

КОНЕЧНАЯ ХАРАКТЕРИЗУЕМОСТЬ РЕБЕРНЫХ ГРАФОВ ГИПЕРГРАФОВ ОГРАНИЧЕННЫХ РАНГА И КРАТНОСТИ В КЛАССЕ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРАФОВ

For any $r \geq 3$, $m \geq 2$, the existence of finite characterization of the class L_r^m of edge intersection graphs of hypergraphs with rank at most r and multiplicity at most m in terms of forbidden induced subgraphs in the class of split graphs is proved. It is shown that similar finite characterization of the graphs in L_r^m , $r \geq 3$, $m \geq 2$, does not exist in the class of all graphs.

В работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Множества *вершин* и *ребер* (гипер)графа H обозначаются VH и EH соответственно. Если $N(v) = N_G(v)$ – *окружение* вершины v в графе G , то $\deg(v) = \deg_G(v) = |N(v)|$ – *степень* вершины v ; если $X \subseteq VG$, то $G(X)$ – подграф, порожденный множеством X . Полный граф порядка n и звезда с n концевыми вершинами обозначаются K_n и $K_{1,n}$ соответственно.

Клик называется множество попарно смежных вершин графа; *максимальная клика* максимальна относительно включения. Конечное семейство $Q = (C_1, C_2, \dots, C_q)$ клик графа G называется *покрытием* этого графа, если каждая вершина и каждое ребро графа G входят хотя бы в одну из клик C_i . При этом клики C_i называются *кластерами* покрытия Q . Покрытие Q графа называется *m -ограниченным*, если любые два кластера из Q имеют не более m общих вершин, и *r -покрытием*, если любая вершина графа входит не более чем в r кластеров из Q .

Реберный граф $L(H)$ гиперграфа H определяется условиями: $VL(H) = EH$, и две вершины смежны в $L(H)$, если и только если соответствующие ребра гиперграфа H пересекаются.

Рангом гиперграфа H называется число $\text{rank}(H) = \max_{E \in EH} |E|$; *кратность пары вершин* u, v гиперграфа H – это число $m(u, v) = |\{E \in EH : u, v \in E\}|$; $m(H) = \max_{u, v \in VH} m(u, v)$ – *кратность гиперграфа*.

Пусть r, m – произвольные целые числа, $r \geq 2$, $m \geq 1$. Введем обозначение $L_r^m = \{L(H) : \text{rank}(H) \leq r, m(H) \leq m\}$.

Класс L_r^m – наследственный (т. е. каждый порожденный подграф любого графа из L_r^m также принадлежит этому классу). Значит, он может быть охарактеризован посредством списка (конечного или бесконечного) запрещенных порожденных подграфов. Отметим, что существование конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов для наследственного класса обуславливает существование полиномиального алгоритма распознавания графов из этого класса.

Класс L_2^m для любого m характеризуется конечным списком запрещенных порожденных подграфов. (Такие характеристики для случаев $m = 1$, $m \geq 2$ – фиксированное целое число, $m = \infty$ получены в работах [1], [2] и [3] соответственно.) Далее по умолчанию считаем, что $r \geq 3$.

Известно, что задача распознавания $G \in L_r^1$ является NP -полной [4]. Поэтому для класса L_r^1 не существует конечной характеристики в терминах запрещенных порожденных подграфов. Сложность задачи распознавания $G \in L_r^m$, $m \geq 2$, пока неизвестна. Однако в [5] доказано, что класс L_3^m для любого $m \geq 2$ не характеризуется конечным списком запрещенных порожденных подграфов.

Граф G называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин $VG = C \cup S$ на клику C и независимое множество S (*полярное разбиение*). Далее считаем, что в полярном разбиении $VG = C \cup S$ расщепляемого графа G клика C является максимальной.

В [6] доказано, что для каждого фиксированного r графы из L_r^1 характеризуются конечным списком запрещенных порожденных подграфов в классе расщепляемых графов. В этой работе нами доказывается аналогичный факт для класса L_r^m при любом фиксированном $m \geq 2$.

Характеризация графов из L_r^m в классе расщепляемых графов. Пусть M – матрица инцидентности гиперграфа H , не содержащего изолированных вершин. Тогда гиперграф H^* с транспонированной матрицей инцидентности M^T называется *двойственным* к гиперграфу H .

Если $G = L(H)$, а $Q = (C_1, C_2, \dots, C_q)$ – произвольное покрытие кликами графа G , то гиперграф $H(Q)$ покрытия Q определим равенствами: $VH(Q) = VG$, $EH(Q) = Q$.

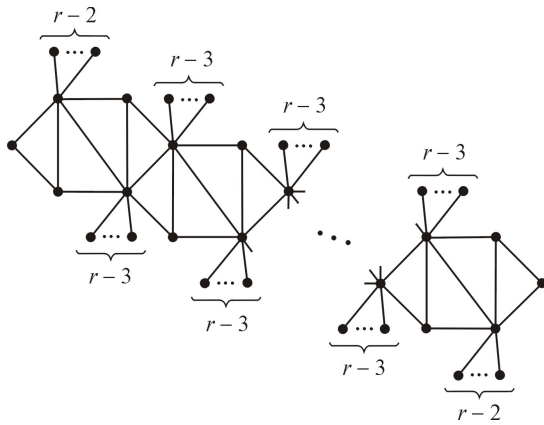
Рассмотрим некоторое теоретико-гиперграфовое свойство P , т. е. класс гиперграфов, различаемых с точностью до изоморфизма. Скажем: покрытие кликами Q графа G обладает свойством P , если $H(Q) \in P$. Положим $L(P) = \{L(H) : H \in P\}$, $P^* = \{H^* : H \in P\}$.

Теорема 1 [7]. Пусть G – граф, P – теоретико-гиперграфовое свойство. Тогда $G \in L(P)$, если и только если для G существует покрытие кликами, обладающее свойством P^* .

Возьмем из теоремы 1 в качестве P свойство «быть гиперграфом ранга не выше r и кратности не выше m », в результате будет получена

Теорема 2. Граф G принадлежит классу L_r^m , если и только если для него существует m -ограниченное r -покрытие.

Прежде чем перейти к изложению основного результата работы, покажем, что для каждого фиксированного $m \geq 2$ графы из L_r^m нельзя охарактеризовать конечным списком запрещенных порожденных



Семейство $\mathcal{F}(r)$

подграфов в классе всех графов. Для каждого фиксированного r рассмотрим бесконечное семейство графов $\mathcal{F}(r)$, представленное на рисунке. Легко установить, что для всякого графа G из $\mathcal{F}(r)$ не существует m -ограниченного r -покрытия при любом $m \geq 2$, т. е. $G \notin L_r^m$. При этом для любой вершины v графа G выполняется условие $G - v \in L_r^m$. Таким образом, $\mathcal{F}(r)$ – бесконечное семейство минимальных (относительно удаления вершин) запрещенных порожденных подграфов для класса L_r^m при любом $m \geq 2$.

Обозначим $f(r, m) = m(r^2 - r + 1) + 1$. Клика C графа G называется (r, m) -большой, если $|C| \geq f(r, m)$.

Лемма 1. Пусть $G \in L_r^m$, C – максимальная (r, m) -большая клика графа G . Тогда C является кластером каждого m -ограниченного r -покрытия графа G .

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_k$ – кластеры m -ограниченного r -покрытия A графа G , пересекающиеся с кликой C , причем C не является кластером A . Тогда семейство $B = (B_1, B_2, \dots, B_k)$, где $B_i = A_i \cap C$, есть m -ограниченное r -покрытие графа $G(C)$, и (согласно максимальной C) $B_i \neq C$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$.

Покажем, что $|B_i| \leq mr$, $i = 1, 2, \dots, k$. Не ограничивая общности, рассмотрим кластер B_1 покрытия B и вершину $u \in C \setminus B_1$. Никакое ребро вида ux , где $x \in B_1$, не входит в B_1 . При этом не существует кластера в B , содержащего более чем m этих ребер, поскольку покрытие B является m -ограниченным. Учитывая, что вершина u принадлежит не более чем r кластерам из B , получаем неравенство $|B_1| \leq mr$.

Покажем теперь, что если $B_i \setminus B_j \neq \emptyset$ для некоторых кластеров $B_i, B_j \in B$, то $|B_j \setminus B_i| \leq m(r-1)$. Рассмотрим вершину $u \in B_i \setminus B_j$. Никакое ребро вида ux , где $x \in B_j \setminus B_i$, если таковое существует, не входит ни в B_i , ни в B_j . При этом не существует кластера в B , содержащего более чем m этих ребер, поскольку покрытие B является m -ограниченным. Учитывая, что вершина u принадлежит не более чем $r-1$ кластерам из B , отличным от B_i , получаем неравенство $|B_j \setminus B_i| \leq m(r-1)$.

Рассмотрим произвольную вершину v из C . Пусть, не ограничивая общности, она входит в первые t кластеров $B_1, B_2, \dots, B_t$ покрытия B , $t \leq k$. Покажем, что $|B_1 \cup \dots \cup B_t| \leq mr + (t-1)m(r-1)$. Очевидно равенство

$$|B_1 \cup \dots \cup B_t| = |B_1| + |B_2 \setminus B_1| + |B_3 \setminus (B_1 \cup B_2)| + \dots + |B_t \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{t-1})|. \quad (1)$$

Если $B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$, $(B_1 \cup B_2) \setminus B_3 \neq \emptyset$, ..., $(B_1 \cup \dots \cup B_{t-1}) \setminus B_t \neq \emptyset$, то по доказанному ранее каждое слагаемое в правой части равенства (1), начиная со второго, не превосходит $m(r-1)$. И тогда $|B_1 \cup \dots \cup B_t| \leq mr + (t-1)m(r-1)$. Пусть, напротив, $i \in \{2, \dots, t\}$ – такое максимальное число, что $(B_1 \cup \dots \cup B_{i-1}) \setminus B_i = \emptyset$. Тогда $B_1 \subseteq B_i$, $B_2 \subseteq B_i$, ..., $B_{i-1} \subseteq B_i$ и сумма первых i слагаемых в равенстве (1) равна $|B_1 \cup \dots \cup B_i| = |B_i| \leq mr$. Каждое же из остальных слагаемых не превосходит $m(r-1)$ в силу максимальной выборки i . Следовательно,

$$|B_1 \cup \dots \cup B_t| \leq mr + (t-i)m(r-1) < mr + (t-1)m(r-1).$$

Итак, в каждом из рассмотренных случаев получили, что верно неравенство $|B_1 \cup \dots \cup B_t| \leq mr + (t-1)m(r-1)$. Учитывая, что $C = B_1 \cup \dots \cup B_t$ и $t \leq r$, имеем

$$|C| \leq mr + (r-1)m(r-1) = m(r^2 - r + 1) < f(r, m).$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Замечание. Можно показать, что значение $f(r, m)$ не улучшаемо уже при $r = 3$ и $m = 2$. Имеем $f(3, 2) = 15$. Пусть $H \cong K_{14}$, $VH = \{v_1, v_2, \dots, v_{14}\}$. Непосредственно проверяется, что клики $C_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $C_2 = \{v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$, $C_3 = \{v_1, v_2, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$, $C_4 = \{v_3, v_4, v_7, v_8, v_{11}, v_{12}\}$, $C_5 = \{v_3, v_4, v_9, v_{10}, v_{13}, v_{14}\}$, $C_6 = \{v_5, v_6, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$, $C_7 = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_{13}, v_{14}\}$ образуют 2-ограниченное 3-покрытие графа H .

Лемма 2. Существует конечный список $\mathcal{F}_1$ запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф G с плотностью $\phi(G) \geq (rm-1)r+2$, $m \geq 2$, принадлежит классу L_r^m , если и только если G не содержит порожденных подграфов из $\mathcal{F}_1$.

Доказательство. Пусть R_k – граф, полученный из полного графа $H \cong K_{f(r,m)}$ добавлением новой вершины, смежной ровно с k вершинами из H . Положим $\mathcal{F}_1 = \{R_k : rm+1 \leq k \leq f(r,m)-1\} \cup \{K_{1,r+1}\}$. С помощью теоремы 2 и леммы 1 непосредственно проверяется, что никакой граф из $\mathcal{F}_1$ не принадлежит L_r^m . Поэтому необходимость утверждения вытекает из наследственности класса L_r^m .

Докажем достаточность. Пусть $VG = C \cup S$ – полярное разбиение графа G , $S = \{v_1, \dots, v_p\}$. Поскольку C – максимальная клика и

$$|C| = \phi(G) \geq (rm-1)r+2 = mr^2 - (r-1) + 1 > mr^2 - m(r-1) + 1 = f(r, m),$$

то в силу запрещенности графов R_k , $rm+1 \leq k \leq f(r,m)-1$, имеем $\deg(v_i) \leq rm$ для любого $i = 1, 2, \dots, p$. Согласно запрещенности $K_{1,r+1}$ имеем $|N(u) \cap S| \leq r$ для каждой вершины u из C . Покажем, что на самом деле для каждой вершины u из C верно $|N(u) \cap S| \leq r-1$. Пусть это не так. Допустим, не ограничивая общности, что вершина u из C смежна с вершинами $v_1, \dots, v_r$ из S , $r \leq p$. Так как

$$\deg(v_i) \leq rm, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad \text{и} \quad u \in \bigcap_{i=1}^r N(v_i), \quad \text{то} \quad \left| \bigcup_{i=1}^r N(v_i) \right| \leq \sum_{i=1}^r (\deg(v_i) - 1) + 1 \leq (rm-1)r + 1 < \phi(G).$$

Следовательно, существует вершина u' из C , не смежная ни с одной из $v_1, \dots, v_r$. Но тогда $G(\{u, u', v_1, \dots, v_r\}) \cong K_{1,r+1}$, что невозможно.

Построим теперь m -ограниченное r -покрытие графа G . Поскольку $\deg(v_i) \leq rm$ для любого $i = 1, 2, \dots, p$, то существует разбиение $N(v_i) = C_{i1} \cup \dots \cup C_{is_i}$, где $C_{ij} \cap C_{il} = \emptyset$, $j, l \in \{1, \dots, s_i\}$, $j \neq l$, $|C_{ij}| \leq m$, $s_i \leq r$. Очевидно, что семейство клик $(C_{ij} \cup \{v_i\} : i = \overline{1, p}, j = \overline{1, s_i})$ вместе с кликой C есть m -ограниченное r -покрытие графа G . Лемма доказана.

Лемма 3. Существует конечный список $\mathcal{F}_2$ запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф G с плотностью $\phi(G) \leq (rm-1)r+1$ принадлежит классу L_r^m , если и только если G не содержит порожденных подграфов из $\mathcal{F}_2$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем граф G связным. Пусть $VG = C \cup S$ – поллярное разбиение графа G . Занесем в список $\mathcal{F}_2$ граф $K_{1,r+1}$, в силу запрещенности которого имеем $|N(u) \cap S| \leq r$ для любой вершины u из C . Следовательно,

$$|G| = |C| + |S| \leq |C| + \sum_{u \in C} |N(u) \cap S| \leq ((rm-1)r+1) + ((rm-1)r+1)r = ((rm-1)r+1)(r+1),$$

т. е. порядок графа G ограничен константой, зависящей от r и m . Занесем в список $\mathcal{F}_2$ все не принадлежащие классу L_r^m расщепляемые графы H такие, что $|H| \leq ((rm-1)r+1)(r+1)$. Очевидно, что построенный конечный список $\mathcal{F}_2$ является искомым. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 вытекает

Теорема 3. *Существует конечный список $\mathcal{F}$ запрещенных порожденных подграфов такой, что расщепляемый граф G принадлежит классу L_r^m , если и только если G не содержит порожденных подграфов из $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Искомый список $\mathcal{F}$ может быть получен объединением списков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ из лемм 2 и 3. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке INTAS и правительства Республики Беларусь (проект 03-50-5975).

1. Beineke L. W. // Beitrage zur Graphentheorie. Leipzig, 1968. P. 17.
2. Ташкинов В. А. // Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1980. С. 135.
3. Bermond J. C., Meyer J. C. // J. Math. Pures Appl. 1973. Vol. 52. P. 299.
4. Hlineny P., Kratochvil J. // Lecture Notes in Computer Sciences. № 1335. С. 214.
5. Левин А. Г., Тышкевич Р. И. // Дискретная математика. 1993. Т. 5. № 1. С. 112.
6. Метельский Ю. М. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. № 3. С. 117.
7. Berge C. Hypergraphs. Combinatorics of finite sets. Amsterdam, 1989.

Поступила в редакцию 20.06.07.

Юрий Михайлович Метельский – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений математической физики.

Ксения Николаевна Щемелева – студентка 5-го курса механико-математического факультета.