ВЕСТНИК
Белорусского государственного университета

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с января 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ 1

Физика
Математика
Информатика

2'98

МАЙ

МИНСК
"УНІВЕРСІТЭЦКАЕ"

УДК 517.946

В.И.ЧЕСАЛИН

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

In this paper the existence and uniqueness of the strong solution of unlocal boundary problem for abstract hyperbolic equations of the second order is established.

На ограниченном интервале (O,T) переменной t рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{d^2u}{dt^2} + A(t)u = f(t). \tag{1}$$

Здесь u и f — функции переменной $t \in (O,T)$ со значением в гильбертовом пространстве H, норму и скалярное произведение в котором обозначим $|\cdot|_H$ и $(.,.)_H$ соответственно.

Условие (A). $A(t)$ — линейный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$, не зависящей от t и плотной в H, и существует постоянная $a>0$, не зависящая от v и t, что для любого $v \in D(A)$ выполняется неравенство

$$(Av,v)_H \ge a|v|_H^2. \tag{2}$$

Для оператора A можно корректно определить дробные степени, и в частности оператор $A^{\frac{1}{2}}$ с областью определения $D(A^{\frac{1}{2}}) \supset D(A)$ (см.[1]). Введем гильбертово пространство $W = D(A^{\frac{1}{2}})$ со скалярным произведением $(u,v)_W = (A^{\frac{1}{2}}(o)u, A^{\frac{1}{2}}(o)v)_H$.

Условие (A1). Оператор $A(t)$ дважды сильно непрерывно дифференцируем по $t \in [O,T]$ на $D(A)$ и

$$\left|A'(t)A^{-1}(t)\right|_{L(H)} \le C_1, \left|A''(t)A^{-1}(t)\right|_{L(H)} \le C_2, \tag{3}$$

где $A' = \dfrac{dA(t)}{dt}$, $A'' = \dfrac{d^2A(t)}{dt^2}$, $C_1>0$ и $C_2>0$ не зависит от t.

Заметим, что для таких операторов имеет место оценка

$$\left|\left(A^{\frac{1}{2}}(t)\right)' A^{-\frac{1}{2}}(t)\right|_{L(H)} \le C_3\left|A'(t)A^{-1}(t)\right|_{L(H)}, \tag{4}$$

где $C_3 = \int\limits_0^\infty \dfrac{t^{\frac{1}{2}}dt}{(1+t)^2}$. Доказательство имеется в работе [1]. Кроме того, в работе [2] установлена оценка

$$a_1|v|_W \le \left|A^{\frac{1}{2}}(t)v\right|_H \le a_2|v|_W, \tag{5}$$

где $a_1>0$ и $a_2>0$ не зависят от t и v.

К уравнению (1) присоединим нелокальные условия вида

$$\left.\begin{aligned} l_{0\mu}u &\equiv \mu_1 u(o) + \mu_2 u(T) = \varphi, \\ l_{1\mu}u &\equiv \mu_3 \frac{du(o)}{dt} + \mu_4 \frac{du(T)}{dt} = \psi \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

где $\varphi \in W$, $\psi \in H$, μ_K – комплексные числа, удовлетворяющие следующему условию.

Условие (μ). Либо выполняется неравенство

$$\mu = \max\left\{\left|\mu_2\mu_1^{-1}\right|, \left|\mu_4\mu_3^{-1}\right|\right\} < a_1^2 \exp(-2\alpha T), \tag{7}$$

либо

$$\mu = \max\left\{\left|\mu_1\mu_2^{-1}\right|, \left|\mu_3\mu_4^{-1}\right|\right\} < a_2^2 \exp(-2\alpha T), \tag{8}$$

где $\alpha = C_1 C_3$.

В данной работе для поставленной задачи (1), (6) докажем существование, единственность и непрерывную зависимость сильного решения от f, φ, ψ и μ_K.

Пусть $H^2((O,T),D(A))$ – гильбертово пространство, полученное пополнением множества $C^\infty([O,T],D(A))$ по норме

$$\|v\|_2^2 = \int_0^T \left(\left|\frac{dv}{dt}\right|_H^2 + \left|A(t)\frac{dv}{dt}\right|_H^2 + \left|A(t)v\right|_H^2 \right) dt.$$

Пополняя это же множество по норме

$$\|v\|_E^2 = \sup_{0\le t\le T} \left(\left|\frac{dv}{dt}\right|_H^2 + \left|A^{\frac{1}{2}}(t)v\right|_H^2 \right),$$

получим банахово пространство E. Пусть $F = L_2((O,T),H)\times W\times H$ с нормой

$\|\mathcal{F}\|_F = \left[\|f\|^2 + |\varphi|_w^2 + |\psi|_H^2\right]^{\frac{1}{2}}$, где $\mathcal{F} = (f,\varphi,\psi)$ и $\|\cdot\|$ – норма в $L_2((O,T),H)$.

При доказательстве энергетического неравенства будет использована следующая

Лемма 1. Пусть символ $\|\cdot\|$ обозначает норму в одном из пространств H и W, и пусть для некоторой функции со значением в соответствующем пространстве выполняется одно из следующих двух равенств

$$g(o)+\mu g(T)=\varphi \text{ либо } \mu g(o)+g(T)=\varphi. \tag{9}$$

Тогда при $0\le\mu<1$

$$\left.\begin{aligned} &|g(o)|^2 - \mu|g(T)|^2 \le \frac{|\varphi|^2}{1-\mu} \\ &\text{либо соответственно} \\ &|g(T)|^2 - \mu|g(o)|^2 \le \frac{|\varphi|^2}{1-\mu} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Доказательство. При $\mu=0$ данные неравенства очевидны. Пусть теперь $\mu\ne 0$. Из первого соотношения в (9) имеем

$$|g(o)|^2 \le \mu^2(1+\varepsilon)|g(o)|^2 + (1+\varepsilon^{-1})|\varphi|^2.$$

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{\mu} - 1$, получаем требуемое неравенство. Доказательство во втором случае аналогично.

Для оператора $L_\mu = (\mathcal{L}, l_{0\mu}, l_{1\mu}): E \to F$ с областью определения $D(L_\mu) = H^2((O,T),D(A))$ имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A), ($A1$) и (μ). Тогда для любой функции $u \in D(L_\mu)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_E^2 \le C\|L_\mu u\|_F^2, \tag{11}$$

где $C>0$ не зависит от u.

Доказательство. Умножая (1) скалярно в H на $2\dfrac{du}{dt}$, получаем тождество

$$\frac{d}{dt}\left[\left|\frac{du}{dt}\right|_H^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|_H^2\right]=2\operatorname{Re}(\mathcal{L}u,\frac{du}{dt})_H+2\operatorname{Re}(A^{\frac{1}{2}}(t)u,(A^{\frac{1}{2}}(t))'u)_H. \quad (12)$$

Пусть выполняется условие (7). Интегрируя тождество (12) по t от 0 до τ, используя (3)−(5) и применяя элементарные оценки, получаем неравенство

$$v(\tau)\le 2\alpha\int_0^\tau v(t)dt+2\int_0^T|\mathcal{L}u|_H\cdot\left|\frac{du}{dt}\right|_H dt+v(0), \quad (13)$$

где $v(\tau)=\left.\left[\left|\dfrac{du}{dt}\right|_H^2+\left|A^{\frac{1}{2}}(t)u\right|_H^2\right]\right|_{t=\tau}$.

Далее, применяем к неравенству (13) лемму (7.1) из [3]. В результате получаем неравенство

$$v(\tau)\le\exp(2\alpha T)\left[2\int_0^T|\mathcal{L}u|_H\cdot\left|\frac{du}{dt}\right|_H dt+v(0)\right]. \quad (14)$$

Теперь умножаем тождество (12) на $a_1^{-2}\mu\exp(2\alpha T)$, интегрируем полученное равенство по t от τ до T, а затем сложим его с неравенством (14) и к полученному результату применим (5), лемму 1, лемму вида (7.1) из [3] и элементарные оценки. В результате получаем требуемое неравенство (11). В случае выполнения условия (8) доказательство аналогично.

Стандартным образом доказывается, что оператор $L_\mu:E\to F$ с областью определения $D(L_\mu)$ допускает замыкание $\overline{L}_\mu$. Решение уравнения

$$\overline{L}_\mu u=\mathcal{F},\quad \mathcal{F}\in F \quad (15)$$

назовем сильным уравнением задачи (1), (6). Неравенство (11) распространяется на $u\in D(\overline{L}_\mu)$, т.е.

$$\|u\|_E^2\le C\left\|\overline{L}_\mu u\right\|_F^2,\forall u\in D\left(\overline{L}_\mu\right). \quad (16)$$

Из неравенства (16) непосредственно вытекают

Следствие 1. Сильное решение задачи (1),(6) единственно, если оно существует.

Следствие 2. Множество значений $R(\overline{L}_\mu)$ оператора $\overline{L}_\mu$ замкнуто в F и $R(\overline{L}_\mu)=\overline{R(L_\mu)}$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда множество $R(L_\mu)$ плотно в F.

Доказательство. Заметим, что значения $l_{0\mu}u$ и $l_{1\mu}u$ независимы и множество значений данных операторов плотно в W и H соответственно. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно установить плотность $R(\mathcal{L})$ в $L_2((O,T),H)$. Итак, пусть для некоторого $v\in L_2((O,T),H)$

$$\int_0^T(\mathcal{L}u,v)_H dt=0 \quad (17)$$

для любых $u\in D(L_\mu)$, таких что $l_{0\mu}=0$ и $l_{1\mu}=0$. Покажем, что $v=0$. Полагаем в равенстве (17) $u=A_\varepsilon^{-1}h$, где $A_\varepsilon^{-1}=(I+\varepsilon A(t))^{-1}$, $h(t)\in H^2([O,T],H))$, $\varepsilon>0$ и $h(t)$ удовлетворяет однородным условиям (6). Производя дифференцирование по t и переходя к сопряженным операторам, получаем равенство

$$\int_0^T \left(\frac{d^2 h}{dt^2} + B_{1\varepsilon}^* \frac{dh}{dt} + B_{2\varepsilon}^* h, w \right)_H dt + \int_0^T (h, Aw)_H \, dt = 0, \tag{18}$$

где $w = A_\varepsilon^{-1} v$, $B_{1\varepsilon}^* = -\varepsilon A' A_\varepsilon^{-1}$ и $B_{2\varepsilon}^* = \left[-\varepsilon A'' A_\varepsilon^{-1} + 2\varepsilon^2 (A' A_\varepsilon^{-1})^2 \right]$.

Вводя интегральные операторы вида

$$G_1(v) = \int_0^t v(\tau) d\tau - \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2} \int_0^T v(\tau) d\tau,$$

$$G_2(v) = \int_0^t (t-\tau) v(\tau) d\tau + \overline{\mu}_3 \left[\frac{\overline{\mu}_1 T - t(\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2)}{(\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2)(\overline{\mu}_3 + \overline{\mu}_4)} \right] \int_0^T v(\tau) d\tau - \frac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2} \int_0^T (T-\tau) v(\tau) d\tau,$$

производя интегрирование по частям и переходя к сопряженным операторам в равенстве (18), получаем равенство

$$\int_0^T \left(\frac{d^2 h}{dt^2}, w - G_1(B_{1\varepsilon} w) + G_2(B_{2\varepsilon} w + Aw) \right)_H dt = 0,$$

из которого следует, что функция удовлетворяет следующей однородной задаче

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{d}{dt}(B_{1\varepsilon} w) + B_{2\varepsilon} w + Aw = 0, \tag{19}$$

$$\overline{\mu}_2 w(0) + \overline{\mu}_1 w(T) = 0, \overline{\mu}_4 \frac{dw(0)}{dt} + \overline{\mu}_3 \frac{dw(0)}{dt} = 0. \tag{20}$$

Используя аналогичную методику, как и при доказательстве неравенства (11), для задачи (19), (20) получаем априорную оценку

$$\sup_{0 \le t \le T} |v(t)|_H^2 \le C^* \int_0^T |\varepsilon A A_\varepsilon^{-1} v(t)|_H^2 \, dt,$$

где $C^* > 0$ не зависит от v и ε. Устремляя $\varepsilon \to +0$, получаем $v \equiv 0$, что и доказывает теорему.

Теорема 3. Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда если $\mu(n) \to \mu 0$ (т.е. $\mu_i(n) \to \mu_i$, $i = 1-4$) при $n \to \infty$, то $\left(\overline{L}_{\mu(n)}\right)^{-1} \to \left(\overline{L}_{\mu_0}\right)^{-1}$ в пространстве $\mathsf{L}(F, E)$, наделенном топологией простой сходимости.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 в [4].

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967. С.133.
2. Бриш Н.И., Юрчук Н.И. // Диф. уравнения. 1971. Т.7. №6. С.1017.
3. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961. С.23.
4. Чесалин В.И. // Диф. уравнения. 1977. Т.13. №3. С.475.

Поступила в редакцию 15.05.97.