ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

НОЯБРЬ 1979 г., ТОМ XV, № 11

УДК 517.937

В. И. ЧЕСАЛИН

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

На ограниченном интервале $(0, T)$ рассмотрим следующую задачу:

$$\mathcal{L}u \equiv \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{d^2}{dt^2}+A_k\right)u=f(t), \tag{1}$$

$$l_{\mu_i}u \equiv u^{(i)}|_{t=0}-\mu_i u^{(i)}|_{t=T}=\varphi_i, \quad 0\leqslant i\leqslant 2m-1. \tag{2}$$

Здесь A_k — операторы, действующие в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $|\cdot|_0$, удовлетворяющие условиям.

Условие I. Области определения $D(A_k)$ операторов A_k не зависят от k. Операторы A_k являются самосопряженными и положительно определенными. В дальнейшем области определения операторов A_k будем обозначать $D(A)$.

Условие II. $(A_i u-A_k u, u)_0\geqslant c|u|_0^2$, $1\leqslant i\leqslant k\leqslant m$, где c не зависит от u, i и k;

$$|A_i u|_0\sim|A_k u|_0\sim|A_i u-A_k u|_0 \ \forall i\neq k, \ u\in D(A).$$

Области определения композиций операторов $A_{k_1}\dots A_{k_l}$ при всех $1\leqslant k_1, \dots, k_l\leqslant m$ $(l\leqslant n, \ n\geqslant m)$ — ненулевые подпространства пространства H—зависят от l, но не зависят от $k_1, \dots, k_l$.

Условие III. Операторы A_k $(1\leqslant k\leqslant m)$ попарно перестановочны.

В граничных условиях (2) μ_i—комплексные числа, для которых выполняется

Условие IV. $x(\mu)=\dfrac{c_1}{c_2}\max\limits_{0\leqslant i\leqslant 2m-1}|\mu_i|<1$, где c_1 и c_2 из неравенства (5).

В векторном пространстве $W^l=D(A^{l/2})$ $(l\leqslant 2m)$ определим эрмитову норму по формуле $|u|_l=|A_1^{l/2}u|_0$. Изучаемая задача (1), (2) порождает оператор $L_\mu=(\mathcal{L}, l_{\mu 0}, \dots, l_{\mu_{2m-1}})$, который действует из пространства E^{2m-1}, полученного пополнением $C^\infty([0, T], W^{2m})$ по норме

$$|||u|||_{2m-1}^2=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{k=0}^{2m-1}\left|\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{2m-1-k}^2,$$

в гильбертово пространство $F=L_2((0, T), H)\times W^{2m-1}\times\dots\times W^0$, состоящее из всех элементов $\mathcal{F}=(f, \varphi_0, \dots, \varphi_{2m-1})$, для которых конечна норма

$$|||\mathcal{F}|||^2=\int_0^T|f|_0^2dt+\sum_{k=0}^{2m-1}|\varphi_k|_{2m-1-k}^2.$$

Единственность, а также непрерывную зависимость решения задачи (1), (2) от правых частей устанавливает следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* I — IV. *Тогда существует постоянная* $S>0$, *не зависящая от* u, *такая, что*

$$|||u|||_{2m-1}^2\leqslant S\,|||L_\mu u|||^2 \quad \forall u\in C^\infty([0, T], W^{2m}). \tag{3}$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{d}{dt}\left(\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{m-1}u\right|_0^2+\left|A_k^{1/2}\mathcal{L}_k^{m-1}u\right|_0^2\right)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}\left(\mathcal{L}u,\ \frac{d}{dt}\,\mathcal{L}_k^{m-1}u\right)_0. \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{L}_i^{m-j}u=\prod_{k=j,k\neq i}^{m}\left(\frac{d^2}{dt^2}+A_k\right)u$ $(m\geqslant j\geqslant 1)$. В дальнейшем будет использовано следующее двойное неравенство:

$$c_1\sum_{k=0}^{2m-1}\left|\frac{d^ku}{dt^k}\right|_{2m-1-k}^2\geqslant\sum_{k=1}^{m}\left(\left|\frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{m-1}u\right|_0^2+\left|A_k^{1/2}\mathcal{L}_k^{m-1}u\right|_0^2\right)\geqslant$$

$$\geqslant c_2\sum_{k=0}^{2m-1}\left|\frac{d^ku}{dt^k}\right|_{2m-1-k}^2, \tag{5}$$

где c_1 и $c_2>0$ и не зависят от u. Справедливость этого неравенства следует из предложения 1 и леммы 1 [1]. Проинтегрируем по t тождество (4) от 0 до τ и от τ до T, затем применим неравенство (5) и элементарные оценки и получим неравенства

$$\sum_{k=0}^{2m-1}\left|\frac{d^ku}{dt^k}\right|_{2m-1-k}^2\Big|_{t=\tau}\leqslant\frac{2}{c_2}\int_0^{\tau}\sum_{k=1}^{m}\left|\left(\mathcal{L}u,\ \frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{m-1}u\right)_0\right|dt+$$

$$+\frac{c_1}{c_2}\sum_{k=0}^{2m-1}\left|\frac{d^ku}{dt^k}\right|_{2m-1-k}^2\Big|_{t=0}, \tag{6}$$

$$-\sum_{k=0}^{2m-1}\left|\frac{d^ku}{dt^k}\right|_{2m-1-k}^2\Big|_{t=\tau}\leqslant\frac{2}{c_1}\int_{\tau}^{T}\sum_{k=1}^{m}\left|\left(\mathcal{L}u,\ \frac{d}{dt}\mathcal{L}_k^{m-1}u\right)_0\right|dt-$$

$$-\frac{c_2}{c_1}\sum_{k=0}^{2m-1}\left|\frac{d^ku}{dt^k}\right|_{2m-1-k}^2\Big|_{t=T}. \tag{7}$$

Теперь неравенство (6) сложим с неравенством (7), умноженным на $\frac{1}{2}\,(1+x^2(\mu))$, и к полученному неравенству применим лемму 1 из [2], ε-неравенство и элементарные оценки. В результате получим требуемое неравенство (3). Теорема 1 доказана.

Оператор L_μ допускает замыкание $\bar{L}_\mu$ [1]. Энергетическое неравенство (3) распространяется на $u\in D(\bar{L}_\mu)$, т. е. справедливо неравенство

$$|||\,u\,|||_{2m-1}^2\leqslant S\,|||\,\bar{L}_\mu u\,|||^2\quad\forall u\in D(\bar{L}_\mu). \tag{8}$$

Из неравенства (8) непосредственно вытекают

Следствие 1. *На множестве значений $R(\bar{L}_\mu)$ оператора $\bar{L}_\mu$ существует ограниченный обратный оператор $(\bar{L}_\mu)^{-1}$.*

Следствие 2. *Множество значений $R(\bar{L}_\mu)$ замкнуто в F* и $R(\bar{L}_\mu)=\overline{R(L_\mu)}$.

Существование сильного решения задачи (1), (2) устанавливает

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда множество $R(L_\mu)$ всюду плотно в F.*

Доказательство. Возьмем некоторый элемент $\mathcal{F}=(v,\ \varphi_0,\ \dots,\ \varphi_{2m-1})\in F$, ортогональный $R(L_\mu)$. Требуется показать, что $\mathcal{F}=0$. Не нарушая общности, можно считать, что $l_{\mu_i}u=0$, и поэтому условие ортогональности примет вид

$$\int_0^T\left(\sum_{k=0}^{m}\mathcal{A}_{2m-2k}\,u^{(2m-2k)},\ v\right)_0dt=0. \tag{9}$$

Здесь использована развернутая запись оператора $\mathcal{L}$, коэффициенты $\mathcal{A}_i$ явно выражаются через соответствующие A_j; $\mathcal{A}_{2m}=I$. Подставляем в (9) $u=\mathcal{A}_0^{-1}h$, где $h\in C^\infty([0,\ T],\ H)$

и $l_{\mu_i}h=0$, затем перебрасываем оператор $\mathscr{A}_0^{-1}$ на v и производим интегрирование по частям. В результате получаем равенство

$$\int_0^T (h^{(2m)}, \sum_{k=0}^{m} w_{2m-2k})_0 dt = 0, \tag{10}$$

где функции w_{2m-2k} являются решениями задач

$$w_{2m-2k}^{(2k)} = \mathscr{A}_{2m-2k}\mathscr{A}_0^{-1}v \quad (0 \leqslant k \leqslant m, \quad 0 \leqslant i \leqslant 2k-1),$$

$$\tilde{l}_{\bar{\mu}_{2m-2k+i}} w_{2m-2k} = \bar{\mu}_{2m-2k+i} w_{2m-2k}^{(2k-i-1)}\big|_{t=0} - w_{2m-2k}^{(2k-i-1)}\big|_{t=T} = 0.$$

Множество $\{h^{(2m)}\}$, когда h пробегает указанное выше множество, плотно в $L_2((0, T), H)$, поэтому из равенства (10) следует, что функция $w = \mathscr{A}_0^{-1}v$ является решением задачи

$$\mathscr{L}w = 0, \quad \tilde{l}_{\bar{\mu}_i} w = 0. \tag{11}$$

В силу справедливости энергетического неравенства вида (3) для задачи (11) заключаем, что $w=0$ и, следовательно, $v=0$. Далее, так как множества $\{l_{\mu_i}u\}$ линейно независимы и множества значений операторов l_{μ_i} всюду плотны в соответствующих пространствах, то отсюда следует, что $\varphi_i=0$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Неравенство (3) имеет место и в том случае, когда операторы A_k зависят от t и не перестановочны друг с другом, а μ_i — линейные ограниченные операторы в H (см., например, методику доказательства энергетического неравенства в работе [3]). Доказательство же существования сильного решения в такой общей постановке требует довольно большой вычислительной работы и поэтому не приводится в данной заметке.

Литература

1. Радыно Я. В., Юрчук Н. И. Дифференц. уравнения, **12**, № 2, 1976.
2. Чесалин В. И. Дифференц. уравнения, **13**, № 3, 1977.
3. Чесалин В. И. Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных уравнений Лява. Депонирована в ВИНИТИ № 2913-76 Деп.

Поступила в редакцию
22 марта 1978 г.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Сдано в набор 27.08.79. Подписано в печать 06.11.79. АТ 00577. Формат 70×108$^1/_{16}$. Высокая печать. Печ. листов 12,0. Усл. печ. листов 16,80. Уч.-изд. листов 16,0. Тираж 1511 экз. Зак. № 1569. 220604 г. Минск-72, ул. Типографская, 11, редакция всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения» тел. 39-47-69.

Издательство «Наука и техника». Минск, Ленинский проспект, 68. Типография имени Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника» АН БССР и Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Минск, Ленинский проспект, 68.