МАРТ 1977 г., ТОМ XIII, № 3

УДК 517.937

В. И. ЧЕСАЛИН

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

1. Пусть $(0, T)$ — ограниченный интервал на прямой R переменной t, H — гильбертово пространство и $\mathscr{L}(H)$—банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H. Норму и скалярное произведение в H обозначим $|\cdot|_0$ и $(\cdot, \cdot)_0$ соответственно, а норму в $\mathscr{L}(H)$ — $\|\cdot\|$. Пусть, далее, $B_1(\mu)$ и $B_2(\mu)$ — семейства операторов из $\mathscr{L}(H)$, параметр μ пробегает множество M элементов произвольной природы, на котором определена сходимость последовательностей. Предполагается, что при каждом $\mu \in M$ выполняется одно из следующих условий.

Условие ($\mathscr{B}$ 1). На H существует ограниченный обратный оператор $B_1^{-1}(\mu)$ такой, что $\|B_1^{-1}(\mu) B_2(\mu)\| < 1$.

Условие ($\mathscr{B}$ 2). На H существует ограниченный обратный оператор $B_2^{-1}(\mu)$ такой, что $\|B_2^{-1}(\mu) B_1(\mu)\| < 1$.

Рассмотрим уравнение вида

$$\mathscr{L}_\mu u \equiv \frac{d^{2m+1}u}{dt^{2m+1}} + \delta_\mu A(t, \mu) u = f(t). \tag{1.1}$$

Здесь функции u и f определены на $(0, T)$ и принимают значения в H; $A(t, \mu)$ — линейный зависящий от t и μ оператор в H с областью определения $D(A)$, не зависящей от t; $\delta_\mu = \pm 1$ в зависимости от выполнения условия ($\mathscr{B}$ 1) или ($\mathscr{B}$ 2) соответственно. Предполагается, что

$$(-1)^m \operatorname{Re}(A\, v, v)_0 \geqslant 0, \ \forall v \in D(A) \tag{1.2}$$

и на H определен обратный оператор $A^{-1}(t, \mu)$.

Дополнительные ограничения, накладываемые на гладкость оператора A по t, и перестановочность операторов A, $B_1(\mu)$ и $B_2(\mu)$ см. в формулировке теоремы 2.

К уравнению (1.1) присоединим условия

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k u}{dt^k}\right|_{t=T} = 0, \ 0 \leqslant k \leqslant m-1, \\ &l_\mu u \equiv B_1(\mu) \left.\frac{d^m u}{dt^m}\right|_{t=0} - B_2(\mu) \left.\frac{d^m u}{dt^m}\right|_{t=T} = \varphi, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где φ — некоторый элемент из H.

В настоящей работе докажем однозначную разрешимость задачи (1.1), (1.3) при каждом фиксированном $\mu \in M$ и покажем, что если последовательность $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ стремится к μ_0 и

$$|B_i(\mu_n)h - B_i(\mu_0)h|_0 \to 0 \quad (i = 1,\ 2) \text{ и } \int_0^T |A(t,\ \mu_n)v -$$

$$- A(t,\ \mu_0)v|_0^2 dt \to 0,$$

то последовательность операторов, дающих решения, соответствующие μ_n, стремится к оператору, дающему решение, соответствующие μ_0, в подходящем пространстве линейных непрерывных отображений, наделенном топологией простой сходимости.

Все исследования в п. п. 2 и 3 будут проведены только для случая ($\mathscr{B}$ 1), так как случай ($\mathscr{B}$ 2) сводится к ($\mathscr{B}$ 1) заменой переменной t на $T - t$.

Граничные задачи (1.1), (1.3) при $m = 0$, $B_1(\mu) = \mu$ (μ — комплексный параметр) и $B_2(\mu) = I$ изучены в работе [1], а при $m \geqslant 0$, $B_1(\mu) = I$ и $B_2(\mu) = 0$ — в работах [2, 3]. Во всех случаях оператор A предполагался не зависящим от μ. Метод исследования в настоящей работе заимствован из [2] и основывается на энергетических неравенствах.

2. В этом пункте для оператора $L_\mu = (\mathscr{L}_\mu,\ l_\mu)$ установим энергетическое неравенство и вытекающие из него следствия. Для этого введем необходимые пространства.

Обозначим символами $\|\cdot\|$ и $((\cdot,\ \cdot))$ норму и скалярное произведение в $L_2((0,\ T),\ H)$. Пусть $E^m_{\mu,1}$ — пространство, полученное пополнением по норме

$$|||u|||_{m,\mu} = \left(Z(\mu) \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|^2 + \left| B_1(\mu) \frac{d^m u}{dt^m} \right|_{t=0} - \right.$$

$$\left. - B_2(\mu) \frac{d^m u}{dt^m} \bigg|_{t=T} \bigg|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

множества достаточно гладких функций, принимающих значения в H и удовлетворяющих первым $2m$ условиям из (1.3), где

$$Z(\mu) = \frac{(1 - |B_1^{-1}(\mu) B_2(\mu)|^2)^2}{(1 + |B_1^{-1}(\mu)|^2)(1 + |B_1^{-1}(\mu) B_2(\mu)|^2)}.$$

Пополняя то же множество по норме

$$\|u\|_{m,\mu} = \left(Z(\mu) \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{d^k u}{dt^k} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

получим гильбертово пространство E^m_μ. Через E^{-m}_μ обозначим банахово пространство, полученное пополнением $L_2((0,\ T),\ H)$ по норме

$$\|f\|_{-m,\mu} = \sup_{v \in E^m_\mu} \frac{|((f,\ v))|}{\|v\|_{m,\mu}},$$

и пусть $E^{-m}_{\mu,1}$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $F = (f,\ \varphi)$, для которых конечна норма

$$|||F|||_{-m,\mu} = (\|f\|^2_{-m,\mu} + |\varphi|_0^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим оператор $L_\mu = (\mathscr{L}_\mu, l_\mu): E^m_{\mu,1} \to E^{-m}_{\mu,1}$ с областью определения $D(L_\mu)$, состоящей из функций $u \in L_2((0, T), H)$ таких, что при почти всех $t \in (0,T)$,

$$u \in D(A), \quad Au \in L_2((0, T), H), \quad \frac{d^{2m+1}u}{dt^{2m+1}} \in L_2((0, T), H)$$

и $u(t)$ удовлетворяет первым $2m$ условиям из (1.3). Для любой функции $u \in D(L_\mu)$ справедливо неравенство

$$\left\| \frac{d^i u}{dt^i} \right\|^2 \leqslant \frac{T^{2(m-i)}}{((m-i)!)^2} \left\| \frac{d^m u}{dt^m} \right\|^2, \quad 0 \leqslant i \leqslant m. \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Для любой функции $u \in D(L_\mu)$ справедливо неравенство*

$$|||\, u \,|||_{m,\mu} \leqslant 2c_T(1+T)\, |||\, L_\mu u \,|||_{-m,\mu}, \tag{2.2}$$

где $c_T = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{T^{2(m-i)}}{((m-i)!)^2}$, $\mu \in M$.

Доказательство. Проинтегрировав по t от 0 до T функцию $(-1)^m 2\operatorname{Re}\varphi_\mu(t)(\mathscr{L}_\mu u, u)_0$, где

$$\varphi_\mu(t) = \frac{T(1+|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2)}{1-|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2} - t,$$

получим тождество

$$(2m+1)\int_0^T \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|_0^2 dt + 2\operatorname{Re}(-1)^m \int_0^T \varphi_\mu(t)(Au, u)_0\, dt =$$

$$= 2\operatorname{Re}(-1)^m \delta_\mu \int_0^T \varphi_\mu(t)(\mathscr{L}_\mu u, u)_0\, dt +$$

$$+ \delta_\mu \varphi_\mu(t) \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|_0^2 \Bigg|_{t=0} - \delta_\mu \varphi_\mu(t) \left| \frac{d^m u}{dt^m} \right|_0^2 \Bigg|_{t=T}. \tag{2.3}$$

Оценим левую часть полученного тождества снизу, используя (1.2), (2.1), а правую часть — сверху следующим образом. Первое слагаемое оценивается нормой пространства E_μ^{-m}, а ко второму применим следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть для некоторой функции g со значением в H выполняется равенство*

$$B_1(\mu)\, g|_{t=0} - B_2(\mu)\, g|_{t=T} = \varphi. \tag{2.4}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}(1+|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2)\, |g|_0^2\big|_{t=0} - |B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2\, |g|_0^2\big|_{t=T} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|B_1^{-1}(\mu)|^2(1+|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2)}{(1-|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2)}\, |\varphi|_0^2. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из равенства (2.4) имеем неравенство

$$|_0^2|_{t=0} \leqslant (1+\varepsilon)\,|B_1^{-1}(\mu)\,B_2(\mu)|^2\,|g|_0^2|_{t=T} + (1+\varepsilon^{-1})\,|B_1^{-1}(\mu)|^2|\varphi|_0^2 .$$

Положив здесь $\varepsilon = \dfrac{1-|B_1^{-1}(\mu)\,B_2(\mu)|^2}{1+|B_1^{-1}(\mu)\,B_2(\mu)|^2}$, получим неравенство (2.6). Лемма 1 доказана.

В результате получим неравенство

$$\frac{1}{c_T}\sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|^2 + \frac{1}{Z(\mu)}\,|l_\mu u|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(1+T)}{Z(\mu)}\left(\|\mathscr{L}_\mu u\|_{-m,\mu} \times \||u\||_{m,\mu} + |l_\mu u|_0^2\right). \qquad (2.7)$$

Умножим обе части неравенства (2.7) на $c_T Z(\mu)$. Затем, применяя к первому слагаемому в правой части полученного неравенства оценку типа $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ и производя элементарные оценки, получим требуемое неравенство (2.2). Доказательство теоремы 1 завершено.

Перейдем теперь к следствиям, которые вытекают из теоремы 1. Справедлива следующая

Лемма 2. *Оператор $L_\mu: E_{\mu,1}^m \to E_{\mu,1}^{-m}$ допускает замыкание.*

Доказательство. Согласно критерию замыкаемости операторов в банаховых пространствах, нужно показать, что из того, что $u_n \to 0$ в $E_{\mu,1}^m$, $u_n \in D(L_\mu)$ и $L_\mu u_n \to \mathscr{F} = (f, \varphi)$ в $E_{\mu,1}^{-m}$, следует, что $\mathscr{F} = 0$. Из сходимости $u_n \to 0$ в $E_{\mu,1}^m$ следует, что $l_\mu u_n \to 0$ в H, откуда $\varphi = 0$. Элемент $f \in E_\mu^{-m}$ есть антилинейный непрерывный функционал на E_μ^m, значение которого на v обозначим символом $f(v)$. Предположим, что v — произвольная достаточно гладкая по t функция, имеющая в $(0, T)$ компактный носитель и $v(t) \in D(A^*)$, где $A^*(t)$ — оператор, сопряженный к $A(t)$. Тогда

$$f(v) = \lim_{n\to\infty}\int_0^T (\mathscr{L}_\mu u_n,\ v)_0\,dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^T \left(\frac{d^{2m+1}u_n}{dt^{2m+1}},\ v\right)_0 dt + \int_0^T \delta_\mu (Au_n,\ v)_0 dt\right\}. \qquad (2.8)$$

Производя интегрирование по частям в первом члене правой части равенства (2.8) и перебрасывая оператор A из u_n на v, а затем, устремляя $n \to \infty$, убеждаемся, что $f(v) = 0$. Но так как множество рассматриваемых функций плотно в E_μ^m, то отсюда заключаем, что $f = 0$. Что и требовалось доказать.

Пусть $\bar{L}_\mu$ — замыкание оператора L_μ, а $D(\bar{L}_\mu)$ — область его определения. Неравенство (2.2) распространяется на $u \in D(\bar{L}_\mu)$, т. е.

$$\||u\||_{m,\mu} \leqslant 2c_T(1+T)\,\||\bar{L}_\mu u\||_{-m,\mu},\quad \forall\, u \in D(\bar{L}_\mu). \qquad (2.9)$$

Из неравенства (2.9) непосредственно вытекают

Следствие 1. *На множестве значений $R(\bar{L}_\mu)$ оператора $\bar{L}_\mu$ существует ограниченный обратный оператор $(\bar{L}_\mu)^{-1}$.*

Следствие 2. *Множество значений $R(\bar{L}_\mu)$ замкнуто в $E_{\mu,1}^{-m}$* и $R(\bar{L}_\mu) = \overline{R(L_\mu)}$.

Таким образом, для доказательства существования решения уравнения

$$\overline{L}_\mu u = \mathscr{F} \tag{2.10}$$

при каждом фиксированном $\mu \in M$ и любом $F \in E_{\mu,1}^{-m}$ осталось доказать плотность множества $R(L_\mu)$ в $E_{\mu,1}^{-m}$.

Замечание 1. Проанализировав ход доказательства теоремы 1, убеждаемся, что все рассуждения этой теоремы остаются в силе, если область определения оператора A зависит от t.

Замечание 2. Ограничения $|B_1^{-1}(\mu) B_2(\mu)| \neq 1$ и $|B_2^{-1}(\mu) B_1(\mu)| \neq 1$ носят принципиальный характер. Действительно, рассмотрим частный случай уравнения (1.1), а именно уравнение

$$\frac{du}{dt} + i\delta_\mu bu = f(t), \tag{2.11}$$

где u и f — скалярные функции, $b \neq 0$ — вещественное число. Попытаемся найти решения (2.11) при условиях вида (1.3), в которых $B_1(\mu) = \mu_1$, $B_2(\mu) = \mu_2$, где μ_1 и μ_2 — комплексные числа. Общее решение уравнения (2.11) имеет вид

$$u(t) = ce^{-\delta_\mu ibt} + \int_0^t e^{-\delta_\mu ib(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau.$$

Если подставить эту функцию в граничные условия, то для нахождения c получим линейное уравнение, в котором коэффициент при неизвестной c $\Delta = 1 - e^{i(p-bT)}$, где $e^{ip} = \mu_1^{-1}\mu_2$, если $\mu_1 \neq 0$, или $e^{ip} = \mu_2^{-1}\mu_1$, если $\mu_2 \neq 0$. При $p - bT = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ $\Delta = 0$.

Теорема 3. *Пусть оператор A удовлетворяет условию (1.2), для него существуют производные $\frac{d^r A}{dt^r}$, $r \leqslant m+1$, такие, что $\frac{d^2 A}{dt^2} A^{-1} \in L_\infty((0, T), \mathscr{L}(H))$ и $A(0, \mu) = A(T, \mu)$, а операторы $B_1(\mu)$ и $B_2(\mu)$ при каждом $\mu \in M$ $D(A)$ переводят в $D(A)$ и $A(0, \mu) B_1(\mu) v = B_1(\mu) A(T, \mu) v$, $A(0, \mu) B_2(\mu) v = B_2(\mu) A(0, \mu) v$ и $B_1(\mu) B_2(\mu) v = B_2(\mu) B_1(\mu) v$ для каждого $v \in D(A)$. Тогда при $\mu \in M$ множество $R(L_\mu)$ плотно в $E_{\mu,1}^{-m}$.*

Доказательство. Заметим, что каждая функция $f \in L_2((0, T), H)$ порождает антилинейный непрерывный функционал на E_μ^m, значение которого на $v \in E_\mu^m$ равно

$$f(v) = \int_0^T (f, v)_0\, dt.$$

Поэтому в силу рефлексивности пространства $E_{\mu,1}^{-m}$ и того, что $\mathscr{L}_\mu u \in L_2((0, T), H)$ при $u \in D(L_\mu)$, для установления плотности множества $R(L_\mu)$ в $E_{\mu,1}^{-m}$ достаточно доказать следующее утверждение.

3. Утверждение 1. Если при всех $u \in D(L_\mu)$ и некоторых $v \in E_\mu^m$ и $\varphi \in H$ выполняется равенство

$$\int_0^T (\mathscr{L}_\mu u, v)_0\, dt + (l_\mu u, \varphi)_0 = 0, \tag{3.1}$$

то $v = 0$ и $\varphi = 0$.

Прежде всего отметим, что в силу плотности множества значений оператора l_μ в H для доказательства утверждения 1 достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение 2. Если при всех $u \in D(L_\mu)$ таких, что $l_\mu u = 0$, и некотором $v \in E_\mu^m$ выполняется равенство

$$\int_0^T (\mathcal{L}_\mu u, v)_0 dt = 0, \tag{3.2}$$

то $v = 0$.

Докажем последнее утверждение. Для его доказательства рассмотрим следующее семейство операторов: $A_\varepsilon = I + \varepsilon(-1)^m A$, где A — оператор из уравнения (1.1), $\varepsilon \geqslant 0$. Очевидно, что $D(A_\varepsilon) = D(A)$ при $\varepsilon \neq 0$. Непосредственно из свойств оператора A, указанных в п. 1, можно доказать, что при каждых $\varepsilon \geqslant 0$ и $t \in [0, T]$ на всем H определен ограниченный обратный оператор A_ε^{-1}, причем операторы $\varepsilon(-1)^m AA_\varepsilon^{-1} = A_\varepsilon^{-1} - I$ равномерно по ε ограничены в $L_2((0, T), H)$ и для $\forall v \in L_2((0, T), H)$ $\|\varepsilon AA_\varepsilon^{-1} v\| = \|A_\varepsilon^{-1} v - v\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Из условия дифференцируемости оператора A вытекает, что оператор A_ε^{-1} также имеет производные до порядка $m + 1$ и

$$\frac{d^k A_\varepsilon^{-1}}{dt^k} = A_\varepsilon^{-1} \tilde{A}_{k\varepsilon}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m + 1, \tag{3.3}$$

где операторы $\tilde{A}_{k\varepsilon}$ имеют производные до порядка $m + 1 - k$, которые, как и сами операторы $\tilde{A}_{k\varepsilon}$, обладают теми же свойствами, что и операторы $\varepsilon AA_\varepsilon^{-1}$.

Теперь, производя интегрирование по частям в равенстве (3.2), получим

$$\int_0^T \left[\left(\frac{d^{m+1}u}{dt^{m+1}}, \frac{d^m v}{dt^m} \right)_0 + (-1)^m \delta_\mu (Au, v)_0 \right] dt = 0. \tag{3.4}$$

Предельным переходом равенство (3.4) распространяется на такие $u \in L_2((0, T), H)$, что $\frac{d^{m+1}u}{dt^{m+1}} \in L_2((0, T), H)$, $u(t) \in D(A)$, $Au \in L_2((0, T), H)$ и u удовлетворяет условиям (1.3) при $\varphi = 0$. Положим в равенстве (3.4) $u = A_\varepsilon^{-1} h$, где $h \in L_2((0, T), H)$, $\frac{d^{m+1}h}{dt^{m+1}} \in L_2((0, T), H)$ и h удовлетворяет условиям (1.3) при $\varphi = 0$. Используя тождество вида

$$\frac{d^k}{dt^k} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi(\tau) d\tau = \varphi(t), \ k \geqslant 1,$$

придем к равенству

$$\int_0^T \left(\frac{d^{m+1}h}{dt^{m+1}}, (A_\varepsilon^{-1})^* \frac{d^m v}{dt^m} \right)_0 dt = \int_0^T \left(\frac{d^m h}{dt^m}, B_\varepsilon v \right)_0 dt +$$

$$+ \int_0^T \left(\frac{d^m h}{dt^m}, \int_0^t \frac{(\tau - t)^{m-1}}{(m-1)!} \delta_\mu (-1)^m A^* (A_\varepsilon^{-1})^* v d\tau \right)_0 dt, \tag{3.5}$$

где при $m > 0$

$$B_\varepsilon v=\sum_{k=2}^{m+1} C_{m+1}^k \int_0^t \frac{(\tau-t)^{k-2}}{(k-2)!}\left(\frac{d^k A_\varepsilon^{-1}}{d\tau^k}\right)^* \frac{d^m v}{dt^m}\,d\tau-$$

$$-(m+1)\left(\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}\right)^*\frac{d^m v}{dt^m},$$

а при $m=0$

$$B_\varepsilon v=-\left(\frac{dA_\varepsilon^{-1}}{dt}\right)^* v.$$

При $m>0$ множество функций $\frac{d^m h}{dt^m}$, когда h пробегает указанное выше множество, не плотно в $L_2((0,\ T),\ H)$. Ортогональным дополнением к его замыканию является множество всех функций

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m-1} t^k g_k, \tag{3.6}$$

где g_k — произвольные элементы из H. Из (3.5) вытекает, что функция $(A_\varepsilon^{-1})^*\frac{d^m v}{dt^m}$ имеет производную, принадлежащую $L_2((0,\ T),\ H)$, и является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}-\frac{d}{dt}\left((A_\varepsilon^{-1})^*\frac{d^m v}{dt^m}\right)=B_\varepsilon v+\mathscr{F},\\ B_2^*(\mu)(A_\varepsilon^{-1})^*\frac{d^m v}{dt^m}\Big|_{t=0}=B_1^*(\mu)(A_\varepsilon^{-1})^*\frac{d^m v}{dt^m}\Big|_{t=T},\end{gathered} \tag{3.7}$$

где при $m>0$

$$\mathscr{F}=\int_0^t \frac{(\tau-t)^{m-1}}{(m-1)!}(-1)^m \delta_\mu A^*(A_\varepsilon^{-1})^* v\,d\tau+f \tag{3.8}$$

и f — функция из (3.6). При $m=0$

$$\mathscr{F}=-\delta_\mu A^*(A_\varepsilon^{-1})^* v. \tag{3.9}$$

В случае, когда $H=C$, это утверждение следует из работы [4]. А все рассуждения работы [4] без изменения переносятся и на общий случай.

Умножим левую часть уравнения (3.7) скалярно в $L_2((0,\ T),\ H)$ на функцию

$$-\psi_\mu(t)(A_\varepsilon^{-1})^*\frac{d^m v}{dt^m}-\psi_\mu(t)\sum_{k=1}^{m} C_m^k \frac{d^k(A_\varepsilon^{-1})^*}{dt^k}\,\frac{d^{m-k}v}{dt^{m-k}}, \tag{3.10}$$

где

$$\psi_\mu(t)=\frac{T\,|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2}{|B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu)|^2-1}-t,$$

а правую — на функцию $\psi_\mu(t)\frac{d^m}{dt^m}((A_\varepsilon^{-1})^* v)$, равную (3.10). Затем, используя равенство

$$-\int_0^T \psi_\mu(t)\left(\mathscr{F},\ \frac{d^m}{dt^m}((A_\varepsilon^{-1})^*v)\right)_0 dt = -m\delta_\mu \int_0^T \left(\mathscr{F},\ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}((A_\varepsilon^{-1})^*v)\right)_0 dt +$$

$$+\int_0^T \psi_\mu(t)((-1)^m A^*(A_\varepsilon^{-1})^*v,\quad A_\varepsilon^{-1})^*v)_0 dt \tag{3.11}$$

и заменив $\mathscr{F}$ в его правой части значением из (3.7), после простых преобразований получим неравенство

$$(2m+1)\left\|(A_\varepsilon^{-1})^*\ \frac{d^m v}{dt^m}\right\|^2 \leqslant 2\mathrm{Re}\int_0^T \Phi_\varepsilon(v,\ v)\,dt +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\int_0^T \psi_\mu(t)((-1)^m A^*(A_\varepsilon^{-1})^*v,\ (A_\varepsilon^{-1})^*v)_0\,dt, \tag{3.12}$$

где в силу (3.3)

$$m\int_0^T \left(B_\varepsilon v,\ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}((A_\varepsilon^{-1})^*v)\right)_0 dt - \int_0^T \Phi_\varepsilon(v,\ v)\,dt =$$

$$=\int_0^T \left((A_\varepsilon^{-1})^*\ \frac{d^m v}{dt^m},\ \sum_{k=1}^m C_m^k \frac{d}{dt}\psi_\mu(t)\left(\frac{d^k(A_\varepsilon^{-1})^*}{dt^k}\ \frac{d^{m-k}v}{dt^{m-k}}\right)\right)_0 dt -$$

$$-m\int_0^T \left((A_\varepsilon^{-1})^*\ \frac{d^m v}{dt^m},\ \sum_{k=1}^m C_m^k\left(\frac{d^k(A_\varepsilon^{-1})^*}{dt^k}\ \frac{d^{m-k}v}{dt^{m-k}}\right)\right)_0 dt -$$

$$-\int_0^T \left(B_\varepsilon v,\ \psi_\mu(t)\ \frac{d^m}{dt^m}((A_\varepsilon^{-1})^*v)\right)_0 dt \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, а второй член в правой части (3.12) неположителен. Таким образом, получили неравенство $\left\|\frac{d^m v}{dt^m}\right\| \leqslant 0$. Следовательно, при любых $m \geqslant 0$ $v\equiv 0$. Теорема 2 доказана.

4. Исследуем поведение операторов, дающих решения при $\mu\to\mu_0$. Пусть $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ — некоторая последовательность, стремящаяся к μ_0 при $n\to\infty$ и $D(A(t,\ \mu_0))\subset D(A(t,\ \mu_n))$. Будем считать, что сходимость последовательности $\mu_n\to\mu_0$ влечет сходимость $|B_i(\mu_n)h - B_i(\mu_0)h|_0\to 0$ $(i=1,\ 2)$ и $\|A(t,\ \mu_n)v - A(t,\ \mu_0)v\|\to 0$ для каждых $h\in H$ и $v\in D(L_{\mu_0})$. Не нарушая общности, можно считать, что операторы $B_i(\mu_n)$ и $B_i(\mu_0)$ одновременно удовлетворяют условию ($\mathscr{B}$ 1) или ($\mathscr{B}$ 2). Определим пространство E^m как пополнение по норме

$$\|u\| = \left(\sum_{k=0}^m \left\|\frac{d^k u}{dt^k}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

множества достаточно гладких функций, принимающих значения в H и удовлетворяющих первым $2m$ условиям из (1.3). Пространства E^{-m} и E_1^{-m} определим аналогично, как и соответствующие E_μ^{-m} и $E_{\mu,1}^{-m}$, но с заменой пространства E_μ^m на E^m в каждом случае. Обозначим символом $\mathscr{L}(E_1^{-m}, E^m)$ пространство линейных непрерывных отображений пространства E_1^{-m} в пространство E^m. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполняется условие теоремы 2. Если $\mu_n \to \mu_0$, то $(\bar{L}_{\mu_n})^{-1} \to (\bar{L}_{\mu_0})^{-1}$ в пространстве $\mathscr{L}(E_1^{-m}, E^m)$, наделенном топологией простой сходимости.*

Доказательство. Достаточно показать выполнимость условий: 1) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|(\bar{L}_{\mu_n})^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_1^{-m},\ E^m)} < \infty$, 2) $(\bar{L}_{\mu_n})^{-1} \to (\bar{L}_{\mu_0})^{-1}$ на некотором плотном множестве N пространства E_1^{-m}.

Оценивая нормы в правой и левой части неравенства (2.6) через нормы пространств E_1^{-m} и E^m соответственно сверху и снизу с независящими от μ_n постоянными, получим неравенство, из которого следует выполнение первого условия. Проверим выполнение второго условия. Положим $N = R(L_{\mu_0})$. Если $F \in N$, то $(\bar{L}_{\mu_0})^{-1}F = L_{\mu_0}^{-1}F \in D(L_{\mu_0})$ и, следовательно, разность $(\bar{L}_{\mu_n})^{-1}F - (\bar{L}_{\mu_0})^{-1}F \in D(\bar{L}_{\mu_n})$. В силу условия 1) для этой функции будем иметь неравенство

$$\|(\bar{L}_{\mu_n})^{-1}F - (\bar{L}_{\mu_0})^{-1}F\|_m^2 \leqslant c\, |||\, F - L_{\mu_n}L_{\mu_0}^{-1}F\, |||_{-m}^2\,, \tag{4.1}$$

где c — не зависит от u и μ_n. Обозначим $L_{\mu_0}^{-1}F = h$, $F = L_{\mu_0}h$. Из неравенства (4.1) в силу неравенства

$$|||\, L_{\mu_n}h - L_{\mu_0}h\, |||_{-m}^2 \leqslant \|A(t,\ \mu_n)h - A(t,\ \mu_0)h\|^2 + $$
$$+ 2\left(\left|B_1(\mu_n)\frac{d^m h}{dt^m}\right|_{t=0} - B_1(\mu_0)\left.\frac{d^m h}{dt^m}\right|_{t=0}\Bigg|_0^2 + \left|B_2(\mu_n)\left.\frac{d^m h}{dt^m}\right|_{t=T} - \right.$$
$$\left. - B_2(\mu_0)\left.\frac{d^m h}{dt^m}\right|_{t=T}\Bigg|_0^2\right)$$

заключаем, что $\|(\bar{L}_{\mu_n})^{-1}F - (\bar{L}_{\mu_0})^{-1}F\|_m \to 0$ при $\mu_n \to \mu_0$ для каждого $F \in N$. Условие 2) выполнено. Теорема 3 доказана.

Литература

1. Дезин А. А. Изв. АН СССР, **31**, вып. 1, 1967.
2. Юрчук Н. И. Дифференц. уравнения, **12**, № 4, 1976.
3. Lions J. L. Equations différentielles opérationnelles et problémes aus limites, Berlin, 1961.
4. Ландо Ю. К. Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1968.

Поступила в редакцию 22 декабря 1975 г.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина