

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ В СИСТЕМНОМ ПОДХОДЕ К ОБУЧЕНИЮ ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКЕ

И. К. Сиротина, преподаватель кафедры информационных технологий

Белорусского государственного университета

Народная асвета. – 2011. – №2. – С. 21 – 26.

Аннотация. Статья содержит теоретическое обоснование возможности решения неравенств методом интервалов, основанное на алгебраическом и функциональном подходе к их решению. Автор раскрыта целесообразность создания единого алгоритма решения всевозможных неравенств и рассмотрены методические особенности такого подхода к решению. В настоящей статье показано, каким образом метод интервалов связан с реализацией системного подхода в обучении школьников математике.

Abstract. In this article is shown comparative analysis of working on some kinds of inequalities. Here is proposed the way of using the method of space for coping with a variety of inequalities, as a method of system studying the mathematics at school.

Системный подход является одним из методологических подходов к обоснованию педагогического процесса. Его сущность в обучении связана с такими философскими категориями как целостность и развитие. При этом объект выступает в мышлении в виде целостности (единства) определенных компонентов с одновременным мысленным выделением существенных связей между этими компонентами, а мышление воспроизводит не застывшую целостность познаваемой системы, а диалектически развивающуюся целостность, то есть саму систему [1]. Агошкова Е. Б. пишет: «Система есть та идеальная конструкция, которая управляет мыслительным процессом в качестве закона достаточного основания. Она определяет закон, принцип, правило получения нового знания о чем-то с его обоснованием» [2, с. 70].

В настоящей статье показывается, каким образом метод интервалов – один из центральных методов элементарной математики – связан с реализацией системного подхода к обучению школьников математике, иными словами показывается развитие в обучении метода интервалов как целостности.

Как правило, метод интервалов, применяемый при решении неравенств школьного курса математики, основан на алгебраическом подходе к их решению, то есть на свойстве перемены знака бинома $\delta - a$ при переходе через точку $\delta = a$. В силу этого метод имеет ограниченное применение и чаще всего в традиционной практике преподавания используется только при решении рациональных неравенств. Нам представляется, что полная реализация возможностей данного метода для развития школьников может быть достигнута только на основе функционального подхода к решению всевозможных видов неравенств.

Дадим краткое описание технологии изучения модуля «Решение неравенств» с помощью доминирующего метода – метода интервалов, основанного на свойстве непрерывности функции – в основе построения которой лежит идея систематизации знаний старшеклассников и абитуриентов. Изучение материала будем проводить в следующей последовательности. 1. Актуализация знаний и создание алгоритма решения рациональных неравенств на основе функционального метода решения. 2. Развитие метода интервалов при решении других видов неравенств. 3. Составление кластеров и модели системы знаний. 4. Определение тенденций развития созданной системы знаний.

1.1. С целью актуализации знаний предложим учащимся выполнить следующий тест.

Тест №1 по теме «Функция: основные понятия и определения»

Установите соответствие:

1. Область определения и область значений функции $y = f(x)$:

ПОНЯТИЕ	ЗАПИСЬ	ОПРЕДЕЛЕНИЕ
1) область определения	а) $D(f)$	г) множество всех допустимых значений переменной x
2) область значений	б) $F(y)$	д) множество всех допустимых значений переменной y
	в) $E(f)$	е) множество всех допустимых значений переменных x и y

Укажите все правильные варианты ответов:

2. Нули функции $y = f(x)$ – это:

- 1) точки пересечения графика функции с осью ординат;
- 2) точки пересечения графика функции с осью абсцисс;
- 3) точки пересечения графика функции с осями координат;
- 4) корни уравнения $f(x) = 0$.

Установите соответствие (3 – 4):

3. Промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$:

ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИИ	ЗАПИСЬ	ТОЧКИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ РАСПОЛОЖЕНЫ
1) положительна	а) $f(x) \leq 0$	ж) над осью абсцисс
2) отрицательна	б) $f(x) \geq 0$	з) под осью абсцисс
3) не положительна	в) $f(x) > 0$	и) правее оси ординат
4) не отрицательна	г) $f(x) < 0$	к) левее оси ординат
	д) $f(x) = 0$	л) под осью абсцисс и точки пересечения с осью абсцисс
	е) $f(x) \neq 0$	м) над осью абсцисс и точки пересечения с осью абсцисс

4. Согласно рисунку 1 укажите множества значений аргумента функции $f(x)$, для которых выполняется одно из условий:

РИСУНОК 1	УСЛОВИЕ	ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА ФУНКЦИИ
	1) $f(x) \leq 0$	а) $(-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3)$
	2) $f(x) = 0$	б) $(-\infty; x_1] \cup [x_2; x_3]$
	3) $f(x) > 0$	в) $[x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty)$
	4) $f(x) \geq 0$	г) $(x_1; x_2) \cup (x_3; +\infty)$
	5) $f(x) < 0$	д) $\{x_1; x_2; x_3\}$

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правил.	1 – а – г,	2, 4	1 – в – ж, 2 – г – з,	1 – в, 2 – д, 3 – а, 4 – б,
ответа	2 – в – д		3 – а – л, 4 – б – м	5 – г

В результате выполнения теста №1 у учащихся должно сформироваться представление о том, что решение неравенств вида $f(x) < 0$ ($>$; $\leq$; $\geq$) связано с функцией, записанной в левой части неравенства, в частности зависит от промежутков ее знакопостоянства.

1.2. Перейдем к составлению алгоритма решения целого рационального неравенства методом интервалов. Предложим учащимся выполнить следующие упражнения.

Упражнение 1. Рассмотрите рисунок 1. Расставьте знаки функции, изображенной на этом рисунке (получим рис. 2). Совместите нули функции x_1 и x_2 , расставьте знаки полученной функции (рис. 3). Совместите нули функции x_1 , x_2 и x_3 , расставьте знаки полученной функции (рис. 4). Сформулируйте правило расстановки знаков функции на всей ее области определения.

Рисунок 2

Рисунок 3

Рисунок 4

Упражнение 2. На рисунках 5 и 6 нанесены на координатную прямую нули некоторых функций (графики функций отсутствуют) и установлены знаки этих функций на одном из промежутков. Расставьте знаки функций на остальных промежутках и запишите решение уравнения $f(x) = 0$ и решения неравенств $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$.

Рисунок 5

Рисунок 6

Упражнение 3. Решите неравенства: а) $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$;

б) $x^6 - 9x^3 + 8 > 0$; в) $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x < 9$.

В результате выполнения упражнений 1, 2 и 3 ученики должны осознать, что если все нули функции $f(x)$ отметить на координатной прямой (области определения функции), то они разобьют эту прямую на отдельные промежутки. Так как внутри каждого из промежутков функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет свой знак, то для установления этого знака достаточно взять любую точку из интересующего нас промежутка и определить знак функции в этой точке. Зная знак функции на одном из промежутков, можно установить ее знаки и на всех остальных промежутках.

Совершенно очевидно, что, выполняя активную мыслительную работу над учебным материалом, учащиеся могут самостоятельно (или под руководством учителя) со-

ставить алгоритм решения неравенств вида $f(x) < 0$ ($>$; $\leq$; $\geq$), где функция $f(x)$ – многочлен: 1. Запишем функцию $f(x)$ и найдем ее нули, решая уравнение $f(x) = 0$. 2. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знак функции на любом промежутке. 3. Определим знак функции на остальных промежутках. 4. Запишем решение неравенства, учитывая его смысловой знак.

1.3. Перейдем к решению дробных рациональных неравенств, т. е. неравенств

вида $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ($>$; $\leq$; $\geq$), где $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены. Особенностью решения таких неравенств является то, что знаменатель дроби не может быть равен нулю, следовательно, корни многочлена $g(x)$ (точки разрыва функции) будем наносить на координатную прямую в виде «пустых» кружочков.

Упражнение 4. Решите неравенства: а) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} < 0$; б) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$;

в) $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-3} < 0$; г) $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$. Укажите различия в решении целых и дробных рациональных неравенств.

С целью образования системы устойчивых обобщенных ассоциаций обуславливающих формирование умений и навыков решений неравенств, предложим учащимся выполнить тест №2, в который включены упражнения на распознавание, в системе задач отражены все особенности, присущие отдельным задачам данного типа, а воспроизводимый материал подвержен реконструкции.

Тест №2 по теме «Рациональные неравенства»

Укажите все необходимые действия (1 – 2):

1. Чтобы решить целое рациональное неравенство вида $f(x) \leq 0$ необходимо:

- 1) найти нули функции $f(x)$;
- 2) найти точки разрыва функции $f(x)$;
- 3) нанести нули функции $f(x)$ на координатную прямую и определить знаки функции на полученных промежутках;
- 4) нанести точки разрыва функции $f(x)$ на координатную прямую и определить знаки функции на полученных промежутках;
- 5) записать промежутки, на которых функция не положительна;
- 6) записать промежутки, на которых функция отрицательна;
- 7) записать промежутки, на которых функция положительна.

2. Чтобы решить дробное рациональное неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ необходимо:

- 1) найти нули функции $f(x)$;
- 2) найти нули функции $g(x)$;
- 3) отметить на координатной прямой нули функции $f(x)$ «зачерненными» кружочками, а нули функции $g(x)$ – «пустыми»;
- 4) отметить на координатной прямой нули функции $f(x)$ «пустыми» кружочками, а нули функции

$g(x)$ - «зачерненными»;

5) отметить на координатной прямой нули функций $f(x)$ и $g(x)$ «зачерненными» кружочками;

6) записать промежутки, на которых функция $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ положительна;

7) записать промежутки, на которых функция $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ не отрицательна

Установите соответствие:

3. Решение рациональных неравенств:

НЕРАВЕНСТВО

$$1) x^3 + x^2 > 2x \quad 2) x^3(x-1)^2(x+2)^4 \geq 0 \quad 3) \frac{2x+2-x^2}{x^2+2x} < \frac{1}{x} \quad 4) \frac{(x+2)^4}{x^2(1-x)} \leq 0$$

РИСУНОК

а)

б)

в)

г)

РЕШЕНИЕ (ОТВЕТ)

е)

ж) $\{-2\} \cup (1; +\infty)$

з) $[-2; 0] \cup \{1\}$

и) $(-2; 0) \cup (1; +\infty)$

к) $\{-2\} \cup [0; +\infty)$

л) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$

м) $[-2; 0] \cup [1; +\infty)$

Ответы

Номер задания	1	2	3
Вариант прав. ответа	1, 3, 5	1, 2, 3, 7	1 – б – и, 2 – г – к, 3 – а – л, 4 – в – ж

Заметим, что образование ассоциации ($P_1; P_2$) происходит в том случае, когда осознание условия задачи (мыслительный процесс P_1) влечет представление соответствующего метода решения и результата (мыслительный процесс P_2). Если компоненты задач варьируются и влияют на получаемый результат (являются существенными), то образуются обобщенные ассоциации [3, с. 6]. Во избежание образования ошибочных обобщенных ассоциаций, при которых учащиеся неверно решают отдельные задачи данного типа, условимся: корни четной кратности наносить на координатную прямую дважды, нечетной кратности – один раз; решая неравенства вида $f(x) < 0$ и $f(x) > 0$, нули функции $f(x)$ отмечать «пустыми» кружочками, а решая неравенства $f(x) \leq 0$ и $f(x) \geq 0$ - «зачерненными».

С целью углубления понимания учебного материала и активизации мыслительной деятельности школьников представляется весьма целесообразным составление кластеров, которые играют роль «опорных сигналов» и помогают установить связь между мыслительными процессами. На данном этапе обучения кластер может выглядеть так:

Таблица 1. Кластер по теме «Решение неравенств»

Необходимо знать			МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ Алгоритм решения неравенства вида $f(x) < 0$ ($>$; $\leq$; $\geq$) 1. Запишем функцию $f(x)$. 2. Найдем нули функции, решая уравнение $f(x) = 0$. 3. Нанесем нули функции на ее область определения (координатную прямую) и установим знак функции на любом промежутке; определим знаки функции на остальных промежутках. 4. Запишем решение неравенства, учитывая его смысловой знак.
$f(x) > 0$		$(-\infty; x_1)$	
$f(x) < 0$		$(x_1; x_2) \cup (x_2; \infty)$	
$f(x) \geq 0$		$(-\infty; x_1] \cup \{x_2\}$	
$f(x) \leq 0$		$[x_1; +\infty)$	
Целые рациональные		Дробные рациональные	?
особенность: наносим нули функции на координатную прямую		особенность: наносим нули функции и точки разрыва на координатную прямую	

2. Исходя из предыдущего, отметим, что, приступая к изучению других видов неравенств (см. [4]), прежде всего, необходимо решить следующие задачи. Установить, что область определения функции не всегда совпадает с множеством всех действительных чисел, значит, решая некоторые виды неравенств, например, иррациональные, логарифмические, тригонометрические, комбинированные и т. п., нули соответствующих функций необходимо наносить на области их определения. Актуализировать знания по темам: а) нахождение области определения рациональной, иррациональной, содержащей переменную под знаком модуля, показательной, логарифмической и тригонометрической функций; б) решение рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений.

Покажем это на примере решения логарифмического неравенства $\log_{2+x}(6-|x|) \geq 0$, приводя возможный образец записи решения. 1). Рассмотрим функцию $f(x) = \log_{2+x}(6-|x|)$.

2). Найдем область определения функции. $D(f): \begin{cases} 6-|x| > 0, \\ 2+x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 6, \\ x > -2, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; -1) \cup (-1; 6)$
 . 3). Найдем нули функции, решая уравнение $\log_{2+x}(6-|x|) = 0$. Получим: $6-|\delta| = 1$, $|\delta| = 5$, $\delta = \pm 5$. 4). Нанесем число 5 на область определения функции и установим ее знаки на полученных промежутках. 5). Согласно рисунку 7 запишем решение неравенства: $(-1; 5]$.

Рисунок 7

Рассмотрим некоторые особенности решения тригонометрических неравенств. Традиционно такие неравенства решают с помощью единичной окружности или в не-

которых немногих случаях – графически. При решении этих неравенств методом интервалов возможны следующие основные случаи: 1) если исходное неравенство удалось свести к простейшему, то решать его необходимо на основном периоде тригонометрической функции, записанной в его левой части; 2) если основной период функции, записанной в левой части неравенства, определить сложно, то можно найти любой из периодов функции (не обязательно основной) и решать неравенство на этом периоде.

Приведенные рассуждения проиллюстрируем на примере решения неравенства $\frac{\sqrt{3} - 2 \sin 2x}{\cos^2 x} < 0$. 1). Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{3} - 2 \sin 2x}{\cos^2 x}$. 2). $D(f): \cos^2 x \neq 0, x_{1,2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 3). Найдём нули функции, решая уравнение $\sqrt{3} - 2 \sin 2x = 0$, откуда $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 4). Так как $T = 2\pi$ – период функции $f(x) = \frac{\sqrt{3} - 2 \sin 2x}{\cos^2 x}$, то решать данное неравенство будем на отрезке длиной 2π . С этой целью отберём несколько последовательных корней уравнения $\sqrt{3} - 2 \sin 2x = 0: x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{8\pi}{6}$. 5). Нанесём числа $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$ на координатную прямую и определим знаки функции $f(x) = \frac{\sqrt{3} - 2 \sin 2x}{\cos^2 x}$ на полученных промежутках (рис. 8). 6) Согласно рисунку 8 запишем решение неравенства: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi m; \frac{\pi}{3} + \pi m \right)$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Рисунок 8

Изучив решение основных видов неравенств целесообразно показать учащимся, что метод интервалов можно применять и при решении так называемых комбинированных неравенств, а также систем и совокупностей неравенств (см. [4]). При этом весьма полезно всякий раз выявлять и подчеркивать особенности решений новых видов неравенств (взаимосвязь, сходства, различия) и отражать их в кластерах.

Постепенно дополняя и расширяя таблицу 1, получим таблицу 2, которая будет играть роль вспомогательного внешнего системообразующего фактора.

Таблица 2. Модель системы знаний по теме «Решение неравенств»

Необходимо знать	МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ Алгоритм решения неравенства вида $f(x) < 0$ ($>$; $\leq$; $\geq$)	Необходимо уметь:
$f(x) > 0$ $(-\infty; x_1)$ $f(x) < 0$ $(x_1; x_2) \cup (x_2; \infty)$ $f(x) \geq 0$ $(-\infty; x_1] \cup \{x_2\}$ $f(x) \leq 0$ $[x_1; +\infty)$	- Запишем функцию $f(x)$. - Найдем область определения функции. - Найдем нули функции, решая уравнение $f(x) = 0$. - Нанесем нули функции на ее область определения и установим знак функции на любом промежутке; определим знаки функции на остальных промежутках; - Запишем решение неравенства, учитывая его смысловой знак.	- находить область определения рациональной, иррациональной, содержащей переменную под знаком модуля, показательной, логарифмической и тригонометрической функций; - решать рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения

ВИДЫ НЕРАВЕНСТВ

целые рациональные	дробные рациональные	иррациональные	содержащие переменную под знаком модуля	показательные	логарифмические	тригонометрические
особенность: наносим нули функции на координатную прямую	особенность: наносим нули функции и точки ее разрыва на координатную прямую	особенность: наносим нули функции на ее область определения; при решении уравнения выполняем проверку полученных корней	особенность: наносим нули функции на ее область определения	особенность: характер монотонности функции не влияет на алгоритм решения	особенность: наносим нули функции на ее область определения; характер монотонности функции не влияет на алгоритм решения	особенность: наносим нули функции на ее период или на один из ее периодов (не обязательно основной)

ДРУГИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ОТДЕЛЬНЫХ ВИДОВ НЕРАВЕНСТВ

$1) \sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases}$ равносильно $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$	$1) f(x) \leq g(x)$ равносильно $\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x) \end{cases}$ $2) f(x) \geq g(x)$ равносильно $\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases}$	$1) a^{f(x)} < a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно $f(x) < g(x)$; $2) a^{f(x)} < a^{g(x)}$ при $0 < a < 1$ равносильно $f(x) > g(x)$	$1) \log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$ $2) \log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ при $0 < a < 1$ равносильно $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$	$1)$ с помощью единичной окружности; $2)$ с помощью графиков функций.
---	--	--	--	--

Важная педагогическая проблема состоит в следующем: как правильно сочетать метод интервалов и другие методы решений неравенств, чтобы достигнуть полного понимания их учащимися и умения применять при решении задач. Ответ на этот вопрос всецело зависит как от целей образования, так и от уровня математической подготовки учащихся. Так, например, важно, будет ли использовать учитель другие методы решений неравенств в дальнейшем при построении системы знаний, или, например, учени-

ки уже знают некоторые методы решений и умеют их применять. К тому же нельзя не учитывать наличие резерва учебного времени. А поскольку идеи системного подхода к решению неравенств реализованы с помощью метода интервалов (произошло освоение системы со стороны внутренних связей), то дальнейшее развитие системы знаний (освоение системы со стороны внешних связей) ничего важного не сможет в этом плане добавить, возможно, только послужит закреплению представлений учеников о системном подходе к обучению вообще. Особенность такого подхода к обучению заключается в том, что доминирующий метод (метод интервалов) обеспечивает структурирование учебного материала (образование совокупности устойчивых связей системы), т. е. сохранение основных свойств при различных изменениях ее частей (элементов).

В заключение отметим, что, описанная нами технология систематизации знаний обеспечивает активность учащихся не в усвоении готовых знаний, а в построении самой системы знаний и тем самым данная технология принципиально отличается от традиционной методики обучения. Так как предложенная нами система изложения учебного материала отражает принципы последовательности и иерархичности, то ученики могут усваивать этот материал в его логической связи и преемственности, при этом расширяя и углубляя свои знания. Тем самым у них формируется убеждение в том, что математическими понятиями и методами необходимо овладевать в их взаимосвязи и развитии. Такой подход к обучению можно рассматривать как систему целенаправленной организации познавательной деятельности субъектов обучения, приводящей к формированию системы знаний, умений и навыков решения неравенств школьного курса математики и способствующий развитию у них системного стиля мышления.

Литература

1. Будников Е. Г. Системный подход к обучению школьников началам математического анализа: Моногр. – Мн.: БГПУ, 2004. – 221с.
2. Агошкова Е. Б. Категория «система» в современном мышлении. // Вопросы философии. №4, 2009. с. 57 – 71.
3. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
4. Сиротина И. К., Гумбар В. Г., Кулакевич Д. В. Решение неравенств методом интервалов: справочное пособие к решению задач. – Барановичи: РИО БарГУ, 2008. – 112 с.