

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Факультет радиофизики и электроники

**МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ
«ДЕТЕКТИРОВАНИЕ СЛАБЫХ СВЕТОВЫХ ПОТОКОВ»
для студентов специальности G-04-02 – радиофизика**

Подготовил доц. Фираго В. А.

Минск, 2002

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Излучение и ее энергетические и световые характеристики.

Излучение, используемое в оптоэлектронике, занимает диапазон электромагнитного спектра от сотых долей до сотен микрометров. Этим волнам соответствуют колебания с частотами $3 \cdot 10^{16} \dots 3 \cdot 10^{11}$ Гц. Оптический диапазон спектра состоит из нескольких областей: невидимое ультрафиолетовое (УФ) излучение с $\lambda < 0,38$ мкм, видимое излучение, воспринимаемое глазом человека, и лежащее в сравнительно узком интервале, а также невидимое инфракрасное (ИК) излучение с $\lambda > 0,72$ мкм. Инфракрасный диапазон в свою очередь делится на ближнюю, среднюю и дальнюю ИК области.

Традиционно сложилось разделение характеристик излучения на световые и энергетические, каждая из которых имеют свои единицы измерения, представленные в табл. 1.1. Световые величины используют для оценки излучения по производимому ею световому ощущению, т.е. реакции человеческого глаза на воздействие лучистого потока. Определения световых величин аналогичны определениям соответствующих энергетических величин.

Табл. 1.1.

Энергетические и световые характеристики излучения
и единицы их измерения

Энергетическая характеристика излучения	Обозначение	Единица	Световая характеристика излучения	Обозначение	Единица
Энергия излучения	W	Дж	Световая энергия	W	лм·с
Поток излучения	$\Phi = \frac{W}{t}$	Вт	Световой поток	$\Phi = \frac{W}{t}$	лм·с
Сила излучения	$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$	Вт/ср	Сила света	$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$	кд
Энергетическая яркость	$L = \frac{dI}{dS \cdot \cos \Theta}$	Вт/(м ² ·ср)	Яркость	$L = \frac{dI}{dS \cdot \cos \Theta}$	кд/м ²
Энергетическая светимость	$M = \frac{d\Phi}{dS}$	Вт/м ²	Светимость	$M = \frac{d\Phi}{dS}$	лм/м ²
Энергетическая освещенность	$E = \frac{d\Phi}{dS}$	Вт/м ²	Освещенность	$E = \frac{d\Phi}{dS}$	лм/м ²

Если энергетические характеристики базируются на единице энергии Дж, то для световых величин эталонной является единица силы света кандела. Она соответствует излучению абсолютно черного тела (АЧТ) с температурой 2042 К в направлении нормали к его поверхности с площади $1/60$ см². Для преобразования энергетических характеристик в световые используется соотношение

$$\Phi_c = \int_{l_1}^{l_2} \Phi(l) K(l) dl, \quad (1.1)$$

где Φ_c - полный световой поток, $\Phi(l)$ - спектральная мощность исходного потока излучения АЧТ, $K(l)$ - абсолютная функция видности глаза (см. рис. 1.1), $l_1 = 380$ нм, $l_2 = 780$ нм. В области максимальной чувствительности человеческого глаза при $l_{max} = 555$ нм $K(l) = K_{max} = 683$ лм/Вт. Отметим, что для АЧТ при 2042 К на 1 лм приходится 0,53 Вт интегрального излучения или 0,0091 Вт видимого излучения.

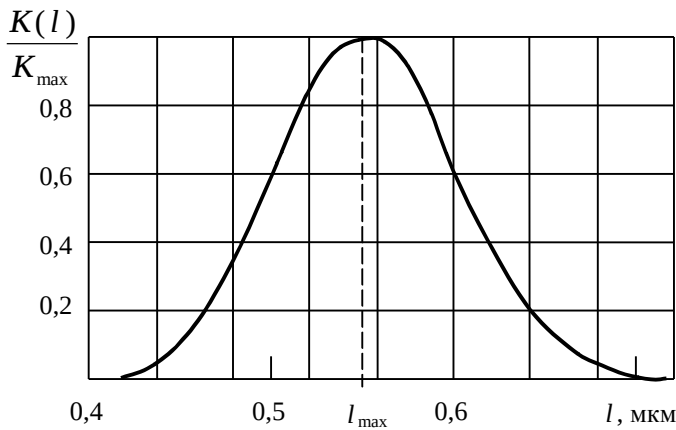


Рис. 1.1.

В дальнейшем мы часто будем использовать спектральную плотность энергетической светимости абсолютно черного тела, зависимость которой от длины волны и температуры называется законом Планка

$$M_{\text{АЧТ}}(l, T) = \frac{2phc^2}{l^5} \left(e^{\frac{ch}{kTl}} - 1 \right)^{-1}, \quad (1.2)$$

где c - скорость распространения излучения в вакууме, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/градус - постоянная Больцмана, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка.

Закон Стефана-Больцмана связывает интегральную энергетическую све-

тимость АЧТ с его температурой T

$$M_{\text{АЧТ}}(T) = \int_0^{\infty} M_{\text{АЧТ}}(l, T) dl = s T^4, \quad (1.3)$$

где $s = 5,67 \cdot 10^{-12}$ Вт/(м²·К⁴) - постоянная излучения.

1.2. Взаимодействие оптического излучения с веществом.

При падении световой волны на границу раздела двух сред часть потока отражается от этой границы, а часть, преломляясь, распространяется во второй среде. В свою очередь, прошедшее сквозь границу раздела излучение поглощается веществом, частично рассеивается, а частично проходит сквозь вещество. Связь между падающим на вещество, отраженным средой, поглощенным, рассеянным и вышедшим из среды потоками определяется равенством

$$R + a_p + a_n + t = 1, \quad (1.4)$$

где R, a_p, a_n, t - коэффициенты отражения, рассеяния, поглощения и пропускания, соответственно.

Отражение света классифицируют по характеру границы раздела сред. Если поверхность раздела имеет неровности, размеры которых значительно меньше длины волны l , то говорят о правильном, или зеркальном, отражении. Если размеры неровностей сравнимы с l , то возможны диффузное и диффузно-направленное отражения.

Поглощение и рассеяние. Поток излучения может испытывать взаимодействие со средой, в которой он распространяется. Часть энергии электромагнитной волны превращается в различные формы внутренней энергии вещества или в энергию вторичного излучения. Поглощение в среде может быть *селективным* и *неселективным*.

Рассеяние света происходит в неоднородной среде. Световые волны, дифрагируя на неоднородностях среды, дают дифракционную картину, характеризующуюся относительно равномерным распределением интенсивности по всем направлениям.

1.3. Классификация механизмов детектирования световых потоков.

Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом можно разделить на несколько видов: фотонные, тепловые эффекты и эффекты волнового взаимодействия. В первом случае фотоны взаимодействуют непосредственно с электронами вещества. При тепловых эффектах происходит изменение свойств вещества из-за изменения его темпера-

туры в результате поглощения излучения. В третьем случае с веществом взаимодействует непосредственно электромагнитное излучение.

Фотонные эффекты. Использование фотонных эффектов сыграло выдающуюся роль в развитии фотоприемников видимого и ИК излучения. Они проявляются в нескольких формах и связаны с взаимодействием внешнего излучения с электронами вещества, которые могут быть связаны с "решеточными" атомами, так и свободными. Фотонные эффекты можно разделить на два типа: внутренний и внешний.

К внутреннему фотоэффекту относятся все те явления, при которых возбужденные излучением носители (электроны или дырки) остаются в пределах образца. Явления, относящиеся к внутреннему фотоэффекту, можно разделить на три группы. Для эффектов первых двух групп фотоны взаимодействуют с электронами, связанными либо с атомами кристаллической решетки полупроводника, либо с примесными атомами, и вызывают появление свободных электронно-дырочных пар (*собственный фотоэффект*), либо свободного электрона и связанной дырки или дырки и связанного электрона (*примесный фотоэффект*). Явления третьей группы: внешнее излучение поглощается свободными носителями заряда; вследствие этого электроны переходят в более высокое энергетическое состояние, однако при этом не становятся свободными.

При внешнем фотоэффекте, который называют также фотоэмиссионным, падающее излучение вызывает эмиссию электронов с поверхности материала фотокатода в окружающее пространство. Для фотоэмиссионных детекторов известен ряд способов усиления фотоэмиссии.

Поскольку для возбуждения электрона фотон должен иметь энергию, превышающую ширину запрещенной зоны или работу выхода из фотокатода эти эффекты характеризуются наличием длинноволновой границы спектральной чувствительности.

Практически только фотопроводимость, фотогальванический и фотоэмиссионный эффекты нашли широкое применение.

Тепловые эффекты. В их основе лежат изменения свойств материала, происходящие в результате изменения температуры под действием падающего излучения. Эти эффекты не зависят от природы и длины волны внешнего излучения. Поскольку процесс нагрева и охлаждения макроскопического образца достаточно инерционен, класс тепловых приемников в целом по сравнению с фотонными обладает значительно меньшим быстродействием.

Наибольшее практическое применение нашли болометрический и пироэлектрический тепловой эффект.

Болометрический эффект. Болометр является тепловым аналогом фоторезистора. Принцип его действия основан на изменении сопротивления чувствительно материала в результате нагрева, вызываемого поглощением падающего излучения. При этом различными способами обеспечивают большой коэффициент поглощения излучения, нанося на их поверхность золотую или платиновую чернь.

Пироэлектрический эффект. Он проявляется в некоторых чувствительных к изменениям температуры ферроэлектриках, включая TGS (триглицинсульфат), PLZT (цирконаттитанатная керамика) и LiNbO_3 (ниобат лития). В таких кристаллах наблюдается спонтанная электрополяризация, приводящая к появлению напряжения на присоединенных к образцу контактах. Если температура постоянна, то внутренний заряд уравнивается зарядом свободных электронов и поверхностными зарядами. При быстрых изменениях температуры ферроэлектрика изменяется и внутренний дипольный момент, обеспечивая появление разности электрических потенциалов. Пироэлектрический приемник представляет собой конденсатор, образованный двумя металлическими электродами нанесенными на противоположные поверхности тонкого ферроэлектрического материала. Для получения достаточной чувствительности нагрузочная цепь пироприемника должна быть высокоомной порядка нескольких ГОм.

Эффекты волнового взаимодействия. К третьей важнейшей категории фотоэффектов относятся эффекты, связанные с волновым взаимодействием между электромагнитным полем внешнего излучения и материалом фотоприемника. Из них можно выделить оптический гетеродинный прием и оптические параметрические эффекты.

Оптическое гетеродинирование. Этот эффект основан на квадратичной зависимости числа поглощенных фотонов от напряженности электрического поля падающего излучения. Используя поле дополнительного источника можно вызвать фотосмещение падающих волн. Оно возможно лишь в случае использования двух когерентных источников, имеющих различные частоты. Тогда результирующее электрическое поле кроме исходных составляющих будет содержать компоненты с разностной и суммарной частотой, интенсивность которых пропорциональна произведению амплитуд падающих пучков. Это позволяет, повышая мощность гетеродина, усиливать амплитуду разностной частоты, и даже в случае слабых принимаемых сигналов иметь хорошее отношение сигнал/шум. Минимально обнаруживаемые потоки при этом ограничиваются только флуктуациями сигнального излучения, что намного меньше, чем для обычных методов приема.

1.4. Шумы фотоприемников излучения.

Собственные шумы самого фотоприемника, шум излучения сигнала или шумы электронного тракта фотоприемного устройства ограничивают ту минимальную мощность, которую можно зарегистрировать.

Кратко перечислим основные типы шумов.

Шум Джонсона или тепловой шум. Он присущ всем резистивным материалам, включая полупроводники, и проявляется в виде флуктуаций напряжения или тока, величина которых зависит от температуры и сопротивления приемника. При глубоком охлаждении мощность этих шумов снижается до нуля.

Избыточные шумы. Мощность этих шумов зависит от приложенного к чувствительному слою фотоприемника напряжения. Существует три основных типа избыточных шумов. Первый наблюдается в фоторезисторах и называется *генерационно-рекомбинационным шумом*. Второй тип шумов наблюдается в *p-n* переходах и диодах с барьером Шотки и называется *дробовым шумом* диффундирующих носителей заряда. Третий тип шумов не поддается точному анализу из-за множества факторов их вызывающих. Он называется *шумом типа $1/f$* , так как его спектр в области низких частот аппроксимируется зависимостью вида $1/f$.

В фотоэмиссионных приборах наблюдается дробовой шум электронной эмиссии, зависящий от темнового тока фотокатода. Также может наблюдаться шум типа $1/f$ (шум мерцания), спектр которого подобен спектру шума типа $1/f$ для полупроводника.

1.5. Детерминированные сигналы и случайные процессы и поля.

Для эффективной работы оптико-электронных систем (ОЭС) необходимо обеспечить определенные энергетические соотношения между полезным сигналом и пороговой чувствительностью системы. В общем случае работу приемной части ЭОС можно представить с помощью функциональной схемы, представленной на рис. 1.2. Лучистый поток от объекта или передатчика, собранный оптической системой и профильтрованный пространственным и спектральными фильтрами, попадает на приемник излучения, преобразуется в электрический сигнал и далее обрабатывается в электронном тракте с целью получения информации о параметрах сигнала. Анализ поля наблюдения может осуществляться как сканированием узким полем зрения (при применении одноэлементного приемника или линейки приемников), так и обработкой неподвижного изображения с помощью матрицы приемников, подвижных анализаторов изображения, систем телевизионного типа, а также комбинированием этих способов.

Энергетические соотношения между сигналом и шумами, как видно из рис. 1.2, определяются характеристиками излучения объекта и фона, свойствами среды распространения

Функциональная схема, поясняющая основные процессы при прохождении сигнала в оптико-электронной системе

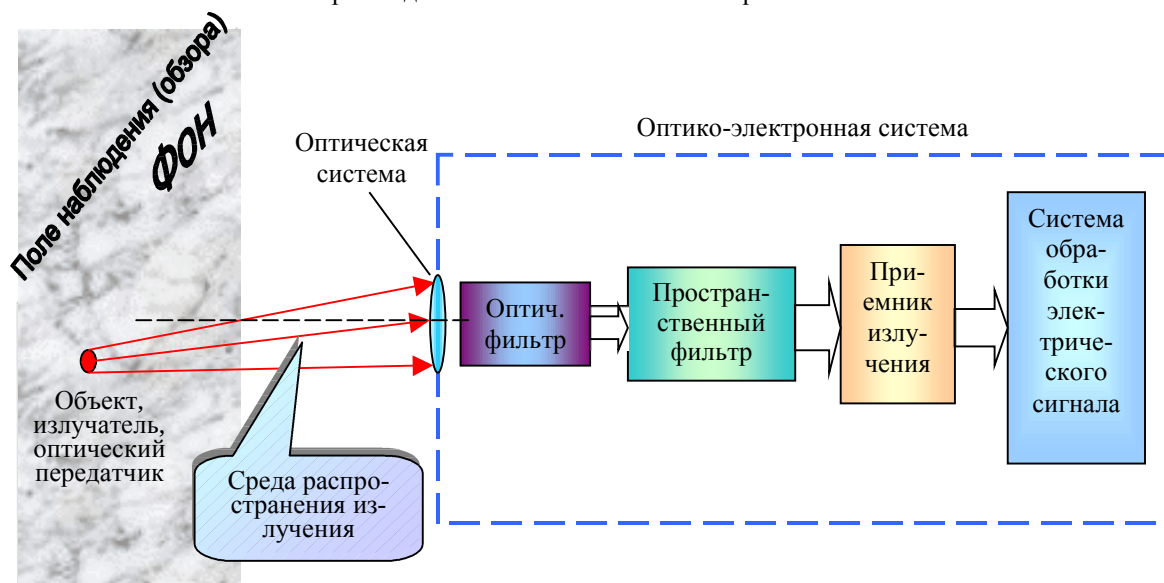


Рис. 1.2.

нения излучения, а также параметрами оптической системы и приемника излучения. При расчетах отдельные звенья ОЭС представляют линейными фильтрами и описывают их с помощью математического аппарата преобразования Фурье.

Описание сигналов и их прохождения через линейные цепи. Периодический сигнал $s(x)$ любой формы можно представить в виде суммы простых гармонических составляющих разложением $s(x)$ в ряд Фурье, если функция $s(x)$ удовлетворяет условию Дирихле (является кусочно-ограниченной и имеет конечное число экстремумов на протяжении периода X):

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nw_1x + b_n \sin nw_1x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nw_1x - y_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp[j(nw_1x - y_n)], \quad (1.5)$$

где $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{X} \int_{-X/2}^{X/2} s(x) dx$ - среднее значение функции $s(x)$, $a_n = \frac{2}{X} \int_{-X/2}^{X/2} s(x) \cos(nw_1x) dx$ и

$b_n = \frac{2}{X} \int_{-X/2}^{X/2} s(x) \sin(nw_1x) dx$ - коэффициенты ряда Фурье или гармоники спектра функции

$s(x)$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $y_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$, X - период функции $s(x)$, $w_1 = \frac{2p}{X}$ - частота первой гармоники.

Для четных функций $s(x) = s(-x)$ и $b_n = 0$, для нечетных $s(x) = -s(-x)$ и $a_n = 0$.

Совокупность отдельных гармоник образует спектр функции, который для периодического сигнала дискретен. Отдельные составляющие дискретного спектра отстоят друг от друга на величину $w_1 = \frac{2p}{X}$. Можно отметить, что при увеличении скважности импульсов (отношение периода следования импульсов к их длительности) спектральные составляющие сближаются, а спектр приближается к сплошному.

Для непериодического сигнала ряд Фурье вырождается в интеграл Фурье

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \exp(-jwx) dx, \quad (1.6)$$

$$s(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp(jwx) dw. \quad (1.7)$$

Выражения (1.6) и (1.7) обычно называют прямым и обратным преобразованием Фурье. Они применимы к абсолютно интегрируемым функциям, для которых сходится интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)| dx.$$

Величину $S(w)$ принято называть спектральной плотностью сигнала $s(x)$. Огибающая $S(w)$ (модуль спектральной плотности мощности) совпадает по форме с огибающей дискретного спектра периодической функции, полученной из непериодической ее повторением с периодом X , и отличается только масштабным множителем w_1/p .

Одной из основных особенностей оптических и оптико-электронных приборов является то, что сигнал часто нельзя представить одномерной функцией. Как видно из рис. 1.2, информацию об излучающем объекте можно представить функцией двух переменных (например, в виде функции координат x, y в плоскости изображения) или более (например, как функцию трех линейных координат x, y, z , длины волны λ , времени t).

Так, можно представить двумерную дельта-функцию как модель точечного излучателя, находящегося в начале координат в следующем виде:

$$d(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{при } x, y = 0 \\ 0 & \text{при } x, y \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

или в векторной форме

$$d(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & \text{при } \vec{r} = 0, \\ 0 & \text{при } \vec{r} \neq 0. \end{cases}$$

В этих случаях преобразование Фурье можно записать в многомерной форме, например в двумерной

$$S(w_x, w_y) = \iint s(x, y) \exp[-j(w_x x + w_y y)] dx dy, \quad (1.9)$$

или в векторной форме

$$S(\vec{w}_r) = \int_{Q_r} s(\vec{r}) \exp(-j\vec{w}_r \vec{r}) d\vec{r}, \quad (1.10)$$

где Q_r - область плоскости вектора $\vec{r}$ с бесконечно большими пределами.

Для описания прохождения сигналов через линейные звенья с постоянными параметрами используют передаточную функцию или частотную характеристику

$$u_{\text{вых}}(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(jw) K(jw) e^{jwx} dw, \quad (1.11)$$

где $K(jw)$ - передаточная характеристика.

Передаточную характеристику можно определить экспериментально, исследуя реакцию системы на d -импульс. Отклик на воздействие d -импульса называется импульсной характеристикой системы $g(x)$. Так как спектр единичного импульса равен единице для всех частот, то

$$u_{\text{вых}}(x) = g(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} K(iw) e^{iwx} dw, \quad (1.12)$$

т.е. частотная и импульсная характеристика системы являются парой преобразования Фурье. Поэтому в радиоэлектронике при определении передаточной функции $K(j\omega)$ устройства часто подают на его вход короткий импульс, а выходной сигнал анализируют с помощью спектроанализатора. То же используется в оптике, где короткому импульсу аналогична мира в виде точки. Распределение энергии в кружке рассеяния, т.е. в изображении точки, определяет импульсную характеристику оптической системы.

Описание случайных процессов. Шумы обычно представляют собой случайные процессы, которые могут принимать любые значения в определенном интервале с определенной вероятностью, т.е. изменения описываются вероятностными законами. Конкрет-

Случайный процесс и его плотность вероятности (для нормального распределения)

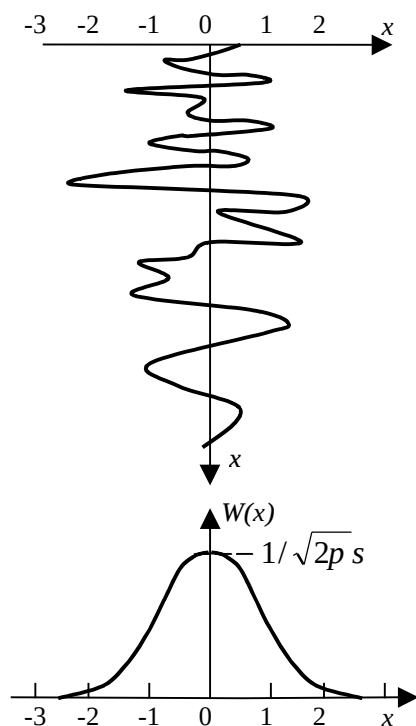


Рис. 1.3.

ный вид случайного процесса (т.е. его фактическая запись, показанная на рис. 1.3) в определенном опыте называется *реализацией случайного процесса*. Для формального описания случайных процессов применяют понятие *случайных функций*. Случайной функцией $x(x)$ называется такая функция, которая при любом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Это означает, что при неизменных значениях опыта значения $x(x)$, $x=const$, в реализациях, полученных для нескольких полностью идентичных систем, будут различными. В этом состоит существенное отличие случайной функции от детерминированной, значение которой однозначно определяется значениями аргументов. Очевидно, что если физические причины случайного характера, порождающие рассматриваемый случайный процесс, отсутствуют полностью, что в действительности никогда не имеет места, то случайная функция переходит в детерминированную. Наряду со случайными одномерными процессами в радиофизике возникает необходимость рассмотрения случайных функций нескольких переменных, получивших название *случайных полей*. В качестве переменных при этом выступают координаты пространства и время.

мая.

Для описания случайных процессов и полей применяют вероятностные характеристики: плотности вероятности, функции распределения вероятностей, моментные и корреляционные функции.

Вероятностные характеристики. Для их определения допустим, что имеется большое число N полностью одинаковых систем, образующих некоторый "ансамбль". Пусть все системы работают одновременно при одинаковых условиях. На выходе этих систем наблюдаются процессы $x(t)$. Если к выходам этих систем подключить одинаковые регистрирующие устройства и в один и тот же момент t_1 зарегистрировать мгновенные значения процессов x , то получим ряд отличающихся друг от друга величин $x^{(1)}(t_1)$, $x^{(2)}(t_1)$, ..., $x^{(N)}(t_1)$. Теперь для получения функции распределения вероятностей необходимо для какого-то значения x_1 выделить из общего числа N те $n_1(x_1; t_1)$ величин, значения которых в момент времени t_1 меньше или равны x_1 . При достаточно большом N относительная доля $n_1(x_1; t_1)/N$ величин, удовлетворяющих этому условию, будет обладать статистической устойчивостью (группируется около постоянного числа) и может рассматриваться как вероятность того, что при $t=t_1$ случайная функция $x(t)$ находится ниже уровня x_1 :

$$P\{x(t_1) < x_1\} = F(x_1, t_1) \approx n_1(x_1; t_1) / N, \text{ естественно } N \rightarrow \infty.$$

Функция $F(x_1, t_1)$ есть *одномерная функция распределения вероятности*. Слово "одномерная" подчеркивает тот факт, что рассматриваются значения случайной функции в один, фиксированный момент времени. Для определенного класса случайных процессов (стационарных и эргодичных) функция $F(x_1, t_1)$ не зависит от временного параметра t_1 и обычно обозначается $F(x)$.

Производная от функции распределения вероятностей

$$W(x) = \frac{d}{dx} F(x), \quad (1.13)$$

если она существует, есть *одномерная плотность вероятности* случайной функции (процесса). Если для какого-то конкретного значения x_1 записать произведение $W(x_1)Dx$, то величина этого произведения окажется равна вероятности того, что случайный процесс $x(t)$ будет заключен в интервале $x_1 \leq x(t) < x_1 + Dx$. Это можно интерпретировать как относительную долю систем $Dn_1(x; t_1)/N$, отсчеты которых в момент времени t_1 попадают в горизонтальное окно $[x_1, x_1 + Dx]$.

Одномерная плотность вероятности, как и функция распределения, является важной, но не полной характеристикой случайного процесса. Она дает представление о процессе лишь в отдельные, фиксированные моменты времени (или какой-то координаты), не указывая на то, как эти значения $x(t_1)$ влияют на дальнейшее поведение процесса при $t_2 > t_1$. Можно сказать, что одномерная плотность вероятности характеризует процесс "статически" и не дает представления о динамике его развития. Тем не менее, одномерной плотностью вероятности часто пользуются. На рис. 1.3 представлена одномерная плотность вероятности нормального процесса, имеющая вид

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}, \quad (1.14)$$

где m - среднее значение процесса, s^2 - его дисперсия.

Более полными характеристиками случайных процессов являются двумерные плотности вероятности и функции распределения, которые характеризуют вероятностную связь между значениями процесса в два произвольные моменты времени t_1 и t_2 . Их определение аналогично одномерным. При фиксировании процессов на выходе ансамбля систем в два произвольных момента времени получим два ряда случайных величин

$$x^{(1)}(t_1), x^{(2)}(t_1), \dots, x^{(N)}(t_1) \text{ и } x^{(1)}(t_2), x^{(2)}(t_2), \dots, x^{(N)}(t_2).$$

Подсчитывая относительную долю систем $n_2(x_1, x_2; t_1, t_2)/N$, отсчеты которых в момент времени t_1 не превышают x_1 , и в момент времени t_2 не превышают x_2 , получим двумерную функцию распределения вероятностей

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \approx n_2(x_1, x_2; t_1, t_2) / N,$$

которую для стационарных и эргодичных процессов можно записать в более простом виде $F(x, h, t)$, где $t = t_1 - t_2$. Производная от этой функции называется двумерной плотностью вероятности $W(x, h, t)$. Ее зависимость от t и позволяет судить о связи между вероятными значениями случайного процесса в два момента времени. Для нормальных процессов двумерная плотность вероятности имеет вид

$$W(x, h, t) = \frac{1}{2\pi s^2 \sqrt{1 - r_x^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2r_x(t)xh + h^2}{2s^2[1 - r_x^2(t)]} \right\}, \quad (1.15)$$

где $r_x(t) = K_x(t) / s^2$ - нормированная автокорреляционная функция. Очевидно, что при отсутствии корреляции значений процесса $x(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 сечения (1.15) будут представлять собой окружности. При наличии корреляции эти сечения будут представлять собой эллипсы, наклоненные под углом 45° к оси x . Причем, эллипс будет более вытянутым при большем значении $r_x(t)$.

В общем случае двумерная плотность вероятности не дают исчерпывающего описания случайного процесса. Более полное и детальное описание дается многомерными плотностями вероятности, которые можно определить аналогично двумерным. В то же время получение и использование многомерных плотностей вероятности достаточно сложно. Принимая во внимание, что многие физические процессы не столь сложны, для их описания часто бывает достаточным знание одномерной или двумерной плотности вероятности. При решении многих научно-прикладных задач оперируют с гауссовыми процессами, которые в принципе могут быть описаны двумерной плотностью вероятности, что не требует применения многомерных плотностей вероятности.

Гауссовы случайные процессы наиболее часто встречаются на практике и поэтому занимают особое место среди других случайных процессов. Большинство случайных электрических процессов, таких, например, как дробовый шум, тепловые флуктуации, представляют собой суммарный эффект большого числа сравнительно слабых элементарных импульсов, возникающих в случайные моменты времени. Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей плотность вероятности суммы неограниченно приближается к нормальной с увеличением числа слагаемых независимо от того, какие плотности вероятности имеют отдельные слагаемые. При этом важно лишь, чтобы влияние отдельных слагаемых на сумму было равномерно малым. Гауссовы процессы могут отличаться друг от друга только характером математического ожидания и корреляционной функцией. Также важным свойством нормальных процессов является их устойчивость к линейным преобразованиям, т.е. после прохождения линейного тракта процесс остается гауссовым.

Моментные и корреляционные функции. Важную роль при описании усредненных характеристик случайных процессов играют среднее значение или математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция. Они могут быть определены через соответствующие плотности вероятности. Математическое ожидание

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x) dx \quad (1.16)$$

определяет среднее значение случайного процесса; автокорреляционная функция

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(h - m_x) W(x, h; t_1, t_2) dx dh \quad (1.17)$$

описывает мощность процесса и временное влияние друг на друга значений процесса в разные моменты времени.

Для стационарных и эргодических процессов возможно получение статистических характеристик не только усреднением по ансамблю реализаций, но и по одной реализации достаточно длинной реализации. Например, за оценку математического ожидания берут величину

$$m_x^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.18)$$

а в качестве дисперсии и корреляционной функции берут следующие величины

$$s_x^{2*} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m_x^*]^2 dt, \quad (1.19)$$

$$R_x^*(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-t} \int_0^{T-t} [x(t+t) - m_x][x(t) - m_x] dt. \quad (1.19)$$

На практике временной интервал усреднения T берут конечным, но по возможности большим.

Аналогично обстоит дело и со случайными полями. Для стационарных полей, которые называют однородными, таким же образом определяют первые и вторые моменты.

Спектральный анализ. Распространяя методы гармонического анализа на случайные процессы можно однотипным образом описывать прохождение сигналов и шумов че-

рез электрический тракт оптико-электронных систем. Спектральная плотность стационарного центрированного процесса определяется формулой Винера-Хинчина

$$S(w) = \int R(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.20)$$

Поясним сейчас физический смысл спектральной плотности. Ее для стационарных процессов в принципе можно определить по одной реализации достаточно большой длительности. Введем для реализации $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием *текущий спектр*

$$F_T(j\omega) = \int_0^T x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.21)$$

а также *периодограмму*, определяемую формулой

$$S_T(w) = \frac{|F_T(j\omega)|^2}{T}. \quad (1.22)$$

Тогда при условии $\int_{-\infty}^{\infty} |tR(t)| dt < \infty$ переходя к пределу можно получить спектральную плотность

$$S(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M\{|F_T(j\omega)|^2\}, \quad (1.23)$$

где $M\{\}$ - оператор усреднения. Теперь хорошо видно, что спектральная плотность случайного процесса, например, флуктуаций напряжения шума на резисторе определенной величины, представляет собой энергию шума ($I^2 R dt$), сосредоточенную в малом интервале частот $[f - (Df/2), f + (Df/2)]$. Полная энергия стационарного центрированного случайного процесса равна площади под кривой спектральной плотности мощности и равна дисперсии процесса

$$s^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) dw. \quad (1.24)$$

Спектральная плотность мощности на выходе линейного звена оптико-электронной системы с коэффициентом передачи $K(j\omega)$ определяется выражением

$$S_{\text{вых}}(w) = S(w) |K(j\omega)|^2. \quad (1.25)$$

Эта формула показывает целесообразность использования спектральной плотности мощности случайного процесса, поскольку аналогичные формулы справедливы и для детерминированных процессов.

Все сказанное для моментных функций и спектральной плотности мощности справедливо и для случайных полей. Соответствующие выражения будут рассматриваться по мере необходимости.

Методы приема оптических сигналов. Прием полезного сигнала в большинстве ОЭС производится при наличии помех как внешнего, так и внутреннего происхождения. Поэтому обработка этого сигнала в ОЭС для извлечения необходимой информации об источнике сигнала, как правило, сопровождается выделением сигнала из смеси его с помехами. Рассмотрим основные методы приема оптических сигналов.

Прямой метод приема. Прямой метод приема оптического излучения состоит либо в непосредственной регистрации энергии, падающей на приемник, либо в подсчете числа фотонов, попадающих на его чувствительный слой.

При прямом приеме фотоприемник может работать как линейный детектор, если он используется для преобразования потока или мощности оптического излучения в фототок, или как квадратичный детектор - при преобразовании амплитуды электромагнитных колебаний в фототок.

Прямой метод приема достаточно прост в конструктивном отношении и наиболее часто используется на практике. Однако во многих случаях выгодно применение модуляции светового потока, что позволяет устранить влияние низкочастотных шумов. Основные методы прямого приема будем рассматривать в процессе изучения приемников излучения.

Гетеродинный прием. При приеме слабых когерентных потоков можно использовать гетеродинный прием, который обеспечивает высокую пороговую чувствительность. Однако он имеет и серьезные недостатки: необходимость строгого сопряжения волновых фронтов основного и гетеродинного сигналов, жесткие требования к стабильности частот

Оптимальный прием сигналов. При использовании любого из описанных методов приема сигнала одной из основных задач является выделение его на фоне помех. Можно выделить несколько типов решаемых в процессе приема задач.

Обнаружение сигнала. Принятую смесь сигнала и шума формально можно записать в виде

$$x(t) = \Theta \Phi(t, \vec{y}) + s(t), \quad (1.26)$$

где Q - случайная величина, могущая принимать лишь два значения: $Q = 0$ (сигнал $\Phi(t, \vec{y})$ отсутствует) и $Q = 1$ (сигнал присутствует); $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ - параметры, от которых зависит сигнал; $s(t)$ - шум. Требуется по принятой конкретной реализации $x(t)$ на интервале T решить оптимальным образом, присутствует или отсутствует сигнал $\Phi(t, \vec{y})$. Иначе говоря, требуется оценить значение дискретного параметра Q . Это типичная формулировка задачи обнаружения сигнала на фоне помехи. При ее решении должна быть получена структурная схема оптимального обнаружителя сигнала и определены вероятности правильного обнаружения и ложных тревог.

Различение сигналов. Предположим, что в принятом колебании $x(t)$ может быть один из двух сигналов $\Phi_1(t, \vec{y}_1)$ или $\Phi_2(t, \vec{y}_2)$:

$$x(t) = \Theta \Phi_1(t, \vec{y}_1) + (1 - \Theta) \Phi_2(t, \vec{y}_2) + s(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.27)$$

Случайная величина Q может принимать только два значения: $Q = 1$ (присутствует сигнал $\Phi_1(t, \vec{y}_1)$) с вероятностью p_1 и $Q = 0$ (присутствует сигнал $\Phi_2(t, \vec{y}_2)$) с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$. Нужно по принятой реализации $x(t)$ вынести оптимальное решение - присутствует ли сигнал $\Phi_1(t, \vec{y}_1)$ или сигнал $\Phi_2(t, \vec{y}_2)$.

Оценка параметров сигнала. Пусть какой либо параметр y_i сигнала $\Phi(t, \vec{y})$ является случайной величиной с априорной плотностью вероятности $p_{pr}(y_i)$. Необходимо с минимальной погрешностью оценить значение этого параметра y_i в принятой реализации $x(t)$. Это простейшая, но типичная задача одного из важных разделов теории помехоустойчивости - теории оценки параметров.

Задача оценки параметров является характерной для измерительной техники. Результатом решения этой задачи являются структурные схемы соответствующих оптимальных измерительных устройств и предельные точности измерения параметров сигнала. Можно сказать, что это наиболее часто встречающаяся задача при оптимизации параметров оптико-электронных систем различного назначения.

Распознавание образов. В оптической локации зачастую приходится классифицировать обнаруживаемые объекты. Задача классификации или, как ее чаще называют, распознавания образов связана с разработкой принципов построения систем, определяющих принадлежность обнаруженного объекта к одному из заранее выделенных классов. Каждый объект описывается совокупностью основных характеристик (признаков, свойств) $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_m\}$ и дополнительной характеристикой $\vec{b}$, которая указывает на принадлежность объекта к некоторому классу или образу. Набор заранее классифицированных объ-

ектов, т.е. таких, у которых известны характеристики $\vec{y}$ и $\vec{b}$, используется для обнаружения закономерных связей между значениями этих характеристик и поэтому называется обучающей выборкой. Те объекты, у которых характеристика $\vec{b}$ неизвестна, образуют контрольную выборку.

Одна из основных задач распознавания образов - выбор правила (решающей функции), в соответствии с которым по значению контрольной реализации $\vec{y}$ устанавливается ее принадлежность к одному из образов, т.е. указывается наиболее правдоподобное значение характеристики $\vec{b}$ для данного $\vec{y}$. Обычно выбор решающей функции производится так, чтобы стоимость распознающего устройства, его эксплуатации и потерь, связанных с ошибками распознавания, была минимальной.

Отношение правдоподобия. Обнаружение сигнала на фоне шумов немыслимо без знания признаков, характерных для сигнала и для фона. Признаков, по которым сигнал абсолютно отличается от фона, в реальных задачах обычно найти невозможно. Всегда есть возможность принять за искомый сигнал какую-то составную часть фона или не заметить сигнал, замаскированный фоном. Поэтому задача обнаружения носит вероятностный характер и для ее оптимального решения необходимо иметь исходные или как их принято называть *априорные данные* о сигнале и фоне. Причем особенно важно знать ве-

роятность наличия сигнала, поскольку от ее величины зависит уровень порога принятия решения.

Допустим, что форма сигнала известна и имеются три реализации, представленные на рис. 1.4, в результате анализа которых требуется определить вероятность наличия в них сигнала. Если предположить, что все реализации не содержат сигнала, то вероятность получения кривой на рис. 1.4а должна быть очень мала, так как шумы случайно воспроизвести кривую столь похожую на сигнал, практически не могут. Напротив вероятность получения реализации на рис. 1.4в велика, так как все выбросы ее похожи на шумовые. Реализацию на рис. 1.4б можно рассматривать как промежуточную.

Если предположить, что сигнал присутствует, то вероятность получения реализации на рис. 1.4а близка к единице, а на рис. 1.4в практически равна нулю.

Вероятность получения реализации $x(t)$ при отсутствии сигнала обозначим $P(\Xi/0)$, а при наличии сигнала $P(\Xi/\Phi)$ и выясним, что означает вероятность получения данной реализации. Для этого возьмем

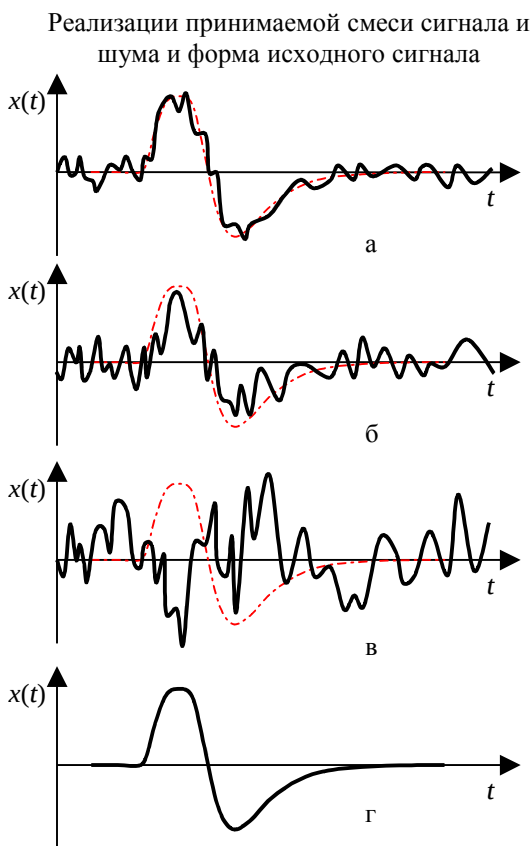


Рис. 1.4.

n отсчетов или выборок $x(t)$ на промежутке времени $[0, T]$. Совокупность этих выборок можно рассматривать как n -мерный вектор X . Тогда вероятность получения выборки $x(t)$ соответствует попаданию конца этого вектора в некоторый элементарный параллелепипед n -мерного пространства и описывается выражением

$$P(\Xi/0) = W_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.28)$$

Сокращенно последнее выражение будем записывать в виде

$$P(\Xi / 0) = W_n(\Xi) d\Xi, \quad (1.29)$$

где dX - элемент объема n -мерного пространства, а $W_n(X)$ - n -мерное распределение вероятности шума.

Аналогичным образом получим при наличии сигнала вероятность попадания выборки X в тот же элемент объема dX :

$$P(\Xi / \Phi) = W_n(\Xi / \Phi) d\Xi, \quad (1.30)$$

где $W_n(X/\Phi)$ - условная плотность вероятности получения реализации X для смеси сигнала с шумом. Разделив (1.30) на (1.29) получим общепринятую запись отношения правдоподобия:

$$\Lambda = \frac{W_n(\Xi / \Phi)}{W_n(\Xi)}. \quad (1.31)$$

Часто смесь сигнала с шумом представляет собой их алгебраическую сумму, т.е. сигнал и шум аддитивны. Этот случай легче поддается анализу и чаще встречается на практике. Очевидно, что при

$$x_i = s_i + \Phi_i,$$

вероятность получения в реализации величины x_i совпадает с вероятностью получения шума величиной $s_i = x_i - \Phi_i$. Это, в свою очередь, означает, что вероятность получения ординаты x_i в реализации, содержащей сигнал, совпадает с вероятностью получения ординаты $x_i - \Phi_i$ в реализации, содержащей только шум. Следовательно, при аддитивности сигнала и шума имеем

$$W_n(\Xi / \Phi) = W_n(\Xi - \Phi), \quad (1.32)$$

и поэтому

$$\Lambda = \frac{W_n(\Xi - \Phi)}{W_n(\Xi)}. \quad (1.33)$$

Если априорная вероятность p наличия сигнала неизвестна, то отношение правдоподобия содержит в себе всю доступную после получения реализации информацию о наличии сигнала. Напомним, что до опыта мы должны знать форму сигнала и n -мерную плотность вероятности распределения шума.

Вероятности ошибочных решений и критерии обнаружения. Для упрощения рассмотрим пример вычисления вероятностей ошибок для случая когда объем выборки составляет один элемент. При этом отношение правдоподобия определяется одномерными плотностями вероятности, что делает задачу очень простой.

Положим, что шум имеет нормальное распределение со средним значением, равным нулю, и дисперсией s^2 . В одномерном случае сигнал можно задать только одной величиной a_0 , под которым можно понимать пиковое значение или амплитуду сигнала. Поскольку плотность вероятности шума с нормальным распределением равна

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(x)^2}{2s^2}},$$

то эта же плотность при наличии сигнала будет иметь вид

$$W(x - \Phi) = W(x - a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(x-a_0)^2}{2s^2}}.$$

Поэтому отношение правдоподобия (1.33) равно

$$\Lambda = \frac{W_n(\Xi - \Phi)}{W_n(\Xi)} = e^{\frac{a_0 x}{s^2}} \cdot e^{-\frac{a_0^2}{2s^2}}. \quad (1.34)$$

Из последнего выражения видно, что при фиксированных a_0 и s^2 отношение правдоподобия при возрастании зарегистрированного значения смеси сигнала и шума нарастает экспоненциально.

Как видно из последнего выражения на основе наблюдения может быть найдена, в лучшем случае, лишь вероятность наличия сигнала, которая выражается через отношение правдоподобия. Принятие решения о наличии или отсутствии сигнала - задача, не свойственная системе наблюдения. Она определяется тем или иным искусственным критерием принятия решения.

При неизвестной априорной вероятности наличия сигнала в качестве критерия принятия решения можно использовать отношение правдоподобия:

- при $L \geq L_n$ - сигнал есть;
- при $L < L_n$ - сигнала нет.

При вынесении решения "есть" или "нет" точное значение L сравнивается с L_n для того, чтобы определить, какая из величин больше, но не учитывается насколько отличается L от L_n . При этом теряется часть информации, что может привести к появлению ошибок.

При обнаружении сигнала возможны ошибки двух типов.

- 1) При отсутствии сигнала принимается решение, что сигнал есть. Эта ошибка называется "ложной тревогой".
- 2) При наличии сигнала утверждается, что его нет. Такое ошибочное решение называют пропуском сигнала.

Зная законы распределения плотности вероятности величины L при фактическом наличии сигнала и фактическом его отсутствии, можно вычислить вероятности этих ошибок. Обозначим условную плотность вероятности величины L при наличии сигнала $W_L(L/\Phi)$ и при отсутствии $W_L(L/0)$. Тогда вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала будут определяться соотношениями:

$$P_{лт} = P(\Lambda > \Lambda_n / 0) = \int_{\Lambda_n}^{\infty} W_{\Lambda}(\Lambda / 0) d\Lambda = \int_{x_n}^{\infty} W(x) dx, \quad (1.35)$$

$$P_{np} = P(\Lambda < \Lambda_n / \Phi) = \int_{-\infty}^{\Lambda_n} W_{\Lambda}(\Lambda / 0) d\Lambda = \int_{-\infty}^{x_n} W(x - a_0) dx. \quad (1.36)$$

Величину x_n можно найти, взяв логарифм (1.34)

$$\ln \Lambda = \frac{a_0 x}{s^2} - \frac{a_0^2}{2s^2}$$

и разрешив последнее выражение относительно x

$$x = \frac{1}{a_0} \left(s^2 \ln \Lambda + \frac{a_0}{2} \right)$$

Тогда при нормальном распределении шума

$$P_{лт} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \int_{x_n}^{\infty} e^{-\frac{(x)^2}{2s^2}} dx = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_n}{\sqrt{2}s} \right) \right], \quad (1.37)$$

$$P_{np} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{(x)^2}{2s^2}} dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x_n - a_0}{\sqrt{2}s} \right) \right], \quad (1.38)$$

где $\operatorname{erf}(z)$ - интеграл вероятностей.

Для выбора необходимого порогового уровня по допустимым вероятностям ложной тревоги и пропуска сигнала удобно построить графические зависимости

$P_{лт} = P_{лт} \left(\frac{x_n}{s} \right)$ и $P_{np} = P_{np} \left(\frac{x_n}{s} \right)$, показанные для рассматриваемого случая на рис. 1.5.

Если нет оснований делать различие между вероятностями допустимых значений ложной тревоги и пропуска сигнала, то естественно выбрать порог таким образом, чтобы суммарная вероятность ошибки была минимальной. На графике этому условию соответ-

Зависимости вероятности ложной тревоги $P_{лт}$ и вероятностей пропуска сигнала $P_{пр}$ при различных значениях амплитуды a от величины нормированного порога принятия решения x_n/s

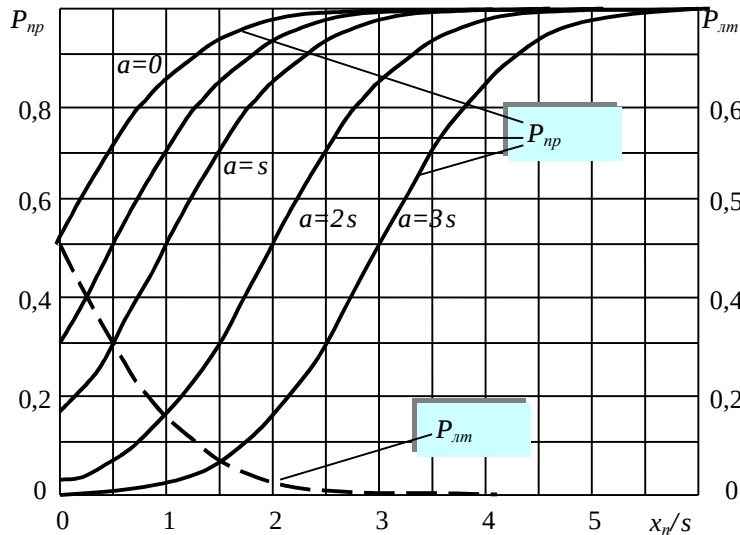


Рис. 1.5.

ствует точка пересечения кривых $P_{лт}\left(\frac{x_n}{s}\right)$ и $P_{пр}\left(\frac{x_n}{s}\right)$. Полученный таким способом порог соответствует критерию идеального наблюдателя. Как видно из рис. 1.5, порог для этого критерия зависит от амплитуды сигнала, так как кривая $P_{пр}\left(\frac{x_n}{s}\right)$ смещается в сторону увеличения порога с ростом a_0/s .

Более широко используемым является критерий Неймана-Пирсона, согласно которому задают вероятность ложной тревоги и минимизируют вероятность пропуска.

При использовании этого критерия пороговое значение x_n/s лежит на кривой $P_{лт}\left(\frac{x_n}{s}\right)$ и выбирается по допустимой вероятности ложных тревог. В этом случае порог не зависит от амплитуды сигнала и суммарная вероятность ошибки (пропуска плюс ложной тревоги) в общем случае больше минимально возможной величины.

Существует еще масса различных критериев принятия решения с которыми можно ознакомиться в специальной литературе.

Оптимальная фильтрация сигналов. До сих пор мы анализировали выборку, состоящую из одного отсчета. При этом совершенно не используется информация о форме сигнала. Если взять выборку из n отсчетов, то при полностью известных параметрах сигнала отношение правдоподобия (1.33) определяется многомерной плотностью вероятности. При нормальном законе распределения эта вероятность может быть записана в виде

$$W_n(\Xi) = W_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2^n p^n [K]}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_g x_h \right\}, \quad (1.39)$$

где $[K]$ - определитель корреляционной матрицы случайных величин $x_1, \dots, x_n$

$$[K] = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix},$$

а Q_{gh} определяется выражением

$$Q_{gh} = \frac{(-1)^{g+h} \Delta_{gh}}{[K]},$$

где Δ_{gh} - минор элемента K_{gh} , образованный вычеркиванием g строки и h столбца в определителе $[K]$. Элементы матрицы K_{gh} есть значения функции корреляции величин x_g и x_h , а поэтому диагональные элементы K_{gg} - представляют собой дисперсии величин x_g .

Положим, что сигнал задан в виде $\phi(t) = a_0 \Phi(t)$, где a_0 - его амплитуда. Тогда записывая аналогично выражение для $W_n(\Xi - \Phi)$ получим отношение правдоподобия в виде

$$\Lambda = \frac{W_n(\Xi - \Phi)}{W_n(\Xi)} = \exp \left\{ \frac{1}{2} a_0 \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_g \phi_h + \frac{1}{2} a_0 \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_h \phi_g - \frac{1}{2} a_0^2 \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_g x_h \right\}, \quad (1.40)$$

где суммирование распространяется на все g и h . В силу симметрии корреляционной матрицы можно написать

$$\Lambda = \exp(j - \frac{1}{2} m), \quad (1.41)$$

$$\ln \Lambda = j - \frac{1}{2} m, \quad (1.42)$$

где

$$j = a_0 \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_g \phi_h = a_0 \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_h \phi_g, \quad (1.43)$$

$$m = a_0^2 \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_g x_h. \quad (1.44)$$

Заметим, что m является постоянной величиной, которую можно рассчитать заранее, зная форму сигнала и статистические свойства шумов. Величина j случайна, поскольку в нее входят неизвестные наперед значения отсчетов реализации. От вида реализации будет зависеть j , а через j и отношение правдоподобия. Монотонная зависимость отношения правдоподобия позволяет при нахождении алгоритма обработки максимизировать величину j . Причем, величина j линейно зависит от отсчетов x_g реализации, что позволяет вычислять ее с помощью линейных устройств. Покажем это для простого случая, когда шум имеет равноэнергетический спектр

$$S(w) = \begin{cases} G & \text{при } |w| \leq w_n, \\ 0 & \text{при } |w| > w_n. \end{cases} \quad (1.45)$$

Применив обратное преобразование Фурье найдем автокорреляционную функцию шума

$$R_x(t) = G \frac{w_n}{p} \frac{\sin w_n t}{w_n t}. \quad (1.46)$$

Легко сообразить, что дисперсия шума $s_x^2 = R_x(0) = G w_n / p$, а при $w_n t_g = g p$ функция автокорреляции равна нулю. Таким образом, при отсчетах выборки через интервал $\Delta t = \frac{p}{w_n}$ корреляционная матрица нормального закона принимает чрезвычайно простой вид и определитель матрицы выглядит следующим образом

$$[K] = \begin{vmatrix} s^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & s^2 \end{vmatrix} = (s^2)^n.$$

Соответственно поскольку в миноре при вычеркивании одной строки и одного столбца с несовпадающим номерами появляются строки и столбцы, содержащие только нули, то:

$$Q_{gh} = 0 \quad \text{при } g \neq h,$$

$$Q_{gh} = \frac{1}{s^2}, \quad \text{при } g = h.$$

При этих условиях

$$j = a_0 \sum_{g=1}^n \sum_{h=1}^n Q_{gh} x_g \phi_h = a_0 \sum_{g=1}^n Q_{gg} x_g \phi_g = \frac{a_0}{s^2} \sum_{g=1}^n x_g \phi_g, \quad (1.47)$$

а с учетом величины дисперсии $s_x^2 = Gw_n/p$ и интервала выборок $\Delta t = \frac{p}{w_n}$ получим

$$j = \frac{a_0}{G} \frac{p}{w_n} \sum_{g=1}^n x_g \phi_g = \frac{a_0}{G} \sum_{g=1}^n x_g \phi_g \Delta t. \quad (1.48)$$

Если сейчас уменьшать интервал отсчетов $\Delta t \rightarrow 0$ (соответственно $w_n \rightarrow \infty$, то сумма (1.48) переходит в интеграл

$$j = \frac{a_0}{G} \int_0^T x(t) \phi(t) dt. \quad (1.49)$$

Анализируя полученное выражение можно сказать, что для вынесения решения о наличии или отсутствии детерминированного сигнала $\phi(t)$, принимаемого на фоне шума, необходимо принятую реализацию $x(t)$ перемножить с копией сигнала и проинтегрировать произведение. Результат интегрирования необходимо сравнить с порогом в момент времени $t=T$. Такой обнаружитель называют корреляционным приемником.

В теории оптимального приема сигналов этот результат получают еще одним путем, используя спектральные плотности сигнала и шума. Формируют отношение сигнал/шум по мощности на выходе фильтра с передаточной характеристикой $K(jw)$

$$\frac{C}{III} = \frac{|\phi(t_0)|^2}{s^2} = \frac{1}{2p} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} s_{\phi}(jw) K(jw) e^{jw t_0} dw \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} S(jw) |K(jw)|^2 dw} \quad (1.50)$$

и с помощью неравенства Шварца-Буняковского находят коэффициент передачи оптимального фильтра

$$K(jw) = c \frac{s_{\phi}^*(jw)}{S(w)} e^{-jw t_0}, \quad (1.51)$$

где c - некоторая постоянная, t_0 - момент времени, соответствующий наибольшему пиковому значению сигнала.

Для этого фильтра отношение пикового значения выходного сигнала в момент времени t_0 к дисперсии выходного шума имеет максимально возможное значение

$$\frac{C}{III} = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s_{\phi}(jw)|^2}{S(w)} dw. \quad (1.52)$$

Здесь для оптимального приема используется оптимальный или как его еще называют согласованный фильтр. Согласованным его называют потому, что его импульсная характеристика является зеркальным отображением сигнала относительно оси ординат. Для белого гауссового шума импульсную характеристику согласованного фильтра $h_0(t)$ можно найти применяя обратное преобразование Фурье к его коэффициенту передачи

$$K_0(jw) = c \frac{s_{\phi}^*(jw)}{S(w) = \text{const}} e^{-jw t_0} = k s_{\phi}^*(jw) e^{-jw t_0}, \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} h_0(t) &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(jw) e^{jw t} dw = \frac{k}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\phi}^*(jw) e^{jw(t-t_0)} dw = \\ &= \frac{k}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\phi}^*(-jw) e^{jw(t_0-t)} dw = \frac{k}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\phi}(jw) e^{jw(t-t_0)} dw, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где k - некоторая постоянная, характеризующая усиление фильтра. Также выпишем обратное преобразование Фурье от спектральной плотности входного сигнала

$$\phi(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\phi}^*(jw) e^{jw(t)} dw. \quad (1.55)$$

Сравнивая (1.54) и (1.55) можно заметить, что

$$h_0(t) = k\phi(t_0 - t). \quad (1.56)$$

Таким образом, импульсная характеристика согласованного фильтра целиком определяется формой сигнала ("согласована" с сигналом). Чтобы представить себе вид $h_0(t)$ проанализируем рис. 1.6, на котором показаны последовательные преобразования $\phi(t)$ в $h_0(t)$. Сигнал появляется в момент времени $t=t_0$. Очевидно, что функция $\phi(t_0+t)$ появляется на время t_0 раньше, чем сигнал $\phi(t)$. Функция же $\phi(t_0-t)$ является зеркальным отображением функции $\phi(t_0+t)$ относительно оси ординат. Умножив функцию $\phi(t_0-t)$ на коэффициент k , получаем импульсную характеристику согласованного фильтра.

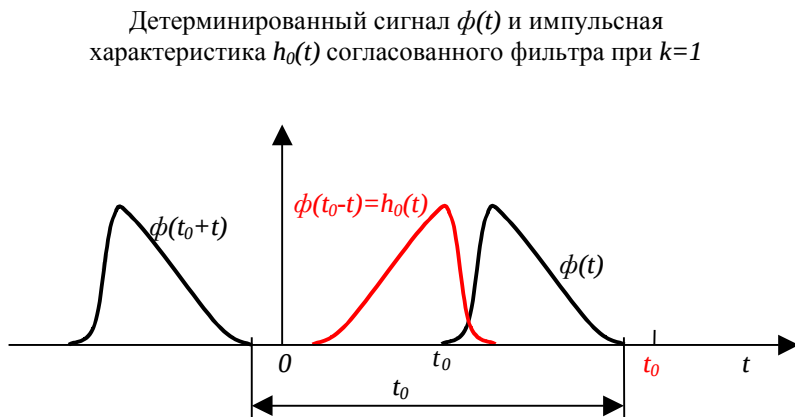


Рис. 1.6.

Если выразить сигнал на выходе согласованного фильтра через его импульсную характеристику, то окажется, что он представляет собой взаимокорреляционную функцию между принятым колебанием $x(t)$ и входным полезным сигналом $\phi(t)$. Следовательно, согласованный фильтр в принципе выполняет ту же операцию, что и корреляционный приемник. Соответствующие функциональные схемы оптимальных обнаружителей

Функциональные схемы оптимальных обнаружителей детерминированного сигнала с использованием корреляционного приемника и согласованного фильтра

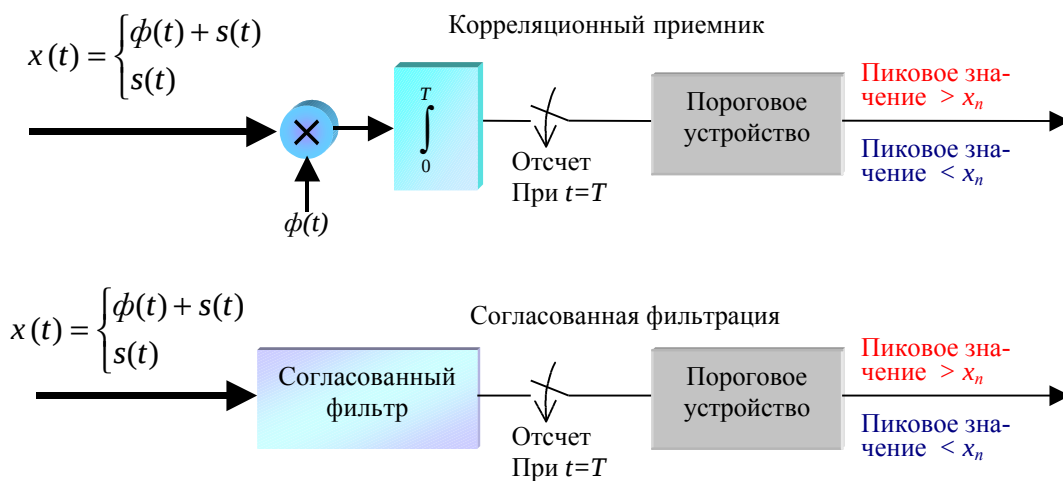


Рис. 1.7.

лей представлены на рис. 1.7.

Специально подчеркнем, что назначение оптимальных приемников состоит не в наилучшем воспроизведении входного полезного сигнала, а в формировании наибольшего пикового отношения сигнал/шум в момент времени $t=T$ и сравнении выходного сигнала в этот момент с порогом. Поскольку гауссовы шумы сохраняют свойство нормальности при линейных преобразованиях, то расчет вероятностей ложных тревог и пропуска сигнала можно вести с помощью ранее полученных выражений.