

УДК 517.956

Т.А. РОМАНЧУК

ОБ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА С δ' -ОБРАЗНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

We consider a family of operators $L_\varepsilon(u)$, which give an approximation of formal expression $-\Delta u + a\delta u + \sum_k b_k \frac{\partial \delta}{\partial x_k} u$. The problem is to calculate a limit of this family at ε tends to 0 in the sense of resolve convergence. The cases of resonance, i. e. the cases when the limit differs from the Laplas operator are given and also the influence of expression with δ' on this limit is described.

При исследовании процессов, связанных с рассеянием на одной частице, возникают операторы Шредингера

$$-\Delta u + q_\varepsilon(x)u, \quad x \in R^3, \quad (1)$$

у которых потенциал $q_\varepsilon(x)$ отличен от нуля только в малой ε -окрестности некоторой фиксированной точки.

Формальный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражения (1) обычно записывают в виде

$$L(u) = -\Delta u + a\delta u, \quad (2)$$

где Δ – оператор Лапласа, δ – обобщенная функция Дирака, a – некоторая величина. Предельное выражение (2) является, однако, формальным, так как умножение на обобщенную функцию корректно не определено. Поэтому возникает задача – как в пространстве $L_2(R^3)$ построить настоящий оператор, соответствующий конкретной рассматриваемой ситуации. Эта задача и различные подходы к ее решению рассматривались многими авторами (обширный список литературы приведен в [1]). В данной работе используется подход, предложенный в [2, 3]. Для исследования выражения (2) строится аппроксимация оператора умножения на δ -функцию семейством операторов конечного ранга и в качестве искомого оператора берется предел аппроксимирующего семейства в смысле резольвентной сходимости. В случае общего положения оказывается, что пределом является оператор Лапласа: $L_0 = -\Delta$, но возможны случаи, их мы будем называть *случаями резонанса*, когда предел отличен от оператора Лапласа, т. е. $L_0 \neq -\Delta$.

С оператором Лапласа связано семейство самосопряженных операторов A^α , занумерованных вещественным параметром α . В случае резонанса предельный оператор оказывается одним из операторов семейства A^α , где значение параметра α зависит от способа приближения. Вид резольвент для таких операторов приведен ниже в формуле (10), а $\alpha = \infty$ соответствует резольвенте оператора Лапласа.

При таком подходе задача конкретизируется: в зависимости от способа аппроксимации требуется описать все возможные случаи резонансов и для каждого из них найти соответствующее значение α . Часть случаев резонанса была описана в [1–3].

Однако предел семейства $q_\varepsilon(x)$ может оказаться не только δ -функцией, но и ее производной либо линейной комбинацией данных функций. Тогда формальный переход к пределу в (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к выражению вида

$$L_0(u) = -\Delta u + a\delta u + \sum_k b_k \frac{\partial \delta}{\partial x_k} u, \quad (3)$$

при исследовании которого возникают аналогичные вопросы.

В данной работе рассмотрены аппроксимации выражения вида (3) семейством операторов конечного ранга и найден предел аппроксимирующего семейства в смысле резольвентной сходимости.

Пусть $\varphi_k \in D(R^3)$ такие, что $\int \varphi_k(x) dx = 1$, $k = \overline{1, m_1}$, и $\int \varphi_k(x) dx = 0$, $k = \overline{m_1 + 1, m}$. Обозначим $\varphi_{k,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и рассмотрим семейство операторов

$$L_\varepsilon(u) = -\Delta u + \sum_{k=1}^{m_1} a_k(\varepsilon) \varphi_{k,\varepsilon}(x) \int \overline{\varphi_{k,\varepsilon}}(y) u(y) dy + \sum_{k=m_1+1}^m a_k(\varepsilon) \varphi_{k,\varepsilon}(x) \int \overline{\varphi_{k,\varepsilon}}(y) u(y) dy, \quad (4)$$

где $a_k(\varepsilon)$ – числовые коэффициенты, аналитически зависящие от ε в малой проколотой окрестности нуля. Здесь при $k = \overline{1, m_1}$ каждый из операторов $\Phi_{k,\varepsilon}(u) = \varphi_{k,\varepsilon}(x) \int \overline{\varphi_{k,\varepsilon}}(y) u(y) dy$ сходится к оператору умножения на δ -функцию и предел первой суммы символически может быть записан как $a\delta u$; при $k = \overline{m_1 + 1, m}$ каждый из операторов $\frac{1}{\varepsilon} \Phi_{k,\varepsilon}$ сходится к оператору умножения на некоторую производную δ -функции. Поэтому семейство (4) можно считать аппроксимацией формального выражения (3).

Случай $m_1 = m$ и специального вида коэффициентов $a_k(\varepsilon)$ был рассмотрен в [3].

Нашей целью является выяснение отличий, возникающих при $m_1 < m$ и, в частности, $m_1 = 0$, что соответствует выражению

$$L(u) = -\Delta u + \sum_k b_k \frac{\partial \delta}{\partial x_k} u.$$

Теорема 1. При $m_1 = 0$ и любых рассматриваемых коэффициентах $a_k(\varepsilon)$ пределом в смысле резольвентной сходимости семейства (4) является оператор Лапласа, т. е. случаи резонанса не возникают.

Таким образом, теорема 1 утверждает, что слагаемое, соответствующее производной δ -функции, не оказывает никакого влияния на предел семейства операторов L_ε .

Мы не приводим здесь ее доказательство, так как оно фактически является частным случаем доказательства теоремы 2.

При $1 \leq m_1 < m$ возникают случаи резонанса, и для получения условий их существования нам требуется рассмотреть ряд вспомогательных величин, поэтому формулировка теоремы 2 будет приведена далее.

Основной вопрос связан с изучением поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ семейства резольвент операторов (4). В частности, теорема 1 позволяет предположить, что слагаемые, соответствующие производным δ -функции, не будут влиять на свойства предельного оператора, однако теорема 2 это опровергает.

Построим резольвенту семейства операторов (4) при каждом ε . С этой целью введем обратные к коэффициентам $a_k(\varepsilon)$ величины $r_k(\varepsilon) = \frac{1}{a_k(\varepsilon)}$ и рассмотрим случай, когда они допускают следующее разложение: $r_k(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}r_k^{(-1)} + r_k^{(0)} + \varepsilon \cdot r_k^{(1)} + \dots$. Отметим, что в зависимости от того, сколько коэффициентов разложения $r_k(\varepsilon)$ обращаются в нуль, возможно разное поведение коэффициентов $a_k(\varepsilon)$, например, условие, что $r_k^{(-1)} \neq 0$ эквивалентно тому, что $a_k^{(0)} = 0$, $a_k^{(1)} \neq 0$.

Введем матрицу $B=B(\varepsilon, \lambda)$, элементами которой являются функции

$$B_{kj} = B_{kj}(\varepsilon, \lambda) = (2\pi)^{-3} \int \frac{\overline{\hat{\varphi}_k(\varepsilon\eta)} \hat{\varphi}_j(\varepsilon\eta)}{-\lambda + |\eta|^2} d\eta, \quad (5)$$

где $\hat{\varphi}$ – преобразование Фурье, диагональные матрицы $r^{(j)}(\varepsilon)$ и диагональную матрицу $r(\varepsilon)$ вида

$$r^{(j)} = r^{(j)}(\varepsilon) = \text{diag}\{r_1^{(j)}, r_2^{(j)}, \dots, r_m^{(j)}\},$$

$$r = r(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} r^{(-1)} + r^{(0)} + \dots,$$

вектор $\mathbf{f}(\varepsilon) = (f_1(\varepsilon), \dots, f_m(\varepsilon))$, состоящий из функций

$$\mathbf{f}_k = f_k(\varepsilon) = \int \frac{\overline{\hat{\varphi}_k(\varepsilon\eta)} \hat{f}(\eta)}{-\lambda + |\eta|^2} d\eta,$$

а также матрицу

$$D(\varepsilon, \lambda) = r(\varepsilon) + B(\varepsilon, \lambda).$$

Лемма 1. При фиксированном ε резольвента для операторов L_ε имеет вид

$$R(\lambda; \varepsilon)f = f * E_\lambda + (D^{-1}(\varepsilon, \lambda)\mathbf{f}(\varepsilon), \mathbf{E}(\varepsilon)), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{E}(\varepsilon) = (E_1(\varepsilon), E_2(\varepsilon), \dots, E_m(\varepsilon)): E_k(\varepsilon) = E_\lambda * \varphi_{k, \varepsilon},$$

функция $E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi|x|} e^{-\mu|x|}$ является фундаментальным решением для оператора $(-\Delta - \lambda)$, т. е.

$(-\Delta - \lambda)E_\lambda = \delta$, а $\mu = (-\lambda)^{\frac{1}{2}}$ и $\text{Re} \mu > 0$.

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения в [4].

Для исследования сходимости резольвент (6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ найдем пределы векторов $\mathbf{E}(\varepsilon)$ и $\mathbf{f}(\varepsilon)$.

В силу того, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} E_k(\varepsilon) &= E_\lambda * \varphi_{k, \varepsilon} \rightarrow E_\lambda \quad k = \overline{1, m_1}; \\ E_k(\varepsilon) &= E_\lambda * \varphi_{k, \varepsilon} \rightarrow 0 \quad k = \overline{m_1 + 1, m}; \end{aligned}$$

$$f_k(\varepsilon) \rightarrow (f * E_\lambda)(0) = \int f(y) E_\lambda(y) dy \quad k = \overline{1, m_1};$$

$$f_k(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad k = \overline{m_1 + 1, m}$$

(здесь рассматривается сходимость по норме в пространстве L_2), то векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{f}$ имеют вид

$$\mathbf{E} = \left(\underbrace{E_\lambda, \dots, E_\lambda}_{m_1}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$\mathbf{f} = \left(\underbrace{(f * E_\lambda)(0), \dots, (f * E_\lambda)(0)}_{m_1}, 0, \dots, 0 \right).$$

Далее для нахождения резольвенты необходимо исследовать поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ матрицы, обратной к матрице $D(\varepsilon, \lambda) = r(\varepsilon) + B(\varepsilon, \lambda)$. Случаи резонанса могут возникнуть только тогда, когда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D^{-1}(\varepsilon, \lambda) \neq 0$.

Лемма 2. Матрица-функция $B(\varepsilon, \lambda)$, заданная (5), является аналитической функцией двух переменных ε, μ ($\lambda \in C \setminus R_0^+$ и $\lambda = -\mu^2$, где $\operatorname{Re} \mu > 0$, т. е. $\mu = \mu(\lambda) = (-\lambda)^{1/2}$ – непрерывная ветвь функции $(-\lambda)^{1/2}$) и допускает следующее разложение:

$$B(\varepsilon, \lambda) \equiv B(\varepsilon, -\mu^2) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\varepsilon \mu)^k M^{(k-1)} = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k (-\mu)^{k+1} M^{(k)},$$

где элементы матриц $M^{(k)}$ определяются формулой

$$M_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{4\pi(k+1)!} \int (\varphi_i * \bar{\varphi}_j) |x|^k dx.$$

В частности, элементы матрицы $M^{(0)}$ в силу свойств функций $\varphi_i(x)$ задаются формулой

$$M_{ij}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \hat{\varphi}_i(0) \hat{\varphi}_j(-0) = \frac{1}{4\pi}, \text{ когда } i, j \leq m_1 \text{ и } M_{ij}^{(0)} = 0 \text{ в противном случае.}$$

Таким образом, матрицу $D(\varepsilon, -\mu^2)$ можно записать в виде

$$D(\varepsilon, -\mu^2) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)} & M_{12}^{(-1)} & \dots & M_{1m}^{(-1)} \\ M_{21}^{(-1)} & M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)} & \dots & M_{2m}^{(-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{(m-1)1}^{(-1)} & M_{(m-1)2}^{(-1)} & \dots & M_{(m-1)m}^{(-1)} \\ M_{m1}^{(-1)} & M_{m2}^{(-1)} & \dots & M_{mm}^{(-1)} + r_m^{(-1)} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} r_1^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} & -\frac{\mu}{4\pi} & \dots & -\frac{\mu}{4\pi} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\mu}{4\pi} & r_2^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} & \dots & -\frac{\mu}{4\pi} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\mu}{4\pi} & -\frac{\mu}{4\pi} & \dots & r_{m_1}^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{m_1+1}^{(0)} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_m^{(0)} \end{pmatrix} + \dots =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} (M^{(-1)} + r^{(-1)}) + (r^{(0)} - \mu M^{(0)}) + \varepsilon (r^{(1)} + \mu^2 M^{(1)}) + \dots$$

Выражение для ее определителя будет иметь вид

$$\begin{aligned} \det D(\varepsilon, -\mu^2) &= \frac{1}{\varepsilon^m} \det (M^{(-1)} + r^{(-1)}) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \sum_{i,j=1}^m d_{ij}^{(0)} D_{ij}^{(-1)} + \dots = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^m} \det (M^{(-1)} + r^{(-1)}) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \left(\sum_{i,j=1}^{m_1} d_{ij}^{(0)} D_{ij}^{(-1)} + \sum_{i=m_1+1}^m d_{ii}^{(0)} D_{ii}^{(-1)} \right) + \dots = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^m} \det (M^{(-1)} + r^{(-1)}) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \left(\sum_{i=1}^m r_i^{(0)} D_{ii}^{(-1)} - \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i,j=1}^{m_1} D_{ij}^{(-1)} \right) + \dots, \end{aligned}$$

где $d_{ij}^{(0)}$ – элементы матрицы $(M^{(0)} + r^{(0)})$, $D_{ij}^{(-1)}$ – алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы $(M^{(0)} + r^{(0)})$.

Лемма 3. Если $\det(M^{(-1)} + r^{(-1)}) \neq 0$, то резольвенты (6) сходятся к резольвенте оператора Лапласа, т. е. резонансы не возможны.

Следствие. Чтобы резольвенты (6) сходились к резольвенте одного из операторов семейства A^α , $\alpha \neq \infty$, необходимо, чтобы выполнялось условие резонанса

$$\det(M^{(-1)} + r^{(-1)}) = 0. \quad (7)$$

Найдем в явном виде предел резольвент (6) при выполнении условия (7).

Пусть

$$d_1(\mu) = \left(\sum_{i=1}^m r_i^{(0)} D_{ii}^{(-1)} - \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i,j=1}^{m_1} D_{ij}^{(-1)} \right) \neq 0, \quad (8)$$

тогда $D^{-1}(\varepsilon, -\mu^2)$ примет вид

$$\{D^{-1}(\varepsilon, -\mu^2)\}_{ij} = \frac{D_{ji}^{(-1)}(\varepsilon, -\mu^2)}{d_1(\mu)}.$$

Пусть предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ обратной матрицы $D^{-1}(\varepsilon, \mu)$ имеет вид $D^{-1}(\mu) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1m} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mm} \end{pmatrix},$

тогда предел резольвент (6) выглядит следующим образом:

$$R(\mu)f = f * E_\lambda + S(\mu)[(f * E_\lambda)(0)]E_\lambda,$$

где $S(\mu) = \sum_{i,j=1}^{m_1} s_{ij}$.

Используя выражение для определителя матрицы $D(\varepsilon, \mu)$, для величины $S(\mu)$ получим

$$S(\mu) = \sum_{i,j=1}^{m_1} s_{ij} = \frac{\sum_{i,j=1}^{m_1} D_{ji}^{(-1)}}{\sum_{i=1}^m r_i^{(0)} D_{ii}^{(-1)} - \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i,j=1}^{m_1} D_{ij}^{(-1)}} = \frac{4\pi}{4\pi\alpha - \mu},$$

где

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^m r_i^{(0)} D_{ii}^{(-1)}}{\sum_{i,j=1}^{m_1} D_{ij}^{(-1)}}. \quad (9)$$

Изложенными рассуждениями была доказана

Теорема 2. Если условие резонанса (7) не выполнено, то резольвенты (6) сходятся к резольвенте оператора Лапласа. Если выполнены условие резонанса (7) и условие (8), то резольвенты (6) сходятся к резольвенте оператора A^α

$$R_\alpha(\mu)f = f * E_\lambda + \frac{4\pi}{4\pi\alpha - \mu} [(f * E_\lambda)(0)] E_\lambda$$

при α , заданном формулой (9).

Рассмотрим более подробно случай, когда $m_1 = 1$ и $m = 2$.

Условие резонанса имеет вид

$$(M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)})(M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)}) - M_{12}^{(-1)}M_{21}^{(-1)} = 0. \quad (10)$$

В общем случае

$$S(\mu) = s_{11} = \frac{D_{11}^{(-1)}}{d_1(\mu)} = \frac{M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)}}{(M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)})r_2^{(0)} + (M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)})\left(r_1^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi}\right)} = \frac{4\pi}{4\pi\alpha - \mu},$$

где

$$\alpha = \frac{(M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)})r_2^{(0)} + (M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)})r_1^{(0)}}{M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)}}, \quad (11)$$

т. е. возникает оператор A^α при α , определяемом формулой (11).

Особый случай резонанса возможен, когда $M_{12}^{(-1)} = 0$, тогда условие (10) примет вид

$$(M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)})(M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)}) = 0.$$

Оно может быть выполнено в нескольких случаях:

1) если $M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)} = 0$, то резонанс возможен и, следовательно, возникает оператор A^α со значением параметра $\alpha_1 = r_1^{(0)}$;

2) если $M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)} = 0$, то $S(\mu) = 0$, т. е. резольвенты (6) сходятся к резольвенте оператора Лапласа и, значит, $\alpha = \infty$;

3) если $M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)} = M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)} = 0$, т. е. матрица $(M^{(-1)} + r^{(-1)}) = 0$ и, значит, матрица $D(\varepsilon, \mu)$ примет вид $D(\varepsilon, \mu) = (r^{(0)} - \mu M^{(0)}) + \varepsilon(r^{(1)} + \mu^2 M^{(1)}) + \dots$, то случай так называемого двойного резонанса также возможен, но при этом возникает оператор A^α с тем же, что и в случае 1), значением параметра $\alpha_1 = r_1^{(0)}$.

Если сравнить полученные результаты со случаем $m_1 = m = 2$, то можно отметить, что условие резонанса выглядит аналогично, но выражения для параметра α отличаются.

В случае $m_1 = m = 2$ значение параметра α выражается формулой

$$\alpha = \frac{(M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)})r_2^{(0)} + (M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)})r_1^{(0)}}{M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)} + M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)} - M_{12}^{(-1)} - M_{21}^{(-1)}},$$

в рассматриваемом же случае

$$\alpha = \frac{(M_{11}^{(-1)} + r_1^{(-1)})r_2^{(0)} + (M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)})r_1^{(0)}}{M_{22}^{(-1)} + r_2^{(-1)}}.$$

Отличия также возникают и при рассмотрении частного случая, когда $M_{12}^{(-1)} = 0$. В случае 2), например, возникает оператор A^α со значением параметра $\alpha_2 = r_2^{(0)}$, а в случае 3) значение α получаем из значений α_1 и α_2 сложением обратных величин по формуле

$$\alpha = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1} = \frac{r_1^{(0)} \cdot r_2^{(0)}}{r_1^{(0)} + r_2^{(0)}}.$$

Таким образом, из сказанного можно сделать следующий вывод о влиянии δ' -образных слагаемых. Если в выражение (3) входят только δ' -образные слагаемые, то они не влияют на предельный оператор, но в присутствии δ -образных слагаемых δ' -образные добавки влияют на условия резонанса и на предельный оператор, т. е. на значение параметра α .

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Холден Х. Решаемые модели в квантовой механике. М., 1991.
2. Antonevich A. B. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 1999. Vol. 2. № 4.
3. Ильин Д. В. Стационарный оператор Шредингера с δ потенциалом: метод конечномерных возмущений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 2000.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

Поступила в редакцию 06.09.07.

Татьяна Анатольевна Романчук – ассистент кафедры общей математики и информатики.