нет эмпирических мер. Но если функционал выпуклый, то должно выполняться $T(\nu) \geqslant 1/2[T(\nu_1) + T(\nu_2)] > -\infty$. Таким образом, возможны случаи, когда функционал $T(\nu)$ не является выпуклым. Пример такой ситуации приведен в п. 10.3.

Введем еще один функционал на пространстве мер. Для векторной меры ν и элемента $d \in \Omega_n$ через $N_d(n, W, x)$ обозначим количество элементов $\xi \in M^n$, удовлетворяющих условию $\alpha_\xi = d$, для которых векторные эмпирические меры $\nu_{\xi,x}$ принадлежат окрестности W. Пусть

$$\widetilde{N}(n, W, x) = \max_{d \in \Omega_n} N_d(n, W, x).$$

Положим

$$T_M(\nu) = \inf_W \limsup_n \frac{1}{n} \max_{x \in X} \ln \max_{d \in \Omega_n} N_d(n, W, x). \tag{6.5}$$

Лемма 6.2. *Если множество* $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ *субэкспоненциально, то* $T(\nu) = T_M(\nu)$.

Доказательство. Согласно определениям имеем

$$N_d(n, \nu, W, x) \leqslant N(n, \nu, W, x) = \sum_{d \in \Omega_n} N_d(n, \nu, W, x),$$

откуда

$$\max_d \max_x N_d(n, \nu, W, x) \leqslant \max_x N(n, \nu, W, x) \leqslant \sum_{d \in \Omega_n} \max_x N_d(n, \nu, W, x).$$

Так как число слагаемых в последней сумме растет субэкспоненциально, утверждение следует из леммы 5.1.

Заметим, что определение функционалов $T(\nu)$ и $T_M(\nu)$ не использует обратимость отображений α_k. Обратимость этих отображений существенна только при установлении связи символической последовательности со спектральным радиусом функционального оператора в пространствах $L_p(X, \mu)$.

В более общих ситуациях, описанных в теоремах из § 4, некоторая модификация конструкции приводит к построению функционала типичности, определенного на пространстве, сопряженном к пространству Φ и обладающему аналогичными свойствами.

§ 7. Аддитивно-мультипликативная эргодическая теорема

Теперь мы имеем возможность сформулировать и доказать теорему о поведении последовательности $\|S_n\|$.

Классические эргодические теоремы содержат информацию о поведении последовательностей сумм вида

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} a(\gamma_k(x)) = \sum_0^{n-1} T_\gamma^k a,$$

и их можно назвать аддитивными.

Мультипликативные эргодические теоремы исследуют поведение последовательностей произведений вида

$$\prod_0^{n-1} a(\gamma_k(x)) = \prod_0^{n-1} T_\gamma^k a.$$

Мультипликативные эргодические теоремы обычно рассматриваются для матричнозначных функций, так как для скалярных положительных функций с помощью логарифмирования основные вопросы сводятся к аддитивным теоремам. Такие последовательности произведений скалярных функций возникают, в частности, при рассмотрении степеней оператора взвешенного сдвига. После логарифмирования и замены $\varphi = \ln a$ последовательность произведений превращается в последовательность вида

$$\sum_0^{n-1} \varphi(\gamma_k(x)) = \sum_0^{n-1} T_\gamma^k \varphi,$$

к которой применимы аддитивные эргодические теоремы.

В классических аддитивных эргодических теоремах (Биркгофа–Хинчина и фон Неймана) утверждается сходимость соответствующей последовательности почти всюду или в среднем. Однако в вопросах, связанных с вычислением спектрального радиуса, требуется информация о поведении последовательности максимумов функций указанного вида. В известной нам литературе по эргодической теории отражен только один случай, для которого получена такая информация: если существует только одна инвариантная мера (выполнено условие *сильной эргодичности*), то для любой непрерывной исходной функции φ последовательность средних сходится равномерно к постоянной функции [3]; тогда последовательность максимумов также сходится к этой постоянной. Однако такая ситуация является исключительной – равномерная сходимость имеет место только в случае сильной эргодичности.

Доказательство формулы (1.3) содержит фактически следующее утверждение, которое можно было бы назвать "максимальной" эргодической теоремой (слово максимальной берем в кавычки, так как этот термин уже используется для другого варианта эргодических теорем).

Предложение 7.1. *Если φ – непрерывная функция на компактном пространстве X и $\alpha\colon X \to X$ – непрерывное отображение, то*

$$\lim \max_x \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (\varphi(\alpha^k(x))) = \max_{\nu \in \mathrm{ME}_\alpha} \int_X \varphi(x)\, d\nu,$$

$$\lim \min_x \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} (\varphi(\alpha^k(x))) = \min_{\nu \in \mathrm{ME}_\alpha} \int_X \varphi(x)\, d\nu.$$

В рассматриваемой нами задаче символическая последовательность задана более сложным выражением, чем в указанных случаях: она представляет собой сумму произведений. Поэтому теоремы о пределах таких последовательностей можно назвать аддитивно-мультипликативными эргодическими теоремами. Введенные понятия позволяют получит одну из таких теорем.

Теорема 7.1 ("максимальная" аддитивно-мультипликативная эргодическая теорема). *Пусть X есть компактное топологическое пространство,*

$$\alpha_k\colon X \to X$$

– непрерывные отображения, $\varphi = (\varphi, \dots, \varphi)$ – непрерывная вектор-функция на X и

$$S_n(x) = \sum_{\xi \in M^n} a_\xi(x)$$

– символическая последовательность, порожденная вектор-функцией φ с помощью α_k. Тогда

$$\chi(\varphi) := \lim_n \frac{1}{n} \ln \max_x S_n(x) = \max_{\nu \in \mathrm{PM}(Y)} \Big[\int_Y \varphi \, d\nu + T(\nu) \Big], \tag{7.1}$$

где $T(\nu)$ есть показатель типичности векторной меры ν – функционал, построенный по отображениям α_k согласно (6.4), $Y = X \times M$,

$$\int_Y \varphi \, d\nu = \sum_{k=1}^m \int_X \varphi_k \, d\nu_k.$$

Доказательство. Напомним, что базу окрестностей меры ν_0 в $*$-слабой топологии образует семейство множеств вида

$$W(\nu_0; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p; \varepsilon) = \Big\{ \nu : \Big| \int_X \psi_i \, d\nu - \int_X \psi_i \, d\nu_0 \Big| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, p \Big\},$$

параметризованное числами $\varepsilon > 0$ и конечными наборами непрерывных вектор-функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p$. Без ограничения общности можем считать, что одна из этих вектор-функций совпадает с φ.

Докажем сначала неравенство

$$\int_X \varphi \, d\nu + T(\nu) \leqslant \chi(\varphi) \tag{7.2}$$

для произвольной вероятностной меры ν на $\widetilde{X}$.

Пусть $W(\nu, \varepsilon)$ есть окрестность меры ν указанного выше вида. В частности, для $\nu' \in W(\nu, \varepsilon)$ выполнено

$$\Big| \int_X \varphi \, d\nu' - \int_X \varphi \, d\nu \Big| < \varepsilon. \tag{7.3}$$

Для любого x очевидно неравенство

$$\sum_{\nu_{\xi,x} \in W(\nu,\varepsilon)} \exp \int_X n\varphi \, d\nu_{\xi,x} \leqslant \sum_{\xi \in M^n} \exp \int_X n\varphi \, d\nu_{\xi,x} = S_n(x).$$

В силу выбора окрестности имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_{\xi,x} \in W(\nu,\varepsilon)} \exp \int_X n\varphi \, d\nu_{\xi,x} &\geqslant \sum_{\nu_{\xi,x} \in W(\nu,\varepsilon)} \exp \Big[\int_X n\varphi \, d\nu - n\varepsilon \Big] \\ &= N(n, W(\nu,\varepsilon), x) \exp \Big[\int_X n\varphi \, d\nu - n\varepsilon \Big] \\ &= \exp \Big[\ln N(n, W(\nu,\varepsilon), x) + \int_X n\varphi \, d\nu - n\varepsilon \Big]. \end{aligned}$$

Поэтому из (7.3) получаем, что

$$\ln \sup_x N(n, W(\nu,\varepsilon), x) + \int_X n\varphi \, d\nu - n\varepsilon \leqslant \ln \max_x S_n(x),$$

откуда

$$\limsup_n \frac{1}{n}\ln\sup_x N(n, W(\nu,\varepsilon), x) + \int_X \varphi\, d\nu - \varepsilon \leqslant \lim_n \frac{1}{n}\ln\|S_n\| = \chi(\varphi).$$

Так как при уменьшении ε число $N(n, W(\nu,\varepsilon), x)$ может только уменьшиться, получаем далее

$$\inf_{\varepsilon>0}\limsup_n \frac{1}{n}\ln\sup_x N(n, W(\nu,\varepsilon), x) + \int_X \varphi\, d\nu \leqslant \chi(\varphi).$$

При переходе к точной нижней грани по всем окрестностям левая часть может только уменьшиться. Отсюда получаем (7.2), из чего следует неравенство

$$\sup_\nu\left[\int_X \varphi\, d\nu + T(\nu)\right] \leqslant \chi(\varphi).$$

Докажем противоположное неравенство. Согласно определению функционала $T(\nu)$ при заданном $\varepsilon > 0$ для произвольной меры ν существуют такая окрестность $W(\nu)$ и такое натуральное число $n(\nu)$, что в окрестности выполнено (7.3) и для всех $n \geqslant n(\nu)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n}\ln\sup_x N(n, W(\nu), x) \leqslant T(\nu) + \varepsilon.$$

Выбранные окрестности образуют открытое покрытие множества $\mathrm{PM}(Y)$. В силу компактности $\mathrm{PM}(Y)$ в $*$-слабой топологии существует конечное его подпокрытие $W(\nu_1), W(\nu_2), \dots, W(\nu_q)$.

Пусть $n(\varepsilon) = \max_i n(\nu_i)$. Оценим сверху функцию $S_n(x)$:

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \sum_{\xi\in M^n} \exp\int_X n\varphi\, d\nu_{\xi,x} \leqslant \sum_{i=1}^q \sum_{\nu_{\xi,x}\in W(\nu_i)} \exp\int_X n\varphi\, d\nu_{\xi,x} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^q N(n, W(\nu_i), x)\left[\exp\int_X n\varphi\, d\nu_i + n\varepsilon\right] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^q \exp\left[\ln N(n, W(\nu_i), x) + \int_X n\varphi\, d\nu_i + n\varepsilon\right],
\end{aligned}$$

откуда

$$\|S_n\| \leqslant \sum_{i=1}^q \exp\left[\max_x \ln N(n, W(\nu_i), x) + \int_X n\varphi\, d\nu_i + n\varepsilon\right].$$

Для $n > n(\varepsilon)$ получаем далее

$$\begin{aligned}
\|S_n\| &\leqslant \sum_{i=1}^q \exp\left[nT(\nu_i) + \int_X n\varphi\, d\nu_i + 2n\varepsilon\right] \\
&\leqslant q\max_i \exp\left[nT(\nu_i) + \int_X n\varphi\, d\nu_i + 2n\varepsilon\right]
\end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{n}\ln\|S_n\| \leqslant \max_i\left[T(\nu_i) + \int_X \varphi\, d\nu_i\right] + \frac{1}{n}\ln q + 2\varepsilon.$$

Число q не зависит от n, поэтому

$$\chi(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\|S_n\|\leqslant\max_i\Big[T(\nu_i)+\int_X\varphi\,d\nu_i\Big]+2\varepsilon\leqslant\sup_{\nu\in\mathrm{PM}(\widetilde{X})}\Big[T(\nu)+\int_X\varphi\,d\nu\Big]+2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε имеем искомую оценку сверху спектрального показателя

$$\chi(\varphi)\leqslant\sup_{\nu\in\mathrm{PM}(\widetilde{X})}\Big[T(\nu)+\int_X\varphi\,d\nu\Big]$$

и, следовательно, равенство

$$\chi(\varphi)=\sup_{\nu\in\mathrm{PM}(\widetilde{X})}\Big[T(\nu)+\int_X\varphi\,d\nu\Big].$$

Из того, что в $*$-слабой топологии функционал $T(\nu)$ полунепрерывен сверху и множество $\mathrm{PM}(Y)$ компактно, следует, что в последней формуле точную верхнюю грань можно заменить на максимум. Теорема доказана.

Следствие 7.1. *Имеем* $\max_\nu T(\nu)=\ln m$.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $\varphi=0$, тогда $S_n(x)\equiv m^n$ и $\chi(\varphi)=\ln m$.
По формуле (7.1) имеем $\max_\nu T(\nu)=\chi(0)=\ln m$, что и требовалось.

Аналогично доказывается теорема о поведении последовательности

$$\max_{d\in\Omega_n}\|a_d^n\|,$$

также возникающей в выражении для спектрального радиуса.

Теорема 7.2. *Пусть X есть компактное топологическое пространство, $\varphi=(\varphi,\dots,\varphi)$ – непрерывная вектор-функция на X, $T_M(\nu)$ – функционал, заданный формулой (6.5), и a_d^n, $d\in\Omega_n$, – система функций, порожденная вектор-функцией φ по формуле (5.7). Тогда*

$$\lim_n\frac{1}{n}\ln\max_{d\in\Omega_n}\|a_d^n\|=\max_{\nu\in P\,\mathrm{Mes}(\widetilde{X})}\Big[\int_X\varphi\,d\nu+T_M(\nu)\Big].$$

§ 8. Вариационные принципы для спектрального радиуса

Сформулируем теперь основной результат, непосредственно вытекающий из предшествующих теорем.

Теорема 8.1. *Пусть X есть компактное топологическое пространство, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ – произвольные непрерывные отображения пространства X, $\varphi=(\varphi,\dots,\varphi)$ – непрерывная вектор-функция на X, $Y=X\times M$ и $T(\nu)$ – функционал на $\mathrm{PM}(Y)$, заданный формулой (6.4).*

Тогда для спектрального показателя оператора

$$A=\sum_{k=1}^{N}e^{\varphi_k}T_{\alpha_k}\tag{8.1}$$

в пространстве $C(X)$ справедлив вариационный принцип:

$$\lambda(\varphi)=\max_{\nu\in\mathrm{PM}(Y)}\Big[\int_X\varphi\,d\nu+T(\nu)\Big].\tag{8.2}$$

Теорема 8.2. *Пусть X есть компактное топологическое пространство, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ – инъективные непрерывные отображения пространства X, сохраняющие меру μ, $\varphi=(\varphi,\dots,\varphi)$ – непрерывная вектор-функция на X и $T(\nu)$ – функционал на* $\mathrm{PM}(Y)$, *заданный формулой* (6.4).

Если отображения α_k обратимы, а множество $\Omega=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ субэкспоненциально, то для спектрального показателя оператора вида (8.1) *в любом из пространств $L_p(X,\mu)$ имеет место следующий вариационный принцип:*

$$\lambda(\varphi)=\ln r(A)=\max_{\nu\in\mathrm{PM}(Y)}\left[\int_X\varphi\,d\nu+T(\nu)\right]=\max_{\nu\in\mathrm{PM}(Y)}\left[\int_X\varphi\,d\nu+T_M(\nu)\right].$$

Аналогичный результат получаем в ситуациях, описанных в теоремах 4.1 и 4.2 и в замечании 4.1.

Напомним, что в теореме 4.2 мы рассматривали случай, когда мера μ квазиинвариантна относительно отображений α_k. Пусть Y есть пространство максимальных идеалов C^*-алгебры потенциалов Φ, и пусть эта алгебра является инвариантной относительно всех отображений $\varphi(x)\to\varphi(\alpha_k(x))$ и обратных к ним. Тогда указанные отображения являются автоморфизмами алгебры Φ.

Так как при автоморфизме алгебры максимальный идеал переходит в максимальный идеал, каждый такой автоморфизм порождает гомеоморфизм $\gamma_k\colon Y\to Y$ пространства Y максимальных идеалов. Таким образом, на компактном пространстве Y определен набор гомеоморфизмов γ_k. Пусть $T_\gamma(\nu)$ есть функционал на множестве $\mathrm{PM}(Y)$, построенный по формуле (6.4) исходя из отображений γ_k, т.е. показатель типичности меры относительно случайных блужданий, заданных с помощью отображений γ_k. На такой случай переносятся рассуждения из доказательства предыдущих теорем, и в результате получаем следующее общее утверждение.

Теорема 8.3. *Пусть X есть пространство с мерой μ, $\alpha_k\colon X\to X$, $k=1,2,\dots,N$, суть измеримые обратимые отображения, мера μ квазиинвариантна относительно всех отображений α_k, и пусть Φ является C^*-подалгеброй алгебры $[L_\infty(X,\mu)]^N$, инвариантной относительно всех отображений α_k и обратных к ним.*

Если множество $\Omega=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ субэкспоненциально, то для любого оператора в пространстве $L_p(X,\mu)$ вида

$$A=\sum_{k=1}^m e^{\varphi_k}T_{\alpha_k},$$

где операторы T_{α_k} заданы формулой (4.4), *а $\varphi=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m\}$ принадлежит Φ, справедлив следующий вариационный принцип:*

$$\lambda(\varphi)=\ln r(A)=\max_{\nu\in\mathrm{PM}(Y)}\left\{\int_Y\widehat{\varphi}\,d\nu+T(\nu)\right\},$$

где Y есть пространство максимальных идеалов алгебры Φ, $\widehat{\varphi}\in C(Y)$ – преобразование Гельфанда вектор-функции φ, а $T(\nu)$ есть функционал на $\mathrm{PM}(Y)$, *заданный формулой* (6.4) *с помощью отображений γ_k.*

В теореме 4.1 был рассмотрен более общий случай, когда Φ является C^*-подалгеброй алгебры $[L_\infty(X,\mu)]^N$, но условие инвариантности алгебры не выполнено. В такой ситуации аналогично строится функционал типичности на сопряженном пространстве и также справедлив вариационный принцип. Примеры таких построений приведены в пп. 10.5 и 10.6.

Сравним построенный функционал $T(\nu)$ с функционалом $\mathscr{T}(\nu)$, существование которого было получено в теоремах 3.1 и 3.2. Из полученных результатов следует, что $\lambda = (-T)^*$. Если бы функционал $-T(\nu)$ был полунепрерывным снизу и выпуклым вниз, то из этого следовало бы, что $-T = \lambda^* = \mathscr{T}$. Однако функционал $-T(\nu)$ полунепрерывен снизу, но в общем случае не является выпуклым. Поэтому согласно предложению 2.1 можно лишь утверждать, что в общем случае сопряженный функционал является наибольшим выпуклым и полунепрерывным снизу функционалом, не превосходящим $-T(\nu)$.

В случае оператора взвешенного сдвига (при $m = 1$) имеют место две формулы спектрального радиуса: (1.3) и (1.4). Отметим, что формула (1.3) является частным случаем формулы (3.3), а формула (1.4) – частным случаем формулы (8.2).

§ 9. Дискретизация задачи

Некоторое упрощение исследования функциональных операторов достигается с помощью метода дискретизации или траекторного подхода [1], [5]. Сущность этого метода заключается в следующем. Пусть G есть (дискретная) группа, порожденная отображениями α_k, и пусть $l_2(G)$ есть гильбертово пространство функций на G со стандартным скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{g\in G} u(g)\overline{v}(g), \qquad u, v \in l_2(G).$$

Обозначим через $\widetilde{T}_k$ оператор сдвига в пространстве $l_2(G)$, действующий по формуле $(\widetilde{T}_k v)(g) = v(h_k g)$. Для каждой точки $y \in X$ по функции $a \in C(X)$ построим функцию на G по формуле $a_y(g) = a(gy)$, $g \in G$, и оператору

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k T_k \tag{9.1}$$

поставим в соответствие оператор

$$A_y = \sum_{k=1}^{m} a_{k,y} \widetilde{T}_k, \tag{9.2}$$

действующий в пространстве $l_2(G)$.

Предложение 9.1. *Пусть X – компактное пространство. Если группа G действует топологически свободно и аменабельна, в частности если группа G субэкспоненциальна, то оператор A вида* (9.1) *обратим в пространстве $L_2(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда обратимы все операторы A_y. В частности,*

$$r(A) = \max_{y\in X} r(A_y). \tag{9.3}$$

Сформулированное предложение помогает при исследовании спектрального радиуса – оно сводит вычисление спектрального радиуса оператора A к вычислению спектральных радиусов операторов $r(A_y)$. Последние операторы устроены более просто – они действуют в пространстве $l_2(G)$ на дискретном пространстве G. Для спектрального радиуса каждого из операторов A_y справедлив вариационный принцип, и задача сводится к построению соответствующих функционалов типичности T_y для семейства операторов A_y.

Однако принципиальные сложности не исчезают, так как поведение коэффициентов соответствующих операторов A_y (т.е. строение алгебры коэффициентов) может оказаться достаточно сложным – оно определяется видом траектории точки y при действии группы в пространстве X и описывается следующим образом. Пусть $G(y) = \{g(y) : g \in G\}$ есть траектория точки y при действии группы G. Замыкание траектории точки $y \in X$, т.е. множество $\mathrm{Or}(y) = \overline{G(y)}$, будем называть *орбитой точки* y. При рассматриваемой конструкции для каждой точки $y \in X$ коэффициенты a_y дискретных операторов образуют алгебру, естественно изоморфную алгебре $C(\mathrm{Or}(y))$ непрерывных функций на орбите. При этом такая алгебра инвариантна относительно отображений α_k и функционал типичности T_y строится согласно описанным выше конструкциям.

Некоторые упрощения можно получить из следующих соображений.

Если точки y_1 и y_2 принадлежат одной траектории, то соответствующие операторы A_{y_1} и A_{y_2} подобны и, следовательно, их спектральные радиусы совпадают. Кроме того, если орбита точки y_1 содержится в орбите точки y_2, то как следствие предложения 9.1 получаем, что $r(A_{y_1}) \leqslant r(A_{y_2})$. Поэтому при вычислении максимума можно сузить множество точек y, по которому вычисляется максимум. В результате приходим к следующему *локализованному вариационному принципу.*

Теорема 9.1. *Пусть выполнены условия предложения* 9.1, *и пусть выделено множество точек* $X^o \subset X$ *со следующим свойством*: *орбита каждой точки* $y \in X$ *содержится в орбите одной из точек множества* X^o. *Тогда для спектрального показателя оператора* A *имеет место равенство*

$$\lambda(\varphi) = \max_{y \in X^o} \max_{\nu \in \mathrm{PM}(\mathrm{Or}(y))} \biggl[\int \varphi\, d\nu + T_y(\nu)\biggr].$$

Кроме того, в примерах часто оказывается, что орбиты всех точек из выделенного множества X^o подобны. Тогда достаточно найти функционал T_y только для одной из таких точек, что оказывается проще, чем непосредственное вычисление функционала типичности для всего пространства X.

Пример такой ситуации приведен в п. 10.3.

§ 10. Формулы спектрального радиуса для конкретных классов операторов

Основные сложности при попытках явного подсчета функционала $T(\nu)$ связаны с вычислением величин $N(n, W, \nu, x)$. Ниже приведены некоторые примеры, когда за счет простого поведения траекторий или простого вида коэффициентов функционал $T(\nu)$ удается найти в явном виде. На этих примерах также демонстрируется содержательность различных обобщений, сделанных выше.

10.1. Рассмотрим в пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$, состоящем из двусторонних числовых последовательностей, операторы вида

$$Au(x) = a(k)[u(k) + u(k+1)], \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{10.1}$$

где коэффициент $a(k)$ является положительной последовательностью, имеющей на $\pm\infty$ пределы $a(\pm\infty) \neq 0$. Это частный случай операторов, рассмотренных выше. Здесь $X = \mathbb{Z}$, это пространство не является компактным. Точки этого пространства в дальнейшем будем обозначать как через x, когда надо подчеркнуть связь с предыдущими рассуждениями, так и через k. Соответствующие отображения есть $\alpha_0(x) = x$ и $\alpha_0(x) = x + 1$. Множество Φ соответствующих потенциалов $\varphi(x) = \ln a(x)$, снабженное sup-нормой, является алгеброй вещественных последовательностей, имеющих на бесконечности пределы. Эта алгебра изоморфна алгебре $C(Y)$ непрерывных функций на пространстве $Y = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$ – компактификации $\mathbb{Z}$ двумя бесконечно удаленными точками. Поэтому согласно теореме 4.1 функционал, сопряженный к спектральному показателю, следует строить на пространстве вероятностных мер на Y. Гомеоморфизмы $\gamma_j\colon Y \to Y$, порожденные отображениями α_j, в рассматриваемом случае имеют вид $\gamma_0(x) = x$, $x \in Y$, $\gamma_1(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{Z}$, и $\gamma_1(\pm\infty) = \pm\infty$.

Любая вероятностная мера ν на пространстве Y задается с помощью неотрицательной последовательности $\nu(k)$, $k \in Y$, такой, что

$$\sum_{k \in Y} \nu(k) = 1.$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемые суммы входят слагаемые, соответствующие точкам $k = \pm\infty$.

Теорема 10.1. *Для операторов вида* (10.1) *с потенциалами из алгебры* $\Phi = C(Y)$, *где* $Y = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$, *эффективная область функционала, сопряженного к спектральному показателю, совпадает с* $\mathrm{PM}(Y)$, *этот функционал задается формулой*

$$\lambda^*(\nu) = -[\nu(+\infty) + \nu(-\infty)] \ln 2, \tag{10.2}$$

а для спектрального радиуса имеем выражение

$$r(A) = \max\{a(k),\, k \in \mathbb{Z};\ 2a(+\infty);\ 2a(-\infty)\}.$$

Доказательство. К рассматриваемому классу операторов применима теорема 8.1, и показатель типичности мер может быть построен непосредственно по определению. Подсчет и исследование поведения чисел $N(n, W(\nu), x)$ в данном случае удается осуществить в явном виде за счет того, что траектории устроены достаточно просто: на очередном шаге случайных блужданий точка либо остается на месте (при применении отображения α_0), либо сдвигается на единицу вправо (при применении отображения α_1).

Множества вида

$$W(\nu^0, \varepsilon, F) = \Big\{\nu \in \mathrm{PM}(Y) : |\nu(k) - \nu^0(k)| < \varepsilon \text{ при } -F \leqslant k \leqslant F,$$
$$\Big|\sum_{k>F} \nu(k) - \sum_{k>F} \nu^0(k)\Big| < \varepsilon,\ \Big|\sum_{k<-F} \nu(k) - \sum_{k<-F} \nu^0(k)\Big| < \varepsilon\Big\}, \tag{10.3}$$

где F – произвольное натуральное число, $\varepsilon > 0$, образуют базу окрестностей меры ν^0 в $*$-слабой топологии в пространстве $\mathrm{PM}(Y)$. Как и выше, здесь в рассматриваемые суммы входят слагаемые, соответствующие $k = +\infty$ или $k = -\infty$.

Здесь множество индексов есть $M = \{0, 1\}$. Для $\xi \in M^n$ обозначим

$$|\xi| = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Скалярная эмпирическая мера, порожденная траекторией точки $x \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$\nu_{x,\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{|\xi|} B(k,\xi)\delta_{x+k},$$

где коэффициент $B(k,\xi)$ есть время пребывания траектории точки x в точке $x+k$, он описывается следующим образом. Последовательность $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in M^n$, состоящую из нулей и единиц, рассмотрим как последовательность серий из нулей, разделенных единицами, считая, что между двумя соседними единицами расположена серия нулей нулевой длины. Пусть q_k есть длина серии нулей, имеющей номер k. Тогда $B(k,\xi) = q_k + 1$. В данном случае последовательность ξ и точка x однозначно восстанавливаются по эмпирической мере, что и приводит к упрощению вычислений в рассматриваемом примере.

Прежде всего заметим, что точки $\pm\infty$ являются неподвижными для заданных отображений. Поэтому $\nu_{\pm\infty,\xi} = \delta_{\pm\infty}$ для любого ξ и $T(\delta_\pm) = \ln 2$.

Каждой мере ν поставим в соответствие вектор $p(\nu)$ длины $2F+3$, составленный из числа

$$p_{-\infty}(\nu) = \sum_{k<-F} \nu(k),$$

$2F+1$ чисел вида

$$p_k(\nu) = \nu(k), \qquad -F \leqslant k \leqslant F,$$

и числа

$$p_{+\infty}(\nu) = \sum_{k>F} \nu(k).$$

Как видно из определения окрестности, принадлежность меры $\nu_{x,\xi}$ окрестности вида (10.3) зависит только от вектора $p(\nu_{x,\xi})$.

При заданном n эмпирические меры разобьем на классы эквивалентности, включая в один класс те меры, для которых соответствующие векторы $p(\nu)$ совпадают. При заданном n числа p_k, $p_{\pm\infty}$, соответствующие эмпирическим мерам, принимают только значения, кратные $1/n$, при этом число различных значений не больше чем $n+1$. Для эмпирических мер, принадлежащих окрестности $W(\nu)$ заданной меры ν, для каждого из чисел p_k, $p_{\pm\infty}$ количество допустимых значений не превосходит числа $(n+1)\varepsilon$. Поэтому если $P(W)$ есть множество векторов p, соответствующих эмпирическим мерам, принадлежащим окрестности W, то число элементов множества $P(W)$ не превосходит числа $K_n = [(n+1)\varepsilon]^{2F+3}$.

Обозначим через $K(p,n,x)$ количество траекторий точки x, порождающих эмпирические меры из класса, соответствующего вектору p, т.е. $K(p,n,x) = |\{\xi \in M^n : p(\nu_{x,\xi}) = p\}|$. Тогда

$$N(n, W, \nu_0, x) = \sum_{p \in P(W)} K(p,n,x)$$

и

$$\max_{P(W),\, x} K(p,n,x) \leqslant \max_x N(n,W,\nu_0,x) \leqslant K_n \max_{P(W),\, x} K(p,n,x).$$

Так как количество слагаемых K_n имеет степенной и, следовательно, субэкспоненциальный рост, из леммы 5.1 получаем, что

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \max_x N(n,W,\nu_0,x) = \limsup_n \max_x \max_{p \in P(W)} \frac{1}{n} \ln K(p,n,x). \tag{10.4}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению показателей Ляпунова величины

$$\max_{x} \max_{p\in P(W)} K(p,n,x),$$

для чего следует вычислить или оценить величины $K(p,n,x)$ для векторов p, принадлежащих $P(W)$.

Пусть $p \in P(W)$. Сначала рассмотрим особые случаи.

Если $p_{-\infty} = 0$ и $p_k = 0$ при $-F \leqslant k \leqslant F$, то соответствующая эмпирическая мера порождена траекторией точки x тогда и только тогда, когда $x > F$. При этом все траектории порождают эквивалентные меры. Отсюда в указанном случае имеем $K(p,n,x) = 2^n = 2^{(np_{+\infty})}$, так как в рассматриваемом случае $p_{+\infty} = 1$.

Пусть $p_{-\infty} = 0$, среди чисел p_k при $-F \leqslant k \leqslant F$ есть ненулевые, $p_{+\infty} \neq 0$. Соответствующая эмпирическая мера порождена траекторией точки x тогда и только тогда, когда $-F \leqslant x \leqslant F$, причем $x = k_0 = \min\{k : p_k \neq 0\}$. Тогда часть траектории точки x, принадлежащая отрезку $[-F, F]$, определяется по числам p_k однозначно – длина первой серии из нулей есть $p_{k_0}n - 1$, длина второй серии есть $p_{k_0+1}n - 1$, длина третьей серии есть $p_{k_0+2}n - 1$ и т.д. Таким образом однозначно определяется начальный отрезок последовательности ξ длины $n\sum_k p_k$. На остальных местах в последовательности ξ может быть произвольная расстановка нулей и единиц. Так как количество остальных мест есть $n - n\sum_k p_k = np_{+\infty}$, получаем $K(p,n,x) = 2^{(np_{+\infty})}$. В частности, если $p_{+\infty} = 0$, то $K(p,n,x) = 1$, что отражает тот факт, что однозначно определяемый начальный отрезок совпадает со всей последовательностью ξ и, значит, существует только одна такая последовательность.

Так как в рассматриваемом случае число $K(p,n,x)$ может быть отлично от нуля только для одной точки x, то $\max_x 1/n \ln K(p,n,x) = p_{+\infty}\ln 2$, откуда

$$(p_{+\infty}(\nu) - \varepsilon)\ln 2 \leqslant \max_{p\in P(W),\, x} \frac{1}{n}\ln K(p,n,x) \leqslant (p_{+\infty}(\nu) + \varepsilon)\ln 2$$

и

$$(p_{+\infty}(\nu) - \varepsilon)\ln 2 \leqslant \limsup_{n} \max_{p\in P(W),\, x} \frac{1}{n}\ln K(p,n,x) \leqslant (p_{+\infty}(\nu) + \varepsilon)\ln 2.$$

Далее, вычисляем инфимум по окрестностям меры ν. Заметим, что при $F \to +\infty$ имеем $p_{\pm\infty}(\nu) \to \nu(\pm\infty)$. Так как при уменьшении ε и при увеличении F окрестность уменьшается, имеем

$$T(\nu) = \inf_{W} \limsup_{n} \max_{p\in P(W)} \max_{x} \frac{1}{n}\ln K(p,n,x) = \nu(+\infty)\ln 2.$$

Рассмотрим теперь общую ситуацию, когда $p_{-\infty} \neq 0$. Тогда эквивалентные эмпирические меры могут порождаться траекториями разных точек $x < -F$.

Траекторию точки x, соответствующую последовательности $\xi \in M^n$, разбиваем на три отрезка: начальный: точки вида $x + i$ при $x + i < -F$; средний: точки вида $x+i$ при $-F \leqslant x+i \leqslant F$; конечный: точки вида $x+i$ при $x+i > F$. Заметим, что в особых случаях среди этих отрезков могут оказаться пустые.

Соответственно разбиваем последовательность ξ на три отрезка. Начальный отрезок непуст, если $p_{-\infty} \neq 0$ и $x < -F$. Число членов в начальном отрезке должно быть $np_{-\infty}$, а число единиц в этой части должно быть $-F-x$. Поэтому при заданном x имеем $C_{np_{-\infty}}^{-F-x}$ возможных начальных отрезков последовательности ξ. Чтобы включить в общую схему особый случай $p_{-\infty}=0$, будем ниже считать, что $C_0^k=1$.

Средний отрезок последовательности ξ определяется по числам p_k однозначно. Действительно, в этом отрезке длина первой серии из нулей должна совпадать с числом $np_{k_0}-1$, длина второй серии есть $np_{k_0+1}-1$, длина третьей серии есть $np_{k_0+2}-1$ и т.д. Длина этой части последовательности ξ есть $n\sum_{-F}^{F}p_k$. Заметим, что здесь также появляются особые случаи. Например, если $p_k=0$ хотя бы для одного k, удовлетворяющего условию $-F\leqslant k\leqslant F$, то такой вектор не может быть порожден эмпирической мерой. Однако при достаточно большом n множество $P(W)$ содержит векторы p, для которых $p_k\neq 0$ и существует соответствующая траектория.

Конечная часть последовательности ξ, длина которой есть $np_{+\infty}$, может быть произвольной. Число таких различных конечных частей есть $2^{np_{+\infty}}$, причем это число не зависит от x.

Учитывая, что начальный и конечный отрезки могут быть выбраны независимо, получаем, что в множестве $P(W)$ при достаточно больших n существуют p и x, для которых $K(p,n,x)\neq 0$, и для таких $p\in P(W)$ выполнено

$$K(p,n,x)=C_{np_{-\infty}}^{(-F-x)}2^{np_{+\infty}}. \tag{10.5}$$

Найдем $\max_x K(p,n,x)$ для таких $p\in P(W)$. В полученном выражении (10.5) только индекс в биномиальном коэффициенте зависит от x. Как известно, при заданном m наибольшее значение биномиальный коэффициент C_m^k принимает при $k=[m/2]$, где $[\,\cdot\,]$ есть целая часть числа. Поэтому имеем

$$\max_{x\in\mathbb{Z}}K(p,n,x)=C_{np_{-\infty}}^{[np_{-\infty}]/2}2^{np_{+\infty}}.$$

Теперь из условия $p\in P(W)$ получаем, что

$$C_{n[p_{-\infty}(\nu)-\varepsilon]}^{n[p_{-\infty}(\nu)-\varepsilon]/2}2^{np_{+\infty}(\nu)-\varepsilon}\leqslant\max_{x,\,p\in P(W)}K(p,n,x)\leqslant C_{n[p_{-\infty}(\nu)+\varepsilon]}^{n[p_{-\infty}(\nu)+\varepsilon]/2}2^{np_{+\infty}(\nu)+\varepsilon}.$$

Рассмотрим показатели Ляпунова выражений, входящих в последнее неравенство. Для показателей Ляпунова биномиальных коэффициентов имеем

$$\lim_m\frac{1}{m}\ln C_m^{mp}=-p\ln p-(1-p)\ln(1-p), \tag{10.6}$$

что следует из формулы Стирлинга $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}$. Поэтому получаем далее

$$\begin{aligned}[p_{+\infty}(\nu)+p_{-\infty}(\nu)-2\varepsilon]\ln 2&<\max_{P(W),\,x}\frac{1}{n}\ln K(p,n,x)\\&<[p_{+\infty}(\nu)+p_{-\infty}(\nu)+2\varepsilon]\ln 2,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}[p_{+\infty}(\nu)+p_{-\infty}(\nu)-2\varepsilon]\ln 2&\leqslant\liminf_n\max_{P,\,x}\frac{1}{n}\ln K(p,n,x)\\&\leqslant\limsup_n\max_{P,\,x}\frac{1}{n}\ln K(p,n,x)\leqslant[p_{+\infty}(\nu)+p_{-\infty}(\nu)+2\varepsilon]\ln 2.\end{aligned} \tag{10.7}$$

Вычисляя инфимум по окрестностям и учитывая, что $p_{\pm\infty}(\nu) \to \nu(\pm\infty)$ при $F \to +\infty$, получаем из (10.7) искомое выражение для показателя типичности:

$$T(\nu) = [\nu(+\infty) + \nu(-\infty)] \ln 2.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае эффективная область функционала $T(\nu)$ совпадает с множеством всех вероятностных мер, причем этот функционал на эффективной области линейный и, следовательно, выпуклый. Заметим, что в общем случае выпуклость функционала $T(\nu)$ не была доказана. Согласно лемме 6.1 этот функционал полунепрерывен. Таким образом, в рассматриваемом случае согласно предложению 2.1 имеем $\lambda^* = -T$, т.е. мы построили функционал, сопряженный по Лежандру к спектральному показателю.

Для получения формулы спектрального радиуса вычислим (обратное) преобразование Лежандра. Имеем

$$\lambda(\varphi) = \max_{\nu \in \mathrm{PM}(X)} \left\{ \int_X \varphi(x)\, d\nu + [\nu(+\infty) + \nu(-\infty)] \ln 2 \right\}. \tag{10.8}$$

Множество $\mathrm{PM}(Y)$ в рассматриваемом примере представляет собой бесконечномерный симплекс с вершинами δ_x, где $x \in Y$. Правая часть в (10.8) является на этом симплексе линейным функционалом. Поэтому максимум достигается в одной из вершин и

$$\lambda(\varphi) = \max\{\varphi(k),\, k \in \mathbb{Z};\; \ln 2 + \varphi(+\infty);\; \ln 2 + \varphi(-\infty)\},$$

откуда

$$r(A) = \max\{a(k),\, k \in \mathbb{Z};\; 2a(+\infty);\; 2a(-\infty)\}.$$

Замечание 10.1. Обратим внимание на то, что здесь полунепрерывный функционал $T(\nu)$ не является непрерывным даже на эффективной области, что может показаться парадоксальным ввиду того, что на эффективной области рассматриваемый функционал имеет очень простой вид – он совпадает с линейным функционалом, заданным на сопряженном пространстве той же формулой (10.2). Действительно, пусть $\delta_{+\infty}$ есть мера, сосредоточенная в точке $+\infty$. Имеем $T(\delta_{+\infty}) = \ln 2$. Любая окрестность меры $\delta_{+\infty}$ в $*$-слабой топологии содержит меры δ_k, $k \in \mathbb{Z}$, при достаточно больших k. Но $T(\delta_k) = 0$, что противоречит непрерывности функционала.

Дело здесь в том, что при стандартной записи функционала в виде

$$f(\nu) = \sum_{k \in Y} b(k)\nu(k)$$

функционал $T(\nu)$ задается следующей последовательностью коэффициентов: $b(k) = 0$ при $k \in \mathbb{Z}$, $b(\pm\infty) = \ln 2$; такая последовательность не принадлежит исходному пространству $C(Y)$, откуда и следует разрывность функционала в $*$-слабой топологии.

Заметим, что для этого случая функционал $T(\nu)$ из других соображений был вычислен в магистерской работе Ю. Якубовской (Университет в Белостоке).

10.2. Рассмотрим в пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$, состоящем из двусторонних числовых последовательностей, операторы вида

$$Au(x) = a_0(k)u(k) + a_1(k)u(k+1), \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{10.9}$$

где коэффициенты являются положительными последовательностями, имеющими на $\pm\infty$ пределы $a_j(\pm\infty) \neq 0$.

Здесь, как и в предыдущем примере, $X = \mathbb{Z}$ и соответствующие отображения есть $\alpha_0(x) = x$ и $\alpha_0(x) = x + 1$. Множество Φ соответствующих потенциалов $\varphi_j(k) = \ln a_j(k)$, $j \in M$, где $M = \{0, 1\}$, снабженное sup-нормой, является алгеброй вещественных последовательностей двумерных векторов, имеющих на бесконечности пределы. Эта алгебра изоморфна алгебре непрерывных вектор-функций на пространстве $\widetilde{X} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Заметим, что эту алгебру также можно рассматривать как алгебру непрерывных скалярных функций на пространстве $Y = \widetilde{X} \times M$.

Таким образом, для рассматриваемых операторов функционал, сопряженный к спектральному показателю, следует строить на пространстве векторных вероятностных мер на $\widetilde{X}$ или, что то же, на пространстве скалярных мер на Y.

Любая вероятностная векторная мера на пространстве Y задается с помощью двух неотрицательных последовательностей $\nu_j(k)$, $j = 0, 1$, $k \in \widetilde{X}$, таких, что

$$\sum_{k \in \widetilde{X}} \nu_0(k) + \sum_{k \in \widetilde{X}} \nu_1(k) = 1.$$

Как и выше, в рассматриваемые суммы входят слагаемые, соответствующие точкам $k = \pm\infty$.

Теорема 10.2. *Для оператора вида* (10.9) *с потенциалами из алгебры* $\Phi = C(Y)$, *где* $Y = \widetilde{X} \times M$, *эффективная область* $D(\lambda^*)$ *функционала* $\lambda^*(\nu)$, *сопряженного к спектральному показателю, состоит из таких вероятностных мер на* Y, *для которых* $\nu(x, 1) = 0$ *при* $x \in \mathbb{Z}$, *а значение этого функционала на векторной вероятностной мере* $\nu = (\nu_0, \nu_1) \in D(\lambda^*)$ *задается формулой*

$$\lambda^*(\nu) = \nu(+\infty)\left[-\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} \ln \frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} - \frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)} \ln \frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\right]$$
$$- \nu(-\infty)\left[\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} \ln \frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} - \frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)} \ln \frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\right],$$

где $\nu(\pm\infty) = \nu_0(\pm\infty) + \nu_1(\pm\infty)$.

Для спектрального радиуса оператора A *имеет место формула*

$$r(A) = \max\{a_0(k),\, k \in \mathbb{Z}; a_0(+\infty) + a_1(+\infty);\ a_0(-\infty) + a_1(-\infty)\}.$$

Доказательство. Множества вида

$$W(\nu^0, \varepsilon, F) = \Big\{\nu \in \mathrm{PM}(Y) : |\nu(k, j) - \nu^0(k, j)| < \varepsilon \text{ при } -F \leqslant k \leqslant F,$$
$$\Big|\sum_{k>F} \nu(k, 0) - \sum_{k>F} \nu^0(k, 0)\Big| < \varepsilon,\ \Big|\sum_{k>F} \nu(k, 1) - \sum_{k>F} \nu^0(k, 1)\Big| < \varepsilon\Big\} \quad (10.10)$$

образуют базу окрестностей меры ν^0 в $*$-слабой топологии.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in M^n$ есть последовательность, задающая траекторию. Компонента с номером $j, j \in M$, векторной эмпирической меры, порожденной траекторией длины n точки $x \in \mathbb{Z}$, имеет вид

$$(\nu_{x,\xi})_j = \frac{1}{n} \sum_{k=x}^{x+n-1} B_j(k, \xi)\delta_{x+k},$$

где коэффициенты $B_j(k,\xi)$, $j \in M$, могут быть описаны следующим образом. Как и в п. 10.1, последовательность $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in M^n$, состоящую из нулей и единиц, рассмотрим как последовательность серий из нулей, разделенных единицами, считая, что между двумя соседними единицами расположена серия нулей нулевой длины. Пусть q_k есть длина серии нулей, имеющей номер k. Тогда полагаем $B_0(k,\xi) = q_k$, $B_1(k,\xi) = 1$. Заметим, что в п. 10.1 при построении скалярной эмпирической меры мы полагали $B(k,\xi) = q_k + 1$; при построении векторной эмпирической меры число $B(k,\xi)$ разбивается на две компоненты.

Вычислим функционал T векторных мер. Аналогично случаю скалярных мер для меры ν введем вектор $p(\nu)$, составленный из $2(2F+3)$ чисел:

$$p(\nu; k, j) = \nu(k,j) \quad \text{для} \quad -F \leqslant k \leqslant F, \quad j = 0, 1,$$
$$p(\nu; +\infty, j) = \sum_{k>F} \nu(k,j), \qquad p(\nu; -\infty, j) = \sum_{k<-F} \nu(k,j).$$

При заданном n эмпирические меры разобьем на классы эквивалентности, включая в один класс те меры, для которых указанные векторы $p(\nu)$ совпадают. Через $K(p,n,x)$ обозначим количество траекторий точки x, порождающих класс эквивалентных мер с заданным вектором p. Пусть $P(W)$ есть множество векторов p, для которых соответствующие эмпирические меры принадлежат окрестности W. Аналогично равенству (10.4) получаем

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln \max_x N(n, W, \nu_0, x) = \lim_n \max_{p \in P(W)} \max_x \frac{1}{n} \ln K(p,n,x), \tag{10.11}$$

и задача сводится к вычислению и исследованию поведения величин

$$K(p,n,x) = |\{\xi : p(\nu_{x,\xi}) = p\}|$$

для $p \in P(W)$.

Отличие от скалярного случая возникает при вычислении величин $K(p,n,x)$.

Точки $\pm\infty$ являются неподвижными для заданных отображений, и соответствующая скалярная эмпирическая мера есть соответственно $\delta_{\pm\infty}$. Разбиение ее на векторные окрашенные компоненты зависит от ξ и происходит по правилу

$$(\delta_{\pm\infty,\xi})_1 = \frac{1}{n}\left(\sum_i \xi_i\right)\delta_{\pm\infty,1}, \qquad (\delta_{\pm\infty,\xi})_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\sum_i \xi_i\right)\delta_{\pm\infty,0}.$$

Рассмотрим меры, которые не сосредоточены на плюс или минус бесконечности. Прежде всего обратим внимание на то, что для вектора p, соответствующего любой эмпирической мере, выполнено $0 \leqslant p(k,1) \leqslant 1/n$. Поэтому если мера ν такова, что $\nu(k,1) \neq 0$ хотя бы для одного $k \in \mathbb{Z}$, то для достаточно больших F и n и достаточно малого ε в окрестность W не попадает ни одна эмпирическая мера, множество $P(W)$ пусто, откуда следует, что $T(\nu) = -\infty$. Таким образом, получаем необходимое условие того, что мера ν принадлежит эффективной области функционала $T(\nu)$:

$$\nu(k,1) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10.12}$$

Пусть для меры ν выполнено необходимое условие (10.12) и эта мера не сосредоточена на плюс или минус бесконечности.

Как и в доказательстве теоремы 10.1, траекторию точки x разбиваем на три отрезка: начальный – точки вида $x+i$ при $x+i < -F$; средний – точки вида

$x+i$ при $-F \leqslant x+i \leqslant F$; конечный – точки вида $x+i$ при $x+i > F$. Здесь, как и в доказательстве теоремы 10.1, имеются особые случаи, когда некоторые из этих частей пусты и приведенные ниже рассуждения требуют модификации. Найдем в типичном случае, для каких ξ вектор, порожденный эмпирической мерой, совпадает с заданным.

Последовательность ξ разбиваем на соответствующие три части. Число членов в начальной части должно быть $np(-\infty,0)+np(-\infty,1)$, а число единиц последовательности в этой части должно быть $np(-\infty,1)$. Но, с другой стороны, число единиц в этой части траектории должно быть равно $-F-x$. Поэтому существует только одна точка $x=-F-np(-\infty,1)$, траектории которой могут порождать эмпирическую меру из данного класса. При этом число различных возможных начальных отрезков последовательности ξ есть $C_{np_{-\infty}}^{np(-\infty,1)}$.

Аналогично доказательству теоремы 10.1 проверяем, что средняя часть последовательности ξ определяется по числам $p(k,j)$ однозначно, причем при проверке существования соответствующей последовательности ξ здесь используется условие (10.12).

Конечная часть последовательности ξ должна иметь длину $np(+\infty,0)+np(+\infty,1)$ и содержать $np(+\infty,1)$ единиц. Число таких различных конечных частей есть $C_{np(+\infty)}^{np(+\infty,1)}$.

Начальные и конечные части последовательности ξ могут быть выбраны независимо. Поэтому существует только одна точка x, для которой

$$K(p,n,x) \neq 0,$$

и для этой точки

$$K(p,n,x) = C_{np(-\infty)}^{np(-\infty,1)} C_{np(+\infty)}^{np(+\infty,1)}.$$

Таким образом,

$$\max_x K(p,n,x) = C_{np(-\infty)}^{np(-\infty,1)} C_{np(+\infty)}^{np(+\infty,1)}.$$

Используя асимптотику биномиальных коэффициентов (10.6), получаем далее

$$\begin{aligned}
\nu(+\infty)&\left[-\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)}\ln\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} - \frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\ln\frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\right] \\
&\qquad - \nu(-\infty)\left[\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)}\ln\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} - \frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\ln\frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\right] - 2\varepsilon \\
&< \max_{P,\,x}\frac{1}{n}\ln K(p,n,x) \\
&< \nu(+\infty)\left[-\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)}\ln\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} - \frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\ln\frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\right] \\
&\qquad - \nu(-\infty)\left[\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)}\ln\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} - \frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\ln\frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\right] + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу (10.11) и вычисляя инфимум по окрестностям, получаем выражение для функционала типичности:

$$\begin{aligned}
T(\nu) = \nu(+\infty)&\left[-\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)}\ln\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} - \frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\ln\frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)}\right] \\
&- \nu(-\infty)\left[\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)}\ln\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} - \frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\ln\frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\right].
\end{aligned}$$

Множество $\mathrm{PM}(Y)$ представляет собой бесконечномерный симплекс, порожденный вершинами $(\delta_k)_j$, $k \in \mathbb{Z}$, и $(\delta_{\pm\infty})_j$, $j = 0, 1$. Эффективная область построенного функционала есть часть множества $\mathrm{PM}(Y)$ и является бесконечномерным подсимплексом, порожденным вершинами $(\delta_k)_0$, $k \in \mathbb{Z}$, и четырьмя выделенными вершинами $(\delta_{\pm\infty})_j$, $j = 0, 1$. Этой эффективной области принадлежат те и только те вероятностные меры, у которых компонента с номером 1 удовлетворяет условию $\nu_1(k) = 0$ при $k \in \mathbb{Z}$. Несимметричность эффективной области отражает то, что коэффициенты a_0 и a_1 не равноправны – при перестановке коэффициентов спектральные свойства рассматриваемого оператора изменяются.

Построенный функционал $T(\nu)$ оказался выпуклым. Это легко увидеть из следующих соображений. Эффективная область есть выпуклая оболочка вершин $(\delta_k)_0$, $k \in \mathbb{Z}$, и двух отрезков вида

$$I_{\pm\infty} = p(\delta_{\pm\infty})_0 + (1-p)(\delta_{\pm\infty})_1, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 1.$$

На указанных отрезках функционал задан формулой вида $-p\ln p - (1-p) \times \ln(1-p)$ и является выпуклой вверх функцией.

Зафиксируем точку отрезка $I_{+\infty}$ и точку отрезка $I_{-\infty}$ и рассмотрим бесконечномерный симплекс, порожденный зафиксированными точками и точками $(\delta_k)_0$, $k \in \mathbb{Z}$. На каждом таком симплексе функционал $T(\nu)$ является линейным и, следовательно, выпуклым. Кроме того, каждая точка из эффективной области принадлежит одному и только одному симплексу указанного вида. Отсюда получаем, что функционал $T(\nu)$ является выпуклым и, более точно, является овыпуклением своего сужения на замкнутое подмножество $D_0(T)$, состоящее из отрезков $I_{\pm\infty}$ и точек $(\delta_k)_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому в рассматриваемом примере в силу предложения 2.1 имеем $\lambda^*(\nu) = -T(\nu)$.

Для получения формулы спектрального радиуса вычислим (обратное) преобразование Лежандра. Имеем

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi) &= \max_{\nu\in \mathrm{PM}(Y)}\left\{\int_X \varphi(x)\,d\nu + T(\nu)\right\} = \max_{\nu\in D(T)}\left\{\int_X \varphi(x)\,d\nu + T(\nu)\right\}\\ &= \max_{\nu\in D_0(T)}\left\{\int_X \varphi(x)\,d\nu + T(\nu)\right\}.\end{aligned}$$

Таким образом, в силу описанной выше структуры функционала максимум достигается либо в одной из вершин $(\delta_k)_0$, $k \in \mathbb{Z}$, либо на одном из отрезков $I_{\pm\infty}$.

Так как на указанных отрезках максимум вычисляется явно (см. п. 10.4), получаем окончательно

$$r(A) = \max\{a_0(k),\, k \in \mathbb{Z};\; a_0(-\infty) + a_1(-\infty);\; a_0(+\infty) + a_1(+\infty)\}.$$

10.3. В пространстве $L_p(\mathbb{R})$ рассмотрим операторы вида

$$Au(x) = a_0(x)u(x) + a_1(x)u(x+1),$$

где коэффициенты a_0 и a_1 – непрерывные функции, имеющие на $\pm\infty$ пределы. В этом примере, в отличие от предыдущего, существуют различные орбиты и оказывается полезным прием дискретизации.

Теорема 10.3. *Для операторов вида*

$$Au(x) = a_0(x)u(x) + a_1(x)u(x+1), \tag{10.13}$$

где коэффициенты a_0 и a_1 – непрерывные функции, имеющие на $\pm\infty$ пределы, в каждом из пространств $L_p(\mathbb{R})$ и в пространстве $CB(\mathbb{R})$ эффективная область функционала, сопряженного к спектральному показателю, совпадает с множеством таких векторных вероятностных мер на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$, для которых $\nu_1(\mathbb{R}) = 0$. На эффективной области этот функционал задан формулой

$$\lambda^*(\nu) = \nu_0(+\infty)\ln\frac{\nu_0(+\infty)}{\nu(+\infty)} + \nu_1(+\infty)\ln\frac{\nu_1(+\infty)}{\nu(+\infty)} + \nu_0(-\infty)\ln\frac{\nu_0(-\infty)}{\nu(-\infty)} + \nu_1(-\infty)\ln\frac{\nu_1(-\infty)}{\nu(-\infty)}\,.$$

Для спектрального радиуса таких операторов имеет место формула

$$r(A) = \max\{a_0(x),\, x\in\mathbb{R};\ a_0(-\infty)+a_1(-\infty);\ a_0(+\infty)+a_1(+\infty)\}.$$

Доказательство. Согласно теореме 8.2 спектральный радиус рассматриваемых операторов не зависит от p. В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ применим к рассматриваемому случаю прием дискретизации. При этом орбиты разных точек устроены одинаково и фактически нужно построить функционал для одной орбиты. При этом все операторы A_y, заданные формулой (9.2), в рассматриваемом случае имеют вид, изученный в п. 10.2. Поэтому утверждение следует из предложения 9.1 и теоремы 10.2.

В этом примере получаем, что эффективная область функционала T состоит из вероятностных векторных мер, сосредоточенных на орбитах – множествах вида $\mathrm{Or}(x) = \{x+k, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$. С геометрической точки зрения каждое множество $\mathrm{PM}(\mathrm{Or}(x))$ является бесконечномерным симплексом, порожденным четырьмя мерами $(\delta_{\pm\infty})_j$, $j=\overline{0,1}$, и счетным числом мер вида δ_{x+k}, $k\in\mathbb{Z}$. При разных x такие симплексы пересекаются только по трехмерному симплексу, порожденному вершинами $(\delta_{\pm\infty})_j$, $j=\overline{0,1}$, а эффективная область функционала T есть объединение таких симплексов. Такое объединение не является выпуклым множеством, из чего следует, что и функционал T не является выпуклым.

10.4. Рассмотрим оператор вида $A = \sum_0^m a_k T^k$, порожденный степенями одного оператора сдвига T, с постоянными положительными коэффициентами a_k. Согласно следствию 5.1 имеем

$$r(A) = \sum_0^m a_k, \qquad \lambda(\varphi) = \ln\sum_0^m e^{\varphi_k}.$$

Заметим, что для аналогичных операторов с произвольными постоянными коэффициентами получаем более сложное выражение спектрального радиуса

$$r(A) = \max_{|z|=1}\left|\sum_0^m a_k z^k\right|.$$

В данном случае потенциалы образуют пространство $\mathbb{R}^{m+1}\approx C(M)$. Положительный нормированный функционал на этом пространстве отождествляется с вероятностной мерой ν на конечном множестве M, задаваемой вектором $\nu(k)$, $k\in M$. Непосредственное вычисление преобразования Лежандра для функционала $\lambda(\varphi)$ дает

$$\lambda^*(\nu) = \sum_0^m \nu_k \ln \nu_k.$$

Обратим внимание на то, что последнее выражение совпадает с энтропией меры ν.

Проследим на этом примере, как строится функционал типичности меры. Все автоморфизмы алгебры потенциалов в рассматриваемом случае являются тождественными, соответствующие отображения $\gamma_k \colon M \to M$, введенные в § 8, также являются тождественными. Поэтому каждая скалярная эмпирическая мера, порожденная траекторией точки $k \in M$, есть δ_k, $N(W, \delta_k, n) = m^n$. Компоненты $\nu_{k,\xi}$ разбиения такой эмпирической меры на окрашенные компоненты при заданном n имеют вид $(\nu_{k,\xi})_j = 1/nB(n,j)$, где $B(n,j)$ есть число символов j в последовательности ξ. Поэтому для заданного нормированного вектора $P = (p_0, p_1, \dots, p_m)$, координаты которого кратны $1/n$, количество траекторий, порождающих векторную эмпирическую меру, совпадающую с P, есть полиномиальный коэффициент

$$\frac{n!}{(np_0)!\,(np_1)!\cdots(np_m)!}\,.$$

Применение формулы Стирлинга и переход к пределу приводят к искомому выражению для $\lambda^*(\varphi)$.

10.5. В теореме 3.3 отмечалось, что результаты могут быть применены к конечномерному случаю, т.е. к матрицам с положительными элементами. Функционал типичности меры в этом случае также может быть определен как в § 6.

Конструкцию функционала T в случае оператора в конечномерном пространстве можно пояснить следующим образом. При возведении матрицы A в степень элементы матрицы A^n являются многочленами степени n от элементов исходной матрицы. Мономы, входящие в указанные многочлены, могут быть представлены в виде

$$C(\beta)\prod_{i,j} a_{i,j}^{\beta_{i,j}} = \exp\biggl[\sum_{i,j}\beta_{i,j}\varphi_{i,j} + \ln C(\beta)\biggr],$$

где β есть мультииндекс с m^2 неотрицательными целочисленными компонентами такой, что $\|\beta\| := \sum\sum\beta_{i,j} = n$. Рассуждения из доказательства теоремы 5.2 показывают, что показатель Ляпунова последовательности норм $\|A^n\|$ совпадает с показателем Ляпунова последовательности из максимумов указанных мономов. Это приводит к следующему описанию функционала T в рассматриваемом случае. Матрицу будем рассматривать как функцию на пространстве X^2, где $X = \{1, 2, \dots, m\}$. Для произвольной вероятностной меры $\nu = (\nu_{i,j})$ на X^2 существует такая последовательность мультииндексов $\beta^{(n)}$ с нормой n, что $1/n\beta_{i,j}^{(n)} \to \nu_{i,j}$. Тогда $T(\nu) = \lim 1/n \ln C(\beta^{(n)})$. Таким образом, функционал характеризует поведение коэффициентов многочленов, задающих элементы матрицы A^n.

Построение в общем случае функционала T в явном виде проблематично, так как при вычислении коэффициентов возникают сложные комбинаторные проблемы. Рассмотрим здесь только один пример, иллюстрирующий как случай операторов в конечномерном пространстве, так и случай вырождения, когда коэффициенты могут обращаться в нуль на некотором подмножестве.

В пространстве $L_p(\mathbb{Z})$ рассмотрим операторы вида

$$Au(x) = a(x)[u(x+1) + u(x-1)], \tag{10.14}$$

где коэффициент $a(x)$ обращается в нуль при $|x| > 1$ и имеет только три положительные значения: $a(-1)$, $a(0)$ и $a(1)$. Пусть $S = \{-1, 0, 1\}$ есть носитель коэффициентов рассматриваемых операторов.

Такой оператор является оператором конечного ранга и его спектральный радиус может быть вычислен непосредственно:

$$r(A) = \sqrt{a(0)[a(-1) + a(1)]}\,.$$

Здесь пространство потенциалов есть $\mathbb{R}^3 \approx C(S)$, где $S = \{-1, 0, 1\}$ есть носитель коэффициентов рассматриваемых операторов. Множество $\mathrm{PM}(S)$ представляет собой двумерный симплекс, т.е. треугольник, произвольная вероятностная мера на S задается тремя неотрицательными числами $\nu(-1)$, $\nu(0)$ и $\nu(1)$ такими, что $\nu(-1) + \nu(0) + \nu(1) = 1$.

Теорема 10.4. *Для рассматриваемого пространства потенциалов эффективная область функционала, сопряженного к спектральному показателю операторов вида* (10.14), *состоит из мер, для которых* $\nu(0) = 1/2$, *и с геометрической точки зрения представляет собой отрезок – среднюю линию треугольника* $\mathrm{PM}(S)$. *На эффективной области функционал задается формулой*

$$T(\nu) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \nu(-1)\ln(\nu(-1)) - \nu(1)\ln(\nu(1))$$

и совпадает с энтропией дискретного распределения $(\nu(-1), \nu(0), \nu(1))$.

Доказательство. Построим функционал типичности меры в данном случае. Рассмотрим процесс случайных блужданий на $\mathbb{Z}$, порожденный отображениями $\alpha_\pm(x) = x \pm 1$, соответствующий рассматриваемым операторам. Если траектория точки x, порожденная элементом $\xi \in M^n$, выходит за пределы множества $S = \{-1, 0, 1\}$, то соответствующая функция $a_\xi(x) = 0$. Поэтому в построениях и оценках следует учитывать только те траектории, которые не выходят за пределы множества S, и задача сводится к вычислению типичности меры относительно процесса случайных блужданий с двумя поглощающими экранами [28], установленными в точках $x = 2$ и $x = -2$.

Достаточно рассмотреть траектории точки 0. Эмпирическая мера, соответствующая траектории длины $2n$, есть мера вида $(p(-1), p(0), p(1))$, где $p(j)2n$ есть время пребывания траектории в точке j. Но каждая такая траектория во все четные моменты времени находится в точке 0, поэтому $p(0) = 1/2$. В любой из n нечетных моментов времени траектория может попасть в 1, таких попаданий должно быть $2np(1) \leqslant n$. Поэтому $0 \leqslant p(1) \leqslant 1/2$. В остальные нечетные моменты времени траектория находится в точке -1.

Так как те $2np(1)$ нечетных момента времени, в которые траектория попадает в точку 1, могут быть выбраны произвольно из n возможных, то число траекторий, порождающих фиксированную эмпирическую меру, есть $C_n^{2np(1)}$. Используя асимптотику биномиальных коэффициентов и те же соображения, что и в доказательстве теоремы 10.1, получаем искомое выражение для функционала типичности.

Заметим, что в общем случае вырожденных коэффициентов, как и в рассмотренном примере, можно аналогично определить функционал типичности меры. Для этого следует в определении этого функционала рассмотреть только те эмпирические векторные меры, носители компонент которых принадлежат носителям соответствующих коэффициентов.

10.6. Перейдем к рассмотрению примеров с более сложным поведением траекторий. В пространстве $l_p = l_p(\mathbb{Z})$ частным видом рассматриваемых операторов являются операторы вида

$$Au(x) = a_{-1}(k)u(k-1) + a_0(k)u(k) + a_1(k)u(k+1), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{10.15}$$

Здесь, как и в п. 10.1, $X = \mathbb{Z}$, соответствующие отображения есть $\alpha_j(x) = x + j$, $j = -1, 0, 1$.

В число операторов вида (10.15) входят операторы, заданные бесконечными матрицами Якоби. Многочисленные результаты по исследованию таких операторов не содержат простых явных формул, задающих их характеристики, в частности спектральный радиус, т.е. рассматриваемая задача уже в этом случае достаточно сложная.

Естественно, что при попытке построения в явном виде показателя типичности мер также не удается получить простой явный ответ. Это связано с тем, что при рассматриваемых отображениях траектория может многократно возвращаться в точку и подсчет числа траекторий, порождающих фиксированную эмпирическую меру, сводится к тонким и не разработанным вопросам теории случайных блужданий.

Классические результаты теории случайных блужданий с точки зрения их приложения к исследованию функциональных операторов связаны с операторами очень специального вида и позволяют вычислить показатель типичности меры только при дополнительных очень жестких предположениях о поведении коэффициентов. Два таких примера приведены ниже.

Пусть пространство потенциалов $\Phi \subset l_\infty$ двумерно. Рассмотрим в пространстве l_p операторы вида

$$Au(x) = a(k)[u(k-1) + u(k+1)], \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{10.16}$$

где $a(k) = \exp\varphi(k)$, $\varphi \in \Phi$.

Выбрав в пространстве потенциалов Φ нормированный базис e_0 и e_1, произвольный потенциал можем записать в виде $\varphi = se_1 + te_0$. Пространство Φ можем рассматривать как пространство непрерывных функций на двухточечном множестве $Y = \{0; 1\}$, поэтому множество вероятностных мер $\mathrm{PM}(Y)$ состоит из мер ν_p вида $\nu_p(1) = p$, $\nu_p(0) = 1-p$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, и это множество можем отождествить с отрезком $[0,1]$. Таким образом, функционал T в рассматриваемом случае есть функция $T(p)$, определенная на отрезке $[0,1]$.

Сразу заметим, что для произвольного двумерного пространства найти в явном виде спектральный радиус оператора и соответствующий функционал $T(p)$ не представляется возможным, так как такая задача эквивалентна вычислению спектрального радиуса для произвольного оператора вида (10.16). Ниже рассмотрены два случая, когда за счет специального выбора двумерного пространства Φ удается построить $T(p)$ в явном виде.

10.6.1. Рассмотрим двумерное пространство потенциалов, порожденное базисом e_0, e_1, где $e_0(k) = 1$ при $k = 0$, $e_0(k) = 0$ при $k \neq 0$ и $e_1(k) = 1 - e_0(k)$. Рассмотрим оператор вида

$$A = (ae_1 + be_0)(T + T^{-1}), \tag{10.17}$$

где a и b – заданные положительные числа.

Пространство Ψ не является инвариантным относительно заданных отображений. Поэтому применяем к данному случаю модификацию основной теоремы.

В двумерном пространстве потенциалов Φ выберем базис, заданный теми же выражениями e_0 и e_1. Тогда произвольный потенциал записывается в виде $\varphi = se_1 + te_0$. В частности, $\ln(ae_1 + be_0) = \ln ae_1 + \ln be_0$, т.е. $s = \ln a$, $t = \ln b$. Пространство Φ можем рассматривать как пространство непрерывных функций на двухточечном множестве $Y = \{0;1\}$, множество вероятностных мер $\mathrm{PM}(Y)$ состоит из мер ν_p вида $\nu_p(1) = p$, $\nu_p(0) = 1-p$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, и это множество можем отождествить с отрезком $[0,1]$. Таким образом, функционал T в рассматриваемом случае есть функция $T(p)$, определенная на отрезке $[0,1]$. Эту функцию удается найти в явном виде.

Теорема 10.5. *Для операторов вида* (10.17), *где потенциал принадлежит введенному выше пространству* Φ, *эффективная область для функционала* $T(p)$ *есть отрезок* $[0,1/2] \subset [0,1] = \mathrm{PM}(Y)$, *и на этой области*

$$T(p) = \ln \frac{2^{1/2+p}(1-p)^{1-p}}{\left(\frac{1}{2}-p\right)^{1/2-p}} .$$

Для спектрального радиуса оператора имеем

$$r(A) = \begin{cases} 2a(0)\sqrt{\dfrac{a(1)}{2a(0)-a(1)}}\,, & \text{если } a(0) \geqslant a(1), \\ 2a(1), & \text{если } a(0) \leqslant a(1). \end{cases} \tag{10.18}$$

Доказательство. Эмпирическая мера $\delta_{x,\xi}$ в рассматриваемом случае есть мера ν_p, где $p = (1/n)r(x,\xi)$, а $r(x,\xi)$ есть время пребывания траектории точки x в точке 0 (количество возвращений в точку 0). Так как у рассматриваемых отображений точка 0 не является неподвижной, траектория не может находиться в точке 0 более половины времени, т.е. всегда $0 \leqslant p \leqslant 1/2$. Аналогично предыдущим примерам вопрос сводится к подсчету величины $K(r/n,x,n)$ – числа траекторий точки x длины n, время пребывания которых в точке 0 есть r. Если $x \neq 0$, то траектория за некоторый период времени должна попасть в точку 0 и затем еще $r-1$ раз вернуться в эту точку. Отсюда следует, что $K(p,x,n) \leqslant K(p,0,n)$ и вопрос сводится к хорошо исследованному вопросу о среднем времени пребывания траектории точки 0 в точке 0 [28]. Известно, в частности, что количество траекторий длины $2n$, имеющих r возвращений в точку 0, есть $2^r C_{2n-r}^n$.

Используя асимптотику биномиальных коэффициентов, отсюда получаем выражение для функционала типичности $T(p)$: эффективная область есть отрезок $[0,1/2] \subset [0,1] = \mathrm{PM}(Y)$, и на этой области

$$T(p) = \ln \frac{(1-2p)^{1/2-p}}{2(1-p)^{1-p}} .$$

Вычисляя преобразование Лежандра, получаем формулу (10.18) для спектрального радиуса. Теорема доказана.

Заметим, что с точки зрения описания процесса превращения частиц рассмотренный в примере очень специальный случай допускает содержательную интерпретацию. При $a(0) = a(1)$ такой оператор описывает процесс превращения частиц в однородной среде. Это оператор с постоянными коэффициентами, который просто исследуется – его спектр есть отрезок $[-2a(1), 2a(1)]$, $r(A) = 2a(1)$. Случай, когда $a(0) > a(1)$, интерпретируется как появление в точке 0 дополнительного ресурса, приводящего к более интенсивному размножению частиц в точке $x = 0$. Случай, когда $a(0) < a(1)$, интерпретируется как появление неблагоприятного фактора, подавляющего размножение частиц в точке $x = 0$. Изменение спектрального радиуса в такой ситуации описывает реакцию системы на указанные изменения среды.

Из теоремы следует, что система слабо реагирует на появление неблагоприятного фактора – при $a(0) < a(1)$ спектральный радиус не зависит от $a(0)$, а при появлении дополнительного ресурса реакция системы более существенна – при $a(0) > a(1)$ спектральный радиус возрастает с ростом $a(0)$ как $\sqrt{2a(0)}$. Более детальный анализ показывает, что при $a(0) > a(1)$ у оператора появляется изолированное собственное значение, равное спектральному радиусу:

$$\sigma(A) = [-2a(1), 2a(1)] \cup \left\{2a(0)\sqrt{\frac{a(1)}{2a(0) - a(1)}}\right\}.$$

10.6.2. Рассмотрим семейство коэффициентов, состоящее из неотрицательных последовательностей, удовлетворяющих условию $a(k) = a(1)$ при $k > 1$, $a(k) = 0$ при $k < 0$. Это также двумерное подпространство; последовательность однозначно определяется значениями $a(0)$ и $a(1)$. Рассматриваемый случай не укладывается в общую схему операторов с положительными коэффициентами, и на этом примере мы еще раз показываем, как общий подход применяется в случае, когда исходные коэффициенты обращаются в нуль на некотором подмножестве.

Соответствующее двумерное пространство потенциалов Ψ состоит из последовательностей, определенных при $k \geqslant 0$. Выберем в нем базис, состоящий из последовательности $e_0(k) = 1$ при $k = 0$, $e_0(k) = 0$ при $k \neq 0$ и последовательности $e_1(k) = 1$ при $k \geqslant 1$, $e_1(0) = 0$. Рассматриваемые коэффициенты при введенных обозначениях представляются в виде

$$a(k) = \exp[te_1(k) + se_0(k)] \quad \text{при} \quad k \geqslant 0;\ a(k) = 0 \quad \text{при} \quad k < 0, \qquad (10.19)$$

где t и s – вещественные числа.

Теорема 10.6. *Для операторов вида* (10.16) *с коэффициентами вида* (10.19) *эффективная область функционала* $T(p)$ *есть отрезок* $[0, 1/2] \subset [0, 1] = \mathrm{PM}(Y)$, *и на этой области*

$$T(p) = \ln \frac{2^{1/2}(1-p)^{1-p}}{(1/2-p)^{1/2-p}}.$$

Для спектрального радиуса оператора имеем

$$r(A) = \begin{cases} a(0)\sqrt{\dfrac{a(1)}{a(0) - a(1)}}, & \text{если } a(0) \geqslant 2a(1), \\ 2a(1), & \text{если } a(0) \leqslant 2a(1). \end{cases}$$

Доказательство. Эмпирические меры $\nu_{x,\xi}$ в рассматриваемом случае следует рассматривать только для тех траекторий, которые целиком лежат на носителе коэффициентов – неотрицательной полуоси. Как и в п. 10.6.1, это есть мера ν_p, где $p = (1/n)r(x,\xi)$, а $r(x,\xi)$ – количество возвращений траектории в точку 0, причем $0 \leqslant p \leqslant 1/2$. Сейчас величина $K(r/n, x, n)$ есть число траекторий точки x длины n, время пребывания которых в точке 0 есть r и которые, в отличие от предыдущего примера, целиком лежат на неотрицательной полуоси. Такое число также подсчитано в теории случайных блужданий в связи с исследованием случайных блужданий с поглощающим экраном, установленным в точке $k = -1$; это число есть $K(r/n, x, n) = C_n^{2n-r}$ [28]. Заметим, что оно в 2^r раз меньше аналогичного числа из доказательства теоремы 10.5.

Используя асимптотику биномиальных коэффициентов, получаем указанные в формулировке выражения. Теорема доказана.

Рассмотренный в теореме специальный вид коэффициентов, также как и предыдущий, является содержательным при описании случайных блужданий с размножением. Такой оператор описывает процесс в среде, состоящей из трех частей: на положительной части $k > 0$ происходит размножение частиц с коэффициентом размножения $a(1)$; любая частица, попавшая на отрицательную часть, поглощается и не участвует в дальнейшем процессе. Значение $a(0)$ характеризует поведение процесса в граничной точке 0; изменение спектрального радиуса при изменении $a(0)$ описывает реакцию системы на изменение граничных условий.

При $a(0) = a(1)$ оператор A достаточно просто исследуется – его спектр есть отрезок $[-2a(1), 2a(1)]$, $r(A) = 2a(1)$.

Из теоремы 10.6 следует, что рассматриваемая система слабо реагирует не только на появление неблагоприятного фактора на границе (случай $a(0) < a(1)$), но и на малый дополнительный ресурс (случай $a(1) \leqslant a(0) \leqslant 2a(1)$) – в этих случаях спектральный радиус не зависит от $a(0)$. Только при появлении достаточно большого дополнительного ресурса реакция системы существенна – при $a(0) > 2a(1)$ у оператора появляется изолированное собственное значение $a(0)\sqrt{\dfrac{a(1)}{a(0)-a(1)}} > 2a(1)$, причем с ростом $a(0)$ спектральный радиус возрастает, но это рост порядка $\sqrt{a(0)}$, т.е. более медленный, чем в случае, рассмотренном в п. 10.6.1.

Список литературы

[1] А. Б. Антоневич, *Линейные функциональные уравнения: операторный подход*, Университетское, Минск, 1988.

[2] А. Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

[3] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.

[4] Y. A. Abramovich, E. L. Arenson, A. K. Kitover, *Banach $C(K)$-modules and operators preserving disjointness*, Longman, Harlow, 1992.

[5] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional differential equations: I. C^*-theory*, Longman, Harlow, 1994.

[6] C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolution semigroup in dynamical systems and differential equations*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[7] V. G. Kravchenko, G. S. Litvinchuk, *Introduction to the theory of singular integral operators with shift*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[8] A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

[9] А. Б. Антоневич, А. В. Лебедев, “Функциональные и функционально-операторные уравнения. C^*-алгебраический подход”, *Тр. С.-Петерб. матем. об-ва*, **6** (1998), 34–140.

[10] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, “Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем”, *УМН*, **46**:2 (1991), 85–143.

[11] Di-Rong Chen, “Spectral radii and eigenvalues of subdivision operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:4 (2004), 1113–1123.

[12] В. И. Дорогов, В. П. Чистяков, *Вероятностные модели превращения частиц*, Наука, М., 1988.

[13] J. Danes, “On the local spectral radius”, *Cas. Pest. Mat.*, **112** (1987), 177–187.

[14] А. К. Китовер, “О спектре автоморфизмов с весом и теореме Камовица–Шайнберга”, *Функц. анализ и его прилож.*, **13**:1 (1979), 70–71.

[15] А. В. Лебедев, “Об обратимости элементов в C^*-алгебрах, порожденных динамическими системами”, *УМН*, **34**:4 (1979), 199–200.

[16] А. М. Степин, “О гомологическом уравнении теории динамических систем”, *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, Ярославский университет, Ярославль, 1982, 106–117.

[17] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, “Операторы взвешенного сдвига на топологической марковской цепи”, *Функц. анализ и его прилож.*, **22**:4 (1988), 86–87.

[18] А. Б. Антоневич, В. И. Бахтин, А. В. Лебедев, “Вариационный принцип для спектрального радиуса операторов взвешенного сдвига в лебеговских пространствах”, *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси, Минск*, **5** (2000), 13–17.

[19] A. Antonevich, V. Bakhtin, A. Lebedev, “Thermodynamics and spectral radius”, *Nonlinear Phenom. Complex Systems*, **4**:4 (2001), 318–321.

[20] В. П. Маслов, “Статистический ансамбль и квантование термодинамики”, *Матем. заметки*, **71**:4 (2002), 558–566.

[21] А. Б. Антоневич, “Условия обратимости операторов с выпуклой рационально независимой системой сдвигов”, *Докл. АН СССР*, **256**:1 (1981), 11–14.

[22] А. Б. Антоневич, К. Зайковски, “Вариационный принцип для спектрального радиуса модельного функционального оператора”, *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси, Минск*, **12**:2 (2004), 18–25.

[23] В. В. Бреннер, *Операторы с локально независимыми сдвигами*, Дис. … канд. физ.-матем. наук, Минск, 1981.

[24] Р. И. Григорчук, “Симметрические случайные блуждания на дискретных группах”, *Многокомпонентные случайные системы*, Наука, М., 1978, 132–152.

[25] H. Kesten, “Symmetric random walks on groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **92** (1959), 336–354.

[26] I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[27] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1967.

[28] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, Мир, М., 1984.

А. Б. Антоневич (A. B. Antonevich)
Минск (Беларусь)
E-mail: antonevich@bsu.by

Поступила в редакцию
18.08.2005

К. Зайковски (K. Zajkowski)
Белосток (Польша)
E-mail: kryza@math.uwb.edu.pl