МАЙ 1986 г., ТОМ XXII, № 5

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.926.45

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В данной работе продолжается исследование линейных дифференциальных систем с помощью метода отражающей функции [1]. Отражающая функция (ОФ) линейной однородной системы

$$\dot{x} = P(t)\,x,\quad t \in \mathbf{R},\quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

с непрерывной матрицей $P(t)$ (см. [2]) имеет вид

$$F(t,\ x) = (\exp S(t))\,x, \tag{2}$$

где $S(t)$ — нечетная дифференцируемая матрица.

Выбирая специальные виды матриц $S(t)$, можно указать различные достаточные условия на коэффициенты системы (1), при которых эффективно выписываются система для определения начальных данных периодических решений системы (1), а также условия, определяющие устойчивость или неустойчивость системы (1).

Рассмотрим случай, когда $S(t) = A\varphi(t)$.

Лемма. *Для существования у системы (1) ОФ вида*

$$F(t,\ x) = \exp(A\varphi(t))\,x, \tag{3}$$

где A — постоянная матрица размерности $n\times n$, а $\varphi(t)$ — дифференцируемая нечетная скалярная функция, для которой $\varphi'(0)=1$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$-2\varphi'(t)\,P(0)\exp(-2\varphi(t)\,P(0)) + \exp(-2\varphi(t)\,P(0))\,P(t) + \\ + P(-t)\exp(-2\varphi(t)\,P(0)) = 0. \tag{4}$$

Если система (1) имеет ОФ вида (3), то $A = -2P(0)$ и ОФ системы (1) имеет вид

$$F(t,\ x) = \exp(-2P(0)\,\varphi(t))\,x, \tag{5}$$

Доказательство леммы следует из соотношений

$$F'_t(t,\ x) + F'_x(t,\ x)\,X(t,\ x) + X(-t,\ F(t,\ x)) = 0,$$

$$F(0,\ x) = x,$$

которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы дифференцируемая функция $F(t, x)$ была ОФ системы $\dot{x} = X(t, x)$, $(t, x) \in R^{n+1}$, решения которой однозначно определяются своими начальными данными [1, с. 72].

Теорема 1. *Пусть для непрерывной 2ω-периодической матрицы $P(t)$ системы (1) выполняется условие (4). Тогда, для того чтобы решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(\omega) = \varkappa$ было 2ω-периодическим, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(\exp(-2\varphi(\omega)\,P(0)) - E)\,\varkappa = 0.$$

Доказательство следует из вида (5) для ОФ системы (1) и теоремы 1 из [1, с. 74].

Следствие 1. *Пусть для непрерывной 2ω-периодической матрицы $P(t)$ системы (1) выполняется условие*

$$-2P(0)\exp(-2P(0)\,t) + \exp(-2P(0)\,t)\,P(t) + P(-t)\exp(-2P(0)\,t) = 0. \tag{6}$$

Тогда, для того чтобы решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(\omega) = \varkappa$ было 2ω-периодическим, необходимо и достаточно выполнения условия

$$(\exp(-2P(0)\,\omega) - E)\,\varkappa = 0. \tag{7}$$

Доказательство следует из теоремы 1 при $\varphi(t) \equiv t$.

Следствие 2. *Если выполняется условие (6) и определитель системы (7) отличен от нуля, то $x(t) \equiv 0$ — единственное периодическое решение однородной системы (1) с непрерывной 2ω-периодической матрицей $P(t)$.*

Доказательство вытекает из единственности решения начальной задачи $\dot{x} = P(t)x$, $x(\omega) = 0$.

Следствие 3. *Пусть для непрерывной 2ω-периодической матрицы $P(t)$ системы (1) выполняется условие (4), где $\varphi(t)$ — дифференцируемая нечетная скалярная функция и $\varphi'(0) = 1$, $\varphi(\omega) = 0$. Тогда всякое решение $x(t)$ системы (1) является 2ω-периодическим.*

Доказательство следует из теоремы 1.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (\varphi'(t) B + \exp(2\varphi(t) B) R(t) - R(-t) \exp(-2\varphi(t) B)) x, \tag{8}$$

где B — постоянная матрица размерности $n \times n$; $R(t)$ — произвольная непрерывная на $\mathbf{R}$ матрица размерности $n \times n$; $\varphi(t)$ — дифференцируемая нечетная скалярная функция, причем $\varphi'(0) = 1$.

Нетрудно проверить, что система (8) удовлетворяет условию (4). Следовательно, система (1) имеет ОФ вида

$$F(t, x) = \exp(-2\varphi(t) B) x.$$

Из предыдущего следует, что если матрица $R(t)$ и скалярная нечетная функция $\varphi(t)$ удовлетворяют условию 2ω-периодичности и $\varphi(\omega) = 0$, то все решения системы (8) 2ω-периодические и, следовательно, система всегда устойчива при любой матрице B.

Используя представление (2) для ОФ системы (1), в терминах ОФ и ее матрицы $B(t) = \exp S(t)$ известные теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости линейных систем с периодическими коэффициентами можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть матрица $P(t)$ непрерывна и $P(t+2\omega) = P(t)$, ρ_i — собственные значения матрицы $B(-\omega)$, где $B(t)$ — матрица ОФ для системы (1). Тогда линейная однородная система (1) устойчива в том и только в том случае, когда все $|\rho_i| \leqslant 1$, а тем ρ_i, для которых $|\rho_i| = 1$, отвечают простые элементарные делители матрицы $B(-\omega)$. Для асимптотической устойчивости такой системы необходимо и достаточно, чтобы все $|\rho_i|$ были меньше единицы.*

Доказательство следует из подобия матриц $B(-\omega)$ и $X(2\omega)$, где $X(2\omega)$ — матрица монодромии.

Теорема 3. *Пусть для непрерывной 2ω-периодической матрицы $P(t)$ системы (1) выполняется условие (4) и λ_i — собственные значения матрицы $P(0)$. Тогда система (1) будет устойчива в том и только в том случае, когда при $\varphi(\omega) > 0$ все $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, а при $\varphi(\omega) < 0$ все $\operatorname{Re}\lambda_i \geqslant 0$, а тем λ_i, для которых $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$, отвечают простые элементарные делители матрицы $P(0)$. Для асимптотической устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы при $\varphi(\omega) > 0$ все $\operatorname{Re}\lambda_i$ были строго отрицательны, а при $\varphi(\omega) < 0$ строго положительны. При $\varphi(\omega) = 0$ система (1) всегда устойчива.*

Доказательство теоремы при $\varphi(\omega) \neq 0$ следует из связи собственных значений матриц $B(-\omega)$ и $P(0) = \dfrac{1}{2\varphi(\omega)} \operatorname{Ln} B(-\omega)$ [3, с. 61].

При $\varphi(\omega) = 0$ из следствия 3 вытекает, что все решения системы (1) являются 2ω-периодическими и в силу их ограниченности система (1) является устойчивой.

Теорема 4. *Пусть элементы $p_{ij}(t)$ непрерывной и 2ω-периодической матрицы $P(t)$ системы (1) удовлетворяют условию*

$$p_{ij}(t) \exp\left(-\int_{-t}^{t} p_{ii}(\tau)\, d\tau\right) + p_{ij}(-t) \exp\left(-\int_{-t}^{t} p_{jj}(\tau)\, d\tau\right) = 0 \quad (i \neq j,\ i,\ j = \overline{1, n}).$$

Тогда система (1) устойчива (асимптотически устойчива) в том и только в том случае, когда при всех $i = \overline{1, n}$ выполняется неравенство

$$\int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t)\, dt \leqslant 0 \qquad \left(\int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t)\, dt < 0\right).$$

Доказательство следует из вида ОФ для системы (1) [4, с. 6] и теоремы 2.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_1(\alpha(t) + a \sin t) + x_2 \gamma(t) \exp(-b \sin t + \rho(t)),$$

$$\dot{x}_2 = x_1 \beta(t) \exp(b \sin t + \delta(t)) + x_2(\alpha(t) + b \cos t),$$

где a, $b \in \mathbf{R}$, $\gamma(t)$, $\beta(t)$ — непрерывные на $\mathbf{R}$ 2π-периодические нечетные функции, $\delta(t)$, $\rho(t)$ — непрерывные на $\mathbf{R}$ 2π-периодические четные функции, $\alpha(t)$ — непрерывная на $\mathbf{R}$ 2π-периодическая функция.

Тогда

а) при $A = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \alpha(t)\, dt = 0$ все решения системы 2π-периодические, а при $A \neq 0$ система обладает единственным периодическим решением $x(t) \equiv 0$;

б) система устойчива при $A = 0$, асимптотически устойчива при $A < 0$, неустойчива при $A > 0$.

Литература

1. Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.— Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1981.— 104 с.
2. Альсевич Л. А.— Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1, 1982, № 3, с. 50—51.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.
4. Альсевич Л. А.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 1, с. 5—8.
5. Альсевич Л. А.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1446—1449.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 28 марта 1984 г.