ISSN 0002-354X

ДОКЛАДЫ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

ТОМ 53

5

СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ

2009

Доклады Национальной академии наук Беларуси

2009 **сентябрь–октябрь** **Том 53 № 5**

УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО, Л. А. АЛЬСЕВИЧ

РАЗЛОЖЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ И ЯДРОМ КОШИ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЧЕБЫШЕВА

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 30.07.2008*

В теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши известны так называемые спектральные соотношения для сингулярных интегралов [1, с. 188]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x);\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_n(x),\tag{1}$$

где $-1<x<1$, $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$, $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

В данной работе получены аналоги формул (1), дающие представление сингулярного интеграла с логарифмической особенностью и ядром Коши в виде линейной комбинации многочленов Чебышева. Полученные результаты представляют интерес для построения приближенных численных методов решения некоторых классов сингулярных интегральных уравнений первого рода с правой частью специального вида [2].

Для получения искомого разложения рассмотрим функции комплексной переменной $F_1(z)=\ln\dfrac{z-1}{z+1}$, $F_2(z)=\sqrt{z^2-1}$, $F_3(z)=1\big/\sqrt{z^2-1}$, которые для $|z|>1$ определим следующим образом:

$$\ln\frac{z-1}{z+1}=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)z^{2n+1}};$$

$$\sqrt{z^2-1}=z-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{z^{2n+1}},\quad q_0=0{,}5,\quad q_{n+1}=q_n\frac{2n+1}{2n+4};\tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e_n}{z^{2n+1}},\quad e_0=1,\ e_{n+1}=e_n\frac{2n+1}{2n+2},\ n=0,1,\ldots.$$

Тогда значения этих функций на верхнем и нижнем берегах разреза по интервалу $(-1,1)$ будут соответственно такими: $F_1^{\pm}(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}\pm\pi i$, $F_2^{\pm}(x)=\pm i\sqrt{1-x^2}$, $F_3^{\pm}(x)=\mp i\big/\sqrt{1-x^2}$.

Л е м м а 1. *Для любого многочлена $P_M(x)$ степени $M\ge 0$ справедливо*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\pm1/2}P_M(t)\ln\frac{1-t}{1+t}dt=\pm\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z^2-1)^{\pm1/2}P_M(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\right).\tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теорией вычетов для вычисления несобственного интеграла в левой части (3) путем сведения его к интегралу от функции комплексной переменной

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}(\zeta^2-1)^{\pm 1/2}P_M(\zeta)\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1}d\zeta=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z^2-1)^{\pm 1/2}P_M(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\right)$. Здесь и далее Λ – замкнутый контур по области, содержащей отрезок $[-1,1]$, с положительным направлением по движению часовой стрелки. Преобразуем левую часть этого равенства, деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,1]$, и получим $\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\pm 1/2}(\pm i)P_M(t)\left(\ln\frac{1-t}{1+t}+\pi i\right)dt+\int\limits_{1}^{-1}(1-t^2)^{\pm 1/2}(\mp i)P_M(t)\times\left(\ln\frac{1-t}{1+t}-\pi i\right)dt\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\pm 1/2}(\pm 2i)P_M(t)\ln\frac{1-t}{1+t}dt=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z^2-1)^{\pm 1/2}P_M(z)\ln\frac{z-1}{z+1}\right)$, а отсюда придем к равенству (3).

Л е м м а 2. *При* $m\ge 0$ *для* $|x|<1$ *имеют место следующие представления*:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t^m\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}=-P_m(x)-\pi x^m\sqrt{1-x^2};\tag{4}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{t^m}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}=-P_{m-2}(x)-\frac{\pi x^m}{\sqrt{1-x^2}},\quad P_{-2}(x)\equiv 0,\quad P_{-1}(x)\equiv 0,\tag{5}$$

где $P_m(x)$ – *некоторый многочлен степени* $m\ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя интегральную формулу Коши [3; 4], имеем $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\zeta^m\sqrt{\zeta^2-1}\ln\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=z^m\sqrt{z^2-1}\ln\frac{z-1}{z+1}-G_0^{(m)}(z)$, где $z\notin[-1,1]$, $G_0^{(m)}$ – главная часть на бесконечности функции $z^m\sqrt{z^2-1}\ln\frac{z-1}{z+1}$, которая представляет собой многочлен степени m $(m\ge 0)$ или нуль $(P_m(z)\equiv G_0^{(m)}(z))$. Деформируя Λ в двубережный отрезок $[-1,1]$, получим $\Phi(z)=\frac{i}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}t^m\sqrt{1-t^2}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}+\pi i\right)\frac{dt}{t-z}+\frac{-i}{2\pi i}\int\limits_{1}^{-1}t^m\sqrt{1-t^2}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}-\pi i\right)\frac{dt}{t-z}=\frac{2i}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}t^m\sqrt{1-t^2}\left(\ln\frac{1-t}{1+t}\right)\frac{dt}{t-z}=z^m\sqrt{z^2-1}\ln\frac{z-1}{z+1}-G_0^{(m)}(z)$. Применив формулы Сохоцкого–Племеля [3; 4], вычислим сингулярный интеграл $\frac{2i}{\pi i}\int\limits_{-1}^{1}t^m\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}=\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=x^m i\sqrt{1-x^2}\left(\ln\frac{1-x}{1+x}+\pi i\right)+x^m(-i)\sqrt{1-x^2}\times\left(\ln\frac{1-x}{1+x}-\pi i\right)-2G_0^{(m)}(x)$.

Откуда получаем (4). По аналогии доказывается (5).

Пусть далее

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}b_k^{(n)}x^{n-2k},\quad b_0^{(n)}=2^n,\quad b_{k+1}^{(n)}=-b_k^{(n)}\frac{(n-2k)(n-1-2k)}{4(k+1)(n-k)},\quad k=0,\left[\frac{n-1}{2}\right].\tag{6}$$

С учетом введенных в (2) переменных зададим следующие обозначения:

$$Q_M=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\frac{M-1}{2}}b_k^{(M)}c_k^{(M)},\ c_k^{(M)}=\frac{1}{M-2k+2}-\sum\limits_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-k}\frac{q_n}{M-2k-2n}, & M-\text{нечетное},\\ 0, & M=-1\ \text{или}\ M-\text{четное},\end{cases}\tag{7}$$

$$A_M=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}T_M(t)dt=\begin{cases}\frac{1}{1-M^2}, & M-\text{четное},\\ 0, & M-\text{нечетное},\end{cases}\qquad h_j=\begin{cases}1, & j=0,\\ 0{,}5, & j>0.\end{cases}$$

Т е о р е м а 1. *Для* $x\in(-1,1)$ *имеет место следующее разложение сингулярного интеграла по многочленам Чебышева первого рода*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=\alpha_0^{(k)}T_0(x)+\ldots+\alpha_k^{(k)}T_k(x)-\pi\sqrt{1-x^2}\,T_k(x),\ k=0,1,..., \tag{8}$$

где

$$h_j\alpha_j^{(k)}=\begin{cases}0, & k+j-\text{нечетное},\\ A_{k+j}+A_{k-j}+Q_{k-1-j}-Q_{k-1+j}, & k+j-\text{четное},\end{cases}\quad j=\overline{0,k}. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правая часть (8) (см. (4)) содержит некоторый многочлен степени k, который записан через многочлены Чебышева 1-го рода с неопределенными коэффициентами $\alpha_j^{(k)}$. Чтобы вычислить коэффициенты, домножим (8) на $\dfrac{T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ и проинтегрируем по отрезку $[-1,1]$. Известно [5, с. 72], что $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}T_j(t)T_p(t)dt=\begin{cases}0, & j\neq p,\\ 1, & j=p=0,\\ 0,5, & j=p>0,\end{cases}$ $j,p=0,1,\ldots,k,$ тогда с учетом (1) и (7) находим

$$h_j\alpha_j^{(k)}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_j(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-\tau}\right\}d\tau+\int_{-1}^{1}T_j(\tau)T_k(\tau)d\tau=$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\left\{\frac{(-1)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_j(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{d\tau}{\tau-t}\right\}dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big(T_{k-j}(t)+T_{k+j}(t)\Big)dt=$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\,U_{j-1}(t)dt+A_{k+j}+A_{k-j}.$$

Так как $2\,U_{j-1}(t)\,T_k(t)=U_{j-1+k}(t)+U_{j-1-k}(t)$ и $U_{-n-2}(t)=-U_n(t)$, то

$$h_j\alpha_j^{(k)}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\ln\frac{1-t}{1+t}\Big(U_{k-1+j}(t)-U_{k-1-j}(t)\Big)dt+A_{k+j}+A_{k-j}=$$
$$0,5(I_{k-1-j}-I_{k-1+j})+A_{k+j}+A_{k-j}. \tag{10}$$

Чтобы вычислить интегралы в (10), учтем, что $U_{-1}(t)\equiv 0$, и воспользуемся результатами леммы 1. При $M=-1$ или M четном $I_M=0$, а при $M>-1$ и нечетном $I_M=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}U_M(t)\sqrt{1-t^2}\,\ln\frac{1-t}{1+t}dt=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(U_M(z)\sqrt{z^2-1}\ln\frac{z-1}{z+1}\right)=d_{-1}^M$. Поскольку при больших $|z|$ имеют место разложения (2), то, принимая во внимание (6) с учетом обозначений (7), получим $I_M=2Q_M$.

Таким образом, из (10) следует, что верно (8), (9). Теорема доказана.

Используя переменные из (2) и (6), положим:

$$H_M=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\frac{M-1}{2}}b_k^{(M)}c_k^{(M)}, \quad c_k^{(M)}=-\sum\limits_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-k}\dfrac{2e_n}{M-2k-2n}, & M-\text{нечетное},\\ 0, & M=-1\ \text{или}\ M-\text{четное},\end{cases} \tag{11}$$
$$B_{k,j}=\sum_{p=0}^{k}\int_{-1}^{1}U_{j-k+2p}(t)dt.$$

Т е о р е м а 2. *Для* $x \in (-1,1)$ *имеют место следующие разложения сингулярных интегралов по многочленам Чебышева второго рода:*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}U_k(x),\ k=0,1, \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}U_k(x)+\beta_0^{(k)}U_0(x)+ \\ \beta_1^{(k)}U_1(x)+\ldots+\beta_{k-2}^{(k)}U_{k-2}(x),\qquad k=2,3,\ldots, \tag{13}$$

где

$$\beta_j^{(k)}=\begin{cases}0, & k+j-\text{нечетное},\\ 2B_{k,j}+H_{k-1-j}+H_{k+1+j}, & k+j-\text{четное},\end{cases}\quad j=\overline{0,k-2}. \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (12) верна (см. (5)), а правая часть (13) содержит некоторый многочлен степени k, который записан через многочлены Чебышева 2-го рода с неопределенными коэффициентами $\beta_j^{(k)}$. Для их вычисления домножим (13) на $\sqrt{1-x^2}U_j(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[-1,1]$. Известно [5, с. 72], что $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_j(t)U_p(t)dt=\begin{cases}0, & j\neq p,\\ 0{,}5, & j=p,\end{cases}$ $j,p=0,1,...,k,$ тогда из (1) и (13) с учетом обозначений (11) находим

$$\frac{\beta_j^{(k)}}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}U_j(\tau)\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-\tau}\right\}d\tau+\int_{-1}^{1}U_j(\tau)U_k(\tau)d\tau=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\left\{\frac{(-1)}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}U_j(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t}\right\}dt+\int_{-1}^{1}\sum_{p=0}^{k}U_{j-k+2p}(t)dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\,T_{j+1}(t)dt+B_{k,j}.$$

Так как $2\,U_k(t)\,T_{j+1}(t)=U_{k+j+1}(t)+U_{k-1-j}(t)$ и $U_{-1}(t)=0$, то

$$\frac{\beta_j^{(k)}}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_{k+1+j}(t)+U_{k-1-j}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}dt+B_{k,j}=\frac{1}{2}(J_{k+1+j}+J_{k-1-j})+B_{k,j}. \tag{15}$$

По аналогии с теоремой 1 имеем: при $M=-1$ или M четном $J_M=0$, а при $M>-1$ и нечетном $J_M=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_M(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}dt=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left(\frac{U_M(z)}{\sqrt{z^2-1}}\ln\frac{z-1}{z+1}\right)$. Поскольку при больших $|z|$ имеют место разложения (2), то, принимая во внимание (6) с учетом обозначений (11), получим $J_M=2H_M$. Таким образом, из (15) следует, что верно (13), (14). Теорема доказана.

Полученные разложения сингулярного интеграла по многочленам Чебышева первого и второго рода дают возможность, как и в [6; 7], построить вычислительные схемы приближенного решения некоторых классов сингулярных интегральных уравнений первого рода.

Литература

1. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. М., 1966. Т. 2.
2. Л и ф а н о в И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М., 1995.
3. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

4. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
5. С е г ё Г. Ортогональные многочлены. М., 1962.
6. Р а с о л ь к о Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 2. С. 52–58.
7. Р а с о л ь к о Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 26–34.

RASOLKO G. A., ALSEVICH L. A.

rasolka@bsu.by

DECOMPOSITION OF THE SINGULAR INTEGRAL WITH LOGARITHMIC SINGULARITY AND CAUCHY'S KERNEL OF CHEBYSHEV'S POLYNOMIALS

Summary

The decomposition of the singular integral with the logarithmic singularity and Cauchy's kernel $K^0(u;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\pm 1/2}u(t)\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}$, $-1<x<1$, in the form of a linear combination of orthogonal polynomials (Chebyshev's polynomials of the first and second kinds) is obtained.