

УДК 512.543.76

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, СЮИИ ХУА (КНР)

### О РАЗЛОЖИМОСТИ ГРУПП, ЗАДАВАЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПОПАРНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

The class of groups defined by periodic paired relations includes the Coxeter groups and generalized triangle groups. Some sufficient conditions are found this group to be a non-trivial free product with amalgamation.

Будем говорить, что группа  $G$  разложима, если  $G$  является нетривиальным свободным произведением с объединенной подгруппой, т. е.  $G = G_1 *_A G_2$ , где  $G_1 \neq A$  и  $G_2 \neq A$  [1, гл. 4].

В предлагаемой работе мы исследуем проблему разложимости групп, задаваемых периодическими попарными соотношениями, т. е. групп  $G$ , имеющих копредставление вида

$$G = \langle a_1, \dots, a_n; a_1^{m_1} = \dots = a_n^{m_n} = R_{ij}^{k_{ij}}(a_i, a_j) = 1, 1 \leq i < j \leq n \rangle, \quad (1)$$

где  $R_{ij}$  – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной  $a_i, a_j$ , не являющееся собственной степенью и включающее оба элемента  $a_i, a_j$ , показатели  $m_i, k_{ij}$  либо равны нулю, либо  $\geq 2$ . Этот класс групп введен в [2] и включает не только классические треугольные и тетраэдральные группы, группы Кокстера, но также обобщенные треугольные и тетраэдральные группы, которые исследуются последние 20 лет. Не все из этих групп разложимы. Например, Цишанг [3] доказал, что обычные треугольные группы  $\Gamma = \langle a, b; a^m = b^n = (ab)^k = 1 \rangle$ , где  $m, n, k \geq 2$ , неразложимы. В то же время в [4] доказано, что обобщенные треугольные группы вида  $H = \langle a, b; a^m = R^k(a, b) = 1 \rangle$  разложимы. В предлагаемой работе доказываются следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  – группа, имеющая копредставление (1), в котором  $m_i \geq 2$  для всех  $i$ . Предположим, что  $G$  имеет бесконечно много неэквивалентных неприводимых представлений в  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Тогда группа  $G$  разложима.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  – группа, задаваемая периодическими попарными соотношениями и имеющая копредставление

$$G = \langle a_1, \dots, a_n; a_1^{m_1} = \dots = a_n^{m_n} = R_i^{k_i}(a_1, a_i) = S_j^{l_j}(a_2, a_j) = 1, 2 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq n \rangle. \quad (2)$$

Если хотя бы одно из чисел  $m_s, k_i, l_j$  равно нулю, то группа  $G$  разложима.

**Следствие.** Пусть  $G$  – обобщенная тетраэдральная группа, имеющая копредставление

$$G = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^{m_1} = a_2^{m_2} = a_3^{m_3} = R_1^{k_1}(a_1, a_2) = R_2^{k_2}(a_2, a_3) = R_3^{k_3}(a_2, a_3) = 1 \rangle. \quad (3)$$

Если хотя бы одно из чисел  $m_i, k_j$  равно нулю, то группа  $G$  разложима.

Далее мы будем обозначать кольцо целых алгебраических чисел в  $\mathbb{C}$  через  $\mathcal{O}$ , образ матрицы  $A \in SL_2(\mathbb{C})$  в  $PSL_2(\mathbb{C})$  через  $[A]$ , единичную матрицу в  $SL_2(\mathbb{C})$  через  $E$ . Мы будем использовать стандартные факты из геометрической теории представлений конечно порожденных групп, здесь мы напомним лишь основные обозначения (см. [5]). Пусть  $F = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$  – конечно порожденная группа,  $R(F)$  – многообразие представлений  $F$  в  $SL_2(\mathbb{C})$ ,  $X(F) = R(F)/GL_2(\mathbb{C})$  – соответствующее многообразие характеров. Для элемента  $g \in F$  характером Фрике называют функцию  $\tau_g : R(F) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau_g(\rho) = \text{tr } \rho(g)$ . Комбинируя результаты [6, 7], легко видеть, что кольцо регулярных функций  $\mathbb{C}[X(F)] = \mathbb{C}[R(F)]^{GL_2(\mathbb{C})}$  порождается характерами Фрике  $x_i = \tau_{g_i}$ ,  $y_{ij} = \tau_{g_i g_j}$ ,  $z_{ijk} = \tau_{g_i g_j g_k}$ , где  $1 \leq i < j < k \leq n$ . Введем следующий морфизм:

$$\psi : R(F) \rightarrow \mathbb{A}^t, \quad \psi(\rho) = (x_1(\rho), \dots, x_n(\rho), y_{12}(\rho), \dots, y_{n-1,n}(\rho), z_{123}(\rho), \dots, z_{n-2,n-1,n}(\rho)), \quad (4)$$

где  $t = n + n(n-1)/2 + n(n-1)(n-2)/6$ . В [5] доказано, что образ  $\psi(R(F))$  замкнут в  $\mathbb{A}^t$  и бирегулярно изоморфен  $X(F)$ . Будем отождествлять  $X(F)$  с  $\psi(R(F))$ . Подмножество  $R^s(F) \subset R(F)$ , состоящее из неприводимых представлений, открыто в топологии Зарисского в  $R(F)$ , а его образ  $X^s(F) = \psi(R^s(F))$  открыт в  $X(F)$ .

Пусть  $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$  и  $\text{tr } A = \alpha$ ,  $\text{tr } B = \beta$ ,  $\text{tr } AB = \gamma$ . Матрицы  $A, B$  порождают неприводимую подгруппу в  $SL_2(\mathbb{C})$  (см. [5]) тогда и только тогда, когда

$$\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta\gamma - 2 = 2. \quad (5)$$

Если  $g, h \in F$  и  $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_s} h^{v_s}$ , то  $\tau_w = Q_w(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh})$ , где  $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$  – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами. Многочлен  $Q_w$  обычно называют многочленом Фрике элемента  $w$ .

**Лемма 1.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$  и  $X$  – матрица из  $SL_2(\mathbb{C})$ , отличная от  $\pm E$ . Тогда  $[X]^m = 1$  тогда и только тогда, когда  $\text{tr } X = 2 \cos \frac{r\pi}{m}$  для некоторого  $r \in \{1, \dots, m-1\}$ .

Доказательство следует из того, что собственными значениями  $X$  должны быть  $\varepsilon, \varepsilon^{-1}$ , где  $\varepsilon$  – корень степени  $m$  из единицы.

**Лемма 2.** Пусть  $H = \langle [C_1], \dots, [C_n] \rangle$  – конечно порожденная подгруппа в  $PSL_2(\mathbb{C})$  и  $H_1 = \langle C_1, \dots, C_n \rangle \subset SL_2(\mathbb{C})$ . Тогда группа  $H$  разложима тогда и только тогда, когда разложима  $H_1$ .

Доказательство. Известно, что если  $f : F \rightarrow F_1$  – эпиморфизм групп и  $F_1 = A *_B C$ , то  $F = f^{-1}(A) *_{f^{-1}(B)} f^{-1}(C)$  [1, гл. 4]. Поэтому, если  $H$  разложима, то разложима и  $H_1$ . Предположим теперь, что разложима  $H_1$ , т. е.  $H_1 = A *_B C$ , где  $A \neq B$  и  $C \neq B$ . Пусть  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  – образы  $A, B, C$  в  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Если  $-E \notin H_1$ , то группы  $H$  и  $H_1$  изоморфны. Если же  $-E \in H_1$ , то  $-E$  лежит в центре  $H_1$ , следовательно,  $-E \in B$ . В любом из этих случаев  $\bar{A} \neq \bar{B}$  и  $\bar{C} \neq \bar{B}$  и, следовательно,  $H = \bar{A} *_B \bar{C}$ . Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится классификация Басса конечно порожденных подгрупп в  $GL_2(\mathbb{C})$ . В [8] доказано, что если  $H \subset GL_2(\mathbb{C})$  – конечно порожденная подгруппа, то имеет место один из следующих случаев: 1) существует эпиморфизм  $f : H \rightarrow \mathbb{Z}$  такой, что  $f(u) = 0$  для всех унипотентных элементов  $u \in H$ ; 2)  $\text{tr } h \in \mathcal{O}$  для любого элемента  $h \in H$ ; 3)  $H$  разложима.

**Лемма 3.** Пусть  $\alpha_i, \beta_{1j}, \beta_{2k}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $2 \leq j \leq n$ ,  $3 \leq k \leq n$ , – такие комплексные числа, что

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_{12}^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_{12} - 4 \neq 0. \quad (6)$$

Тогда существуют матрицы  $A_1, \dots, A_n \in SL_2(\mathbb{C})$  такие, что  $\text{tr } A_i = \alpha_i$ ,  $\text{tr } A_i A_j = \beta_{1j}$ ,  $\text{tr } A_i A_j A_k = \beta_{2k}$  для всех  $i, j, k$ .

Доказательство. Вначале предположим, что  $\alpha_1 \neq \pm 2$ . Пусть  $a_1$  – корень уравнения  $a_1 + a_1^{-1} = \alpha_1$ . Тогда  $a_1 \neq \pm 1$ . Рассмотрим матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ -a_2^2 + \alpha_2 a_2 - 1 & \alpha_2 - a_2 \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} a_i & x_i \\ \frac{-a_i^2 + \alpha_i a_i - 1}{x_i} & \alpha_i - a_i \end{pmatrix}, i = 3, \dots, n.$$

Из условия  $\text{tr } A_1 A_i = \beta_{1i}$  находим

$$a_i = \frac{\beta_{1i} - \alpha_i a_1^{-1}}{a_1 - a_1^{-1}}.$$

В силу (5) матрицы  $A_1, A_2$  порождают неприводимую подгруппу в  $SL_2(\mathbb{C})$ . Значит,  $-a_2^2 + \alpha_2 a_2 - 1 \neq 0$ .  
Условие  $\text{tr } A_2 A_k = \beta_{2k}$  равносильно уравнению

$$a_2 a_k + \frac{-a_k^2 + \alpha_k a_k - 1}{x_k} + (-a_2^2 + \alpha_2 a_2 - 1)x_k + (\alpha_2 - a_2)(\alpha_k - a_k) = \beta_{2k}.$$

В качестве  $x_k$  берем произвольное решение этого уравнения. Тогда матрицы  $A_1, \dots, A_n$  – искомые.

Предположим теперь, что  $\alpha_1 = 2$  (случай  $\alpha_1 = -2$  разбирается аналогично). Рассмотрим матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ -a_2^2 + \alpha_2 a_2 - 1 & \alpha_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Из условия  $\text{tr } A_1 A_2 = \beta_{12}$  получаем

$$-a_2^2 + \alpha_2 a_2 + \alpha_2 - 1 = \beta_{12}.$$

В качестве  $a_2$  берем произвольное решение этого уравнения. В силу (5) матрицы  $A_1, A_2$  порождают неприводимую подгруппу в  $SL_2(\mathbb{C})$ . Значит,  $-a_2^2 + \alpha_2 a_2 - 1 \neq 0$ .

Если  $\alpha_k \neq \beta_{1k}$ , то матрицу  $A_k$  будем искать в виде  $A_k = \begin{pmatrix} a_k & x_k \\ \frac{-a_k^2 + \alpha_k a_k - 1}{x_k} & \alpha_k - a_k \end{pmatrix}$ . Условия

$\text{tr } A_1 A_k = \beta_{1k}$ ,  $\text{tr } A_2 A_k = \beta_{2k}$  дают систему уравнений

$$\frac{-a_k^2 + \alpha_k a_k - 1}{x_k} = \beta_{1k} - \alpha_k, \quad (7)$$

$$\alpha_2 a_k + \frac{-a_k^2 + \alpha_k a_k - 1}{x_k} + (-a_2^2 + \alpha_2 a_2 - 1)x_k + (\alpha_2 - a_2)\alpha_k = \beta_{2k}. \quad (8)$$

Легко видеть, что система уравнений (7), (8) совместна и имеет некоторое решение  $a_k, x_k$ , что позволяет найти матрицу  $A_k$  с требуемыми свойствами.

Если  $\alpha_k = \beta_{1k}$ , то матрицу  $A_k$  будем искать в виде  $A_k = \begin{pmatrix} a_k & x_k \\ 0 & a_k^{-1} \end{pmatrix}$ . Условия  $\text{tr } A_1 A_k = \beta_{1k}$ ,

$\text{tr } A_2 A_k = \beta_{2k}$  дают систему уравнений

$$a_k + a_k^{-1} = \alpha_k, \\ a_2 a_k + (-a_2^2 + \alpha_2 a_2 - 1)x_k + (\alpha_2 - a_2)a_k^{-1} = \beta_{2k},$$

которая, очевидно, совместна и имеет некоторое решение  $a_k, x_k$ , что и в этом случае позволяет найти матрицу  $A_k$ . Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть  $G$  – группа из теоремы 1. Рассмотрим группу

$$G_1 = \langle b_1, \dots, b_n; b_1^{2m_1} = \dots = b_n^{2m_n} = R_{ij}^{2k_{ij}}(b_i, b_j) = 1, 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Отображение  $\rho: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ ,  $\rho(a_i) = [A_i]$ , является представлением группы  $G$  тогда и только тогда, когда отображение  $\rho_1: G_1 \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ ,  $\rho_1(b_i) = A_i$ , является представлением группы  $G_1$ . Докажем, что найдется такое представление  $\rho_1$ , что группа  $\rho_1(G_1)$  будет разложимой. Тогда по лемме 2 группа  $\rho(G)$  (а следовательно, и  $G$ ) также разложима.

По условию теоремы многообразие  $X^s(G_1)$  имеет размерность больше нуля. Пусть  $U \subset X^s(G_1)$  – неприводимая компонента такая, что  $\dim U > 0$ . Тогда хотя бы для одной из координат  $x_i, y_{ij}, z_{ijk}$  проекция  $\pi: U \rightarrow \mathbb{A}^1$  многообразия  $U$  на эту координатную ось не является точкой. В противном случае  $U$  само было бы точкой, что противоречит тому, что  $\dim U > 0$ . Пусть, для определенности, это проекция на координатную ось  $y_{12}$ . Тогда  $\pi(U)$  плотно в  $\mathbb{A}^1$  в топологии Зарисского и множество  $\mathbb{A}^1 \setminus \pi(U)$  состоит из конечного множества точек. Выберем  $t \in \pi(U)$  так, что  $t \notin \mathcal{O}$ . Пусть  $\chi \in \pi^{-1}(t)$  и  $\rho_1 \in \psi^{-1}(\chi)$ , где  $\psi$  определено в (4). Рассмотрим группу  $\rho_1(G_1)$ . Поскольку все образующие  $\rho_1(b_1), \dots, \rho_1(b_n)$  группы  $\rho_1(G_1)$  имеют конечный порядок, то не существует эпиморфизма  $f: \rho_1(G_1) \rightarrow \mathbb{Z}$ . По построению  $\text{tr} \rho_1(b_1 b_2) = t \notin \mathcal{O}$ . Тогда из теоремы Басса следует, что  $\rho_1(G_1)$  разложима. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Вначале предположим, что одно из чисел  $k_i, l_j$  равно нулю. Пусть, например,  $k_2 = 0$ . Без ограничения общности можно считать, что все  $m_s, k_i$  при  $i > 2$  и  $l_j$  отличны от нуля (если какое-то из этих чисел равно нулю, мы можем перейти к подходящей факторгруппе группы  $G$ ). Положим  $\alpha_s = 2 \cos \frac{\pi}{m_s}$  и рассмотрим уравнения

$$\mathcal{Q}_{R_i(a_i, a_i)}(\alpha_1, \alpha_i, y_{1i}) - 2 \cos \frac{\pi}{k_i} = f_i(y_{1i}) = 0, \quad i = 3, \dots, n, \quad (9)$$

$$\mathcal{Q}_{S_j(a_2, a_j)}(\alpha_2, \alpha_j, y_{2j}) - 2 \cos \frac{\pi}{l_j} = f_j(y_{2j}) = 0, \quad j = 3, \dots, n. \quad (10)$$

Пусть  $\beta_{1i}, \beta_{2j}$  – произвольные решения (9) и (10). Выберем произвольное  $\beta_{12}$  так, чтобы

$$\beta_{12}^2 - \alpha_1 \alpha_2 \beta_{12} + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 4 \neq 0. \quad (11)$$

По лемме 3 существуют матрицы  $A_1, \dots, A_n \in SL_2(\mathbb{C})$  такие, что  $\text{tr} A_i = \alpha_i, \text{tr} A_1 A_j = \beta_{1j}, \text{tr} A_2 A_k = \beta_{2k}$ . Тогда отображение  $\rho: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C}), \rho(a_i) = [A_i]$ , является представлением группы  $G$  в силу леммы 1. Поскольку выполнено (11), то подгруппа  $\langle [A_1], [A_2] \rangle$  неприводима, следовательно,  $\rho$  неприводимо. Ясно, что при выборе другого значения  $\beta_{12}$  получится новое представление  $\rho_1: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ , которое также неприводимо и неэквивалентно  $\rho$ , поскольку они имеют разные характеры. Итак, в рассматриваемом случае группа  $G$  имеет бесконечно много неприводимых представлений в  $PSL_2(\mathbb{C})$  и по теореме 1 является разложимой.

Будем теперь считать, что все числа  $k_i, l_j$  отличны от нуля. Тогда одно из чисел  $m_i$  равно нулю. Пусть, например,  $m_1 = 0$ . Рассмотрим группу  $H = \langle a_1, a_2 \mid a_2^{m_2} = R_2^{k_2}(a_1, a_2) = 1 \rangle$ . В [4] доказано, что существует такое неприводимое представление  $\rho: H \rightarrow PSL_2(\mathbb{C}), \rho(a_1) = [A_1], \rho(a_2) = [A_2]$ , что группа  $T = \langle A_1, A_2 \rangle \subset SL_2(\mathbb{C})$  обладает следующими свойствами:

1) в  $T$  существует унитарный (либо конечного порядка) элемент  $W$  вида  $W = A_1^{u_1} A_2^{v_1} \dots A_1^{u_p} A_2^{v_p}$  ( $u_i, v_i \neq 0$  для  $i = 1, \dots, p$ ) такой, что  $\sum_{i=1}^p u_i \neq 0$ ;

2) существует элемент  $h \in T$  такой, что  $\text{tr} h \notin \mathcal{O}$ .

Обозначим  $\text{tr} A_1 = \alpha_1, \text{tr} A_2 = \alpha_2, \text{tr} A_1 A_2 = \beta_{12}$  и положим  $\alpha_s = 2 \cos \frac{\pi}{m_s}$  при  $s = 3, \dots, n$ . Пусть  $\beta_{1i}, \beta_{2j}, i, j = 3, \dots, n$ , – произвольные решения уравнений (10) и (11). Так как группа  $\langle A_1, A_2 \rangle$  неприводима, то выполнено (6). По лемме 3 существуют матрицы  $A_3, \dots, A_n \in SL_2(\mathbb{C})$  такие, что  $\text{tr} A_i = \alpha_i$ ,

$\operatorname{tr} A_1 A_j = \beta_{1j}$ ,  $\operatorname{tr} A_2 A_k = \beta_{2k}$  для всех  $i, j, k$ . Рассмотрим группу  $T_1 = \langle A_1, \dots, A_n \rangle \subset SL_2(\mathbb{C})$ . Докажем, что  $T_1$  разложима.

Предположим, что  $f: T_1 \rightarrow \mathbb{Z}$  такой эпиморфизм, что  $f(u) = 0$  для всех унитарных элементов  $u \in T_1$ . Тогда  $f(A_2) = \dots = f(A_n) = 0$ , поскольку  $A_2, \dots, A_n$  имеют конечный порядок. Далее,

$$f(W) = f(A_1^{u_1} A_2^{v_1} \dots A_1^{u_p} A_2^{v_p}) = f(A_1) \sum_{i=1}^p u_i = 0, \quad (12)$$

поскольку элемент  $W$  либо унитарный, либо конечного порядка. Так как  $\sum_{i=1}^p u_i \neq 0$ , то из (12) получаем, что  $f(A_1)$  также равно нулю. Значит,  $f(T_1) = \{0\}$  – противоречие.

По построению существует элемент  $h \in T_1$  такой, что  $\operatorname{tr} h \notin \mathcal{O}$ . Тогда из теоремы Басса следует, что группа  $T_1$  разложима. По лемме 2 образ  $T_2$  группы  $T_1$  в  $PSL_2(\mathbb{C})$  разложим. В силу леммы 1 справедливости равенства

$$[A_1]^{m_1} = \dots = [A_n]^{m_n} = R_i^{k_i}([A_1], [A_i]) = S_j^{l_j}([A_2], [A_j]) = 1.$$

Поэтому отображение  $\rho_1: G \rightarrow T_2$ ,  $\rho_1(a_i) = [A_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , является эпиморфизмом  $G$  на  $T_2$  и, следовательно, группа  $G$  разложима. Теорема 2 доказана.

1. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М., 1980.

2. Винберг Э.Б. // Мат. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 3.

3. Zieschang H. // Math. Z. 1976. Vol. 151. P. 165.

4. Беляш-Кривец В.В. // Мат. сб. 2001. Т. 192. № 2. С. 3.

5. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. Vol. 117. P. 109.

6. Сибирский К.С. // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9. № 1. С. 152.

7. Horowitz R. // Comm. Pure. Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.

8. Bass H. // The Smith Conjecture. New York, 1984. P. 127.

Поступила в редакцию 24.11.07.

**Валерий Вацлавович Беляш-Кривец** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры.

**Сюин Хуа** – аспирант кафедры высшей алгебры. Научный руководитель – В.В. Беляш-Кривец.