ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

ПРОБЛЕМА ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ У ВЫПУСКНИКОВ ШКОЛ

И. К. Сиротина, *ст. преподаватель кафедры информационных технологий гуманитарного факультета БГУ*

Народная асвета. – 2011. – №1. – С. 20 – 25.

Аннотация. В статье изложена точка зрения автора на некоторые проблемы, выявленные в процессе проведения централизованного тестирования по математике. Показано, что в рамках существующей модели обучения математике у выпускника школы не может быть сформирована система знаний так как, организуя обучение на отдельных уровнях, мы не можем получить результат на уровне всей системы. Обоснована необходимость систематизации знаний на старшей ступени обучения. Показано, что абитуриент может выполнить тест ЦТ, если он будет владеть системой знаний, умений и навыков за курс средней школы и если он будет мыслить на уровне всей системы, то есть если у него будет сформирован системный стиль мышления. Автор статьи поднимает вопрос целенаправленной подготовки школьников к централизованному тестированию. Предложены возможные варианты разрешения данной проблемы.

Abstract. The urgency of given article is caused by necessity of improvement of quality of mathematical formation of graduates of schools. In given article problems of formation of system of knowledge on the mathematician at graduates of schools and entrants rise. Some ways of the decision of a problem of formation of system of knowledge on the mathematician for a high school course are offered.

Очередной этап централизованного тестирования снова всколыхнул общественное мнение. Полемика, развернувшаяся по вопросу тестирования на страницах печатных изданий и на сайтах Интернета, свелась, в основном, к резкой критике работы школьного учителя и не обошла стороной качество подготовки выпускников педагогических вузов.

Но почему из года в год результаты тестирования нас так огорчают и разочаровывают? Ведь статистика показывает, что абитуриенты на ЦТ по математике неизменно получают низкие баллы, тенденция к улучшению которых не наблюдается. Так на какое чудо мы надеемся и кто тот волшебник, который нам его явит?

В данной статье изложим нашу точку зрения по существующей проблеме. В связи с чем, прежде всего, попытаемся дать ответы на следующие вопросы.

1. Чему и как учат в школе.

2. Что представляет собой педагогический тест централизованного тестирования по математике.

Образовательный процесс по предмету «Математика» в школе организуется так, чтобы получить обозначенные учебными программами и образовательным стандартом результаты обучения. Учебный материал структурирован по семи основным содержательным линиям: числа и вычисления; выражения и их преобразования; уравнения и неравенства; координаты и функции; геометрические фигуры и их свойства; геометрические величины; геометрические построения.

Среди целей обучения, сформулированных в учебной программе, на первое место поставлена следующая: ученики должны овладеть системой математических знаний, которые необходимы им для применения в практической деятельности, для изучения других учебных предметов и для продолжения образования [1].

Педагогический тест, предлагаемый абитуриентам на централизованном тестировании, представляет собой систему задач, охватывающую все разделы школьного курса математики: арифметические вычисления; преобразования алгебраических и трансцендентных выражений; решение алгебраических и трансцендентных уравнений и неравенств; элементарные функции и способы их преобразования; изображения некоторых множеств точек на плоскости; текстовые задачи; планиметрия и стереометрия. При этом тест включает репродуктивные задачи, задачи частично-поискового, поискового, а также исследовательского характера.

Поскольку тест не содержит внепрограммного материала, то возникает закономерный вопрос: почему выпускник школы, имея по математике в аттестате 7 – 8 баллов, на централизованном тестировании получает только 30 – 40 баллов? Чтобы дать ответ на этот вопрос, рассмотрим, как изучают математику в школе.

Как известно, изучение математики в V – XI классах осуществляется в три этапа: V – VI, VII – IX, X – XI классы. Учебный материал семи содержательных линий распределен по этим этапам в соответствии с принципами последовательности, систематичности, преемственности, развития и др.

Так, например, тема «Функция» изучается на протяжении двух последних этапов: VII класс: линейная функция и ее график; VIII класс: квадратичная функция и ее график; IX класс: область определения и область значений функции, способы задания функции, график функции, нули функции, возрастание и убывание функции; функции $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, их свойства и графики; X класс: тригонометрические функции, их свойства и графики; производная функции и исследование функции с помощью производной; XI класс: степенная функция с действительным показателем; показательная и логарифмическая функции.

А теперь рассмотрим задачи, предлагаемые для решения абитуриентам на централизованном тестировании.

Задача 1. Найдите все значения *a*, при которых система уравнений $\begin{cases} -1{,}4x + 0{,}4ay + 1 = 0, \\ (1 - 0{,}75a)x + ay - 1{,}75 = 0 \end{cases}$ не имеет решений (подробное решение этой задачи и многих других задач ЦТ приведено в пособии [2]).

Рассмотрим структуру задачи. 1. Данная система представлена линейными уравнениями с двумя переменными, следовательно, имеем линейные функции, графиками которых являются прямые. 2. Система уравнений не имеет решений, если прямые на плоскости не пересекаются.

Чтобы решить эту задачу, ученику необходимо: 1) записать линейные функции в явном виде $y = kx + b$: $y = \frac{7}{2a}x - \frac{5}{2a}$, $y = \frac{3a-4}{4a}x + \frac{7}{4a}$; 2) рассмотреть два случая: а) если $a \neq 0$, то исходная система не имеет решений при условии, что $\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{7}{2a} = \frac{3a-4}{4a}, \\ -\frac{5}{2a} \neq \frac{7}{4a}, \end{cases}$ откуда $a = 6$; б) если $a = 0$, то, подставляя значение $a = 0$ в каждое уравнение этой системы, получим: $\begin{cases} x = 5/7, \\ x = 7/4. \end{cases}$ Следовательно, при $a = 0$ система также не имеет решений; 3) записать ответ: $\{0;\ 6\}$.

Эту задачу, хоть и с трудом, но все же могут решить ученики седьмого класса при изучении темы «Линейная функция». Трудность у семиклассников вызовет как поиск ее решения, так и преобразования, выполняемые в процессе решения. Если же эту задачу предложить решить ученикам 10-11 классов, уровень мышления которых дает возможность решать исследовательские задачи, то справиться с ее решением сможет только тот из них, кто помнит материал седьмого класса.

Задача 2. Найдите все целые значения параметра *k*, при которых уравнение $\left|3x^2 - 8|x| - 3\right| = -3k$ имеет шесть корней.

Данную задачу целесообразно решать графически. Ученикам необходимо уметь выполнять преобразования графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$.

Решение. 1. Заменим данное уравнение равносильной ему системой уравнений $\begin{cases} y = \left|3x^2 - 8|x| - 3\right|, \\ y = -3k. \end{cases}$

2. Схематически построим график функции $y = 3x^2 - 8x - 3$. Для этого найдем координаты вершины параболы $x_0 = \frac{4}{3}$, $y_0 = -8\frac{1}{3}$ и точку пересечения графика с осью ординат (график (1) на рисунке 1).

Рисунок 1

3. Построим график (2) функции $y = 3x^2 - 8|x| - 3$, выполняя следующее преобразование: часть графика функции $y = 3x^2 - 8x - 3$ правее оси *Oy* оставим и ее же отразим симметрично этой оси.

4. Построим график (3) функции $y = \left|3|x|^2 - 8|x| - 3\right|$, выполняя следующее преобразование: часть графика функции $y = 3|x|^2 - 8|x| - 3$, расположенной над осью *Ox* оставим, а ту, что под осью *Ox*, отразим симметрично этой оси.

5. Построим семейство прямых $y = -3k$ так, чтобы они пересекали график функции $y = \left|3|x|^2 - 8|x| - 3\right|$ в шести точках.

6. Очевидно, что это возможно при условии, что $3 < -3k < \frac{25}{3}$ или $-\frac{25}{9} < k < -1$. Промежутку $\left(-2\frac{7}{9}; -1\right)$ принадлежит одно целое значение $k = -2$.

Задача 3. Найдите количество всех целых чисел из области значений функции $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} + 2$, которые она принимает на промежутке $(-3; 4)$.

Для решения этой задачи ученику потребуется:

1) знание формул сокращенного умножения и свойств арифметического корня для приведения функции $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(\tilde{o}+1)^2}+2$ к виду $y=|x-1|+|x+1|+2$;

2) умение строить график функции, содержащей переменную под знаками модулей (рис. 2).

3) умение находить область значений функции на заданном промежутке: $y\in[4;\infty)$;

Рисунок 2

4) уметь определять количество целых чисел, принадлежащих заданному промежутку: 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Задача 4. Найдите все значения параметра *a*, при которых система уравнений $\begin{cases}|x|+|y|=8,\\ x^2+y^2=4a\end{cases}$ имеет четыре решения.

Решение. Имеем уравнение квадрата $|x|+|y|=8$ и уравнение окружности $x^2+y^2=4a$.

1. Построим квадрат с центром в точке $\hat{I}(0;0)$ и диагональю $d=16$ (рис. 3). Площадь квадрата найдем по формуле $S=\frac{1}{2}d^2$. Получим: $S=\frac{1}{2}\cdot 16^2=128$. С другой стороны площадь квадрата можно вычислить по формуле $S=x^2$, где x – длина стороны квадрата. Тогда $x^2=128$ и $x=8\sqrt{2}$.

Рисунок 3

2. Построим окружность с центром в точке $\hat{I}(0;0)$ и радиусом $R=2\sqrt{a}$ (рис. 3). Поскольку система уравнений $\begin{cases}|x|+|y|=8,\\ x^2+y^2=4a\end{cases}$ имеет четыре решения, то окружность должна быть или вписана в квадрат, тогда ее радиус $r=\frac{x}{2}$ или $2\sqrt{a}=\frac{8\sqrt{2}}{2}$, откуда $a=8$ или описана около квадрата, тогда радиус окружности $R=\frac{d}{2}$ или $2\sqrt{a}=8$, откуда $a=16$.

3. Запишем ответ*:* 8; 16.

Рассмотренные нами задачи требуют применения функционального метода решения и являются наиболее трудными для абитуриентов. В состав этих задач входят достаточно сложные компоненты.

Чтобы решить задачи 1 – 4 ученику необходимо:

- видеть и знать структуру всего учебного модуля (укрупненной дидактической единицы) «Функция»;
- видеть внутренние связи между всеми элементами знаний модуля и уметь устанавливать внешние связи с другими учебными модулями;
- владеть системой оперативных теоретических знаний модуля;
- уметь решать ключевые задачи модуля, в которых должны быть отражены все особенности, присущие данному классу задач;
- уметь расширять область применения знаний учебного модуля и использовать знания в нестандартных ситуациях.

Рассмотрим более простые задачи.

Задача 5. Найдите сумму всех чисел *m*, каждое из которых делится без остатка на 18 и принадлежит промежутку $[-252; 299)$.

Для того чтобы решить задачу, ученик должен выполнить следующие действия. 1. Сузить область поиска чисел, руководствуясь соображением, что сумма противоположных чисел равна нулю. Для этого разбить промежуток $[-252; 299)$ на отрезок $[-252; 252]$ и интервал $(252; 299)$.

2. Рассмотреть отрезок $[-252; 252]$ и сделать следующее заключение: сумма всех чисел, каждое из которых делится без остатка на 18 и принадлежит этому отрезку, будет равна нулю.

3. Рассмотреть интервал $(252; 299)$. Руководствуясь тем, что число 252 делится на 18 (так как оно делится и на 2 и на 9), но не принадлежит рассматриваемому интервалу, найти все числа, кратные 18 и не превосходящие число 299: $m_1 = 252 + 18 = 270$, $m_2 = 270 + 18 = 288$.

4. Записать сумму найденных чисел: $m_1 + m_2 = 270 + 288 = 558$.

Задача 6. Найдите сумму всех целых чисел *k*, при которых дробь $\frac{6k^2 + k + 48}{3k - 1}$ также является целым числом.

Решая данную задачу, ученик может рассуждать следующим образом. Имеем алгебраическую дробь. Поскольку степень многочлена-делимого больше степени многочлена-делителя, то, выполнив деление многочленов, получим: $\frac{6k^2 + k + 48}{3k - 1} = 2k + 1 + \frac{49}{3k - 1}$. Очевидно, что дробь будет целым числом, если 49 разделится без остатка на $3k - 1$, то есть если знаменатель дроби будет принимать значения: $\pm 1; \pm 7; \pm 49$. Решив 6 уравнений и отобрав целые корни, получим: $k_1 = 0$, $k_2 = -2$ и $k_3 = -16$.

Задачи 4 и 5 состоят из простых компонент, но и они являются трудными для тех абитуриентов, у которых отсутствует система знаний учебного модуля «Числовые множества» и учебного модуля «Тождественные преобразования алгебраических выражений».

Такие примеры можно приводить бесконечно долго. Отметим лишь одно: какую бы задачу, предложенную для решения абитуриентам на централизованном тестировании, мы ни выбрали, неизбежно будем сталкиваться с проблемой поиска ее решения, отсутствием оперативных теоретических знаний за весь курс средней школы и отсутствием умений и навыков, доведенных до автоматизма.

Следовательно, чтобы качественно выполнить тест ЦТ, абитуриент должен: во-первых, владеть *системой знаний, умений и навыков* за курс средней школы; во-вторых, он должен мыслить на уровне всей системы, другими словами, у него должен быть сформирован *системный стиль мышления*.

На основе сказанного можно сделать следующий вывод. Изучение учебного предмета «Математика» в школе ориентировано на получение учеником систематических знаний. Это гарантировано соблюдением принципов системности и последовательности при построении учебных программ и школьных учебников. Но «система знаний» и «систематические знания» понятия хоть и сходственные, но не тождественные. *Систематическими знаниями* считают совокупность знаний со структурой, адекватной системе первоначального изложения материала, связанную логическими связями между понятиями и отдельными частями содержания, то есть содержательно-логическими связями (А. А. Столяр, К. О. Ананченко, Е. Г. Будников и др.).

Систематические знания служат основой для построения системы знаний.

Под *системой знаний* понимают совокупность элементов, находящихся в определенных отношениях и связях друг с другом и образующих целостность и единство, под *систематизацией знаний, умений и навыков* – процесс формирования системы всех элементов, составляющих содержание образования [3].

Систематизация – мыслительная деятельность, требующая актуализации внутренних связей между элементами учебного модуля (укрупненной дидактической единицы) и внешних связей между всеми модулями.

Необходимые условия формирования системы знаний:

- логическая организация и структурирование учебного материала;
- изложение учебного материала укрупненными дидактическими единицами (модулями);
- сочетание теоретического и эмпирического подходов к обучению;
- развитие системного стиля мышления субъектов обучения;
- использование активных методов и форм обучения.

Необходимость систематизации знаний на старшей ступени обучения обусловлена тем, что:

- процессу обучения характерна необратимость, то есть невозможность повторений ранее протекающих этапов;
- каждый новый этап обучения ведет к изменению уровня мышления школьника, а каждый новый уровень развития мышления требует переосмысления ранее усвоенных знаний;
- преобладание линейных связей между элементами знаний не позволяет увидеть структуру учебного предмета;
- каждая новая ступень обучения и развития требует пересмотра методов решений и подходов к поиску решений задач.

Для успешного формирования системы знаний целесообразно создать систему экономичных методов решений задач, отдавая предпочтение «доминирующим» методам, и избегая «изолированных».

«Доминирующим» будем называть метод, который пригоден для решения большого класса задач учебного модуля или нескольких модулей. Так, например, решение всех видов неравенств можно осуществить при помощи метода интервалов, основанного на функциональном подходе к решению (см. [4]).

Доминирующий метод позволяет:

- ослабить интерференцию и усилить перенос навыка;
- образовать устойчивые ассоциации;
- осознать все особенности, присущие определенному классу задач;
- выработать автоматизмы.

Если метод решения задачи не претерпевает дальнейшего развития, а то и вовсе не находит применения при решении нового класса задач, то метод как бы «изолируется». Например, методы решений иррациональных неравенств вида $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ изолированы. Всего же при изучении модуля «Неравенства» насчитывается около десятка таких методов.

Самое пристальное внимание следует обратить на функциональные методы, которые дают возможность решить достаточно большое количество задач централизованного тестирования.

Так что же все-таки нам показывает оценка в аттестате выпускника школы? А она показывает, как ученик усвоил учебный материал в одиннадцатом классе: степень с рациональным показателем; степенную, показательную и логарифмическую функции; решение иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств; многогранники и тела вращения. К тому же она показывает, насколько ученик был прилежен, старателен, исполнителен, трудолюбив и т. д. Она показывает, что ученик успешно сдал экзамен за курс средней школы и подтвердил свои знания на экзамене. Она, за редким исключением, не расходится с экзаменационной оценкой, так как в противном случае учителю пришлось бы безуспешно объяснять администрации школы, почему он необъективно оценивал ученика на протяжении всего периода обучения.

Что показывает оценка, полученная абитуриентом на централизованном тестировании? Она показывает, насколько выпускник школы владеет системой знаний умений и навыков за курс средней школы. Следовательно, расхождение оценок еще раз убедительно говорит нам о необходимости организации целенаправленной подготовки к централизованному тестированию.

Такая подготовка могла бы проводиться на последней ступени обучения в школе с обязательным введением учебного курса систематизации знаний по математике. Оценка по этому курсу должна быть выставлена в аттестат выпускника школы наряду с оценкой по предмету «Математика». Нам видится, что вести этот учебный курс должен только тот учитель, который предоставит администрации школы сертификат о прохождении централизованного тестирования с оценкой не ниже 90 баллов. Администрация школы, в свою очередь, должна предоставить в РИКЗ сравнительный анализ оценки, полученной выпускником школы по данному курсу и оценки, полученной им на централизованном тестировании.

Принятие такого решения в свою очередь потребует внесения изменений в учебные программы и приведет к необходимости создания учебников и написания методических пособий для учителя.

Частично данную проблему можно разрешить посредством организации спецкурсов и факультативных занятий. Однако такой вариант ее разрешения приведет к тому, что мы, сами того не желая, разделим школьников на группы с разным уровнем подготовки и развития, и в дальнейшем нам придется решать еще и проблему дифференциации обучения.

Решать проблему систематизации знаний можно и посредством организации курсов по подготовке к централизованному тестированию на подготовительных отделениях вузов. Но практика показывает, что курсы посещает небольшое количество абитуриентов и сроки обучения на них достаточно короткие (от восьми месяцев до двух недель).

В заключение заметим следующее.

Образовательный процесс по предмету «Математика» в школе должен быть организован так, чтобы выпускник школы был готов к любой форме контроля знаний, будь то централизованное тестирование, единый государственный экзамен или некая иная форма испытаний. Технология обучения математике в школе должна быть продуктивной, гибкой и динамичной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Учебная программа для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения. Математика V – XI классы. Мн.: Национальный институт образования, 2009.

2. Сиротина, И. К. Математика: пособие для подготовки к централизованному тестированию и экзаменам. – Минск: ТетраСистемс, 2010. – 400 с.

3. Кузнецов И. Н. Настольная книга преподавателя. – Мн.: «Соврем. слово», 2005. – 544с.

4. Сиротина, И. К. Решение неравенств методом интервалов: справ. пособие к решению задач / И. К. Сиротина, В. Г. Гумбар, Д. В. Кулакевич. – Барановичи: РИО БарГУ, 2008. – 116 с.